

# تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند، بر پایه تئوری

## مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی

علیرضا سعیدی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه شهید باهنر کرمان

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۷/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۱/۳۰)

زهره موسوی<sup>۱</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

### چکیده

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی از جنس مواد هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر ورق بر پایه تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی باترا و ویدولی با استفاده از اصل کار مجازی به دست آمده است. معادلات حاصل با فرض تکیه‌گاه ساده روی هر چهار لبه‌ی ورق به صورت تحلیلی حل شده است. در تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی، هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی در راستای ضخامت لحاظ گردیده است. از مزایای این تئوری در مقایسه با تئوری‌های برشی این است که جابه‌جایی عرضی ورق در امتداد ضخامت ثابت در نظر گرفته نشده است و برای ورق ضخیم نتایج دقیقی می‌دهد. برای بیان خواص مکانیکی، الکتریکی و فیزیکی مواد هدفمند در امتداد ضخامت از تابع توانی، استفاده شده است. در آخر بعد از نشان دادن دقت نتایج حاضر، نتایج عددی برای پارامترهای مختلف ورق آورده شده است و اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی با جزئیات مورد بررسی قرار گرفته است. این بررسی نشان می‌دهد که وقتی از تئوری مرتبه پنجم استفاده می‌شود، نتایج برای ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند بسیار نزدیک به نتایج به دست آمده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، ماده هدفمند، ورق ضخیم، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی

## Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on The Higher-Order Shear and Normal Deformable

Z. Mousavi

Department of Mechanical Engineering  
ValiAsr University of Rafsanjan

A.R. Saidi

Department of Mechanical Engineering  
Shahid Bahonar University of Kerman

(Received: 15/December/2014; Accepted: 21/March/2015)

### ABSTRACT

In this article, free vibration analysis of thick functionally graded isotropic and transversely isotropic rectangular plates are investigated. Based on the higher-order shear and normal deformable plate theory of Batra and Vidoli, the governing equations are obtained using the principle of virtual work. The equations are then solved analytically, assuming the simply support boundary condition along all edges. In higher-order shear and normal deformable plate theory, the effects of the both transverse shear and normal deformations, are considered. Advantages of this theory compared to the shear theories is that, given that deflection of the plate along the thickness is not constant, for thick plate provides more accurate results. A power law distribution is used to explain the variation of mechanical, electrical and physical properties through the thickness of the functionally graded materials. Furthermore, after showing the accuracy of present analytical approach, the numerical results for different plate parameters has been listed and the different parameters effect on the plate natural frequencies has been studied in details. This investigation is shown that when fifth-order expansion is used, the results of this theory for natural frequencies of thick functionally graded rectangular plates are very close to those obtained from three dimensional elasticity theory.

**Keywords:** Free Vibration, Functionally Graded Material, Thick Plate, Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory

۱- کارشناسی ارشد: z.mousavi2014@yahoo.com

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): saidi@uk.ac.ir

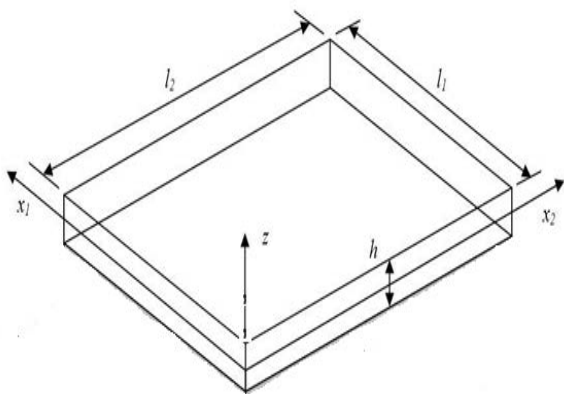
## ۱- مقدمه

ورق‌ها کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف از جمله هوافضا، راکتورها، ساختمان سازی و دیگر صنایع دارند. روش‌های متفاوتی برای تحلیل ورق‌ها وجود دارد. این روش‌ها شامل تحلیل سه‌بعدی ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته و تحلیل ورق با انواع تئوری‌های دو بعدی ورق می‌باشند. روش تحلیل ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته اگر چه روشی دقیق است، اما این تحلیل بسیار پیچیده و دشوار است. از آن‌جا که در ورق‌ها عمدتاً ضخامت نسبت به ابعاد دیگر بسیار کوچک است، تئوری‌هایی موسوم به تئوری‌های ورق ارائه شده‌اند. در تمامی این تئوری‌ها، تحلیل دو بعدی ورق و بسط میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت صورت می‌گیرد. اگر چه تئوری‌های برشی ورق در تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج خوبی می‌دهند، اما به دلیل در نظر نگرفتن اثر کرنش‌های عمودی، هنوز با جواب‌های دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل، تئوری جدیدی به نام تئوری تغییر شکل برشی و عمودی توسط باترا و ویدولی [۱] معرفی شده است. این تئوری، کامل کننده تئوری‌های قبل بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر می‌گیرد.

در سیستم‌های مکانیکی ارتعاشات ناخواسته باعث ایجاد ترک در قطعات، لق شدن اتصالات، شکست سازه‌ها، نقص عملکرد وسایل الکترونیکی و بسیاری از موارد دیگر می‌شود. با اندازه‌گیری مشخصات نوسانی سیستم همچون فرکانس‌های طبیعی آن می‌توان سرعت‌های دور از حالت تشدید را انتخاب کرده و از بسیاری از آثار نامطلوب ارتعاشات جلوگیری نمود. مواد هدفمند کامپوزیت‌های ناهمگن متشکل از فلزات و سرامیک‌ها هستند خواص این مواد به صورت تابعی تغییر می‌کند که به آن‌ها مواد مدرج تابعی نیز می‌گویند، مقاومت بسیار خوب سرامیک‌ها در برابر حرارت و سایش، در کنار چقرمگی بالای فلزات این ماده را به ماده‌ای با کارایی دوگانه تبدیل کرده است. ردی [۲] در سال ۱۹۹۹ مطالعه جامعی بر اصول حاکم در تئوری‌های مورد استفاده همچون تئوری کلاسیک و تئوری‌های برشی در تحلیل ورق‌های هوشمند داشت. ردی [۳] در سال ۲۰۰۰ به ارائه مدل اجزاء محدود برای آنالیز استاتیکی و دینامیکی ورق‌هایی از جنس مواد هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم پرداخت. شن و همکارانش [۴] در سال ۲۰۰۱ به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی آزاد تحت بستر الاستیک

