

تحلیل رفتار وابسته به زمان در مخازن کروی جدار ضخیم از جنس مواد FGM تحت بارگذاری مکانیکی و توزیع درجه حرارت شعاعی

محمدرضا خاتمی قزوینی^۱ عباس لقمان^۲ علی اکبر اصغری^۳
 دانشکده مکانیک دانشکده مکانیک دانشکده مکانیک و هوافضا
 دانشگاه تهران دانشگاه کاشان دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
 (تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۸/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۷/۱۶)

چکیده

در این مقاله به بررسی بازتوزیع تنش‌ها و تغییرشکل‌ها در طی زمان در مخازن کروی جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی و توزیع دمای شعاعی پرداخته می‌شود. خواص مکانیکی و حرارتی ماده به‌غیر از ضریب پواسون به‌صورت تابع توانی برحسب شعاع فرض شده‌اند. در رژیم خزشی، کرنش‌های کل در هر زمان به‌صورت مجموع کرنش‌های مکانیکی، خزشی و حرارتی هستند که هر یک تابعی از شرایط بارگذاری و زمان می‌باشند. با استفاده از روابط تنش-کرنش، کرنش-جاب‌جایی و تعادل در کره و همچنین به‌کارگیری روابط پراندتل روس و رابطه ساختاری نورتون، توزیع تنش‌ها در لحظه بارگذاری و نرخ تغییرات آنها طی زمان به‌دست می‌آیند. بازتوزیع تنش‌ها طی زمان به‌صورت جمع جبری توزیع تنش‌ها در لحظه بارگذاری و انتگرال نرخ تغییرات تنش‌ها طی زمان محاسبه خواهند شد. توزیع درجه حرارت در راستای شعاع کره، بازتوزیع تنش‌ها، کرنش‌ها، تغییرشکل‌ها و همچنین نرخ تغییرات آنها در طی زمان برای مواد FGM با خصوصیات مختلف رسم شدند و تأثیر افزایش دما بررسی شد. نتیجه گرفته شد که تغییرات تنش مماسی در طول زمان به‌مراتب چشمگیرتر و تأثیرگذارتر از تنش شعاعی است و در دماهای بالا پدیده خزش تأثیر بیشتری در تغییرشکل جسم دارد. همچنین می‌توانیم با استفاده از خصوصیات مواد FGM مخازنی طراحی کنیم که پس از گذشت زمان مشخصی از شروع بارگذاری، تنش‌ها و تغییر شکل‌ها در آنها در وضعیتی پیش‌بینی‌شده قرار گیرند.

واژه‌های کلیدی: تغییر شکل وابسته به زمان، مخزن کروی FGM، تاریخچه تنش‌ها

Time-Dependent Deformation and Stress Redistribution Analysis of Thick-Walled Spheres Under Radial Temperature Distribution and an Internal Pressure

M.R. Khatami Ghazvini
 Mechanical Engineering
 Department
 University of Tehran

A. Loghman
 Mechanical Engineering
 Department
 Kashan University

A.A. Asghari
 Aerospace and Mechanical
 Engineering Department
 IAU – Research and science branch

(Received: 6/November/2011; Accepted: 8/October/2013)

ABSTRACT

This paper describes time-dependent stress and deformation redistribution response of thick-walled spherical vessels made of functionally graded materials (FGM) under radial temperature fields and an internal pressure. The material properties except poisson's ratio are power functions of radius. Total strains are the sum of mechanical, thermal and creep strains. By using equations of equilibrium, stress-strain and strain-displacement as well as using Norton's law for creep constitutive model and considering the Prandtl - Reuss relations the stress distributions at loading moment and their rates with respect to time are obtained. Time-dependent redistribution of stresses is calculated as the sum of stress distribution at loading moment and integral of stress rates. Radial temperature distribution, history of stresses, displacements, stress rates and the effect of temperature rise on creep evolution are reported in this paper. It is concluded that the influence of tangential stress variations is more notable than radial stress's and the creep behavior is more significant at high temperature applications. Also by means of FGM materials one can build vessels so that after passing specified time from loading, the stresses and deformations stand at anticipated rates.

