تأثیر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات متقارن محوری ورق میکرو دایره‌ای دوّار

اردشیر کرمی‌محمدی[۱] و مهدی داوری[۲]

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه شاهرود

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۹/۳۰)

چکیده

میرایی ترموالاستیک مهم‌ترین عامل اتلاف انرژی سازه‌های مرتعش از جمله تشدیدکننده‌ها در مقیاس میکرو و نانو در دمای اتاق می‌باشد. در این مقاله، ابتدا معادلات کوپل شده و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات متقارن محوری جانبی ورق دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور مرکزی به‌دست آمده است. سپس حل با روش المان محدود به‌کمک نرم‌افزار ANSYS انجام و ضریب کیفیت برحسب ابعاد، دما و سرعت دورانی ورق به‌دست آمده است. دقت نتایج به‌دست‌آمده در حالت بدون دوران با نتایج به‌دست آمده در مراجع مقایسه شده است. سپس اثر چرخش با توجه به دما و ابعاد ورق، بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی شد. مشاهده شد که میرایی ترموالاستیک در ابعاد معینی بیشترین مقدار را خواهد داشت، که این ابعاد علاوه‌بر دما، به سرعت چرخش نیز بستگی دارد.

واژه‌های کلیدی: میرایی ترموالاستیک، ضریب کیفیت، سیستم‌های میکروالکترومکانیک، ورق دایره‌ای دوّار، ارتعاشات جانبی

Effect of Thermoelastic Damping on Axisymmetric Vibration of Rotating Circular Micro Plate

A. Karami Mohammadi and M. Davari

Department of Mechanical Engineering

University of Shahrood

(Received: 30/April/2013; Accepted: 21/December/2013)

ABSTRACT

Thermoelastic damping is recognized as a significant loss mechanism at room temperature in micro and nano-scale resonators. In this paper, the governing equations of coupled thermoelastic problems are established for axisymmetric out of plane vibration of rotating circular plate with constant angular velocity about its central axis. Then the Quality Factor obtained by finite element analysis using ANSYS software, as a function of rotation, environmental temperature and plate dimensions. The results for non rotating plate are verified based on the results obtained by the previous works. Then the effects of rotation, environmental temperature and plate dimensions on the thermoelastic damping are studied. The results show that, thermoelastic damping would be rise to a maximum value at specific sizes of plate, which is dependent on temperature and angular velocity.

Keywords: Thermoelastic Damping, Quality Factor, Micro Electro Mechanical System (MEMS), Rotating Circular Plate, out of-Plane Vibration

۱- دانشیار: (نویسنده پاسخگو): akaramim@shahroodut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: mdavari@gmail.com

۱-مقدمه

به‌طور کلی اتلافات در سازه‌های مرتعش را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: میرایی داخلی و میرایی خارجی. میرایی خارجی به شرایط مرزی وابسته است و در اکثر موارد با اقدام مناسب می‌توان آن را حذف یا کمینه کرد. اما میرایی داخلی تنها به جنس و مشخصات هندسی سازه وابسته است، بنابراین کمینه کردن اثر مکانیزم‌های داخلی نسبت به مکانیزم‌های خارجی از اهمیت بیشتری برخوردار است. میرایی ترموالاستیک از مهم‌ترین اتلافات داخلی محسوب می‌شود و اهمیت آن زمانی آشکار شد که دانشمندان به ساخت سازه‌هایی در ابعاد میکرو و نانو روی آوردند.

هر نقطه از سازه الاستیک در حال ارتعاش، به‌طور متناوب در حال فشرده شدن و کشیده شدن است. پس در هر لحظه دو ناحیه فشرده و کشیده وجود دارد. در اثر فشردگی دما افزایش و در اثر کشیده شدن دما کاهش می‌یابد، و این امر باعث پدید آمدن یک شیب دمایی بین دو ناحیه فشرده و کشیده می‌شود. طی این فرایند، سازه میل به تعادل دمایی دارد. تحول گرمایی بازگشت ناپذیر بوده و نمی‌تواند در سازه ذخیره شود و موجب افزایش آنتروپی سیستم می‌شود.افزایش آنتروپی سیستم اتلاف انرژی را به‌دنبال دارد، که این اتلاف انرژی را میرایی ترمو الاستیک می‌نامند.

برای رسیدن به تعادل دمایی، نیاز به زمان τ_R، موسوم به زمان مشخصهاست. در بازه فرکانسی پایین $\tau_R \rangle\rangle \omega^{-1}$ ارتعاشات تقریباًهم دما[1] است و اتلاف انرژی ناچیز است و همچنین در بازه فرکانسی بالا $\tau_R \rangle\langle \omega^{-1}$ اتلافات کم و ارتعاشات آدیاباتیک فرض می‌شود.وقتی $\tau_R \approx \omega^{-1}$ باشد، تنش و کرنش خارج از فاز بوده و ماکزیمم اصطکاک داخلی رخ می‌دهد. به این حالت به اصطلاح پیک دبای[2] گفته می‌شود

نخست زنر [۲و۱] به اصطکاک داخلی مواد جامد پرداخت و میرایی ترموالاستیک را برای اولین بار مطرح کرد. او تیر همگن ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار داد و توانست فرم تقریبی و تحلیلی از ضریب کیفیت ارائه دهد. بری [۳] فلز برنج α را مورد آزمایش قرار داد و از تئوری زنر استفاده کرد و به این نتیجه رسید که در دمای اتاق میرایی تابعی از فرکانس می‌باشد. روزارت [۴]، به اثر میرایی ترمو الاستیک در تیرهای تشدیدکننده سیلیکونی در مقیاس میکرو پی برد. او تیرهای مورد آزمایش را به دور از میرایی بیرونی و در خلا در بازه دمایی ۳۰۰ تا ۴۰۰ درجه کلوین و در فرکانس‌های بین ۰/۰۸ تا ۱/۶ مگاهرتز مورد آزمایش قرار داد. نتایج آزمایشات تطابق خوبی با تئوری زنر داشتند. یاسومورا [۵]، همان کار روژاست را انجام داد اما این بار او از نیترات سلیکون و کریستال - سیلیکون برای میکرو رزوناتورها در دمای اتاق استفاده کرد و توانست به نتایج مشابهی با کار روژاست برسد. لیفشیتز و روکس [۶]، به اصلاح کارهای زنر برای تیر نازک با سطح مقطع مستطیلی پرداختند. آنها با در نظر گرفتن پروسه میرایی ترموالاستیک به‌عنوان اصلی‌ترین مکانیزم اتلاف در سیستم‌های میکرو و نانو با استفاده از معادلات خطی ترموالاستیک توانستند عبارت دقیق‌تری را برای ضریب کیفیت به‌دست آورند. همچنین آنان در کار خود آزمایشاتی در مورد ضریب کیفیت آرسناید ژرمانیم و سیلیکون انجام دادند و مشاهده کردند که ضریب کیفیت بعد از پیک دبای با افزایش ابعاد سازه کاهش پیدا می‌کند. سریکار و همکارانش [۷]، به توسعه مدل زنر با در نظر گرفتن ریزدانه‌های پلی سیلیکون پرداختند. آنها به این نتیجه رسیدند که برای ساخت میکرو تیرهای تشدید کننده در محدوده فرکانسی گیگا هرتز سیلیکون تک کریستال نسبت به سیلیکون ریز دانه عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. دوول [۸]، به مقایسه مقادیر تئوری و مقادیر آزمایشگاهی ضریب کیفیت پرداخت و نشان داد که مدل زنر به‌خوبی می‌تواند اثر ابعاد تیر و مشخصات ماده بر روی ضریب کیفیت را شرح دهد. دوول و همکاران [۹]، به‌کار آزمایشگاهی بر روی میکرو ژیروسکوپ‌ها پرداختند. آنها پی بردند که نوع طراحی و ماده به‌کار گرفته شده تأثیر بسزایی در این میرایی دارد. آنها در انجام آزمایشات خود تأثیر دیگر میرایی‌ها را به حداقل رسانده بودند. هوستون [۱۰]، بر روی سازه‌هایی که دارای شکل مدهای غیر صفر بودند کار کرد. مدل میرایی ترموالاستیک او براساس مشاهداتی بود که در آن مدهای تشدید سازه‌های الاستیک در اکثر مواقع دارای مولفه خمشی بودند. آنان ضریب اشتراک انرژی خمشی را تعیین کردند و آن را در مدل زنر برای میرایی استوانه باریک در حالت خمش خالص به‌کار بردند و به این نتیجه دست یافتند که این میرایی برای میکرو سازه‌ها با ساختار سیلیکونی بسیار مهم است و این اهمیت نیز برای سازه‌ها تا مقیاس ۵۰ نانومتر نیز وجود دارد. استارزوسکی و خیساوا [۱۱]، میرایی ترموالاستیک را در میکرو و نانو تیر با در نظر گرفتن سرعت محدود برای انتقال حرارت به‌وسیله یک سری معادلات انتقال حرارت هیپربولیک بررسی کردند. وانگ و همکاران [۱۲]، به بررسی میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری زنر برای ارتعاشات درون صفحه‌ای رینگ نازک سیلیکونی پرداختند البته آنان به این دلیل رینگ را انتخاب کردند که این