پرداختند. در سال ۲۰۰۳، شن و همکارانش [۵] پاسخ‌های دینامیکی ورق‌های مستطیلی لایه‌ای با تکیه‌گاه‌های ساده تحت اثر بستر الاستیک ناشی از بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. کیان و باترا [۶] در سال ۲۰۰۳ ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مستطیلی ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی و روش بدون المان محلی پتروف - گالرکین بررسی کردند. باترا و ایمنی [۷] در سال ۲۰۰۷ به بررسی ارتعاشات ورق‌های الاستیک خطی غیر قابل تراکم همسانگرد با استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی پرداختند. باترا [۸] در سال ۲۰۰۷ با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری مرتبه‌ی بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی را برای ورق‌های الاستیک خطی غیر قابل تراکم هدفمند ارائه کرد. او معادلات حرکت را برای ارتعاشات آزاد ورق به دست آورد. ماتسونانگا [۹] در سال ۲۰۰۸، نوعی از تئوری مرتبه‌ی بالاتر برشی و عمودی را با استفاده از بسط سری تیلور برای آنالیز ارتعاشات و پایداری ورق‌های هدفمند با تکیه‌گاه ساده ارائه کرد. تفاوت اصلی میان این دو تئوری، در نحوه فرض میدان جابه‌جایی و بسط آن در راستای ضخامت می‌باشد. سعیدی و آتشی پور [۱۰] در سال ۲۰۰۸ به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی براساس تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. در سال ۲۰۰۹ امینی و همکارانش [۱۱] با در نظر گرفتن چند جمله‌ای‌های چیشیف و روش ریتز، رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی مطالعه کردند. در سال ۲۰۰۹ لی و همکارانش [۱۲] به کمک چند جمله‌ای‌های چیشیف به بررسی ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. حسنی و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۰ با ارائه حل دقیق برای شرایط مرزی مختلف، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی نازک ساخته شده از مواد هدفمند را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک معادلات حرکت را به دست آوردند. در این تحقیق علاوه بر بررسی پارامترهای هندسی، به بررسی اثر در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی سیستم نیز پرداخته‌اند. لیو و همکارانش [۱۴] در سال ۲۰۱۰ با فرض توزیع درون صفحه‌ای مواد هدفمند و با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی کردند. یانگ و همکارانش

هندسه ورق به صورت مستطیلی با طول  $l_1$  و عرض  $l_2$  در نظر گرفته می‌شود. ضخامت ورق نیز  $h$  فرض می‌شود. دستگاه مختصات دکارتی ساعت‌گرد به نحوی روی جسم قرار می‌گیرد که محورهای  $x_1$  و  $x_2$  به ترتیب موازی اضلاع  $l_1$  و  $l_2$  بوده و صفحه‌ی میانی ورق منطبق بر صفحه‌ی  $x_1, x_2$  می‌باشد (شکل (۱)).



شکل (۱): نمای شماتیک ورق.

معادلات متشکله برای یک لایه هدفمند را می‌توان به این

صورت نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}(z) & C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}(z) & C_{12}(z) & C_{11}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $[C]$  ماتریس سختی ماده هدفمند می‌باشد، نکته قابل توجه این است که خواص این مواد به صورت تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ماده هدفمند همسانگرد دو ثابت مستقل و ماده هدفمند همسانگرد عرضی پنج ثابت مستقل دارند، ثوابت الاستیک در ماده هدفمند همسانگرد طبق رابطه (۲) و در ماده هدفمند همسانگرد عرضی طبق رابطه (۳) می‌باشد:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E(z)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda(z) + 2\mu(z) \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{E(z)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda(z) \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu(z) \end{aligned} \quad (2)$$

[۱۵] در سال ۲۰۱۱ با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی خمش ورق‌های هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی با شرایط مرزی مختلف پرداختند و در نهایت تنش‌ها و جابه‌جایی‌های مجهول را به دست آوردند. بافرانی و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۱ جوابی دقیق برای ارتعاشات ورق‌های مستطیلی هدفمند ضخیم قرار گرفته روی بستر الاستیک ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و اصل همیلتون و با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای معادلات حرکت را به دست آوردند، و به این نتیجه دست یافتند که در برخی از شرایط مرزی، جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای اثری مهم بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق‌های هدفمند ضخیم دارند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۱ به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. شیخ‌الاسلامی و سعیدی [۱۸] در سال ۲۰۱۳ با استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالاتر برشی و عمودی به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند همسانگرد با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند. عیسوند زیبایی و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۹ به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای نازک با رینگ تقویت شده ساخته شده از مواد هوشمند که ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل می‌باشد، پرداختند. این تحقیق براساس تئوری مرتبه‌ی سوم تغییر شکل برشی و براساس اصل همیلتون انجام پذیرفت، این مطالعه نشان می‌دهد که رینگ تقویت شده روی فرکانس‌ها اثر می‌گذارد و این اثر به موقعیت رینگ و شرایط مرزی بدنه استوانه‌ای هوشمند بستگی دارد. در این مقاله برای نخستین بار، ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی، براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و عمودی ارائه شده است. چهار طرف ورق تکیه‌گاه ساده است. مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی براساس چندجمله‌ای‌های لژاندر در امتداد ضخامت تا پنج ترم بسط داده می‌شوند. با استفاده از اصل کار مجازی معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند. نتایج عددی برای نسبت‌های متفاوت ضخامت به طول با مقالات معتبر مقایسه شده و نشان داده شده است که مرتبه پنجم این تئوری برای تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج بسیار دقیقی ارائه می‌دهد.

## ۲- فرضیات سینماتیکی

با استفاده از چند جمله‌ای‌های فوق می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, z, t) &= L_a(z) w_1^a(x_1, x_2, t), \\ v_2(x_1, x_2, z, t) &= L_a(z) w_2^a(x_1, x_2, t), \\ w(x_1, x_2, z, t) &= L_a(z) w^a(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (۸)$$

$a = 0, 1, 2, \dots, K$

می‌توان مشتق چند جمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چند جمله‌ای‌ها به صورت زیر نوشت:

$$L'_a(z) = D_{ab} L_b(z) \quad (۹)$$

که در معادله‌ی فوق،  $D$  ماتریس ضرایب مشتق می‌باشد. برای نمونه، برای تئوری مرتبه ۵ درایه‌های این ماتریس به صورت زیر می‌باشند:

$$[D] = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

بنابراین مشتق اول مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نسبت به  $z$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} v_{\alpha, \beta} &= L_a v_{\alpha, \beta}^a, & v_{\alpha, z} &= D_{ab} L_b v_{\alpha}^a, \\ w_{, \alpha} &= L_a w_{, \alpha}^a, & w_{, z} &= D_{ab} L_b w^a. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در این روابط، زیرنویس‌های  $\alpha, \beta$  نشان دهنده‌ی راستاهای  $x_1, x_2$  می‌باشند.

تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (۱۲)$$

با جایگزینی معادلات (۱۱) در (۱۲)، رابطه کرنش بر حسب جابه‌جایی حاصل می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= L_a \left[ \frac{1}{2} (v_{\alpha, \beta}^a + v_{\beta, \alpha}^a) \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j\alpha}) \right. \\ &\quad \left. \cdot (D_{ba} v_{\alpha}^b + w_{, \alpha}^a) + \delta_{i3} \delta_{j3} D_{ba} w^b \right] \end{aligned} \quad (۱۳)$$

### ۳- معادلات حرکت

برای به دست آوردن معادلات حرکت ورق مستطیلی، از معادلات کلی حرکت در دستگاه دکارتی استفاده می‌شود:

$$\sigma_{i,j,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (۱۴)$$

$$\begin{aligned} C_{44}(z) &= C_{55}(z), \quad C_{11}(z) = C_{22}(z) \\ C_{13}(z) &= C_{23}(z), \quad C_{66}(z) = \frac{1}{2} (C_{11}(z) - C_{12}(z)), \quad C_{33}(z) \end{aligned} \quad (۳)$$

مدل‌های متفاوتی برای بیان توزیع ماده در یک ورق از جنس ماده هدفمند وجود دارد. این مدل‌ها عموماً توزیع خواص بین دو لایه‌ی بالایی و پایینی ورق را به صورت توابع مشخصی از ضخامت ورق در نظر می‌گیرند. در این مدل، تغییرات خواص در راستای ضخامت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۸]:

$$E(z) = E_d + (E_u - E_d) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N \quad (۴)$$

که در این رابطه،  $E$  بیانگر خواص فیزیکی یا مکانیکی جسم مانند چگالی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و غیره می‌باشد. که  $E_d$  و  $E_u$  به ترتیب معرف خواص در  $\{z = h/2\}$  و  $\{z = -h/2\}$  بوده و پارامتر  $N$  نشان دهنده توان ماده هدفمند می‌باشد.

در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۸]:

$$u_i(x_1, x_2, z, t) = v_{\alpha}(x_1, x_2, z, t) \delta_{i\alpha} + w(x_1, x_2, z, t) \delta_{i3} \quad (۵)$$

که در آن،  $u_i$  معرف مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی کلی جسم بوده،  $v_{\alpha}$  و  $w$  به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی درون صفحه‌ای و خارج از صفحه می‌باشند. زیرنویس  $\alpha$  نشان دهنده راستاهای  $x_1$  و  $x_2$  بوده و  $\delta$  بیانگر تابع دلتای کرونکر می‌باشد. از آنجا که ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر کوچک است، می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را در راستای به صورت بسط چند جمله‌ای نوشت. یکی از انواع بسط چند جمله‌ای، بسط با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر می‌باشد. این چند جمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} L_a(z) L_b(z) dz = \delta_{ab} \quad a, b = 0, 1, 2, \dots, K \quad (۶)$$

$$\begin{aligned} L_{n-1}(z) &= \sqrt{\frac{(2n-1)}{h}} P_{n-1}(z) \quad n \geq 1 \\ P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= \frac{2z}{h}, \end{aligned} \quad (۷)$$

$$P_{n+1}(z) = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) \left( \frac{2z}{h} \right) P_n(z) - \left( \frac{n}{n+1} \right) P_{n-1}(z)$$

که در آن،  $K$  مرتبه تئوری مورد استفاده می‌باشد.

در بررسی ارتعاشات آزاد ورق، نیروی حجمی وجود ندارد، و شرایط مرزی در بالا و پایین ورق به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (20)$$

بنابراین با توجه به روابط (۲۰) معادلات (۱۹) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$M_{11,1}^a + M_{12,2}^a - D_{ab}T_1^b = R_{ab}\ddot{v}_1^b \quad (21)$$

$$M_{21,1}^a + M_{22,2}^a - D_{ab}T_2^b = R_{ab}\ddot{v}_2^b$$

$$T_{1,1}^a + T_{2,2}^a - D_{ab}T_3^b = R_{ab}\ddot{w}^b$$

به منظور حل این معادلات، لازم است با استفاده از معادلات (۱)، (۱۳)، (۱۷)، روابط را برای ماده هدفمند نوشته و تمام کرنش‌ها را برحسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی بیان کرد. در این صورت، به معادلات به دست آمده، معادلات حرکت ورق گفته می‌شود.

با فرض جواب هارمونیک برای ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی، داریم:

$$v_\alpha^a(x_1, x_2, t) = e^{i\omega t} V_\alpha^a(x_1, x_2)$$

$$w^a(x_1, x_2, t) = e^{i\omega t} W^a(x_1, x_2) \quad (22)$$

$$\alpha = 1, 2$$

که در آن،  $\omega$  فرکانس طبیعی ارتعاشات ورق می‌باشد. با این فرض، میدان جابه‌جایی جدید ( $W^a, V_\alpha^a$ ) تنها تابع مختصات درون صفحه‌ای می‌شوند. با بازنویسی معادلات (۲۱) بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی و با فرض جواب هارمونیک برای ارتعاشات آزاد ورق، معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی هدفمند به دست می‌آیند که در پیوست ۱ ضمیمه شده است. در این معادلات تابعیت زمان از میدان جابه‌جایی جدید حذف شده و در مقابل، به فرم مسئله مقدار ویژه تبدیل می‌شوند. به منظور حل این معادلات، از شرایط مرزی مکانیکی ورق کمک گرفته می‌شود.

#### ۴- حل تحلیلی معادلات حاکم

به منظور حل معادلات حاکم، شرایط مرزی روی چهار لبه ورق مورد نیاز است. برای یک ورق با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W^a = 0, M_{21}^a = 0, M_{11}^a = 0, \text{ on } x_1 = 0, l_1$$

$$W^a = 0, M_{22}^a = 0, M_{12}^a = 0, \text{ on } x_2 = 0, l_2 \quad (23)$$

به منظور اعمال شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و حل معادلات حاکم در پیوست ۱، از روشی موسوم به روش ناویر استفاده می‌شود. این

که در آن،  $\sigma_{ij}$  مؤلفه‌های تانسور تنش،  $\rho$  چگالی ورق و  $b_i$  مؤلفه‌های بردار نیروهای حجمی ورق می‌باشند. به منظور دستیابی به معادلات حاکم، از اصل کار مجازی استفاده می‌شود. میدان جابه‌جایی مجازی  $\delta\eta_i$  و ضرب داخلی آن در معادله‌ی (۱۴) و با انتگرال‌گیری روی حجم ورق، خواهیم داشت:

$$\int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta\eta_i \sigma_{ij,j} dz dA + \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \delta\eta_i b_i dz dA = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \delta\eta_i \ddot{u}_i dz dA \quad (15)$$

$$i = 1, 2, 3$$

که،  $A$  مساحت صفحه‌ی میانی ورق می‌باشد. با فرض این که تابعیت میدان جابه‌جایی مجازی  $\delta\eta_i$  از  $z$  را بتوان به صورت چندجمله‌ای‌های لژاندر نوشت، داریم:

$$\delta\eta_i(x_1, x_2, z) = L_\alpha(z) \delta\eta_i^\alpha(x_1, x_2) \quad (16)$$

