

تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند

پیزوالکتریک در حالت مدار بسته

علیرضا سعیدی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید باهنر کرمان
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۴/۱)

زهره موسوی^۱

دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۴/۱)

چکیده

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک، در حالت مدار بسته مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر ورق بر پایه تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی با استفاده از اصل کار مجازی به دست آمده است. معادلات حاصل با فرض تکیه گاه ساده روی هر چهار لبه ورق به صورت تحلیلی حل شده است. در تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی، هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی در راستای ضخامت لحاظ گردیده است و پارامترهای جابه‌جایی و پتانسیل با استفاده از تابع لژاندر در راستای ضخامت بسط داده شده‌اند، از مزایای این تئوری در مقایسه با تئوری‌های برشی این است که جابه‌جایی عرضی ورق در امتداد ضخامت ثابت در نظر گرفته نشده است و برای ورق ضخیم نتایج دقیقی می‌دهد. برای بیان خواص مکانیکی، الکتریکی و فیزیکی مواد هدفمند در امتداد ضخامت از تابع توانی، استفاده شده است. در پایان پس از بررسی صحت نتایج حاضر، نتایج عددی برای پارامترهای گوناگون مانند توان ماده هدفمند پیزوالکتریک، نسبت ضخامت به طول مشخصه و اثر پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی ورق مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، ورق مستطیلی، ماده هدفمند پیزوالکتریک، ورق ضخیم، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی

Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Piezoelectric Rectangular Plates in Closed Circuit Condition

Z. Mousavi

Department of Mechanical Engineering
ValiAsr University of Rafsanjan

A.R. Saidi

Department of Mechanical Engineering
Shahid Bahonar University of Kerman

(Received: 16/May/2014; Accepted: 22/June/2014)

ABSTRACT

In this article, free vibration analysis of thick functionally graded piezoelectric rectangular plates in closed circuit condition is investigated. Based on the higher-order shear and normal deformable plate theory, the governing equations are obtained using the principle of virtual work. The equations are then solved analytically, assuming the simply support boundary condition along all edges. In higher-order shear and normal deformable plate theory, the effects of the both transverse shear and normal deformations are considered and displacement, potential components are expanded in the thickness direction using the Legendre polynomials. Advantages of this theory compared to the shear theories is that given that deflection of the plate along the thickness is not constant, for thick plate provides more accurate results. A power law distribution is used to explain the variation of mechanical, electrical and physical properties through the thickness of the functionally graded materials. Furthermore, after showing the accuracy of present analytical approach, the numerical results for different parameters such as power of functionally graded piezoelectric material, various thickness to length ratio and piezoelectric effect on the plate natural frequencies has been studied.

Keywords: Free Vibration, Rectangular Plate, Functionally Graded Piezoelectric Material, Thick Plate, Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory

۱- کارشناسی ارشد: z.mousavi2014@yahoo.com

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): saidi@uk.ac.ir

۱- مقدمه

ورق‌ها کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف از جمله هوافضا، راکتورها، ساختمان سازی و دیگر صنایع دارند. روش‌های متفاوتی برای تحلیل ورق‌ها وجود دارد. این روش‌ها شامل تحلیل سه‌بعدی ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته و تحلیل ورق با انواع تئوری‌های دو بعدی ورق می‌باشند. روش تحلیل ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته اگر چه روشی دقیق است، اما این تحلیل بسیار پیچیده و دشوار است. از آن‌جا که در ورق‌ها عمدتاً ضخامت نسبت به ابعاد دیگر بسیار کوچک است، تئوری‌هایی موسوم به تئوری‌های ورق ارائه شده‌اند. در تمامی این تئوری‌ها، تحلیل دوبعدی ورق و بسط میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت صورت می‌گیرد. معمولاً انتخاب تئوری مناسب در تحلیل ورق‌ها، با توجه به نسبت ضخامت به طول ورق صورت می‌پذیرد. اگر چه تئوری‌های برشی ورق در تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج خوبی می‌دهند، اما به دلیل در نظر نگرفتن اثر کرنش‌های عمودی، هنوز با جواب‌های دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل، تئوری جدیدی به نام تئوری تغییر شکل برشی و عمودی توسط باترا و ویدولی [۱] معرفی شده است. این تئوری، کامل‌کننده تئوری‌های قبل بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر می‌گیرد.

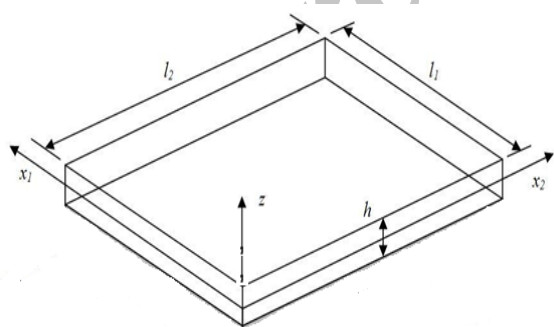
در سیستم‌های مکانیکی ارتعاشات ناخواسته باعث ایجاد ترک در قطعات، لق شدن اتصالات، شکست سازه‌ها، نقص عملکرد وسایل الکترونیکی و بسیاری از موارد دیگر می‌شود. با اندازه‌گیری مشخصات نوسانی سیستم همچون فرکانس‌های طبیعی آن می‌توان سرعت‌های دور از حالت تشدید را انتخاب کرده و از بسیاری از آثار نامطلوب ارتعاشات جلوگیری نمود. برای رفع این مشکلات، مواد پیزوالکتریک به دنیای صنعت معرفی شدند، در این مواد با اعمال بار مکانیکی جریان الکتریکی در آنها به وجود می‌آید (اثر مستقیم) همچنین با قرار دادن این مواد در میدان الکتریکی کرنش مکانیکی ایجاد خواهد شد (اثر معکوس)، این خاصیت دو سویه پیزوالکتریک‌ها را موادی ایده‌آل برای ساخت سنسورها (با استفاده از اثر مستقیم) و عملگرها (با استفاده از اثر معکوس) کرده است [۲]. بنابراین می‌توان از ویژگی‌های لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر برای کنترل فعال ارتعاشات سیستم‌ها استفاده کرد. مواد هدفمند کامپوزیت‌های ناهمگن متشکل از فلزات و سرامیک‌ها هستند خواص این مواد به صورت تابعی تغییر می‌کند که به آنها مواد مدرج تابعی نیز می‌گویند، مقاومت بسیار خوب سرامیک‌ها