1 -*Iso Thermal*
2- *Debye Peak*

المان کاربرد فراوانی در حسگرهای میکروالکترومکانیکی مانند ژیروسکوپ دارد. آنها ضریب کیفیت را نیز به‌صورت عددی محاسبه کردند و با کارهای زنر و لیفشیتز مقایسه کردند. همچنین تأثیرابعاد هندسی رینگ بر ضریب کیفیت را نیز بررسی نمودند. سودیپتو وهمکاران [۱۳]، مدل کلاسیک میرایی ترموالاستیک را با در نظر گرفتن یک تحریک الکترواستاتیکی دلخواه بهبود بخشیدند. مرتبه‌های بالای فرکانس‌های تحریک که در نوسانات ناشی از طبیعت غیرخطی نیروی الکترو استاتیکی ظاهر می‌شوند نیز در مدل اصلاح شده در نظر گرفته شدند. آنها با روش انرژی یک تیر با تغییر شکل بزرگ با میرایی فیلم فشاری از سیال و میرایی ترموالاستیک را در نظر گرفته و ضرایب کیفیت را برای حالت‌های متفاوت محاسبه کردند. نایفه و یونس [۱۴]، یک مدل تحلیلی برای ضریب کیفیت یک میکرو صفحه مستطیلی با اعمال بار الکترو استاتیکی و بدون آنارائه کردند. آنها با جدا کردن معادله کوپل شده هدایت حرارتی از معادله ارتعاشی صفحه به حل مسئله پرداختند. همچنین آنها از روش اغتشاش[1] برای به‌دست آوردن ضریب کیفیت در قالب یک عبارت تحلیلی کمک گرفتند و کارهای خود را با نتایج زنر و لیفشیتز مقایسه کردند. پراباکار و همکارانش [۱۵]، مدلی دو بعدی برای میرایی ترموالاستیک ارائه دادند و تئوری یک بعدی زنر و لیفشیتز را بهبود بخشیدند. برای حل معادله دو بعدی هدایت حرارتی از روش تابع گرین استفاده کردند و ضریب کیفیت را به‌صورت سری نامحدود محاسبه نمودند. آنها اثرات مختلفی همانند هندسه تیر فرکانس طبیعی شکل مدهای خمشی شرایط مرزی را بر روی ضریب کیفیت میکرو تیر تشدید کننده سیلیکونی تک کریستالی بررسی کردند. خطای به‌دست آمده با مدل یک بعدی بین ۲ تا ۸۰ درصد گزارش شد.

یای و متین [۱۶]، با استفاده از روش اجزائ محدود فرمولبندی خاصی را برای میرایی ترموالاستیک میکرو تیرهای تشدید کننده ارائه دادند. آنها با استفاده از روش آشوب در حل معادله دینامیکی تیر و هدایت حرارتی به معادله مقدار ویژه خطی رسیدند. سپس این معادله را برای تیری با تکیه‌گاه ساده با روش اجزاء محدود حل کردند و نتایج به‌دست‌آمده را با نتایج تحلیلی زنر و لیفشیتز مقایسه کردند و به نتایج خوبی رسیدند. آنها نیز همانند دیگران به تأثیر عوامل مختلف بر روی ضریب کیفیت پرداختند. اوکاموتو و همکاران [۱۷] به‌کار آزمایشگاهی پرداختند و تأثیر دما بر میرایی ترموالاستیک را بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که برای میکرو تیر یک سر گیردار از جنس ژرمانیم آرسنیک در دمای ۵۰ درجه کلوین میرایی ترموالاستیک کمینه می‌شود. و دلیل آن را این گونه توجیه کردند که در دمای ۵۰ درجه کلوین گرادیان دمای به‌وجود آمده در اثر میرایی با توزیع گرمایی خنثی می‌شود و این بدان معنا بود که می‌توان با تغییر دما حساسیت حسگرهای تشدیدکننده را بهبود بخشید. راشد و الاتا [۱۸]، میرایی ترموالاستیک ارتعاشات محوری تیری متشکل از دو لایه متفاوت را بررسی کردند و متوجه شدند که هرچه لایه روی تیر نازک‌تر باشد میرایی کمتر است. سرا و بونالدی [۱۹]، با استفاده از روش اجزاء محدود فرمول بندی براساس یک شکل ضعیف مسئله مقدار مرزی برای ترموالاستیسیته کاملاً کوپل شده ارائه دادند. با انتگرال‌گیری روی تابع اتلافی که به‌دست آورده بودند در یک سیکل نوسانی می‌توان میرایی ترموالاستیک را به‌دست آورد. آنها با استفاده از اصل تغییرات بایوت در ترموالاستیسیته شکل فیزیکی تابع اتلاف را نشان دادند. همچنین معادلات کوپل شده المان محدود را با تغییرات کوچک هارمونیکی مکانی و دمایی و با در نظر گرفتن تعادل ترمودینامیکی به‌دست آوردند. در این فرمول بندی دو المان در نظر گرفته شده است. المان اول، المان ۸ گره‌ای جدیدی بود که بر اساس تئوری ورق ریسنر و میندلین که هم بر سازه‌های نسبتا ضخیم و هم بر سازه‌های نازک کاربرد دارد بنا شده بود. المان دوم، المان ۲۰ گره ای از نوع ترموالاستیک ایزو پارامتریک سه بعدی است که برای مدل کردن سازه‌های حجیم مناسب است. آنها نیز به مقایسه رفتار این دو المان در یک تیر نازک پرداختند. مچکالف و همکاران [۲۰]، به این موضوع پی بردند که مهم‌ترین میرایی در یک تشدید کننده میکرو الکترو مکانیکی با ضخامت ۱/۵ میکرومتر میرایی ترموالاستیک است. آنها با قرار دادن دو تشدید کننده در دو فرکانس متفاوت ۴۶۰ و ۵۱۰ کیلو هرتز در خلا ضریب کیفیت را پایین آوردند و با تغییرات دما از ۱۲۰ تا ۴۰۰ درجه کلوین به این نتیجه رسیدند که میرایی و ضریب کیفیت این دو تشدید کننده در دو آهنگ متفاوت افزایش می‌یابد که با تئوری زنر همخوانی دارد. رضازاده و همکاران [۲۱]، معادلات ترموالاستیک میکرو تیر خازنی یک تشدید کننده را با مدل هدایت گرمایی غیر فوریه‌ای به‌دست آوردند. در این مطالعه آنان فرض کردند که هدایت گرمایی درد و راستای طولی و عرضی صورت می‌گیرد. ضریب کیفیت ترموالاستیک را در دو حالت از مدل هدایت حرارتی یک بعدی سهموی مقایسه کردند و دریافتند که دو حالت مذکور با یک بعدی سهموی انطباق خوبی دارد. همچنین آنها تأثیر اندازه و ابعاد را بر ضریب کیفیت بررسی کردند و ضخامت بحرانی