با تعریف پارامترهای زیر:

$$M_{\alpha\beta}^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta dz, \quad T_i^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} L_\alpha dz,$$

$$R_{ab} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_\alpha L_\beta dz, \quad b_i^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_\alpha b_i dz,$$

$$B_i^a = L_\alpha \left( \frac{h}{2} \right) \sigma_{i3} \left( x_1, x_2, \frac{h}{2} \right) - L_\alpha \left( -\frac{h}{2} \right) \sigma_{i3} \left( x_1, x_2, -\frac{h}{2} \right). \quad (17)$$

و با قرار دادن معادله‌ی (۱۶) در (۱۵) و همچنین استفاده از روابط (۸) و (۱۱) داریم:

$$\int_A \delta\eta_\alpha^a M_{\alpha\beta}^a dA + \int_A \delta\eta_3^a T_{\alpha,\alpha}^a dA + \int_A \delta\eta_i^a (b_i^a + B_i^a - D_{ab}T_i^b) dA = \int_A \delta\eta_i^a \ddot{u}_i^b R_{ab} dA \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (18)$$

همچنین از آنجا که معادله (۱۸) برای تمامی مقادیر  $\delta\eta^a$  برقرار است، معادلات حرکت بر ورق با استفاده از اصل کار مجازی در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، به دست می‌آید:

$$M_{11,1}^a + M_{12,2}^a + b_1^a + B_1^a - D_{ab}T_1^b = R_{ab}\ddot{v}_1^b$$

$$M_{21,1}^a + M_{22,2}^a + b_2^a + B_2^a - D_{ab}T_2^b = R_{ab}\ddot{v}_2^b \quad (19)$$

$$T_{\alpha,\alpha}^a + b_3^a + B_3^a - D_{ab}T_3^b = R_{ab}\ddot{w}^b$$

برای نشان دادن صحت نتایج به دست آمده از این تئوری، مقایسه‌ای میان نتایج حاصل از این تئوری با نتایج موجود در مقالات معتبر صورت پذیرفته است. برای این منظور، پارامترهای بی بعد فرکانس طبیعی زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\Psi} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (25)$$

$$\psi = \omega h \sqrt{\left(\frac{\rho}{c_{11}}\right)_c} \quad (26)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\omega L_1^2}{h} \sqrt{\left(\frac{\rho}{c_{11}}\right)_M} \quad (27)$$

به‌عنوان مقایسه، فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند همسانگرد (ایزوتروپ) مستطیلی با نتایج تئوری مرتبه بالاتر مقایسه شده است. (جدول ۲)، در این مقایسه، پارامتر بی بعد فرکانس  $\bar{\Psi}$  برای یک ورق مربعی با نسبت ضخامت به طول‌های مختلف و برای توان‌های مختلف ماده هدفمند با نتایج مرجع [۹] مقایسه شده است و از تئوری‌های مرتبه ۱، ۳ و ۵ استفاده شده است. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌گردد، برای ورق‌های نازک تقریباً تمامی تئوری‌ها جواب مشابهی می‌دهند، درحالی‌که با افزایش نسبت ضخامت به طول مشخصه، تئوری‌های مرتبه بالاتر مقدار فرکانس طبیعی را دقیق‌تر تخمین می‌زنند، به‌طوری‌که برای ورق‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم تئوری مرتبه پنجم این تئوری جواب‌های خیلی دقیقی را می‌دهد. پس از نشان دادن صحت تحلیل‌های حاضر، نتایج جدیدی برای بیان رفتار ارتعاشی ورق ارائه گردیده است. مقادیر پارامتر بی بعد فرکانس طبیعی  $\bar{\Psi}$ ،  $\psi$  برای توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی و نسبت‌های مختلف طول مشخصه به ضخامت با استفاده از تئوری مرتبه اول، سوم و پنجم برشی و عمودی در جدول ۳ آمده است. ورق مربعی و ماده هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی، تیتانیوم-آلومینا در نظر گرفته شده است.

برای نشان دادن همگرایی فرکانس‌های طبیعی، مقادیر پارامتر بی بعد فرکانس طبیعی  $\bar{\Psi}$ ،  $\psi$  برای ورق مربعی تیتانیوم و آلومینا در  $N = 5$  و برای نسبت‌های مختلف ضخامت به طول با استفاده از تئوری‌های مرتبه اول تا پنجم برشی و عمودی در جدول ۴ آورده شده است. در ورق‌های هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی با افزایش ضخامت و کاهش توان ماده هدفمند، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد (به دلیل افزایش سختی ورق). همان‌طور که از این جداول ملاحظه می‌گردد، برای ورق‌های نازک

روش، تابعیت میدان جابه‌جایی از مختصات درون صفحه‌ای را به صورت مجموعی از جملات هارمونیک در نظر می‌گیرد. بنابراین، با توجه به شرط مرزی (۲۳)، میدان جابه‌جایی جدید را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V_1^a &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_1^{amm} \cos\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \\ V_2^a &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_2^{amm} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \\ W^a &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{W}^{amm} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

در این سری‌ها،  $m$  و  $n$  تعداد جملات موجود در سری بوده و در مسئله ارتعاشات ورق، بیانگر شماره‌ی مدهای ارتعاشی می‌باشد. با قرار دادن روابط (۲۴) در معادلات حاکم در پیوست ۱ و باز کردن معادلات، معادلات حاکم همگن در پیوست ۲ به دست می‌آیند. برای حل این دستگاه معادلات همگن باید دترمینان ضرایب ماتریس مؤلفه‌های جابه‌جایی را برابر با صفر قرار داد. با این کار، مقادیر ویژه‌ی دستگاه معادلات که همان فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق هستند، برای مدهای مختلف به دست می‌آیند. پس از به دست آمدن فرکانس‌ها، با قرار دادن آن‌ها در دستگاه معادلات پیوست ۲ بردارهای ویژه یا شکل مدهای ارتعاشی حاصل می‌شوند. برای هر تئوری از مرتبه  $k$  تعداد معادلات  $3(k+1)$  می‌باشد.

## ۵- نتایج

در این بخش از مقاله، پس از بررسی درستی روش حل، نتایج عددی در قالب جدول و اشکال ارائه شده است. برای به دست آوردن نتایج عددی از دو ماده هدفمند فلز-سرامیک استفاده شده است. ماده اول ترکیب آلومینیوم و آلومینا و ماده دوم ترکیب آلومینا و تیتانیوم می‌باشد، (این ماده یک بار به عنوان ماده هدفمند همسانگرد و بار دیگر به عنوان ماده هدفمند همسانگرد عرضی به کار برده شده است). در این حالت توزیع فلز و سرامیک به صورت توانی در نظر گرفته شده است، و سطح بالای ورق سرامیک و سطح پایین آن فلز می‌باشد. با میل کردن پارامتر  $N$  به سمت صفر و بی‌نهایت، به ترتیب ورق همگن از جنس سرامیک و فلز به دست می‌آید. خصوصیات فیزیکی و مکانیکی این مواد در جدول ۱ آمده است.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با افزایش توان ماده هدفمند (همسانگرد و همسانگرد عرضی)، فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد. در واقع، از آنجا که