در برابر حرارت و سایش، در کنار چقرمگی بالای فلزات این ماده را به ماده‌ای با کارایی دوگانه تبدیل کرده است. سازه‌های هدفمند با داشتن این خواص هنگامی که با مواد پیزوالکتریک ترکیب می‌شوند ماده هدفمند با خواص کنترل‌پذیری را به وجود می‌آورند که کاربردهای بسیار از پیش مطلوب می‌سازد، این ماده را، ماده هدفمند پیزوالکتریک می‌نامند. در واقع مواد هدفمند پیزوالکتریک مواد پیزوالکتریکی هستند که خواص مکانیکی آنها به صورت تابعی تغییر می‌کند [۳]. مطالعات اولیه در زمینه رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های تک لایه پیزوالکتریک توسط تیرسن [۴] در سال ۱۹۶۹ انجام شد. باترا و ویدولی [۱] در سال ۲۰۰۲ با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی را برای ورق‌های پیزوالکتریک ارائه کردند. پیوتر کوپپال [۵] در سال ۲۰۰۴ به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی پیزوالکتریک با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداخت، معادلات حرکت و درنهایت فرکانس‌های طبیعی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی و روش انرژی به دست آورد. در سال ۲۰۰۵، باترا و ایمنی [۶] ارتعاشات آزاد و توزیع تنش ورق‌های مستطیلی همگن و همسانگرد را با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی بررسی کردند. ژنگ ژونگ و تائویو [۷] در سال ۲۰۰۶ به بررسی ارتعاشات ورق مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند، معادلات حرکت و در نهایت فرکانس‌های طبیعی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی به دست آوردند. باترا [۸] در سال ۲۰۰۷ با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی را برای ورق‌های الاستیک خطی غیر قابل تراکم هدفمند ارائه کرد. او معادلات حرکت را برای ارتعاشات آزاد ورق و درنهایت فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی را به دست آورد. سعیدی و آتشی‌پور [۹] در سال ۲۰۰۸ به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. ماتسونوگا [۱۰] در سال ۲۰۰۸، نوعی از تئوری مرتبه بالاتر برشی و عمودی را با استفاده از بسط سری تیلور برای آنالیز ارتعاشات و پایداری ورق‌های هدفمند با تکیه‌گاه ساده ارائه کرد. تفاوت اصلی میان این دو تئوری، در نحوه فرض میدان جابه‌جایی و بسط آن در راستای ضخامت می‌باشد. در سال ۲۰۰۹، امینی و همکارانش [۱۱] با در نظر گرفتن چندجمله‌ای‌های چیبیشف و روش ریتز، رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی مطالعه کردند.

اول مورد بررسی قرار دادند. شیخ‌الاسلامی و سعیدی [۱۹] در سال ۲۰۱۳، با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر برشی و عمودی به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند همسانگرد با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند. این تئوری، دقیقاً همان تئوری مورد استفاده در این تحقیق می‌باشد. در این مقاله با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی ورق، حلی دقیق برای بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک در حالت مدار بسته ارائه شده است. نتایج حاصل از این مطالعه در قالب جدول و اشکال برای پارامترهای مختلف ورق ارائه گردیده است. عیسوند زیبایی و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۰۹ به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای نازک با رینگ تقویت شده ساخته شده از مواد هوشمند که ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل می‌باشد، پرداختند. این تحقیق براساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی و براساس اصل همپلتون انجام پذیرفت، این مطالعه نشان می‌دهد که رینگ تقویت شده روی فرکانس‌ها اثر می‌گذارد و این اثر به موقعیت رینگ و شرایط مرزی بدنه استوانه‌ای هوشمند بستگی دارد.

۲- فرضیات سینماتیکی

هندسه ورق به صورت مستطیلی با طول l_1 و عرض l_2 در نظر گرفته می‌شود. ضخامت ورق نیز h فرض می‌شود. دستگاه مختصات دکارتی ساعت‌گرد به نحوی روی جسم قرار می‌گیرد که محورهای x_1 و x_2 به ترتیب موازی اضلاع l_1 و l_2 بوده و صفحه میانی ورق منطبق بر صفحه x_1, x_2 می‌باشد. (شکل ۱)



شکل (۱): نمای شماتیک ورق

معادلات متشکله برای یک لایه پیزوالکتریک هدفمند را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (۱-الف)$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [E] \{E\} \quad (۱-ب)$$

شرعیات و امینی [۱۲] در سال ۲۰۰۹ با بررسی اثر به‌کارگیری لایه‌های پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی ورق هدفمند چهار گوش با روش المان محدود نشان دادند که استفاده از لایه پیزوالکتریک تأثیر اندکی بر مقادیر فرکانس طبیعی داشته و بر شکل مودهای ارتعاشی بی‌تأثیر است، لذا می‌توان از ویژگی‌های لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر برای کنترل فعال ارتعاشات سیستم‌ها استفاده کرد. حسنی و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۰ با ارائه حل دقیق برای شرایط مرزی مختلف، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی نازک ساخته شده از مواد هدفمند را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها با استفاده از تئوری کلاسیک معادلات حرکت را به‌دست آوردند. در این تحقیق علاوه بر بررسی پارامترهای هندسی، به بررسی اثر در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی سیستم نیز پرداخته‌اند. لیو و همکارانش [۱۴] در سال ۲۰۱۰ با فرض توزیع درون صفحه‌ای مواد هدفمند و با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی کردند. یکی از اثرات مهم لایه‌های پیزوالکتریک موسوم به اثر پیزو در دو حالت مدار بسته و مدار باز توسط وو و همکارانش [۱۵] در سال ۲۰۱۰ بررسی شد. در این تحقیق تغییرات میدان پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت به‌صورت ترکیبی از توابع سهموی و خطی در نظر گرفته شده است، آنها اظهار داشتند که این اثر اگرچه برای حالت مدار بسته تقریباً ناچیز است ولی نقش مهمی در حالت مدار باز ایفا می‌کند. بافرانی و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۱ جوابی دقیق برای ارتعاشات ورق‌های مستطیلی هدفمند ضخیم قرار گرفته روی بستر الاستیک ارائه کردند. آنها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و اصل همپلتون و با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای معادلات حرکت را به‌دست آوردند، و به این نتیجه دست یافتند که در برخی از شرایط مرزی، جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای اثری مهم بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق‌های هدفمند ضخیم دارند. عسکری فرسنگی و سعیدی [۱۷] در سال ۲۰۱۲ با ارائه حل دقیق برای شرط مرزی لوی، ارتعاشات ورق‌های مستطیلی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همپلتون معادلات حاکم را به‌دست آوردند، و به این نتیجه رسیدند که اثر لایه‌های پیزوالکتریک بر روی فرکانس‌های طبیعی به شدت به شرایط مرزی الکتریکی و مکانیکی وابسته است. بداغی و شاکری [۱۸] در سال ۲۰۱۲ ارتعاشات پوسته استوانه‌ای هدفمند پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه

چند جمله‌ای نوشت. یکی از انواع بسط چند جمله‌ای، بسط با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر می‌باشد. این چند جمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a(z) L_b(z) dz = \delta_{ab} \quad (7)$$

$$a, b = 0, 1, 2, \dots, K$$

$$L_{n-1}(z) = \sqrt{\frac{(2n-1)}{h}} P_{n-1}(z)$$

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_1(z) = \frac{2z}{h},$$

$$P_{n+1}(z) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(\frac{2z}{h}\right) P_n(z) - \left(\frac{n}{n+1}\right) P_{n-1}(z) \quad (8)$$

که در آن، K مرتبه تئوری مورد استفاده می‌باشد.