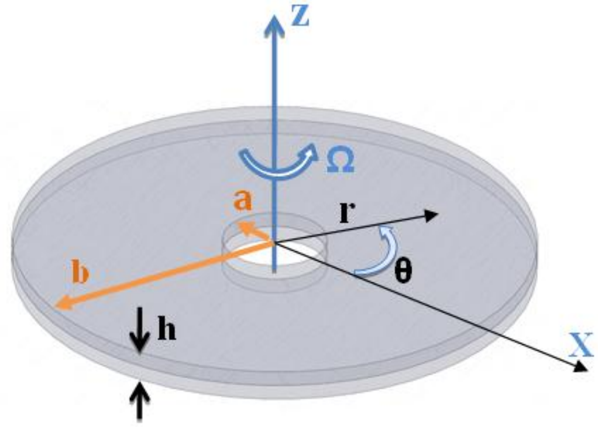
1- Perturbation

به‌دست آمده را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. از طرفی تأثیر ولتاژ توقف را بر ضریب کیفیت مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که ولتاژ توقف ضریب کیفیت را کاهش می‌دهد. کومار و هاکو [۲۲]، به این نتیجه رسیدند که راه حلی برای کاهش میرایی ترموالاستیک وجود ندارد و تأثیر نیروی محوری پسماند میکرو تیر را بر این میرایی مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که افزایش نیروی محوری هم باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود و هم ضریب کیفیت را افزایش می‌دهد بنابراین آنها برای کنترل این میرایی تغییر در نیروی محوری را پیشنهاد داده‌اند. پراباکار [۲۳]، به رابطه بین فرکانس و میرایی ترمو الاستیک درمیکرو تیر اولر برنولی که از سه لایه متفاوت تشکیل شده بود در دو حالت سرامیک - سرامیک و سرامیک – فلز پرداختند و همچنین تأثیر نوع ماده و نسبت حجمی آنها را مورد بررسی قرارداده و به این نتیجه رسیدند که میکرو تیرهایی که از سیلیسیم و کاربید سیلیسیم ساخته شده‌اند و با طلا نقره مس یا آلومینیوم آبکاری شده‌اند میرایی بیشتری نسبت به نوع بدون آبکاری آن میکرو تیرها دارند. همچنین میکرو تیرهایی که از سیلیسیم ساخته شده‌اند و با کاربید سیلیسیم پوشش داده شده اند در نمودار میرایی آنها قله بزرگتری دیده می‌شود که با افزایش نسبت حجمی کاربید سیلیسیم به سیلیسیم این قله‌ها افزایش می‌یابند. همچنین استریکال و سایرم برای تیر دولایه کار مشابه‌ای انجام دادند. چویی و همکاران [۲۴]، یک پوسته نیم کروی را بررسی کردند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله شعاع و ضخامت شعاعی را بر روی ضریب کیفیت بررسی کردند. هائو وهمکاران [۲۵]، به محاسبه میرایی ترموالاستیک تشدیدکننده‌های میکرو مکانیکی با استفاده از روش انرژی گرمایی پرداختند. آنها انرژی گرمایی را در هر سیکل نوسانی محاسبه کردند. روش انرژی گرمایی در مقایسه با روش فرکانس – مختلط، شامل اعداد مختلط نیست و می‌توان آن را در نرم‌افزار انسیس اجرا کرد. نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصله از چندین روش دیگر انطباق خوبی دارد. این روش را می‌توان برای هندسه‌های پیچیده نیز توسعه داد. مندزا وهمکاران [۲۶]، میرایی ترموالاستیک تیر یک سر گیردار را با در نظر گرفتن ترم‌های خطی و غیر خطی آن شبیه‌سازی عددی کرده و با یکدیگر مقایسه کردند. نتایج با فرض جابه‌جایی‌های بزرگ، سخت شوندگی و کاهش زمان تأخیر برای دامنه نوسانات را نشان می‌دهد. چویی و همکاران [۲۷]، یک فرمولبندی اجزاء محدود برای یک مسئله کاملاً کلی ترموالاستیک ارائه دادند. از آنجا که حل مقادیر ویژه بسیار پیچیده و زمان بر است بنابراین ایده کاهش مدل را ارائه کردند که کارایی محاسبات را بالا می‌برد. در نهایت حل خود را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. یای [۲۸]، نیز با استفاده از روش اجزاء محدود به میرایی ترموالاستیک تشدید کننده‌های میکرومکانیکی پرداخته است. او از روش آشوب برای به‌دست آوردن معادله مقدار ویژه خطی استفاده کرده است. این آنالیز همچنین شامل روش فوریه برای کاهش ابعاد مسئله و بهبود کارایی محاسبات می‌باشد. این روش در ابتدا برای تیری با تکیه‌گاه ساده به‌کار رفته است و نتیجه آن با کار زنر مقایسه شده است سپس روش مذکور برای رینگ تشدید کننده سیلیکونی به طور سه بعدی توسعه داده شد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که در نمودار ضریب کیفیت بر حسب ضخامت شعاعی رینگ قله بیشینه وجود دارد. سان و همکاران [۲۹]، میرایی ترموالاستیک میکروتیر را که تحت گرمایش یک باریکه لیزر قرار داشت بررسی کرده و با یک روش عددی تحلیلی مبتنی بر تبدیل لاپلاس مسئله خود را حل کرده و برای صحه‌گذاری از نرم‌افزار فملب[1] استفاده کردند و همچنین ممان و خیز گرمایی را به‌دست آوردند. آنها به بررسی موارد دیگری از جمله ابعاد و میزان تابش لیزر بر روی میرایی پرداختند و در پایان آن را با میرایی سیال مقایسه کردند. کیم و همکاران [۳۰]، ضریب کیفیت رینگ دواری با در نظر گرفتن ارتعاشات درون صفحه‌ای محاسبه کردند. آنها پروفیل دما را با فرضی که برای خمش رینگ در نظر گرفتند و با حل معادله هدایت گرمایی به‌دست آوردند. سپس با داشتن توزیع دما معادله حرکت مدل را به‌دست آوردند و بر اساس آن مقادیر ویژه را به‌دست آوردند سپس با تحلیل مقدار ویژه برای ارتعاشات آزاد، ضریب کیفیت را محاسبه کردند. یانگ ژو سیلیکون SOI را مورد آزمایش قراردادند. آنها نیز از روش عددی که همان روش انرژی گرمایی بود استفاده کردند. سان و تومایو [۳۲]، به استخراج معادلات ارتعاشی متقارن محوری ورق دایروی با کوپلینگ ترموالاستیک پرداختند و توانستند میرایی ترموالاستیک را در قالب یک عبارت بیان کنند. همچنین به بررسی اثر دمای محیط، شرایط مرزی و ابعاد ورق بر میرایی ترموالاستیک نیز پرداختند.

در این مقاله ابتدا معادلات کوپل شده و غیر خطی حاکم بر ارتعاشات متقارن محوری جانبی ورق دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور مرکزی به‌دست آمده است. سپس حل با روش المان محدود به کمک نرم‌افزار "انسیس" انجام و ضریب

1- Femlab

کیفیت بر حسب ابعاد ، دما و سرعت دورانی ورق به‌دست آمده است. دقت نتایج به‌دست آمده در حالت بدون دوران با نتایج به‌دست آمده توسط سان [۳۲] مقایسه شده است. سپس اثر چرخش با توجه به دما و ابعاد ورق، بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی شده است.



شکل (۱): تصویری از میکرو ورق دایروی و سیستم مختصات.

۲- استخراج معادلات حرکت

در این قسمت به بررسی و استخراج معادلات حرکت ورق دایروی چرخان با کوپلینگ ترموالاستیک می‌پردازیم. برای ساده‌سازی معادلات از تئوری ورق کیرشهف استفاده شده است [۳۳].

۲-۱-معادله حرکت جانبی ورق دایروی دوّار

همان طور که در شکل **۱** نشان داده شده است ورق دایروی دارای ضخامت یکسان h، شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b می‌باشد. در اینجا از سیستم مختصات استوانه‌ای که مبدأ آن منطبق بر مرکز ورق می‌باشد استفاده شده است. صفحه خنثی منطبق بر صفحه (r,θ) و محور z عمود بر این صفحه می‌باشد. در حالت تعادل ورق بدون تنش و کرنش، و دمای سرتاسر ورق نیز همان دمای محیط یعنی T_0 است. در حالت کلی میدان دما تابعی از زمان و مختصات (r,θ,z) می‌باشد. ورق با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور عمود بر ورق (محور z) دوران می‌کند. موقعیت نقطه P با مختصه شعاعی r، مختصه مماسی θ، و مختصه جانبی z تعریف می‌شود. بنابراین جابجایی نقطه P در راستای شعاعی، مماسی و جانبی را می‌توان به‌صورت رابطه (۱) نوشت:

$$u_r = u - z\frac{\partial w}{\partial r}, u_\theta = v - z\frac{\partial w}{r\partial\theta}, u_z = w. \qquad (۱)$$

که u و v و w به ترتیب جابه‌جایی شعاعی، مماسی، و قائم نقطه P_0 در صفحه میانی (صفحه خنثی) ورق می‌باشند و تابعی از زمان و مختصات $r,\ \theta$ هستند.انرژی جنبشی بر حسب مکان وسرعت چرخش نشان داده می‌شود. بردار مکان نقطه p عبارت است از:

$$r = (r+u_r)e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z \qquad (۲)$$

که، (e_r, e_θ, e_z) بردارهای یکه به‌ترتیب در جهات $(r,\ \theta,\ z)$ می‌باشند، و سرعت زاویه‌ای ورق:

$$\omega = \Omega e_z \qquad (۳)$$

و بردار سرعت نقطه p به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$V = V_p - zV_b \qquad (۴)$$

V_p، بردار سرعت درون صفحه‌ای و V_b، بردار سرعت ناشی از خمش است و

$$V_p = \left[\frac{\partial u}{\partial t} - v\Omega\right]e_r + \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (r+u)\Omega\right]e_\theta, + \frac{\partial w}{\partial t}e_z \qquad (۵)$$

$$V_b = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial r} + \Omega\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right]e_r, - \left[\frac{\partial^2 w}{r\partial t\partial\theta} + \Omega\frac{\partial w}{\partial r}\right]e_\theta \qquad (۶)$$

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ورق با استفاده از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2}\rho h\int_A V_p.V_p\, dA \qquad (۷)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_A \varepsilon^T \sigma\, dA \qquad (۸)$$

که، ε بردار کرنش و σ بردار تنش می‌باشند. با استفاده از تئوری کرنش ون کارمن بردار کرنش به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L + \varepsilon_p^N \\ \varepsilon_b^L \end{Bmatrix} \qquad (۹)$$

که، L و N نشان‌دهنده جملات خطی و غیرخطی‌اند و داریم [۳۵]:

$$\varepsilon_p^L = \left\{\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{u}{r}, \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right\}^T \qquad (۱۰)$$

$$\varepsilon_p^N = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right)^2, \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right\}^T \tag{۱۱}$$

$$\varepsilon_b^L = \left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, -\left(\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial \theta^2}\right), -2\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2\partial \theta}\right)\right\}^T \tag{۱۲}$$