افزایش توان ماده هدفمند به معنای نزدیک شدن به خاصیت فلزی می‌باشد، و چون سختی فلز، کمتر از سرامیک می‌باشد لذا سختی کلی ورق کاهش می‌یابد و کاهش سختی باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌گردد. از طرفی، با افزایش نسبت ضخامت به طول مشخصه در یک  $N$  خاص، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد، با کاهش نسبت ضخامت به طول مشخصه حساسیت فرکانس طبیعی به توان ماده هدفمند کاهش می‌یابد به طوری که برای ورق‌های نازک به دلیل اینکه پروفیل توزیع فلز و سرامیک برای توان‌های مختلف ماده هدفمند بسیار نزدیک به هم هستند، فرکانس طبیعی با افزایش توان ماده هدفمند تقریباً ثابت می‌ماند. همان‌طور که از شکل (۲-ج) ملاحظه می‌گردد، در ورق‌های نازک فرکانس طبیعی ورق هدفمند همسانگرد عرضی و هدفمند همسانگرد به هم نزدیک‌ترند، به این دلیل که تأثیر خواص در راستای ضخامت نسبت به خواص صفحه‌ای ناچیز است. ولی در کل مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند همسانگرد نسبت به ورق هدفمند همسانگرد عرضی اندکی بیشتر است (به خصوص در توان‌های نزدیک به صفر)، چون ورق هدفمند همسانگرد عرضی نسبت به ورق مشابه هدفمند همسانگرد سختی الاستیسیته کمتری دارد این اختلاف در فرکانس‌های بالاتر بیشتر مشهود است.

از تئوری‌های مرتبه پایین به بعد جواب‌ها تقریباً ثابت می‌شوند، درحالی‌که با افزایش نسبت ضخامت به طول مشخصه، در تئوری‌های مرتبه بالاتر جواب‌ها ثابت می‌گردند. چهار فرکانس اول  $\bar{\psi}$  برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم (هدفمند همسانگرد عرضی) با تئوری مرتبه پنجم برشی و عمودی در جدول ۵ آورده شده است. همان‌گونه که در جدول ۵ دیده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به طول در یک  $N$  خاص فرکانس بی‌بعد  $\bar{\psi}$  کاهش می‌یابد که با توجه به رابطه (۲۷) منطقی به نظر می‌رسد، هم‌چنین می‌توان گفت که در مدهای بالاتر با افزایش ضخامت به طول کاهش بیشتری در پارامتر  $\bar{\psi}$  رخ می‌دهد. همان‌طور که می‌دانیم برای ورق مربعی و غیرمربعی چهار طرف تکیه‌گاه ساده کمترین فرکانس در  $(m, n) = (1, 1)$  اتفاق می‌افتد.

کمترین فرکانس طبیعی  $\omega$  برای ورق تیتانیوم-آلومینا (هدفمند همسانگرد عرضی)، تیتانیوم-آلومینا (هدفمند همسانگرد) و آلومینیوم-آلومینا (هدفمند همسانگرد) با تئوری مرتبه پنجم برشی و عمودی در جدول ۶ و ۷ آورده شده است. همان‌گونه که از جدول ۶ ملاحظه می‌گردد، فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند همسانگرد بیشتر از ورق هدفمند همسانگرد عرضی مشابه می‌باشد. جدول ۷ نشان می‌دهد که افزایش نسبت طول به عرض باعث افزایش فرکانس طبیعی ورق در هر دو ماده هدفمند می‌شود. با استفاده از تئوری مرتبه پنجم، تغییرات پارامتر فرکانس  $\bar{\psi}$ ،  $\bar{\Psi}$  و  $\omega$  بر حسب توان ماده هدفمند برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول مشخصه برای ورق مربعی تیتانیوم-آلومینا در شکل ۲ نشان داده شده است.

جدول (۱-الف): خصوصیات ماده هدفمند همسانگرد (ایزوتروپ) [۱۸].

مواد	$E$ (Gpa)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\nu$
آلومینیوم	۷۰	۲۷۰۲	۰٫۳
آلومینا	۳۸۰	۳۸۰۰	۰٫۳
تیتانیوم	۱۱۶	۴۵۰۶	۰٫۳

جدول (۱-ب): خصوصیات ماده هدفمند همسانگرد عرضی [۱۵].

مواد	$10^9$ (Nm <sup>-2</sup> ) مدول الاستیسیته					چگالی $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{55}$	
آلومینا	۴۶۰٫۲	۱۷۴٫۷	۱۲۷٫۴	۵۰۹٫۵	۱۲۶٫۹	۳۸۰۰
تیتانیوم	۱۶۲٫۴	۹۲	۶۹	۱۸۰٫۷	۴۶٫۷	۴۵۰۶

**جدول (۲):** مقایسه پارامتر فرکانس طبیعی  $\bar{\Psi}$  برای ورق مربعی از جنس آلومینیوم - آلومینا با توان‌های مختلف ماده هدفمند همسانگرد با مرجع [۹].

$h/l_1$	$N$	$K$					
		$K=1$		$K=3$		$K=5$	
		نتایج حاضر	[9]	نتایج حاضر	[9]	نتایج حاضر	[9]
۰.۵	۰	۱.۰۲۰۱	۱.۰۲۰۱	۰.۹۴۱۸	۰.۹۴۰۰	۰.۹۴۰۰	۰.۹۴۰۰
	۰.۵	۰.۸۸۷۴	۰.۸۸۷۶	۰.۸۲۳۳	۰.۸۲۳۲	۰.۸۲۳۳	۰.۸۲۳۲
۰.۲	۱.۰	۰.۶۱۹۵	۰.۶۲۰۷	۰.۵۴۸۰	۰.۵۴۶۳	۰.۵۴۶۱	۰.۵۴۶۰
	۰	۰.۲۳۳۳	۰.۲۳۳۴	۰.۲۱۲۱	۰.۲۱۲۱	۰.۲۱۲۱	۰.۲۱۲۱
۰.۱	۰.۵	۰.۱۹۹۴	۰.۱۹۹۷	۰.۱۸۱۶	۰.۱۸۱۹	۰.۱۸۱۸	۰.۱۸۱۹
	۱.۰	۰.۱۴۶۲	۰.۱۴۶۲	۰.۱۳۰۵	۰.۱۳۰۶	۰.۱۳۰۶	۰.۱۳۰۶
۰.۰۵	۰	۰.۰۶۳۸۲	۰.۰۶۳۸۲	۰.۰۵۷۷۷	۰.۰۵۷۷۷	۰.۰۵۷۷۷	۰.۰۵۷۷۷
	۰.۵	۰.۰۵۴۲۰	۰.۰۵۴۲۹	۰.۰۴۹۰۷	۰.۰۴۹۱۷	۰.۰۴۹۱۶	۰.۰۴۹۱۷
	۱.۰	۰.۰۴۰۴۶	۰.۰۴۰۴۷	۰.۰۳۶۳۹	۰.۰۳۶۴۳	۰.۰۳۶۴۲	۰.۰۳۶۴۲