با استفاده از چند جمله‌ای‌های فوق می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به صورت زیر بازنویسی کرد [۸]:

$$v_1(x_1, x_2, z, t) = L_a(z) v_1^a(x_1, x_2, t),$$

$$v_2(x_1, x_2, z, t) = L_a(z) v_2^a(x_1, x_2, t),$$

$$w(x_1, x_2, z, t) = L_a(z) w^a(x_1, x_2, t).$$

$$a = 0, 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

می‌توان مشتق چند جمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چند جمله‌ای‌ها به صورت زیر نوشت:

$$L'_a(z) = D_{ab} L_b(z) \quad (10)$$

که در معادله فوق، D ماتریس ضرایب مشتق می‌باشد. برای نمونه، برای تئوری مرتبه ۵ درایه‌های این ماتریس به صورت زیر می‌باشند [۱۹]:

$$[D] = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

بنابراین مشتق اول مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نسبت به z را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$v_{\alpha, \beta} = L_a v_{\alpha, \beta}^a, \quad v_{\alpha, z} = D_{ab} L_b v_{\alpha}^a, \quad (12)$$

$$w_{\alpha} = L_a w_{\alpha}^a, \quad w_{\alpha, z} = D_{ab} L_b w_{\alpha}^a.$$

که در این روابط، زیرنویس‌های α, β نشان‌دهنده راستاهای x_1, x_2 می‌باشند.

تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

در رابطه (۱)، $[C_{ij}]$ ماتریس سختی پیزوالکتریک، $[E]$ ماتریس نفوذپذیری دی الکتریک مطلق و $[e]$ ، عامل کوپل الکترومکانیکی، ماتریس ثابت شارژ ماده پیزوالکتریک می‌باشند، نکته قابل توجه این است که خواص این ماده به صورت تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

به منظور ارضا کردن معادله ماکسول و همچنین شرایط مرزی الکتریکی، میدان پتانسیل به صورت زیر فرض شده است [۱۸]:

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t) \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad (2)$$

شرایط مرزی الکتریکی بر دو سطح الکتروود در حالت مدار بسته را می‌توان چنین نوشت [۱۸]:

$$\Phi \left(z = \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (3)$$

رابطه میان میدان الکتریکی (E) با پتانسیل الکتریکی (Φ)، مشابه با ارتباط میان نیروی پایستار و تابع پتانسیل در مکانیک، به صورت زیر بیان می‌گردد [۱۷]:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (4)$$

مدل‌های متفاوتی برای بیان توزیع ماده در یک ورق از جنس ماده هدفمند وجود دارد. این مدل‌ها عموماً توزیع خواص بین دو لایه بالایی و پایینی ورق را به صورت توابع مشخصی از ضخامت ورق در نظر می‌گیرند. در این مدل، تغییرات خواص در راستای ضخامت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$E(z) = E_d + (E_u - E_d) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (5)$$

که در این رابطه، E بیانگر خواص فیزیکی یا مکانیکی جسم مانند چگالی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و غیره می‌باشد.

که E_d و E_u به ترتیب معرف خواص در $\left\{ z = \frac{h}{2} \right\}$ و

$\left\{ z = -\frac{h}{2} \right\}$ بوده و پارامتر N نشان‌دهنده توان ماده هدفمند

پیزوالکتریک می‌باشد.

در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۸]:

$$u_i(x_1, x_2, z, t) = v_{\alpha}(x_1, x_2, z, t) \delta_{i\alpha} + w(x_1, x_2, z, t) \delta_{i3} \quad (6)$$

که در آن، u_i معرف مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی کلی جسم بوده، v_{α} و w به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی درون صفحه‌ای و خارج از صفحه می‌باشند. زیرنویس α نشان‌دهنده راستاهای

x_1 و x_2 بوده و δ بیانگر تابع دلتای کرونگر می‌باشد. از آنجا

که ضخامت ورق نسبت به ابعاد دیگر کوچک است، می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را در راستای z به صورت بسط

مجازی در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} M_{11,1}^a + M_{12,2}^a + b_1^a + B_1^a - D_{ab}T_1^b &= R_{ab}\ddot{v}_1^b \\ M_{21,1}^a + M_{22,2}^a + b_2^a + B_2^a - D_{ab}T_2^b &= R_{ab}\ddot{v}_2^b \\ T_{\alpha,\alpha}^a + b_3^a + B_3^a - D_{ab}T_3^b &= R_{ab}\ddot{w}^b \end{aligned} \quad (20)$$

در بررسی ارتعاشات آزاد ورق، نیروی حجمی وجود ندارد، و شرایط مرزی در بالا و پایین ورق به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (21)$$

بنابراین با توجه به روابط (۲۱) معادلات (۲۰) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} M_{11,1}^a + M_{12,2}^a - D_{ab}T_1^b &= R_{ab}\ddot{v}_1^b \\ M_{21,1}^a + M_{22,2}^a - D_{ab}T_2^b &= R_{ab}\ddot{v}_2^b \\ T_{1,1}^a + T_{2,2}^a - D_{ab}T_3^b &= R_{ab}\ddot{w}^b \end{aligned} \quad (22)$$

از طرف دیگر تمامی متغیرهای الکتریکی می‌بایست معادله ماکسول را ارضا کنند:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \nabla \cdot D dz = 0 \quad (23)$$

به منظور حل این معادلات، لازم است با استفاده از معادلات (۱)، (۱۸)، (۴)، (۱۴)، روابط را برای ماده هدفمند پیزوالکتریک نوشته و تمام کرنش‌ها را بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی و میدان‌های الکتریکی را بر حسب تابع پتانسیل الکتریکی بیان کرد. در این صورت، به معادلات به دست آمده، معادلات حرکت ورق گفته می‌شود.

با فرض جواب هارمونیک برای ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی، داریم:

$$\begin{aligned} v_\alpha^a(x_1, x_2, t) &= e^{i\omega t} V_\alpha^a(x_1, x_2) \\ w^a(x_1, x_2, t) &= e^{i\omega t} W^a(x_1, x_2) \\ \phi(x_1, x_2, t) &= e^{i\omega t} \phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن، ω فرکانس طبیعی ارتعاشات ورق می‌باشد. با این فرض، میدان جابه‌جایی جدید (W^a, V_α^a) و میدان پتانسیل جدید ϕ تنها تابع مختصات درون صفحه‌ای می‌شوند. با بازنویسی معادلات (۲۲) و (۲۳) بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی و تابع پتانسیل و با فرض جواب هارمونیک برای ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی، معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک در حالت مدار بسته به دست می‌آیند که در پیوست ۱ ضمیمه شده است. در این معادلات تابعیت زمان از میدان جابه‌جایی جدید حذف شده و در مقابل، به فرم مسئله مقدار ویژه تبدیل می‌شوند. به منظور حل این معادلات، از شرایط مرزی مکانیکی ورق کمک گرفته می‌شود.