می توان بردار تنش را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\sigma = D\varepsilon^L \tag{۱۳}$$

که در آن، ماتریس D و بردارهای σ, ε^L عبارتند از:

$$\sigma = \begin{Bmatrix}\sigma_p\\ \sigma_b\end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^L = \begin{Bmatrix}\varepsilon_p^L\\ \varepsilon_b^L\end{Bmatrix}, D = \begin{bmatrix}D_p & 0\\ 0 & D_b\end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

لازم به‌ذکر است که، σ_p بردار نیروهای داخلی خطی شده و σ_b بردار مومنتوم داخلی است:

$$\sigma_p = \{q_r \quad q_\theta \quad q_{r\theta}\}^T, \quad \sigma_b = \{m_r \quad m_\theta \quad m_{r\theta}\}^T \tag{۱۵}$$

و نیز D_P و D_b عبارتند از:

$$D_b = D\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}$$

$$D_b = D_0\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

که در آن، D صلبیت کششی و D_0 صلبیت خمشی می‌باشد:

$$D_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{۱۷}$$

q_r، q_θ و $q_{r\theta}$ بردار نیروهای داخلی خطی شده بر واحد طول و m_r، m_θ و $m_{r\theta}$ بردارهای مومنتوم داخلی بر واحد طول می‌باشد [۳۴].

$$q_r = D_\circ\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial v}{r\partial \theta}+\frac{u}{r}\right)\right] \tag{۱۸}$$

$$q_\theta = D_\circ\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta}+\frac{u}{r}\right] \tag{۱۹}$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2}D_\circ\left[\frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right] \tag{۲۰}$$

$$m_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right)\right] \tag{۲۱}$$

$$m_\theta = -D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right)\right] \tag{۲۲}$$

$$m_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2}D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta} - \frac{\partial w}{r\partial \theta}\right] \tag{۲۳}$$

برای در نظر گرفتن اثر دما می توان نوشت [۳۲]:

$$(\sigma_r)_T = -\frac{E}{1-\nu}\alpha_T\vartheta \tag{۲۴}$$

$$(\sigma_\theta)_T = -\frac{E}{1-\nu}\alpha_T\vartheta \tag{۲۵}$$

که در آن،

$$\vartheta = T - T_\circ \tag{۲۶}$$

بنابراین نیرو بر واحد طول برابر است با:

$$(q_r)_T = -\frac{Eh}{1-\nu}\alpha_T\vartheta, (q_\theta)_T = -\frac{Eh}{1-\nu}\alpha_T\vartheta \tag{۲۷}$$

و معادلات (۱۸) تا (۲۰) را می‌توان به‌صورت زیر اصلاح کرد:

$$q_r = D_\circ\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial v}{r\partial \theta}+\frac{u}{r}\right) - (1+\nu)\alpha_T\vartheta\right] \tag{۲۸}$$

$$q_\theta = D_\circ\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta}+\frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha_T\vartheta\right] \tag{۲۹}$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2}D_\circ\left[\frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right] \tag{۳۰}$$

محاسبه ممان ناشی از جمله دمایی:

$$(m_r)_T = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_r z dz = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{E}{1-\nu}\alpha_T\vartheta z dz \tag{۳۱}$$

$$(m_r)_T = -D[(1+\nu)\alpha_T M_T] \tag{۳۲}$$

$$M_T = \frac{12}{h^3}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\vartheta z dz \tag{۳۳}$$

که، M_T ممنتوم گرمایی نام‌گذاری می‌شود، و همین طور:

$$(m_\theta)_T = -D[(1+\nu)\alpha_T M_T] \tag{۳۴}$$

بنابراین معادلات (۲۱) تا (۲۳) را می‌توان به‌صورت زیر اصلاح کرد:

$$m_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right) + (1+\nu)\alpha_T M_T\right] \tag{۳۵}$$

$$m_\theta = -D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{r\partial \theta}\right) + (1+\nu)\alpha_T M_T\right] \tag{۳۶}$$

$$m_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2} D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial w}{r\partial\theta}\right] \qquad (۳۷)$$

کار نیروهای غیر پایستار را نیز می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$W_{\mathrm{nc}} = \int_{\mathrm{A}} (\mathrm{P_r u + P_\theta v + P_z w})\mathrm{dA} \qquad (۳۸)$$

با استفاده از انرژی جنبشی رابطه (۷)، انرژی پتانسیل رابطه (۸) و کار نیروهای غیر پایستار رابطه (۳۸)، اصل هامیلتون، معادلات حرکت به‌صورت زیر به‌دست خواهدآمد:

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega\frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u\right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{r\theta}}{r\partial\theta} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h\Omega^2 r + p_r \qquad (۳۹)$$

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega\frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v\right] - \frac{\partial q_\theta}{r\partial\theta} - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2\frac{q_{r\theta}}{r} = p_\theta \qquad (۴۰)$$

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] + D\nabla^4 w + D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2 M_T - \frac{\partial}{r\partial r}\left[r\left(q_r\frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta}\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right)\right] - \frac{\partial}{r\partial\theta}\left(q_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r} + q_\theta\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) = p_z \qquad (۴۱)$$

که در آن،

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} \qquad (۴۲)$$

و شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial r} = 0,\ r = a \qquad (۴۳)$$

$$q_r = 0,\ q_{r\theta} = 0,\ m_r = 0, \qquad (۴۴)$$

$$-D\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial r} + \frac{\partial m_{r\theta}}{r\partial\theta} = 0,\ r = b \qquad (۴۵)$$

معادلات (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) به‌ترتیب معادلات حرکت در سه راستای شعاعی، مماسی و جانبی است. معادلات حرکت در راستای شعاعی و مماسی خطی است اما معادله ارتعاشات جانبی به‌صورت غیر خطی به‌دست آمده است. مشاهده می‌شود که سه معادله به‌دست آمده کاملاً به هم وابسته می‌باشند. به عبارت دیگر، جابه‌جایی در راستای جانبی متاثر از جابه‌جایی در راستای شعاعی و مماسی است. با صفر در نظر گرفتن کار

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega\frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v\right] - \frac{\partial q_\theta}{r\partial\theta} - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2\frac{q_{r\theta}}{r} = 0 \qquad (۴۷)$$

$$\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + D\nabla^4 w + D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2 M_T - \frac{\partial}{r\partial r}\left(rq_r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{r\partial\theta}\left(q_\theta\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) = 0 \qquad (۴۸)$$

نیروهای غیرپایستار، معادلات (۳۹) تا (۴۱) به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega\frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u\right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{r\theta}}{r\partial\theta} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h\Omega^2 r \qquad (۴۶)$$

۲-۲- معادله هدایت گرمایی

معادله هدایت گرمایی برای صفحه دایره‌ای شامل عبارت کوپل شده ترموالاستیک [۳۲]:

$$k\nabla^2\vartheta + k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \rho c_v\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \beta T_0 z\frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial t} \qquad (۴۹)$$

که در آن، $\beta = E\alpha_T/(1-2\nu)$ مدول دمایی، k هدایت گرمایی، c_v گرمای ویژه در حجم ثابت و α_T ضریب انبساط دمایی می‌باشند. چون گرادیان دمایی سطح مقطع در راستای ضخامت ورق به‌مراتب بیشتر از گرادیان دمایی در راستای شعاعی می‌باشد. بنابراین در اینجا از عبارت $\nabla^2\vartheta$ در معادله انتقال گرما صرف‌نظر می‌شود [۳۲]:

$$k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \rho c_v\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \beta T_0 z\frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial t} \qquad (۵۰)$$

برای صفحه دایره‌ای متقارن محوری، جابه‌جایی‌ها و همچنین دما به θ وابسته نمی‌باشد، یعنی $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ بنابراین معادلات حاکم بر سیستم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega\frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u\right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h\Omega^2 r \qquad (۵۱)$$

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega\frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v\right] - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2\frac{q_{r\theta}}{r} = 0 \qquad (۵۲)$$

$$\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+D\nabla^4 w+D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2 M_T-\frac{\partial}{r\,\partial r}\left(rq_r\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0 \quad (۵۳)$$

$$k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=\rho c_v\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\beta T_0 z\frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (۵۴)$$

که در آن،

$$q_r=D_\circ\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}-(1+\nu)\alpha_T\vartheta\right] \quad (۵۵)$$

$$q_\theta=D_\circ\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}-(1+\nu)\alpha_T\vartheta\right] \quad (۵۶)$$

$$q_{r\theta}=\frac{1-\nu}{2}D_\circ\left[\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right] \quad (۵۷)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r},\nabla^4=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}\right).\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}\right)$$