**جدول (۳-الف):** مقادیر پارامتر فرکانس طبیعی  $\bar{\Psi}$  برای ماده هدفمند همسانگرد آلومینا-تیتانیوم در یک ورق مربعی.

$K$	$l_1/h$	$\bar{\Psi}$						
		$N=0$	$=0.1$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$K=1$	۲	۱.۰۲۰۱	۰.۹۷۳۳۳	۰.۷۶۱۹۹	۰.۶۸۷۴۶	۰.۶۵۴۷۰	۰.۶۳۵۵۹	۰.۶۲۲۴۷
	۱.۰/۳	۰.۴۶۷۶۶	۰.۴۴۵۲۸	۰.۳۴۷۱۱	۰.۳۱۴۹۵	۰.۳۰۱۶۶	۰.۲۹۴۰۴	۰.۲۸۸۷۳
	۱.۰	۰.۰۶۳۸۲	۰.۰۶۰۶۲	۰.۰۴۷۰۰	۰.۰۴۲۹۲	۰.۰۴۱۳۹	۰.۰۴۰۵۴	۰.۰۳۹۹۴
$K=3$	۲	۰.۹۴۱۸	۰.۹۰۰۲۵	۰.۷۰۸۱۰	۰.۶۳۳۵۵	۰.۵۹۷۵۰	۰.۵۷۶۱۵	۰.۵۵۲۱۰
	۱.۰/۳	۰.۴۲۷۴۴	۰.۴۰۷۴۶	۰.۳۱۸۱۲	۰.۲۸۶۸۶	۰.۲۷۳۰۹	۰.۲۶۵۱۱	۰.۲۵۹۷۷
	۱.۰	۰.۰۵۷۷۷	۰.۰۵۴۸۹	۰.۰۴۲۵۷	۰.۰۳۸۸۲	۰.۰۳۷۳۹	۰.۰۳۶۶۰	۰.۰۳۶۰۴
$K=5$	۲	۰.۹۴۰۰	۰.۸۹۸۶۵	۰.۷۰۶۸۰	۰.۶۳۲۱۰	۰.۵۹۶۰۰	۰.۵۷۴۷۰	۰.۵۶۰۷۰
	۱.۰/۳	۰.۴۲۷۲۶	۰.۴۰۷۲۸	۰.۳۱۷۹۷	۰.۲۸۶۶۵	۰.۲۷۲۸۵	۰.۲۶۴۹۰	۰.۲۵۹۵۹
	۱.۰	۰.۰۵۷۷۷	۰.۰۵۴۸۹	۰.۰۴۲۵۷	۰.۰۳۸۸۲	۰.۰۳۷۳۹	۰.۰۳۶۶۰	۰.۰۳۶۰۴

**جدول (۳-ب):** مقادیر پارامتر فرکانس طبیعی  $\bar{\Psi}$  برای ماده هدفمند همسانگرد عرضی آلومینا-تیتانیوم در یک ورق مربعی.

$K$	$l_1/h$	$\bar{\Psi}$						
		$N=0$	$=0.1$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$K=1$	۲	۰.۸۷۱۳۰	۰.۸۳۴۱۱	۰.۶۷۰۱۸	۰.۶۱۳۴۳	۰.۵۸۸۱۰	۰.۵۷۳۰۷	۰.۵۶۲۶۴
	۱.۰/۳	۰.۴۰۰۹۱	۰.۳۸۲۹۸	۰.۳۰۶۱۰	۰.۲۸۱۳۷	۰.۲۷۰۹۸	۰.۲۶۴۹۰	۰.۲۶۰۶۰
	۱.۰	۰.۰۵۴۹۵	۰.۰۵۲۳۶	۰.۰۴۱۶۰	۰.۰۳۸۴۴	۰.۰۳۷۲۲	۰.۰۳۶۵۲	۰.۰۳۶۰۲
$K=3$	۲	۰.۸۲۵۱۹	۰.۷۹۰۸۴	۰.۶۳۳۰۴	۰.۵۷۲۶۱	۰.۵۴۳۹۰	۰.۵۲۷۰۹	۰.۵۱۶۰۵
	۱.۰/۳	۰.۳۸۲۰۱	۰.۳۶۴۹۴	۰.۲۸۸۹۴	۰.۲۶۲۵۲	۰.۲۵۱۰۲	۰.۲۴۴۴۵	۰.۲۴۰۰۶
	۱.۰	۰.۰۵۲۹۰	۰.۰۵۰۳۲	۰.۰۳۹۳۷	۰.۰۳۶۰۴	۰.۰۳۴۷۷	۰.۰۳۴۰۶	۰.۰۳۳۵۶
$K=5$	۲	۰.۸۲۴۰۵	۰.۷۸۹۷۰	۰.۶۳۱۷۷	۰.۵۷۱۶۶	۰.۵۴۳۱۳	۰.۵۲۶۳۲	۰.۵۱۵۲۸
	۱.۰/۳	۰.۳۸۱۸۷	۰.۴۰۷۲۸	۰.۲۸۸۷۵	۰.۲۶۲۴۴	۰.۲۵۰۹۶	۰.۲۴۴۳۹	۰.۲۴۰۰۰
	۱.۰	۰.۰۵۲۹۰	۰.۰۵۰۳۲	۰.۰۳۹۳۶	۰.۰۳۶۰۴	۰.۰۳۴۷۷	۰.۰۳۴۰۶	۰.۰۳۳۵۶



جدول (۴-الف): کمترین فرکانس  $\bar{\Psi}$  برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم (هدفمند همسانگرد).

$h/l_1$	$K=1$	$K=2$	$K=3$	$K=4$	$K=5$
۰٫۱	۰٫۲۹۹۴	۰٫۲۶۲۴	۰٫۳۶۰۴	۰٫۳۶۰۴	۰٫۳۶۰۴
۰٫۲	۰٫۱۴۵۰۸	۰٫۱۳۲۹۲	۰٫۱۳۰۶۴	۰٫۱۳۰۶۲	۰٫۱۳۰۶۰
۰٫۳	۰٫۲۸۸۷۳	۰٫۲۶۷۴۵	۰٫۲۵۹۷۷	۰٫۲۵۹۶۲	۰٫۲۵۹۵۹
۰٫۴	۰٫۴۵۱۴۴	۰٫۴۲۲۶۰	۰٫۴۰۶۶۰	۰٫۴۰۶۰۴	۰٫۴۰۶۰۰
۰٫۵	۰٫۶۲۲۴۷	۰٫۵۸۸۴۵	۰٫۵۶۲۱۰	۰٫۵۶۰۷۵	۰٫۵۶۰۷۰

جدول (۴-ب): کمترین فرکانس  $\bar{\Psi}$  برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم (هدفمند همسانگرد عرضی).