با جای‌گزینی معادلات (۱۲) در (۱۳)، رابطه کرنش بر حسب جابه‌جایی حاصل می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= L_a \left[\frac{1}{2} (v_{\alpha,\beta}^a + v_{\beta,\alpha}^a) \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j\alpha}) \right. \\ &\quad \left. \cdot (D_{ba} v_\alpha^b + w_{,\alpha}^a) + \delta_{i3} \delta_{j3} D_{ba} w^b \right] \end{aligned} \quad (14)$$

۳- معادلات حرکت

برای به دست آوردن معادلات حرکت ورق مستطیلی، از معادلات کلی حرکت در دستگاه دکارتی استفاده می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (15)$$

که در آن، σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش، ρ چگالی ورق و b_i مؤلفه‌های بردار نیروهای حجمی ورق می‌باشند. به منظور دستیابی به معادلات حاکم، از اصل کار مجازی استفاده می‌شود. میدان جابه‌جایی مجازی $\delta \eta_i$ و ضرب داخلی آن در معادله (۱۵) و با انتگرال‌گیری روی حجم ورق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \eta_i \sigma_{ij,j} dz dA + \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \delta \eta_i b_i dz dA \\ i = 1, 2, 3 \\ = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \delta \eta_i \ddot{u}_i dz dA \end{aligned} \quad (16)$$

که A مساحت صفحه میانی ورق می‌باشد. با فرض این‌که تابعیت میدان جابه‌جایی مجازی $\delta \eta_i$ از z را بتوان به صورت چندجمله‌ای‌های لژاندر نوشت، داریم:

$$\delta \eta_i(x_1, x_2, z) = L_a(z) \delta \eta_i^a(x_1, x_2) \quad (17)$$

با تعریف پارامترهای زیر:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^a &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} L_a dz, & T_i^a &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} L_a dz, \\ R_{ab} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz, & b_i^a &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a b_i dz, \\ B_i^a &= L_a \left(\frac{h}{2} \sigma_{i3}(x_1, x_2, \frac{h}{2}) \right. \\ &\quad \left. - L_a \left(-\frac{h}{2} \sigma_{i3}(x_1, x_2, -\frac{h}{2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

و با قرار دادن معادله (۱۷) در (۱۶) و همچنین استفاده از روابط (۱۲) و (۹) داریم:

$$\begin{aligned} \int_A \delta \eta_\alpha^a M_{\alpha\beta,\beta}^a dA + \int_A \delta \eta_3^a T_{\alpha,\alpha}^a dA \\ + \int_A \delta \eta_i^a (b_i^a + B_i^a - D_{ab} T_i^b) dA \\ = \int_A \delta \eta_i^a \ddot{u}_i^b R_{ab} dA \quad \alpha, \beta = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین از آنجا که معادله (۱۹) برای تمامی مقادیر $\delta \eta^a$ برقرار است، معادلات حرکت بر ورق با استفاده از اصل کار

برای نشان دادن صحت نتایج به دست آمده از این تئوری، مقایسه‌ای میان نتایج حاصل از این تئوری با نتایج موجود در مقالات معتبر صورت پذیرفته است. برای این منظور، پارامترهای بی‌بعد فرکانس طبیعی زیر تعریف می‌شوند:

$$\Omega = \frac{\omega h \sqrt{\left(\frac{\rho}{c_{11}}\right)_{PZT-4}}}{2\pi} \quad (27)$$

$$\bar{\Omega} = \omega h \sqrt{\left(\frac{\rho}{c_{11}}\right)_{PZT-5}} \quad (28)$$

$$\beta = \omega h \sqrt{\left(\frac{\rho}{c_{11}}\right)_{PZT-6B}} \quad (29)$$

به عنوان مقایسه، فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند پیزوالکتریک مستطیلی با نتایج تئوری الاستیسیته سه‌بعدی در حالت مدار بسته مقایسه شده است. (جدول ۲)، در این مقایسه، پارامتر بی‌بعد فرکانس Ω برای یک ورق مربعی با نسبت ضخامت به طول‌های مختلف و برای توان‌های مختلف ماده هدفمند پیزوالکتریک با نتایج مرجع [۷] مقایسه شده است. در این مقایسه، از تئوری مرتبه ۵ استفاده شده است. همان‌طور که جدول ۲ نشان می‌دهد درصد خطا تئوری مرتبه پنجم تئوری باترا، برای نسبت‌های مختلف ضخامت به طول مشخصه با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خیلی کم می‌باشد، این مقدار خطا هم به دلیل فرض تابع پتانسیل به صورت یک تابع مرتبه دوم از ضخامت می‌باشد، در صورتی که در تئوری الاستیسیته سه‌بعدی تابع پتانسیل را به صورت تابع کلی از x, y, z, t فرض کرده است.

پس از اطمینان از صحت روش، نتایج عددی جدیدی برای بیان رفتار ارتعاشی ورق ارائه گردیده است، مقادیر پارامتر بی‌بعد فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ برای توان‌های مختلف ماده هدفمند پیزوالکتریک و نسبت‌های مختلف طول مشخصه به ضخامت در حالت مدار بسته با استفاده از تئوری مرتبه اول، سوم و پنجم برشی و عمودی در جدول ۳ آمده است. ورق مربعی و ماده هدفمند پیزوالکتریک $PZT-4$ - $PZT-5$ در نظر گرفته شده است. مقادیر داده شده در این جدول، همگرایی جواب‌ها را برای تئوری‌های مرتبه اول تا پنجم به خوبی بیان می‌کند.

برای ورق از جنس $PZT-4$ - $PZT-5$ نیز مقادیر پارامتر فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ برای نسبت‌های طول به عرض متفاوت و ضخامت به طول $(l_1/h = 2, 5)$ با استفاده از تئوری‌های مرتبه پنجم در حالت مدار بسته در جدول ۴ آورده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، افزایش نسبت ابعادی باعث افزایش فرکانس طبیعی ورق می‌شود، همچنین با افزایش

۴- حل تحلیلی معادلات حاکم

به منظور حل معادلات حاکم، شرایط مرزی روی چهار لبه ورق مورد نیاز است. برای یک ورق با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W^a = 0, M_{21}^a = 0, M_{11}^a = 0, \text{ on } x_1 = 0, l_1$$

$$W^a = 0, M_{22}^a = 0, M_{12}^a = 0, \text{ on } x_2 = 0, l_2 \quad (25)$$

به منظور اعمال شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و حل معادلات حاکم در پیوست ۱، از روشی موسوم به روش ناویر استفاده می‌شود. این روش، تابعیت میدان جابه‌جایی از مختصات درون صفحه‌ای را به صورت مجموعی از جملات هارمونیک در نظر می‌گیرد. بنابراین، با توجه به شرط مرزی (۲۵)، میدان جابه‌جایی جدید را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V_1^a &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_1^{amn} \cos\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \\ V_2^a &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_2^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \\ W^a &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{W}^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \\ \phi &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\phi}^{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{l_2}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

در این سری‌ها، m و n تعداد جملات موجود در سری بوده و در مسئله‌ی ارتعاشات ورق، بیانگر شماره مدهای ارتعاشی می‌باشد. با قرار دادن روابط (۲۸) در معادلات حاکم در پیوست ۱ و باز کردن معادلات، معادلات حاکم همگن در پیوست ۲ به دست می‌آیند.