و شرایط مرزی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u=0,\ v=0,\ w=0,\ \frac{\partial w}{\partial r}=0,\ r=a \quad (۵۸)$$

$$m_r=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+(1+\nu)\alpha_T M_T\right]=0,\quad r=b \quad (۵۹)$$

$$-D\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial r}=0,\ r=b \quad (۶۰)$$

$$q_r=D_\circ\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}-(1+\nu)\alpha_T\vartheta\right]=0,\ r=b \quad (۶۱)$$

$$q_{r\theta}=\frac{1-\nu}{2}D_\circ\left[\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right]=0,\ r=b \quad (۶۲)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=0,\ z=\pm h/2 \quad (۶۳)$$

۲- میرایی ترمو الاستیک در ورق دایروی دوّار

با جایگذاری q_r ، q_θ و $q_{r\theta}$ به‌ترتیب از معادلات (۵۵)، (۵۶) و (۵۷) در معادلات (۵۱) و (۵۲) و (۵۳) می توان نوشت:

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\Omega\frac{\partial v}{\partial t}-\Omega^2 u\right]-D_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}-(1+\nu)\alpha_T\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right]=\rho h\Omega^2 r \quad (۶۴)$$

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2\Omega\frac{\partial u}{\partial t}-\Omega^2 v\right]-\frac{1-\nu}{2}D_\circ\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{r\partial r}-\frac{v}{r^2}\right]=0 \quad (۶۵)$$

که با توجه به فرضیات قبل، از عبارت $\frac{\partial\vartheta}{\partial r}$ صرف‌نظر می‌شود و معادله (۶۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\Omega\frac{\partial v}{\partial t}-\Omega^2 u\right]-D_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}\right]=\rho h\Omega^2 r \quad (۶۶)$$

با حل معادلات (۶۵) و (۶۶) و جایگذاری v ، u در معادلات (۵۵) و (۶۵) نتیجه می شود:

$$q_r=\frac{3+\nu}{8}\rho h\Omega^2(b^2-r^2)+\frac{\rho\Omega^2 a^2(1-\nu^2)[b^2(3+\nu)-a^2(1+\nu)]}{8\{a^2(1-\nu)+b^2(1+\nu)\}}h\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right) \quad (۶۷)$$

$$q_\theta=\frac{\rho h\Omega^2}{8}[(3+\nu)R^2-(1+3\nu)r^2]-\frac{\rho\Omega^2 a^2(1-\nu^2)[b^2(3+\nu)-a^2(1+\nu)]}{8\{a^2(1-\nu)+b^2(1+\nu)\}}h\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right) \quad (۶۸)$$

برای حل معادله (۵۴)، فرض می‌کنیم [۳۲]:

$$w(r,t)=w_0(r)e^{i\omega t},\quad \vartheta(r,z,t)=\vartheta_0(r,z)e^{i\omega t} \quad (۶۹)$$

با جایگذاری داریم:

$$-\rho h\omega^2 w_0+D\nabla^4 w_0+D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2 M_{T0}-\frac{\partial}{r\partial r}\left(rq_r\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)=0 \quad (۷۰)$$

$$k\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial z^2}=i\omega\rho c_v\vartheta_0-i\omega\beta T_0 z\nabla^2 w_0 \quad (۷۱)$$

با حل معادله بالا داریم :

$$\vartheta_0-\frac{\beta T_0}{\rho c_v}z\nabla^2 w_0=A\sin(mz)+B\cos(mz) \quad (۷۲)$$

که در آن،

$$m=\sqrt{-\frac{i\omega\rho c_v}{k}}=(1-i)\sqrt{\frac{\omega\rho c_v}{2k}} \quad (۷۳)$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$\frac{\partial\vartheta_0}{\partial z}=0,\ z=\pm {}^{h}/_{2} \quad (۷۴)$$

$$A = -\frac{\beta T_0}{\rho c_v}\frac{1}{m\cos(mh/2)}\nabla^2 w_0\,, \quad B = 0. \qquad (۷۵)$$

بنابراین داریم:

$$\vartheta_0(r,z) = -\frac{\beta T_0}{\rho c_v}\nabla^2 w_0\left(z - \frac{\sin(mz)}{m\cos(mh/2)}\right) \qquad (۷۶)$$

همچنین داریم:

$$M_{T_0} = \frac{12}{h^3}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\vartheta_0 z dz \qquad (۷۷)$$

که در آن،

$$M_{T_0} = \Delta_M\big(1 + f(\omega)\big)\nabla^2 w_0 \quad (۷۸)$$
$$\Delta_M = \frac{\beta T_0}{\rho c_v}\,, f(\omega) = \frac{24}{m^3h^3}\left(\frac{mh}{2} - \tan\left(\frac{mh}{2}\right)\right) \qquad (۷۸)$$

معادله نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D_\omega \nabla^4 w_0 - \rho h\omega^2 w_0 - \frac{d}{rdr}\left(rq_r\frac{dw_0}{dr}\right) = 0 \qquad (۷۹)$$

که در آن،

$$D_\omega = D\big[1 + \Delta_D\big(1 + f(\omega)\big)\big]\,, \Delta_D = (1+\nu)\alpha_T\Delta_M = \frac{(1+\nu)\alpha_T\beta T_0}{\rho c_v} \quad (۸۱)$$

$$q_r = \frac{3+\nu}{8}\rho h\Omega^2(b^2 - r^2) + \frac{\rho h\Omega^2 a^2(1-\nu^2)\big[b^2(3+\nu) - a^2(1+\nu)\big]}{8\{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)\}}\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) \qquad (۸۲)$$

$$\frac{dq_r}{dr} = \frac{3+\nu}{4}\rho h\Omega^2 r - \frac{\rho h\Omega^2 a^2 b^2(1-\nu^2)\big[b^2(3+\nu) - a^2(1+\nu)\big]}{4\{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)\}}\left(\frac{1}{r^3}\right) \qquad (۸۳)$$

و همچنین شرایط مرزی نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$w_0 = 0, \frac{dw_0}{dr} = 0 \ \ , r = a \qquad (۸۴)$$

$$-D\frac{d\nabla^2 w_0}{dr} = 0 \ \ , r = b \qquad (۸۵)$$

$$m_r = -D\left[\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw_0}{dr} + \Delta_D\big(1 + f(\omega)\big)\nabla^2 w_0\right] = 0, \quad r = b \qquad (۸۶)$$

$$D_\omega\frac{d^4 w_0}{dr^4} + \frac{2D_\omega}{r}\frac{d^3 w_0}{dr^3} - \left(q_r + \frac{D_\omega}{r^2}\right)\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \left(\frac{D_\omega}{r^3} - \frac{q_r}{r} - \frac{dq_r}{dr}\right)\frac{dw_0}{dr} - \rho h\omega^2 w_0 = 0 \qquad (۸۷)$$

برای بی بعدسازی متغیرها فرض می شود:

$$W = \frac{w_0}{h}\,, \quad 0 \le R = \frac{r-a}{b-a} \le 1 \qquad (۸۸)$$

که با جایگذاری در معادلات (۸۷) نتیجه می شود:

$$\frac{d^4 W}{dR^4} + \frac{2(b-a)}{(b-a)R + a}\frac{d^3 W}{dR^3} - \left((b-a)^2 q_R + \frac{D_\omega(b-a)^2}{((b-a)R+a)^2}\right)\frac{1}{D_\omega}\frac{d^2 W}{dR^2} + \left(\frac{D_\omega(b-a)^3}{((b-a)R+a)^3} - \frac{(b-a)^3}{(b-a)R+a}q_R - (b-a)^2\frac{dq_R}{dR}\right)\frac{1}{D_\omega}\frac{dW}{dR} - \frac{\rho h(b-a)^4\omega^2}{D_\omega}W = 0 \qquad (۸۹)$$

و شرایط مرزی نیز به‌صورت زیر در می‌آید:

$$W = 0, \quad \frac{dW}{dR} = 0\ , \ R = 0 \qquad (۹۰)$$

$$-D\frac{d\nabla^2 W}{dR} = \frac{d^3 W}{dR^3} + \left(\frac{b-a}{(b-a)R+a}\right)\frac{d^2 W}{dR^2} - \left(\frac{b-a}{(b-a)R_N + a}\right)^2\frac{dW}{dR}0 = 0\,, \quad R = 1 \qquad (۹۱)$$

$$m_r = -D\left[\frac{d^2 W}{(b-a)^2 dR^2} + \frac{\nu}{(b-a)((b-a)R+a)}\frac{dW}{dR} + \Delta_D\big(1 + f(\omega)\big)\nabla^2 W\right] = \left(\frac{\Delta_D\big(1+f(\omega)\big)+1}{(b-a)}\right)\frac{d^2 W}{dR^2} + \left(\frac{\Delta_D\big(1+f(\omega)\big)+\nu}{(b-a)R+a}\right)\frac{dW}{dR}0\,, \quad R = 1 \qquad (۹۲)$$

معادله (۸۹)معادله دیفرانسیل ارتعاشی با میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی دوّار می‌باشد. مشاهده می‌شود که با اضافه شدن چرخش به سیستم، رفتار سیستم از حالت خطی به غیرخطی تغییر می‌یابد. به‌دست آوردن حل تحلیلی برای معادله غیرخطی فوق دشوار است. روش اجزاء محدود ابزار مناسبی برای حل این مسئله است و در اینجا با استفاده از نرم‌افزار "انسیس" [۳۵]، با محاسبه ماتریس های سختی، میرایی و جریان گرمایی سیستم و جای گذاری در معادله اساسی سیستم و محاسبه انرژی کرنشی سیستم، اثر میرایی ترموالاستیک در حالت‌های مختلف بررسی شده است. انرژی کل سیستم برابر است با:

$$U_t = \frac{1}{4}\int_{VOL}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}^* d(VOL) \qquad (۹۳)$$

در آن، $\{\varepsilon\}^*$ کرنش کل است که شامل مقادیر حقیقی و موهومی می‌باشد. قسمت حقیقی معادله بالا بیانگر میانگین انرژی کرنشی ذخیره شده و قسمت موهومی بیانگر میانگین انرژی کرنشی از دست رفته به سبب میرایی ترموالاستیک می‌باشد. کیفیت میرایی ترموالاستیک با ضریب کیفیت Q به‌صورت زیر بیان می‌شود [۳۳]:

$$Q^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_e} Im(U_t)}{\sum_{j=1}^{N_e} Re(U_t)} \qquad (۹۴)$$

که در آن، N_e تعداد المان‌ها است.