$h/l_1$	$K=1$	$K=2$	$K=3$	$K=4$	$K=5$
۰٫۱	۰٫۳۶۰۲	۰٫۳۳۷۸	۰٫۳۳۵۶	۰٫۳۳۵۶	۰٫۳۳۵۶
۰٫۲	۰٫۱۳۰۸۸	۰٫۱۲۳۵۱	۰٫۱۲۱۲۰	۰٫۱۲۱۲۰	۰٫۱۲۱۱۸
۰٫۳	۰٫۲۶۰۶۰	۰٫۲۴۷۱۸	۰٫۲۴۰۰۶	۰٫۲۴۰۰۰	۰٫۲۴۰۰۰
۰٫۴	۰٫۴۰۷۷۲	۰٫۳۹۰۲۳	۰٫۳۷۴۳۸	۰٫۳۷۴۱۳	۰٫۳۷۴۱۳
۰٫۵	۰٫۵۶۲۶۴	۰٫۵۴۱۹۰	۰٫۵۱۶۰۵	۰٫۵۱۵۳۲	۰٫۵۱۵۲۸

جدول (۵): چهار فرکانس اول  $\bar{\Psi}$  برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم (هدفمند همسانگرد عرضی).

$N$	مدها				
	$h/l_1$	۱	۲	۳	۴
.	۰٫۱	۹٫۶۹۶۲(۱٫۱)	۲۳٫۰۲۰۳(۱٫۲)	۲۳٫۰۲۰۳(۲٫۱)	۲۵٫۱۹۱۷(۲٫۲)
	۰٫۵	۶٫۰۴۲۲(۱٫۱)	۱۱٫۰۱۳۱(۱٫۲)	۱۱٫۰۱۳۱(۲٫۱)	۱۴٫۶۰۱۷(۲٫۲)
۵	۰٫۱	۶٫۱۵۱۵(۱٫۱)	۱۴٫۵۶۳۴(۱٫۲)	۱۴٫۵۶۳۴(۲٫۱)	۲۲٫۲۱۴۱(۲٫۲)
	۰٫۵	۳٫۷۷۸۲(۱٫۱)	۶٫۸۵۳۴(۱٫۲)	۶٫۸۵۳۴(۲٫۱)	۸٫۱۶۲۴(۲٫۲)

جدول (۶): مقایسه پارامتر کمترین فرکانس طبیعی  $\omega$  برای ورق مربعی تیتانیوم-آلومینا

(هدفمند همسانگرد عرضی) و تیتانیوم-آلومینا (هدفمند همسانگرد).

مواد هدفمند	$h/l_1$	$N=0$	$N=0.1$	$N=1$
همسانگرد	۰٫۱	۵۷۷۷	۵۴۸۹	۴۲۵۷
	۰٫۳	۱۴۲۴۲	۱۳۵۷۳	۱۰۵۹۹
	۰٫۵	۱۸۸۰۱	۱۷۹۷۳	۱۴۱۳۶
همسانگرد عرضی	۰٫۱	۵۸۲۱	۵۵۳۸	۴۳۳۲
	۰٫۳	۱۴۰۰۸	۱۳۳۸۲	۱۰۵۹۲
	۰٫۵	۱۸۱۳۷	۱۷۳۸۱	۱۳۹۰۵

جدول (۷): مقادیر کمترین فرکانس طبیعی  $\omega$  برای ورق تیتانیوم-آلومینا

(هدفمند همسانگرد عرضی) و آلومینوم - آلومینا (هدفمند همسانگرد).

$$h/l_1 = 0.5, N = 5$$

مواد هدفمند	$l_1/l_2$	۰٫۲۵	۰٫۵	۱
همسانگرد		۷۳۲۹٫۶	۸۲۸۹٫۱	۱۱۶۵۵٫۸
همسانگرد عرضی		۷۱۵۹٫۵	۸۰۹۰٫۳	۱۱۳۴۱٫۰

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی، یک حل تحلیلی برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. شرایط مرزی ورق به‌طور دقیق با حل ناویر ارضا شدند. مزیت این تئوری این است که برخلاف تئوری‌های برشی ورق، در آن از کرنش قائم برون صفحه‌ای صرف نظر نشده و همچنین خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نمی‌شود، همچنین دستیابی و حل معادلات حاکم بر ورق با استفاده از این تئوری بسیار آسانتر از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی است. بر طبق نتایج عددی، نتایج به‌دست آمده از این مقاله را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت زیر بیان نمود:

۱- تئوری تغییر شکل برشی و عمودی باترا برای همه‌ی ورق‌ها اعم از نازک، نسبتاً ضخیم و ضخیم جواب‌های بسیار نزدیکی به تئوری الاستیسیته سه‌بعدی می‌دهد،

۲- برای ورق‌های نازک، تقریباً تمام تئوری‌ها جواب‌های خوبی می‌دهند. با افزایش ضخامت ورق، برای به‌دست آوردن جواب دقیق‌تر باید مرتبه تئوری ورق را افزایش داد.

۳- برای ورق‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم تئوری مرتبه پنجم تئوری باترا جواب‌های خیلی دقیقی را می‌دهد،

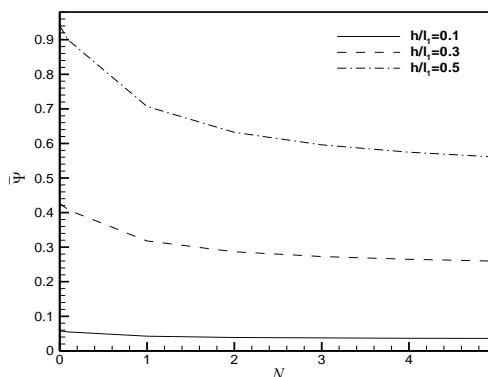
۴- با افزایش نسبت طول مشخصه به ضخامت حساسیت فرکانس طبیعی به توان ماده هدفمند کاهش می‌یابد،

۵- در یک توان ماده هدفمند ثابت، با افزایش نسبت ضخامت به طول مشخصه، فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد و برای نسبت ضخامت به طول بالاتر و مدهای بالاتر افزایش بیشتری در فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق اتفاق می‌افتد،

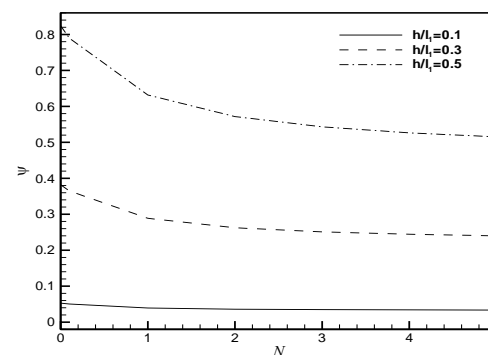
۶- در یک نسبت ضخامت به طول مشخصه‌ی ثابت، با افزایش توان ماده هدفمند (نزدیک شدن به سطح با سختی کمتر)، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد،

۷- افزایش نسبت ابعادی باعث افزایش فرکانس طبیعی ورق می‌شود و

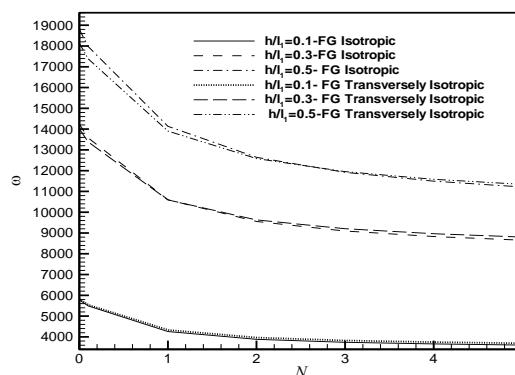
۸- فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند همسانگرد بیشتر از ورق هدفمند همسانگرد عرضی مشابه می‌باشد (به خصوص در توان‌های نزدیک به صفر) و این اختلاف در ورق‌های ضخیم و مدهای بالاتر بیشتر می‌باشد.