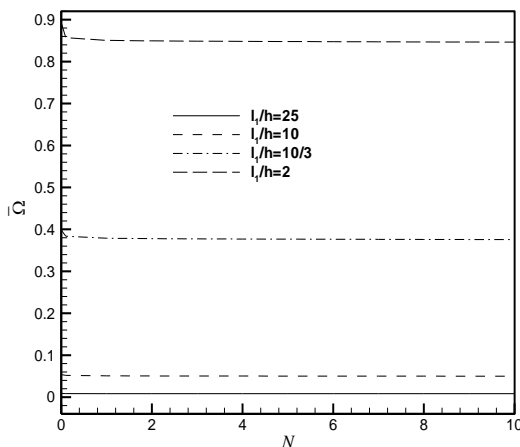
برای حل این دستگاه معادلات همگن، باید دترمینان ضرایب ماتریس مؤلفه‌های جابه‌جایی را برابر با صفر قرار داد. با این کار، مقادیر ویژه دستگاه معادلات که همان فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق هستند، برای مدهای مختلف به دست می‌آیند. پس از به دست آمدن فرکانس‌ها، با قرار دادن آن‌ها در دستگاه معادلات پیوست ۲، بردارهای ویژه یا شکل مدهای ارتعاشی حاصل می‌شوند.

۵- نتایج

در این بخش از مقاله، پس از بررسی درستی روش حل، نتایج عددی در قالب جدول و اشکال ارائه شده است. برای به دست آوردن نتایج عددی از یک ماده هدفمند پیزوالکتریک استفاده شده است. این ماده ترکیب $(PZT-4/PZT-5)$ می‌باشد سطح بالای ورق $PZT-4$ و سطح پایین آن $PZT-5$ می‌باشد. خصوصیات فیزیکی و مکانیکی این مواد در جدول ۱ آمده است.

برای تاکید از نتایج به دست آمده از جدول ۶ اثر نسبت ضخامت به طول بر فرکانس طبیعی بی بعد $\bar{\Omega}$ در مدهای مختلف در شکل ۳ ترسیم شده است. همان طور که دیده می شود با افزایش ضخامت به طول فرکانس طبیعی افزایش می یابد و با توجه به شکل ۳ می توان گفت برای مدهای بالاتر افزایش بیشتری در پارامتر $\bar{\Omega}$ رخ می دهد.

برای بهتر نشان دادن اثر پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی ورق، تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد β ، نسبت به ضخامت به طول در یک N خاص برای حالت مدار بسته در شکل ۴ ترسیم شده است. علاوه بر آن، اثر مکانیکی پیزوالکتریک هدفمند، موسوم به اثرات سختی [۱۵] که از صفر قرار دادن ثوابت $[e]$ در رابطه (۱) به دست می آید، بررسی شده است. در شکل ۴ همان طور که ملاحظه می شود، در نسبت ضخامت های کم، اثر الکتریکی ورق هدفمند پیزوالکتریک، موسوم به اثر پیزو، که به نحوه توضیح تابع پتانسیل در راستای ضخامت وابسته بوده [۱۵] ناچیز می باشد، همچنین اثر الکتریکی لایه هدفمند پیزوالکتریک در کنار افزایش فرکانس طبیعی ورق، با افزایش ضخامت به طول افزایش می یابد، اثر پیزو سبب افزایش فرکانس طبیعی ورق می گردد. وقتی ثوابت $[e]$ مساوی صفر قرار داده می شود فرکانس های طبیعی در حالت مدار بسته اختلافشان با حالتی که اثر الکتریکی در نظر گرفته می شود ناچیز می باشد. برای محاسبه فرکانس طبیعی ورق در حالت مدار بسته می توان از اثر الکتریکی لایه هدفمند پیزوالکتریک در ورق های نازک صرف نظر کرده و تنها اثر مکانیکی آن را در نظر گرفت.



شکل (۲): تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ بر حسب توان ماده هدفمند پیزوالکتریک برای ورق مربعی $PZT-5-PZT-4$ بر اساس تئوری مرتبه پنجم.

نسبت طول به عرض، حساسیت فرکانس طبیعی به توان ماده هدفمند بیشتر می شود.

برای نشان دادن همگرایی فرکانس های طبیعی در حالت مدار بسته نیز مقادیر پارامتر بی بعد فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ برای ورق مربعی $PZT-5-PZT-4$ در یک N خاص و برای نسبت های مختلف ضخامت به طول در حالت مدار بسته در جدول ۵ آورده شده است. همان طور که جدول ۵ نشان می دهد، برای ورق های نازک تقریباً تمامی تئوری ها جواب مشابهی می دهند، اما با افزایش نسبت ضخامت به طول، تئوری های مرتبه بالاتر تقریباً جواب های یکسانی را می دهند، به طوری که با افزایش نسبت ضخامت به طول، تئوری های مرتبه چهارم و پنجم، فرکانس های طبیعی را به خوبی تخمین می زنند.

چهار فرکانس اول $\bar{\Omega}$ برای ورق مربعی $PZT-5-PZT-4$ با تئوری مرتبه پنجم برشی و عمودی در حالت مدار بسته در جدول ۶ آورده شده است. شماره مد فرکانس طبیعی ورق توسط دو عدد در پرانتز جلوی آن مشخص شده است.

با استفاده از تئوری مرتبه ۵، تغییرات پارامتر فرکانس $\bar{\Omega}$ بر حسب توان ماده هدفمند پیزوالکتریک برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول مشخصه برای ورق مربعی. در شکل ۲ نشان داده شده است. همان گونه که در شکل مشاهده می شود، برای ورق های ضخیم، فرکانس طبیعی با افزایش توان ماده هدفمند پیزوالکتریک ابتدا مقداری کاهش می یابد و بعد از آن تقریباً ثابت باقی می ماند، ولی این کاهش خیلی محسوس نمی باشد، در واقع، از آنجا که افزایش توان ماده هدفمند پیزوالکتریک به معنای نزدیک شدن به خاصیت $PZT-5$ می باشد، و چون خاصیت پیزوالکتریک $PZT-5$ کمتر از $PZT-4$ می باشد لذا سختی کلی ورق کاهش می یابد و کاهش سختی باعث کاهش فرکانس طبیعی می شود. در نتیجه، کاهش فرکانس طبیعی دور از انتظار نخواهد بود. از طرفی، با کاهش نسبت ضخامت به طول ورق، فرکانس طبیعی کاهش می یابد (به دلیل کاهش سختی)، با کاهش این پارامتر حساسیت فرکانس طبیعی به توان ماده هدفمند پیزوالکتریک کاهش می یابد به طوری که برای ورق های نازک به دلیل اینکه پروفیل توزیع $PZT-5$ و $PZT-4$ برای توان های مختلف ماده هدفمند پیزوالکتریک بسیار نزدیک به هم هستند، فرکانس طبیعی با افزایش توان ماده هدفمند پیزوالکتریک تقریباً ثابت می ماند.