برای دستیابی به این هدف از زبان پارامتری نرم‌افزار (APDL) کمک گرفته شده، که به‌خصوص در مورد ساخت ماکرو در حل مسائلی نظیر بهینه‌سازی طراحی، بهینه‌سازی مش‌بندی، بهینه‌سازی توپولوژی و کارکرد با پارامترها در حین حل یک مسئله کاربرد دارد. با به‌کارگیری این قابلیت می‌توان از طریق ساخت ماکرو، به نوعی محیط نیمه فعالی از یک محیط برنامه‌نویسی را تولید کرد.

در این برنامه‌ها برای مدل کردن ورق از المان‌های دوبعدی PLANE223 و المان سه‌بعدی SOLID226 استفاده شده است. المان PLANE223 شامل ۸ گره و ۴ درجه آزادی در هر گره، و المان SOLID226 شامل ۲۰ گره و ۵ درجه آزادی در هر گره می‌باشد. خصوصیات و قابلیت‌های این دو المان مشابه هم می‌باشد.

۴- نتایج

قابل ذکر است معادلات حرکت ورق چرخان با کوپلینگ ترموالاستیک، غیر خطی بوده و تاکنون حل تحلیلی برای آن ارائه نشده است، بنابراین جهت اعتبار سنجی، می‌توان روش حل ارائه شده در این مقاله را که با استفاده از نرم‌افزار "انسیس" به‌دست آمده، فقط در حالت بدون چرخش، با نتایج آقای سان (که آن هم در حالت بدون چرخش به‌دست آمده) مقایسه نمود. به همین منظور در ادامه در ابتدا برای تصدیق نتایج روش حل با نتایج آقای زنر و سان، رابطه بین Q^{-1} و ضخامت ورق برای مد اول در حالت بدون دوران برای ورق توپر استخراج شده است.

مشخصات سیلیکون در سه دمای ۱۲۰، ۲۰۰، ۲۹۳ درجه کلوین در جدول ۱ درج شده است (در انتهای مقاله). واضح است که E، k، c و α_T وابسته به دما هستند. باید توجه داشت که تغییرات دمایی ناشی از ارتعاشات ترموالاستیک بسیار ناچیز بوده (k>>1) بنابراین می‌توان خصوصیات ماده را حین این ارتعاشات ثابت فرض کرد. سپس به استخراج و بررسی روابط بین Q^{-1} و سرعت زاویه‌ای، ضخامت و پاسخ فرکانسی سیستم برای ورق چرخان خواهیم پرداخت.

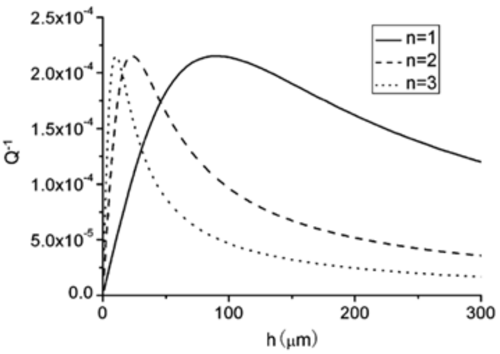
جدول (۱):مشخصات مکانیکی و گرمایی سیلیکون در دماهای مختلف [۳۲].

مشخصات مواد	واحد $(\mu MKSV)$	120 K	200 K	293 K
مدول یانگ	MPa	1.69e5	1.669e5	1.659e5
ضریب پواسون	-	0.22	0.22	0.22
چگالی	$Kg/(\mu m)^3$	2.33e-15	2.33e-15	2.33e-15
ضریب هدایت حرارتی	$pW/(\mu m * K)$	8.76e8	2.66e8	2.33e-15
گرمای ویژه	$pJ/(Kg * K)$	3.28e14	5.57e14	7.13e14
ضریب نفوذ حرارتی	$1/K$	-0.057e-6	1.406e-6	2.59e-6

۴-۱- میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی توپر بدون چرخش

در این قسمت میرایی ورق دایروی توپر که در لبه خارجی کاملاً گیردار است بررسی می شود و سپس داده‌های به‌دست آمده، با داده‌های تحلیلی آقای زنر و سان مقایسه می‌شود. به همین منظور داده‌های ورودی دقیقا مطابق داده‌های آقای سان در نظر گرفته می‌شود.

در شکل **۲** که توسط سان به‌دست آمده است مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت ورق، میرایی ترموالاستیک

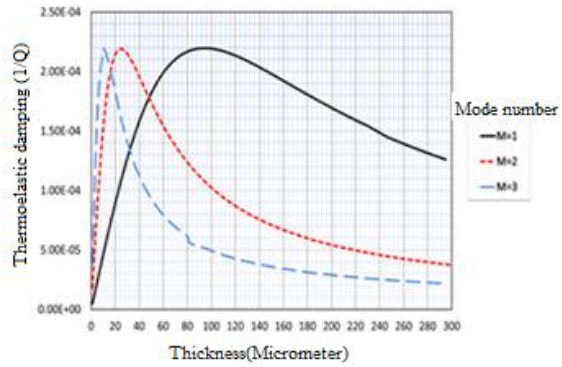


شکل (۲): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت $\left(a/_{h}=50\right)$ برای مدهای اول تا سوم[۳۲].

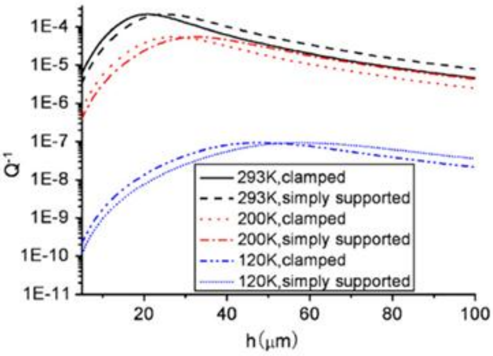
ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنابراین در ضخامت خاصی میرایی ترموالاستیک به حداکثر خود می رسد که این ضخامت به عنوان ضخامت بحرانی h_c شناخته می شود. این روند در مدهای بالاتر نیز مشاهده می‌شود، با این تفاوت که ضخامت بحرانی کاهش و نرخ تغییرات افزایش یافته است. اما میرایی در ضخامت‌های بحرانی یکسان است.

در شکل **۳** که توسط "انسیس" به‌دست آمده است معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای مدهای اول تا سوم نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود شکل **۳** تطابق خوبی با شکل **۲** دارد که خود تصدیقی بر نتایج این مقاله می‌باشد. همچنین برای اطمینان بیشتر از نتایج حل "انسیس"، در ادامه مقایسه گراف‌های مربوط به معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت، در دماهای مختلف مشاهده می شود. در شکل **۴** که توسط سان به‌دست آمده تغییرات لگاریتمی معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت ورق در

دماهای مختلف برای دو شرط مرزی گیردار و ساده نمایش داده شده است. هدف از آوردن شکل **۴** مقایسه نتایج حل "انسیس" (شکل **۵**) با نتایج سان می‌باشد.



شکل (۳):معکوس ضریب کیفیتبر حسب ضخامت با نسبت ثابت$\left({a}/{h}=50\right)$ برای مدهای اول تا سوم.



شکل (۴):معکوس ضریب کیفیت برحسب ضخامت در دماهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار و ساده $(a=500\mu m)$[۳۲].