Keywords FGM Sphere, Stress Histories, Time-Dependent Creep

۱- دانشجوی دکتری: mrkhatami@ut.ac.ir

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): aloghman@kashanu.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری: ali.a.asghari@gmail.com

فهرست علائم و اختصارات

| | |
|---------------------|-----------------------------------|
| A | مساحت، m^2 |
| E | مدول الاستیسیته، N/m^2 |
| P | فشار، Mpa |
| T | دما، $^{\circ}C$ |
| علائم یونانی | |
| α | ضریب انبساط حرارتی، $1/^{\circ}C$ |
| N | ضریب پواسون |

۱- مقدمه

از مخازن کروی جدار ضخیم ساخته شده از مواد FGM به طور گسترده ای در صنایع نظامی، پتروشیمی و نیروگاه ها استفاده می شود. کاربرد این مخازن در اغلب صنایع به گونه ای است که معمولاً تحت دماها و فشارهای زیاد قرار می گیرند، بنابراین خزش مهمترین مکانیزم مخرب حاکم در آنها می باشد. توزیع تنش ها در مخازن جدار ضخیم معمولی به گونه ای می باشد که ماکزیمم تنش کششی مماسی در سطح داخلی سبب رشد ترک ها از این سطح و گسترش آنها به سمت خارجی و در نهایت شکست مخزن می گردد. از طرفی قرارگیری مخازن تحت حرارت و فشار زیاد در صنایعی مانند نیروگاه های حرارتی، پالایشگاه های نفت و توربین های بخار امری اجتناب ناپذیر است؛ لذا نوع فولاد و طبعاً فلز جوشی که در این شاخه از صنعت کاربرد دارد بایستی در مقابل حرارت زیاد مقاوم باشد. فولادهای ساختمانی غیرآلیاژی تحت حرارت های زیاد کاهش جدی در استحکام مکانیکی را نشان می دهند، اما در دهه اخیر با پیشرفت بشر و دخالت در پروسه های تولید در ابعاد مولکولی این توان به دست آمده است که کامپوزیت هایی با خواص تابعی معین و کنترل شده برای غلبه بر این مشکلات طراحی گردد.

بررسی های گوناگونی در مورد نحوه توزیع تنش ها تحت شرایط مختلف بارگذاری در این مخازن صورت گرفته است. در حال حاضر توزیع تنش های ترموالاستیک ناشی از بارگذاری مکانیکی و حرارتی در مخازن FGM بسط یافته است و مطالعه تنش ها و تغییر شکل های خزشی حالت پایدار در جریان می باشد. همچنین به ندرت راه حل هایی برای خزش حالت پایدار که در آن نرخ تغییرات کرنش در طول زمان ثابت است، با استفاده از معادله ساختاری نورتون به چشم می خورد. تحلیل الاستیک مخازن کروی جدار ضخیم از جنس مواد FGM تحت

فشار داخلی توسط یو^۱ و همکاران انجام شده است [۱]. اسلامی، بابایی و پولتنگری توزیع تنش های ترموالاستیک در کره جدار ضخیم از جنس مواد FGM تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی را با در نظر گرفتن توزیع درجه حرارت شعاعی، حل تحلیلی معادله انتقال حرارت و معادله ناویر در لحظه بارگذاری بررسی کرده اند [۲]. جباری، سهراب پور و اسلامی توزیع تنش های ترموالاستیک در استوانه FGM، تحت بارگذاری حرارتی نامتقارن را با مدل کردن تغییرات خواص ماده در جهت شعاع و به صورت توانی و همچنین استفاده از توابع مختلط به صورت تحلیلی و در لحظه بارگذاری به دست آوردند [۳]. یو و همکارانش خزش حالت پایدار را در مخازن استوانه ای جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی مورد بررسی قرار داده اند [۴]. تحلیل خزشی مخازن استوانه ای از جنس مواد FGM تحت فشار داخلی و خارجی توسط ژوان^۲ انجام شده است. ایشان با در نظر گرفتن توزیع خصوصیات مواد به صورت تابع توانی ساده و به کارگیری بسط تیلور، حل تقریبی از درجات مختلف تیلور به دست آوردند و با حل به دست آمده از روش المان محدود مقایسه کردند و نتیجه گرفتند که تقریب مرتبه پنجم بسط تیلور جواب دقیق تری برای محاسبه تنش ها ارائه می دهد [۵].