جدول (۱): خصوصیات مواد پیزوالکتریک [۷] و [۱۷].

مواد	مدول الاستیسیته ($10^9 N m^{-2}$)				
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{55}
<i>P Z T - 6B</i>	۱۶۸	۸۴٫۷	۸۴٫۲	۱۶۳	۳۵٫۵
<i>BaTio₃</i>	۱۵۰	۶۵٫۳	۶۶٫۲	۱۴۶	۴۳٫۹
<i>PZT - 4</i>	۱۳۹	۷۷٫۸	۷۴٫۳	۱۱۵	۲۵٫۶
<i>PZT - 5</i>	۱۲۶	۷۹٫۱	۸۳٫۹	۱۱۷	۲۳

مواد	مدول پیزوالکتریک ($C m^{-2}$)			مدول دی الکتریک ($10^{-9} F m^{-1}$)		چگالی (kg / m^3)
	e_{15}	e_{31}	e_{33}	ϵ_{11}	ϵ_{33}	
<i>P Z T - 6B</i>	۴۶	۰٫۹-	۷٫۱	۳٫۶۰	۳٫۴۲	۷۵۵۰
<i>BaTio₃</i>	۱۱٫۴	۴٫۳-	۱۷٫۵	۹٫۸۷	۱۱٫۱۶	۵۷۰۰
<i>PZT - 4</i>	۱۲٫۷	۵٫۲-	۱۵٫۱	۶٫۴۶	۵٫۶۲	۷۵۰۰

جدول (۲): مقایسه کمترین فرکانس طبیعی Ω برای ورق مربعی با توان‌های مختلف ماده هدفمند پیزوالکتریک با مرجع [۷] با استفاده از تئوری برشی و عمودی مرتبه پنجم در حالت مدار بسته.

N	h/l_1					
	۰٫۱		۰٫۳		۰٫۵	
	نتایج حاضر	تئوری الاستیسیته سبب‌بندی	نتایج حاضر	تئوری الاستیسیته سبب‌بندی	نتایج حاضر	تئوری الاستیسیته سبب‌بندی
۰	۰٫۰۰۸۱۵	۰٫۰۰۸۱۴	۰٫۰۶۰۳۸	۰٫۰۵۹۹۹	۰٫۱۳۵۲۷	۰٫۱۳۳۱۲
۰٫۱	۰٫۰۰۸۱۴	۰٫۰۰۸۱۴	۰٫۰۶۰۳۸	۰٫۰۵۹۹۶	۰٫۱۳۵۲۲	۰٫۱۳۳۰۷
۱	۰٫۰۰۷۸۶	۰٫۰۰۷۸۵	۰٫۰۵۸۳۴	۰٫۰۵۷۹۷	۰٫۱۳۰۶۳	۰٫۱۲۸۵۹
۲	۰٫۰۰۷۱۶	۰٫۰۰۷۱۴	۰٫۰۵۳۵۱	۰٫۰۵۳۱۰	۰٫۱۲۰۰۶	۰٫۱۱۸۱۶
۳	۰٫۰۰۶۳۲	۰٫۰۰۶۳۰	۰٫۰۴۷۸۳	۰٫۰۴۷۴۳	۰٫۱۰۸۱۷	۰٫۱۰۶۵۱
۴	۰٫۰۰۵۵۰	۰٫۰۰۵۵۲	۰٫۰۴۲۳۳	۰٫۰۴۲۱۷	۰٫۰۹۷۰۸	۰٫۰۹۵۹۲
۵	۰٫۰۰۴۷۶	۰٫۰۰۴۸۷	۰٫۰۳۷۴۱	۰٫۰۳۷۶۹	۰٫۰۸۷۳۲	۰٫۰۸۶۹۲

جدول (۳): مقادیر کمترین فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ برای توان‌های مختلف ماده هدفمند پیزوالکتریک در یک ورق مربعی با استفاده از تئوری برشی و عمودی مرتبه اول، سوم و پنجم در حالت مدار بسته.

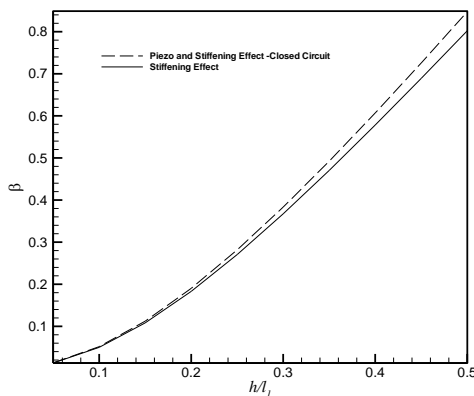
K	l_1/h	$\bar{\Omega}$						
		$N=0$	$N=0.1$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$K=1$	2	0.92005	0.88996	0.88340	0.88139	0.88039	0.87973	0.87922
	10/3	0.41739	0.40855	0.40337	0.40210	0.40149	0.40108	0.40075
	10	0.05824	0.05755	0.05658	0.05632	0.05621	0.05613	0.05607
	25	0.00967	0.00956	0.00940	0.00935	0.00934	0.00932	0.00931
$K=3$	2	0.88050	0.84672	0.83915	0.83708	0.83598	0.83537	0.83476
	10/3	0.39553	0.38199	0.37599	0.37467	0.37401	0.37357	0.37321
	10	0.05372	0.05192	0.05075	0.05045	0.05031	0.05021	0.05014
	25	0.00886	0.00857	0.00836	0.00830	0.00828	0.00827	0.00825
$K=5$	2	0.89270	0.85696	0.85062	0.84994	0.84867	0.84818	0.84781
	10/3	0.39846	0.38375	0.37884	0.37789	0.37738	0.37701	0.37672
	10	0.05380	0.05194	0.05082	0.05053	0.05040	0.05033	0.05026
	25	0.00886	0.00857	0.00836	0.00831	0.00828	0.00828	0.00826

جدول (۴): مقادیر کمترین فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ برای توان‌های مختلف ماده هدفمند پیزوالکتریک در یک ورق با استفاده از تئوری برشی و عمودی مرتبه پنجم در حالت مدار بسته.