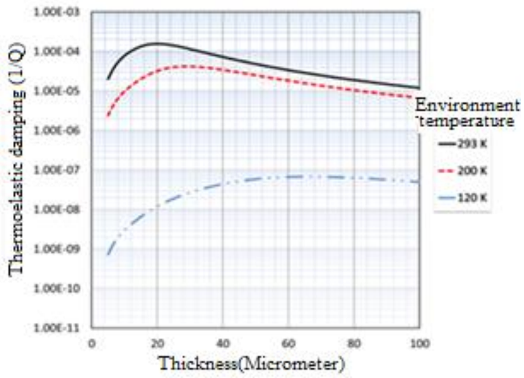
همان‌طور که در شکل **۴** مشاهده می‌شود با افزایش دما، میرایی و تغییرات آن نسبت به ضخامت بیشتر می‌شود و در دماهای پایین این تغییرات به صفر تمایل می‌یابد و همچنین ضخامت بحرانی با کاهش دما افزایش می‌یابد.

با مقایسه گراف‌های شکل **۵** با گراف‌های شکل **۴** از مقاله سان برای شرایط مرزی گیردار، می‌توان تطابق خوبی بین گراف‌ها مشاهده کرد و خطایی کمتر از ۵-e×۱/۱ برای آن قائل شد. همچنین در جدول **۲** به مقایسه به‌دست آمده برای ضخامت بحرانی با نتایج تحلیلی آقای زنر [۲و۱] و نتایج سان [۳۲] پرداخته شده است. نتایج به‌دست آمده در شکل‌های **۳** و **۵** با نتایج آقای سان[۳۲] (شکل‌های **۲**و**۳**) بسیار نزدیک است و می‌توان نتیجه گرفت که این روش را می‌توان برای حل مسئله میرایی ترموالاستیک سازه‌ها با تقریب خوبی بکار برد.

بنابراین در قسمت بعد، با استفاده از همین روش، نتایج حل ورق چرخان به‌دست می‌آید.

۴-۲-میرایی ترموالاستیک برای میکرو ورق دایروی دوّار

در این قسمت اثر چرخش در میرایی ترموالاستیک مورد بررسی قرار می گیرد. در قسمت ۲ معادله ارتعاشی ورق دوار به‌دست آمد. ملاحظه شد که رفتار سیستم بر خلاف حالت بدون چرخش، غیرخطی بوده و حل تحلیلی برای آن نمی‌توان یافت. به همین منظور با توجه به ملاحظات کاربردی، یک ورق تاج دایره‌ای را که بر روی محوری نصب شده و شعاع خارجی آن آزاد می‌باشد، در نظر گرفته می شود،که با سرعت دورانی ثابت $\boldsymbol{\Omega}$ به دور محور عمود بر ورق می‌چرخد.



شکل (۵): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت در دماهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار و ساده $(a=500\mu m)$.

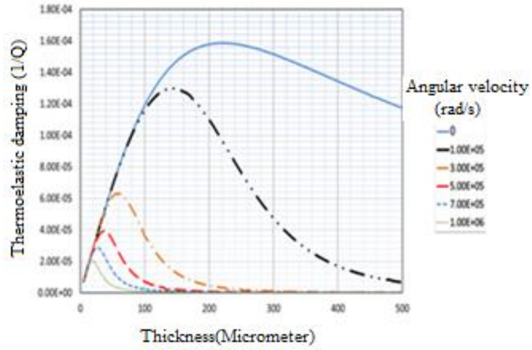
شعاع خارجی $b=50\mu m$ به‌دست آمده است. دمای مرجع ۲۷ سانتیگراد در نظر گرفته شده و خصوصیات مکانیکی و حرارتی مطابق با جدول **۱** می‌باشد(در انتهای مقاله).

تغییرات میرایی ترمو الاستیک نسبت به ضخامت در شکل **۶** نشان داده شده است. می‌توان مشاهده کردکه روند تغییرات میرایی منظم بوده و با افزایش ضخامت میرایی افزایش می‌یابد تا در ضخامت مشخصی که با فرکانس نوسانات رابط دارد، به مقدار بیشینه خود می‌رسد و سپس یک روند نزولی را طی می‌کند. در مدهای اول، دوم و سوم بیشینه میرایی یکسان می‌باشد و جالب توجه است که مقدار بیشینه برای مدهای اول تا سوم در محدوده ابعادی میکرواتفاق می‌افتد.

جدول (۲): ضخامت بحرانی برای ${a}/{h}=50$ و مقایسه با نتایج آقای سان و زنر.

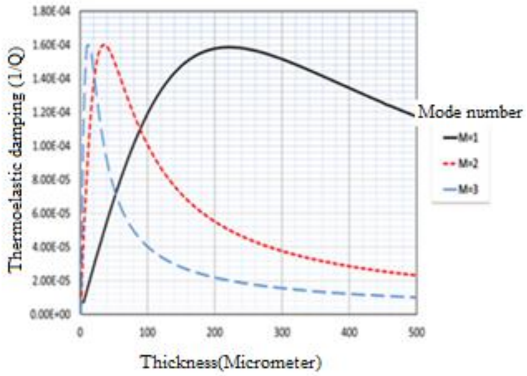
دما $T_0(K)$	۱۲۰	۲۰۰	۲۹۳
نتایج آقای زنر	۱۰۹۹	۱۹۷.۷	۸۹.۹۹
نتایج آقای سان	۱۱۰۲	۱۹۸.۲	۹۰.۲۴

روش عددی ANSYS	۱۱۰۹	۲۰۲.۸	۹۳.۵
خطا(٪) (زنر-ANSYS)	۰/۹۱	۲/۵۷	۳/۹
خطا(٪) (سان - ANSYS)	۰/۶۳	۲/۳۲	۳/۶



شکل (۶): معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت $\left({a}/{h} = 50\right)$.

نتایج برای ورق میکرو سیلیکونی دایروی با شعاع داخلی $a = 10\mu m$ و تغییرات میرایی نسبت به ضخامت برای مد اول با سرعت دورانی‌های مختلف در شکل **۷** نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دورانی میرایی با روند منظمی کاهش می‌یابد به‌طوری که ضخامت بحرانی نیز به نسبت بیشینه میرایی کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود نرخ افزایش میرایی قبل از ضخامت بحرانی در سرعت دورانی‌های مختلف یکسان است. همچنین مشاهده می‌شود بین دو سرعت دورانی متفاوت در محدوده قابل توجه‌ای از ضخامت ، میرایی با تغییر سرعت دورانی ثابت می‌ماند.شکل **۸** روند تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به سرعت دورانی را نشان می‌دهد، و به نوعی هم تصدیق برای شکل **۷** است و به‌گونه‌ای دیگر می‌توان مشاهده کرد که برای مد اول در سرعت‌های بین ۰.۵×e5 تا 2×e5 میرایی روند نزولی بیشتری دارد. به عبارت دیگر، برای مد اول در سرعت های دورانی پایین و همچنین در سرعت دورانی خیلی بالا تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به سرعت قابل اغماض است. البته توجه شود همان‌طور که در شکل مشخص می‌باشد با افزایش مد این بازه تغییر می‌کند. یعنی برای مد دوم در بازه ۰ تا ۰.۷×e5 و برای مد سوم ۰ تا ۰.۳×e5 روند نزول میرایی محسوس می‌باشد.

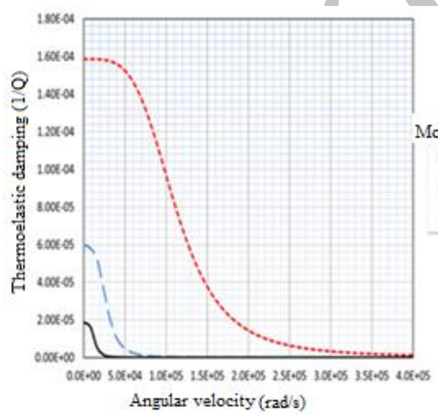


شکل (۷): معکوس ضریب کیفیت برحسب ضخامت برای سرعت‌های زاویه‌ای متفاوت (مد اول).

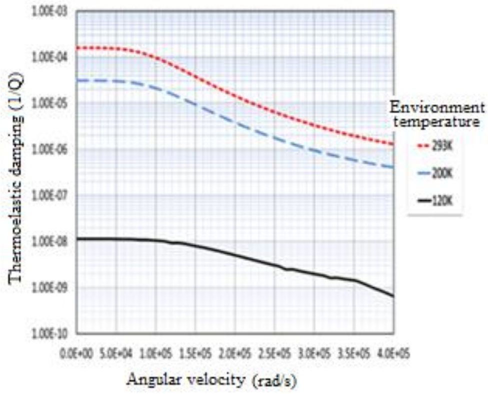
شکل**۹**، تغییرات میرایی ترموالاستیک را نسبت به سرعت دورانی در دماهای مختلف نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که با کاهش دما اثر سرعت بر میرایی کاهش یافته به عبارت دیگر، در دماهای بالا با تغییر سرعت دورانی میرایی ترموالاستیک تغییرات بیشتری داشته و در دماهای پایین اثر سرعت قابل اغماض می‌باشد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله دیفرانسیلی برای ارتعاشات متقارن محوری با میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی دوّار به‌دست آمد سپس با استفاده از روش اجزاء محدود و به‌کمک نرم‌افزار "انسیس" ضریب کیفیت محاسبه شد. مشاهده شد که، میرایی ترموالاستیک در ابعاد معینی بیشترین مقدار را خواهد داشت، که این ابعاد علاوه‌بر دما، به سرعت چرخش نیز بستگی دارد.