شکل (۲-الف): تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی  $\bar{\omega}$  بر حسب توان ماده هدفمند همسانگرد برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم.



شکل (۲-ب): تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی  $\bar{\omega}$  بر حسب توان ماده هدفمند همسانگرد عرضی برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم.



شکل (۲-ج): مقایسه پارامتر کمترین فرکانس طبیعی  $\omega$  بر حسب توان ماده هدفمند برای ورق مربعی آلومینا-تیتانیوم.

## ۷- مراجع

13. Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E. "Exact Solution for Free Vibration of Thin Functionally Graded Rectangular Plates", *J. Mechanical Engineering Science*, Vol. 225, No. 10, pp. 526-536, 2010.
14. Liu, D.Y., Wang, C.Y. and Chen, W.Q. "Free Vibration of FGM Plates with In-Plane Material Inhomogeneity", *J. Composite Structures*, Vol. 92, No. 5, pp. 1047-51, 2010.
15. Yang, B., Ding, H.J., and Chen, W.Q. "Elasticity Solutions for Functionally Grad Rectangular Plates with Two Opposite Edges Simply Supported", *J. Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 488-503, 2011.
16. Baferani, A. H., Saidi, A. R. and Ehteshami, H. "Accurate Solution for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Thick Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation", *J. Composite Structures*, Vol. 93, No. 7, pp. 1842-53, 2011.
17. Hosseini Hashemi, Sh., Akhavan, H. and Fadaee, M. "Exact Closed-Form Free Vibration Analysis of Moderately Thick Rectangular Functionally Graded Plates with Two Bonded Piezoelectric Layers", *J. Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 57-74. (In Persian)
18. Sheikholeslami, S.A. and Saidi, A.R. "Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory", *J. Composite Structures*, Vol. 106, No. 12, pp. 350-361, 2013.
19. Isvandzibaei, M.R. Setareh, M. and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", *Aero. Mech. J.*, Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2009. (In Persian)
1. Batra, R. C. and Vidoli, S. "Higher Order Piezoelectric Plate Theory Derived From a Three-Dimensional Variational Principle", *J. AIAA*, Vol. 40, No. 1, pp. 91-104, 2002.
2. Reddy, J. N. "On Laminated Composite Plates with Integrated Sensors and Actuators", *J. Engineering Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 568-93, 1999.
3. Reddy, J. N. "Analysis of Functionally Graded Plates", *J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 1, pp. 663-84, 2000.
4. Shen, H. S., Yang, J. and Zhang, L. "Free and Forced Vibration of Reissner-Mindlin Plates with Free Edges Resting on Elastic Foundations", *J. Sound and Vibration*, Vol. 244, No. 2, pp. 299-320, 2001.
5. Shen, H. S., Zheng, J. J. and Huang, X. L. "Dynamic Response of Shear Deformable Laminated Plates Under Thermo-Mechanical Loading and Resting on Elastic Foundations", *J. Composite Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 57-66, 2003.
6. Qian, L. F., Batra, R. C. And Chen, L. M. "Free and Forced Vibrations of Thick Rectangular Plates by Using Higher-order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method", *J. Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 4, No. 5, pp. 519-34, 2003.
7. Batra, R. C. and Aimmanee, V. S. "Vibration of an Incompressible Isotropic Linear Elastic Rectangular Plate with a Higher-Order Shear and Normal Deformable Theory", *J. Journal of Sound and Vibration*, Vol. 307, No. 3, pp. 961-971, 2007.
8. Batra, R.C. "Higher Order Shear and Normal Deformable Theory for Functionally Graded Incompressible Linear Elastic Plates", *J. Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 12, pp. 974-982, 2007.
9. Matsunaga, H. "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2-D Higher-order Deformation Theory", *J. Composite Structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008.
10. Saidi, A.R. and Atashipour, S.R. "Analytical Solution of Free Vibration of Thick Transversely Isotropic Rectangular Plates Based on First Order Shear Deformation Theory", *Aero. Mech. J.*, Vol. 4, No. 3, pp. 59-69, 2008. (In Persian)
11. Amini, M. H., Soleimani, M. and Rastgoo, A. "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Functionally Graded Material Plates Resting on an Elastic Foundation". *J. Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 8, pp. 1-9, 2009.
12. Li, Q., Iu, V. P. and Kou, K. P. "Three-Dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Material Plates in Thermal Environment", *J. Sound and Vibration*, Vol. 324, No. 7, pp. 733-50, 2009.

## پیوست ۱:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} \left[ V_{1,11}^c + \frac{1}{2} (V_{1,22}^c + V_{2,12}^c) \right] dz$$

$$+ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} \left[ \frac{1}{2} (V_{2,21}^c - V_{1,22}^c) \right] dz + D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz [W_{,1}^d]^{-1}$$

$$- D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz [D_{cd} V_1^c + W_{,1}^d] = -\omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz V_1^b$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} \left[ \frac{1}{2} (V_{1,21}^c + V_{2,11}^c) + V_{2,22}^c \right] dz \quad (1-2)$$

$$+ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} \left[ \frac{1}{2} (V_{2,12}^c - V_{2,11}^c) \right] dz + D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz [W_{,2}^d]$$

$$- D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz [D_{cd} V_{,2}^c + W_{,2}^d] = -\omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz V_{,2}^b$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} [D_{cd} (V_{1,1}^c + V_{2,2}^c) + \nabla^2 W^d] dz \quad (1-3)$$

$$- D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz [V_{1,1}^c + V_{2,2}^c] = -\omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz W^b$$

پیوست ۲:

$$\tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[ \left( \frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] \right.$$

$$\left. - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz + \omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_c dz \right\}$$

$$+ \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \quad (2-5)$$

$$+ \tilde{W}^{dmn} \left\{ D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \right] - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right\}$$

$$= 0$$

$$\tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\}$$

$$+ \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right)^2 \right] - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz + \omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_c dz \right\} \quad (2-6)$$

$$+ \tilde{W}^{dmn} \left\{ D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz \left[ \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz \left[ \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\}$$

$$= 0$$

$$\tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz \left[ D_{cd} \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \right] + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right\}$$

$$+ \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz \left[ D_{cd} \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz \left[ \left( \frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \quad (2-7)$$

$$+ \tilde{W}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz \left[ \left( \frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] - D_{ab} D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{33} dz + \omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_d dz \right\}$$

$$= 0$$