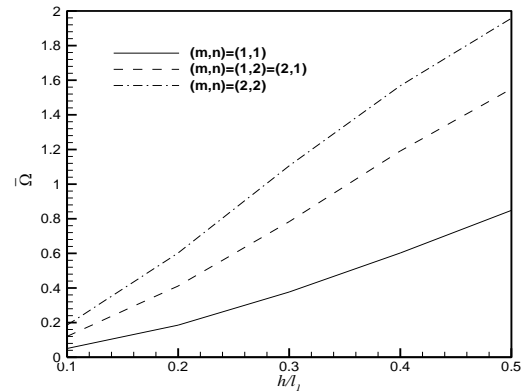
l_1/h	l_1/l_2	$\bar{\Omega}$				
		$N=0$	$N=0.5$	$N=1$	$N=4$	$N=10$
2	0.25	0.54772	0.52296	0.52137	0.51930	0.51784
	1.5	1.2688	1.2116	1.2090	1.2050	1.2029
	2	1.7046	1.6284	1.6202	1.5564	1.5347
	3	2.4479	2.3394	2.2826	2.1956	2.1684
5	0.25	0.11040	0.10515	0.10442	0.10357	0.10332
	1.5	0.30241	0.28850	0.28716	0.28557	0.28435
	2	0.43488	0.41512	0.41366	0.41171	0.41036
	3	0.75437	0.72034	0.71863	0.71643	0.71472

جدول (۵): مقادیر کمترین فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ برای ورق مربعی $PZT-5-PZT-4$ با نسبت‌های مختلف ضخامت به طول مشخصه با تئوری‌های مرتبه اول تا پنجم برشی و عمودی ($N=5$) در حالت مدار بسته.

$h/l_1 = 0.5$	$\bar{\Omega}$				
	$K=1$	$K=2$	$K=3$	$K=4$	$K=5$
0.1	0.05607	0.05033	0.05014	0.05026	0.05026
0.2	0.20171	0.18644	0.18435	0.18542	0.18542
0.3	0.40075	0.38024	0.37321	0.37680	0.37672
0.4	0.63059	0.60906	0.59442	0.60213	0.60203
0.5	0.87922	0.85891	0.83476	0.84794	0.84781



شکل (۴): مقایسه تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی β بر حسب نسبت ضخامت به طول (h/l_1) برای ورق مربعی $PZT-6B$ بر اساس تئوری مرتبه پنجم، در $N=1$ برای حالت مدار بسته.



شکل (۳): تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی $\bar{\Omega}$ بر حسب ضخامت به طول برای ورق مربعی $PZT-4-PZT-5$ بر اساس تئوری مرتبه پنجم برای چهار مد اول در $N=5$.

جدول (۶): چهار فرکانس اول $\bar{\Omega}$ برای ورق مربعی $PZT-4-PZT-5$ با تئوری مرتبه پنجم برشی و عمودی در حالت مدار بسته، ($N=5$)

h/l_1	مدها			
	۱	۲	۳	۴
۰٫۱	۰٫۰۵۰۲۶(۱٫۱)	۰٫۱۲۰۳۳(۱٫۲)	۰٫۱۲۰۳۳(۲٫۱)	۰٫۱۸۵۴۰(۲٫۲)
۰٫۲	۰٫۱۸۵۳۹(۱٫۱)	۰٫۴۱۱۳۶(۱٫۲)	۰٫۴۱۱۳۶(۲٫۱)	۰٫۶۰۱۹۵(۲٫۲)
۰٫۳	۰٫۳۷۶۶۶(۱٫۱)	۰٫۷۸۳۲۳(۱٫۲)	۰٫۷۸۳۲۳(۲٫۱)	۱٫۱۰۵۸۵(۲٫۲)
۰٫۴	۰٫۶۰۱۹۵(۱٫۱)	۱٫۱۹۱۳(۱٫۲)	۱٫۱۹۱۳(۲٫۱)	۱٫۵۶۸۱۳(۲٫۲)
۰٫۵	۰٫۸۴۷۸۱(۱٫۱)	۱٫۵۴۹۷(۱٫۲)	۱٫۵۴۹۷(۲٫۱)	۱٫۹۵۷۹(۲٫۲)

۶- نتیجه گیری

۲- برای ورق‌های نازک، تقریباً تمام تئوری‌ها جواب‌های خوبی می‌دهند. با افزایش ضخامت ورق، برای به‌دست آوردن جواب دقیق‌تر باید مرتبه تئوری ورق را افزایش داد،
 ۳- برای ورق‌های ضخیم و خیلی ضخیم تئوری مرتبه پنجم تئوری باترا جواب‌های خیلی دقیقی را می‌دهد،
 ۴- با افزایش نسبت طول مشخصه به ضخامت حساسیت فرکانس طبیعی به توان ماده هدفمند کاهش می‌یابد،
 ۵- در یک توان ماده هدفمند ثابت، با افزایش نسبت ضخامت به طول مشخصه، فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد و برای نسبت ضخامت به طول بالاتر و مدهای بالاتر افزایش بیشتری در فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق اتفاق می‌افتد،

در این مقاله، با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی، یک حل تحلیلی برای مطالعه ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده در حالت مدار بسته ارائه شده است، مزیت این تئوری این است که، از هیچ تنش و کرنشی صرف نظر نمی‌کند همچنین خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نشده است، به همین دلیل است که برای ورق‌های ضخیم نیز جواب‌های مناسبی را ارائه می‌کند. طبق نتایج عددی، نتایج به‌دست آمده از این مقاله را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت زیر بیان نمود:
 ۱- تئوری تغییر شکل برشی و عمودی باترا برای همه ورق‌ها اعم از نازک، نسبتاً ضخیم و ضخیم جواب‌های بسیار نزدیکی به تئوری الاستیسیته سه بعدی می‌دهد،

- Elastic Foundation". *J. Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 8, pp. 1–9, 2009.
12. Shareiat, M. and Aminaie, A. "Effects of the Use of Piezoelectric Layers for Forced Vibration and Free Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates", *J. Sharif*, Vol. 56, No. 51, pp. 33–41, 2009, (In Persian).
 13. Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E. "Exact Solution for Free Vibration of Thin Functionally Graded Rectangular Plates", *J. Mechanical Engineering Science*, Vol. 225, No. 10, pp. 526–536, 2010.
 14. Liu, D.Y., Wang, C.Y. and Chen, W.Q. "Free Vibration of FGM Plates with In-Plane Material Inhomogeneity", *J. Composite Structures*, Vol. 92, No. 5, pp. 1047–51, 2010.
 15. Wu, N., Wang, Q. and Quek, S.T. "Free Vibration Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate with Open Circuit", *J. Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 8, pp. 1126–1136, 2010.
 16. Baferani, A.H., Saidi, A.R. and Ehteshami, H. "Accurate Solution for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Thick Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation", *J. Composite Structures*, Vol. 93, No. 7, pp. 1842–53, 2011.
 17. Askari Farsangi, M.A. and Saidi, A.R. "Levy Type Solution for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates with Piezoelectric Layers", *J. Smart Mater. Struct.*, Vol. 21, No. 9, pp. 1–15, 2012.
 18. Bodaghi, M. and Shakeri, M. "An Analytical Approach for Free Vibration and Transient Response of Functionally Graded Piezoelectric Cylindrical Panels Subjected to Impulsive Loads", *J. Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1721–1735, 2012.
 19. Sheikholeslami, S.A. and Saidi, A.R. "Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory", *J. Composite Structures*, Vol. 106, No. 12, pp. 350–361, 2013.
 20. Isvandzibaei, M.R. Setareh, M. and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", *Aero. Mech. J.*, Vol. 6, No. 3, pp. 25–38, 2009, (In Persian).