شکل (۸): معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی برای مدهای اول، دوم و سوم.



شکل (۹): معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی در دماهای مختلف برای مد اول.

جالب توجه است که مقدار میرایی در ضخامت بحرانی و نیز روند تغییرات میرایی برای مدهای مختلف یکسان است. به عبارت دیگر با تغییر فرکانس ارتعاش سیستم، ماکزیمم میرایی ثابت می‌ماند و فقط ضخامت بحرانی است که با افزایش شماره مد کاهش می‌یابد. این روند را می‌توان به‌عنوان یک قانون برای کلیه قطعات با هر هندسه‌ای در ابعاد مختلف بیان کرد.در اثر چرخش، میرایی رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد. جالب توجه است که با افزایش سرعت دوران ورق، میرایی و همچنین ضخامت بحرانی کاهش می‌یابد. پس سرعت یکی از عواملی است که می‌تواند میرایی ترموالاستیک را کاهش داده و یا حتی حذف کند. البته باید توجه داشت که دما می‌تواند اثر چرخش را حذف کند به‌طوری که با پایین آوردن دما اثر چرخش کم می‌شود.

۶-مراجع

1. Zener, C. “Internal Friction in Solids, l. Theory of Internal Frictionin Reeds”, Physical Review, Vol. 52, No. 4, pp. 230–235, 1937.
2. Zener, C. “Internal Friction in Solids, l. Theory of Internal Frictionin Reeds”, Physical Review, Vol. 53, No. 2, pp. 90–99, 1938.
3. Berry, B.S. “Precise Investigation of the Theory of Damping by Transverse Thermal Currents”, Journal of Applied Physics Vol. 26, No. 12, pp. 1221–1224, 1955.
4. Roszhardt, R.V. “the Effect of Thermoelastic Internal Friction on the Q of Micromachined Silicon Resonators”, IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, USA, pp.13–16, June1990.
5. Yasumura, K.Y., Stowe, T. D., Kenny, T. W., and Rugar, D. “Thermo elastic energy dissipation in silicon nitride micro cantilever structures”, Bulletin of the American Physical Society Vol. 44, No. 7, pp. 540, 1999.
6. Lifshitz, R. and Roukes, M. L. “Thermoelastic Damping in Micro-and Nano Mechanical Systems”, Physical Review B, Vol. 61, pp. 5600–5609, 2000.
7. Srikar, V. T. and Senturia, S. D. “Thermoelastic Damping in Fine-Grained Poly Silicon Flexural Beam Resonators”, IEEE Journal of Micro Electro Mechanical Systems, Vol. 11, No. 5, pp. 499–504, 2002.
8. Duwel, A., Weinstein, M., Gorman, J., Borenstein, J., and Ward, P. “Quality factors of MEMS gyros and the Role of Thermoelastic Damping”, Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002.
9. Duwel, A., Weinstein, M., Gorman, J., Borenstein, J., and Ward, P. “Exprimental Study of Thermoelastic Damping in MEMS Gyros” Sensor and Actuator A, Vol. 103, No. 1-2, pp. 70-75, 2003.
10. Houston, B.H., Photiadis, D.M., Vignola, J.F., Marcus, M.H., Liu, X., Czaplewski, D., Sekaric, L., Butler, J., Pehrsson, P., and Bucaro, J. A. “Loss Due to Transverse Thermoelastic Current Sinmicro Scale Resonators”, Materials Science and Engineering A, Vol. 370, No. 6, pp. 407–411, 2004.
11. Khisaeva, Z.F., and Ostoja-Starzewski, M. “Thermoelastic Damping in Nano Mechanical Resonators with Finit Wave Speeds” Journal of Thermal Stress, Vol. 29, No. 3, pp. 201-216, 2006.
12. Wong, S.J., Fox, C.H.J., and McWilliam, S. “Thermoelastic Damping of the In-Plane Vibration of Thin Silicon Rings”, Journal of Soundand Vibration, Vol. 293, No. 4, pp. 266–285, 2004.
13. Sudipto, K.D. and Aluru, N.R. “Theory of Thermoelastic Damping in Electro Statically Actuated Microstructures”, Physical ReviewB, Vol.74, No. 14, pp. 144305, 2006.
14. Nayfeh, A.H. and Younis, M.I. “Modeling and Simulations of Thermoelastic Damping in Microplates”, Journal of Micro Mechanics and Micro Engineering, Vol. 14, No. 12, pp. 1711–1717, 2004.
15. Prabhakar, S. and Vengallatore, S. “Theory of Thermoelastic Damping in Micro Mechanical Resonators with Two-Dimensional Heat Conduction”, Journal of Micro Electro Mechanical Systems, Vol.17, No. 2, pp. 494–502, 2008.
16. Yi, Y.B. and Matin, M.A. “Eigenvalue Solution of Thermoelastic Damping in Beam Resonators Using a Finite Element Analisis”. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 129, No. 4, pp. 478-483, 2007.
17. Okamoto, H., Kojionomitsu, D., and Yamaguchi, H. “Thermo Elastic Damping in Gas Micromechanical Resonator”, Physica Status Solidi(c), 2008.
18. Mohameed, R. and Elata, D. “Shield-Layers for Reducing Thermoelastic Damping in Resonating Silicon Bars”, Microsystem Technology, Vol. 15, No. 2, pp. 323-331, 2009.
19. Serra, E. and Bonaldi, M. “a Finite Element Formulation for Thermoelastic Damping Analysis”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.78, No. 6, pp. 671–691, 2009.
20. Metcalf, T.H., Bradford, A., Pate, B., Photiadis, D.M., and Houston, B.H. “Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators”, Applied Physics Letters, Vol. 95, No. 6, pp. 440-448 , 2009.

World Academy of Science Engineering and Technology, Vol. 3, No. 8, pp. 177-182, 2009.
25. Hao, Z., Xu, Y. and Durgam, S.K. "a Thermal-Energy Method for Calculating Thermoelastic Damping in Micromechanical Resonators", Journal of Sound and Vibration, Vol. 322, pp. 870–882, 2009.
26. M´endeza, C., Paquayb, B.S., Klapkab, I. and Raskina, J.P. "Effect of Geometrical Nonlinearity on MEMS Thermoelastic Damping", Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol. 10, pp. 1579–1588, 2009.
27. Choi, J., Cho, M. and Rhim, J. "Efficient Prediction of the Quality Factors of Micromechanical Resonators"4 , Journal of Sound and Vibration, 2010.
28. Yi, Y.B. "Geometric Effects on Thermoelastic Damping in MEMS Resonators", Journal of Sound and Vibration, Vol. 309, No. 8, pp. 588–599, 2008.
29. Sun, Y., Fang, D., Saka, M., and Sohc, A.K. "Laser-Induced Vibrations of Micro-Beams Under Different Boundary Conditions", International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, No. 12, pp. 1993–2013, 2008.
30. Kim, S. Na, Y., and Kim, J. "Thermoelastic Damping Effect on In-Extensional Vibration of Rotating Thin Ring", Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, No. 12, pp. 1227–1234, 2010.
31. Xu, Y., Wang, R., Durgam, S.K., Hao, Z., and Vahala, L. "Numerical Models and Experimental Investigation of Energy Loss Mechanisms in SOI-
21. Rezazadeh, G., Vahdat, A.S., Pesteii, S.M., and Farzi, B. "Study of Thermoelastic Damping in Capacitive Micro-Beam Resonators Using Hyperbolic Heat Conduction Model". Sensor & Tranducers Journal, Vol. 108, No. 9, pp. 54-72, 2009.
22. Kumar, S. and Haque, M.A. "Reduction of Thermo-Elastic Damping with a Secondary Elastic Field", Journal of Sound and Vibration, Vol. 318, No. 3, pp. 423–427, 2008.
23. Prabhakar, S. and Vengallatore, S. "Thermoelastic Damping in Bilayered Micromechanical Beam Resonators", Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 17, No. 3, pp. 532, 2007.
24. Choi, S.Y., Na, Y.H., and Kim, J.H. "Thermoelastic Damping of Inextensional Hemispherical Shell", Based Tuning- Fork Gyroscopes", Sensor and Actuators A, Vol. 152, No.1, pp. 63-74, 2009.
32. Sun, Y., Tohmyoh, H. "Thermoelastic Damping of the Axisymmetric Vibration of Circular Plate Resonators", Journal of Sound and Vibration, Vol. 319, No. 1-2, pp. 392–405, 2009.
33. Hagedorn, P. and Dasgupa, A. "Vibration and Wave in Continuous Mechanical Systems", Wiley & Son Ltd, 2007.
34. Heo, J.W. and Chung, J. "Vibration Analysis of a Flexible Rotating Disk with Angular Misalignment", Journal of Sound and Vibration, Vol. 274, No. 3-5, pp. 821–841, 2004.
35. "Ansys Help" Release 12.0.1 UP20090415 Copyright 2009 SAS IP, Inc.