پیوست ۱:

۶- در یک نسبت ضخامت به طول مشخصه ثابت، با افزایش توان ماده هدفمند (نزدیک شدن به سطح با سختی کمتر)، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد،

۷- افزایش نسبت ابعادی باعث افزایش فرکانس طبیعی ورق می‌شود، همچنین با افزایش نسبت طول به عرض، حساسیت فرکانس طبیعی به توان ماده هدفمند بیشتر می‌شود و

۸- به‌طور کلی اثر الکتریکی لایه هدفمند پیزوالکتریک سبب افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق می‌شود. باید توجه داشت که برای حالت مدار بسته در ورق‌های نازک این اثر ناچیز بوده و اثر مکانیکی نقش اصلی در تعیین فرکانس طبیعی ورق را دارد.

۷- مراجع

1. Batra, R.C. and Vidoli, S. "Higher order Piezoelectric Plate Theory Derived From a Three-Dimensional Variational Principle", *J. AIAA*, Vol. 40, No. 1, pp. 91–104, 2002.
2. Jalili, N. "Piezoelectric-Based Vibration Control", Spring, Boston, USA, 2010.
3. Zhu, X. Wang, Q. and Meng, Z. Y. "a Functionally Gradient Piezoelectric Actuator Prepared by Power Metallurgical Process in PNN-PZ-PT System", *J. Sci. Lett*, Vol. 14, No. 10, pp. 516–8, 1995.
4. Tiersten, H.F. "Linear Piezoelectric Plate Vibrations", Plenum, New York, 1969.
5. Cupial, P. "Three-Dimensional Natural Vibration Analysis and Energy Considerations for a Piezoelectric Rectangular Plate", *J. Sound and Vibration*, Vol. 283, No. 3, pp. 1093–1113, 2005.
6. Batra, R.C. Aimmanee, S. "Vibrations of Thick Isotropic Plates with Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theories", *J. Computers and Structures*, Vol. 83, No. 7, pp. 934–55, 2005.
7. Zhong, Zh. and Yu, T. "Vibration of Simply Supported Functionally Graded Piezoelectric Rectangular Plate", *J. Smart Materials and Structures*, Vol. 15, No. 5, pp. 1404–1412, 2006.
8. Batra, R.C. "Higher Order Shear and Normal Deformable Theory for Functionally Graded Incompressible Linear Elastic Plates", *J. Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 12, pp. 974–982, 2007.
9. Saidi, A.R. and Atashipour, S.R. "Analytical Solution of Free Vibration of Thick Transversely Isotropic Rectangular Plates Based on First Order Shear Deformation Theory", *Aero. Mech. J.*, Vol. 4, No. 3, pp. 59–69, 2008, (In Persian).
10. Matsunaga, H. "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates According to a 2-D Higher-order Deformation Theory", *J. Composite Structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 499–512, 2008.
11. Amini, M. H., Soleimani, M. and Rastgoo, A. "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Functionally Graded Material Plates Resting on an

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \\ & + \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 \right] - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz + \omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_c dz \right\} \quad (2-6) \\ & + \tilde{W}^{dmn} \left\{ D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{35} dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} + \\ & \tilde{\varphi}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31} \left[\frac{8z}{h^2} \right] dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz \left[D_{cd} \left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right\} \\ & + \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz \left[D_{cd} \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \quad (2-7) \\ & + \tilde{W}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] - D_{ab} D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{33} dz + \omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_d dz \right\} \\ & + \tilde{\varphi}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{15} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{33} \left[\frac{8z}{h^2} \right] dz \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} dz \left[D_{cd} \left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{31} dz \left[D_{cd} \left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right. \\ & \left. - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c \frac{\partial e_{31}}{\partial z} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right\} + \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} dz \left[D_{cd} \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{31} dz \left[D_{cd} \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c \frac{\partial e_{31}}{\partial z} dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \quad (2-8) \\ & + \tilde{W}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] + D_{bc} D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c e_{33} dz \right. \\ & + D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c \frac{\partial e_{33}}{\partial z} dz \left. \right\} + \tilde{\varphi}^{dmn} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Xi_{11} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Xi_{33} dz \left[\frac{8}{h^2} \right] + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \Xi_{33}}{\partial z} dz \left[\frac{8z}{h^2} \right] \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} \left[V_{1,11}^c + \frac{1}{2} (V_{1,22}^c + V_{2,12}^c) \right] dz \quad (1-1) \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} \left[\frac{1}{2} (V_{2,21}^c - V_{1,22}^c) \right] dz + D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz \left[W_{,1}^d \right] \\ & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31} \left[\frac{8z}{h^2} \varphi_{,1} \right] dz - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz \left[D_{cd} V_{1,1}^c + W_{,1}^d \right] \\ & - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} \left[\left(1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \varphi_{,1} \right] dz = -\omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz V_1^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} \left[\frac{1}{2} (V_{1,21}^c + V_{2,11}^c) + V_{2,22}^c \right] dz \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} \left[\frac{1}{2} (V_{2,12}^c - V_{2,11}^c) \right] dz + D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz \left[W_{,2}^d \right] \quad (1-2) \\ & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31} \left[\frac{8z}{h^2} \varphi_{,2} \right] dz - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz \left[D_{cd} V_{2,2}^c + W_{,2}^d \right] \\ & - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} \left[\left(1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \varphi_{,2} \right] dz = -\omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz V_2^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} \left[D_{cd} (V_{1,1}^c + V_{2,2}^c) + \nabla^2 W^d \right] dz \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{15} \left[\left(1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \nabla^2 \varphi \right] dz - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz \left[V_{1,1}^c + V_{2,2}^c \right] \quad (1-3) \\ & - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b C_{33} dz \left[D_{cd} W^d \right] + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{33} \left[\frac{8z}{h^2} \varphi \right] dz \\ & = -\omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_b dz W^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} \left[D_{cd} (V_{1,1}^c + V_{2,2}^c) + \nabla^2 W^d \right] dz \\ & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Xi_{11} \left[\left(1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \nabla^2 \varphi \right] dz + D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{13} dz \left[V_{1,1}^c + V_{2,2}^c \right] \quad (1-4) \\ & + D_{bc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c e_{33} dz \left[D_{ab} W^d \right] + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Xi_{33} dz \left[\frac{8}{h^2} \varphi \right] \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c \frac{\partial e_{13}}{\partial z} dz \left[V_{1,1}^c + V_{2,2}^c \right] + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c \frac{\partial e_{33}}{\partial z} dz \left[D_{dc} W^d \right] \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \Xi_{33}}{\partial z} \left[\frac{8z}{h^2} \varphi \right] dz = 0 \end{aligned}$$

پیوست ۲:

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[\left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz + \omega^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a L_c dz \right\} \\ & + \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] - \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \left(\frac{n\pi}{l_2} \right) \right] \right\} \quad (2-5) \\ & + \tilde{W}^{dmn} \left\{ D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{35} dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right\} \\ & + \tilde{\varphi}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31} \left[\frac{8z}{h^2} \right] dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] - D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \left[\left(\frac{m\pi}{l_1} \right) \right] \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$