یانگ^۳ رفتار خزشی استوانه را در طی زمان مورد تحلیل قرار داده است. او با به کارگیری معادله نورتون برای رفتار خزشی مواد و همچنین معادله تعادل، روابط تنش-کرنش و در نظر گرفتن معادله پراندتل روس، معادله دیفرانسیلی برای نرخ جابه جایی به دست آورده است. سپس با انجام برخی ساده سازی ها و حل معادله دیفرانسیل، نرخ تغییرات تنش ها و نرخ جابه جایی را به دست آورده است [۶].

در حال حاضر مطالعه برای تحلیل های الاستیک، الاستیک-پلاستیک و خزش حالت پایدار در مخازن FGM صورت گرفته است، ولی حتی برای این حالت نیز تاریخچه نرخ تغییرات تنش ها، تغییر شکل ها و متعاقباً باز توزیع تنش ها و تغییر شکل ها با زمان بررسی نشده است و در مورد نحوه باز توزیع تنش ها اختلاف نظرهایی مشاهده می شود. در این مقاله به بررسی نحوه باز توزیع تنش ها و تغییر شکل های خزشی وابسته به زمان در مخازن کروی توخالی جدار ضخیم FGM تحت شرایط بارگذاری مکانیکی و حرارتی پرداخته می شود. حل تحلیلی معادله انتقال حرارت در کره جدار ضخیم FGM

1 - L.H.YOU

2 - Xuan

3 - Yang

۳- حل تحلیلی معادله انتقال حرارت

رابطه انتقال حرارت حالت پایدار یک‌بعدی همراه با تولید حرارت در واحد حجم در مختصات کروی و شرایط مرزی برای کره توخالی FGM به صورت زیر است [۲]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 k(r) \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right] = -R \quad (۱)$$

$$c'_{11} \frac{\partial T(r)}{\partial r} \Big|_{r_i} + c'_{12} T(r_i) = f \quad r = r_i \quad (۲-الف)$$

$$c'_{21} \frac{\partial T(r)}{\partial r} \Big|_{r_o} + c'_{22} T(r_o) = f \quad r = r_o \quad (۲-ب)$$

که، $k(r)$ ضریب انتقال حرارت هدایتی در مواد FGM و ثابتهای c'_{ij} با توجه به شرایط مرزی می‌توانند ترکیبی از ثابت انتقال حرارت هدایتی k و ثابت انتقال حرارت جابه‌جایی h باشند و R میزان تولید حرارت در واحد جرم می‌باشد. به تناسب شرایط مرزی انتقال حرارت در سطوح داخلی و خارجی، f_1 و f_2 ثابتهای مشخصی در این سطوح خواهند بود. $k(r)$ را به صورت تابع توانی در نظر خواهیم گرفت:

$$k(r) = k_0 r^\beta \quad (۳)$$

که، ثابت‌های k_0 و β با توجه به خواص ماده تعیین خواهند شد.

با استفاده از روابط (۱) و (۳) و حل معادله دیفرانسیل انتقال حرارت، توزیع درجه حرارت در راستای شعاع کره به دست خواهد آمد:

$$T(r) = -\frac{R}{3k_0(2-\beta)} r^{(2-\beta)} - \frac{c'_1}{k_0(\beta+1)} r^{-(\beta+1)} + c'_2 \quad (۴)$$

با استفاده از شرایط مرزی (۲) ثابت‌های c'_1 و c'_2 به دست خواهند آمد:

$$c'_1 = \frac{\left\{ \begin{aligned} & [3k_0(\beta+1)(c_{12}f_1 - c_{12}f_2) + \\ & R(\beta+1)[c_{11}c_{22}a^{2-\beta} - c_{12}c_{21}b^{2-\beta}] + \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} & R \left(\frac{1+\beta}{2-\beta} \right) [c_{11}c_{22}a^{2-\beta} - c_{12}c_{21}b^{2-\beta}] \\ & 3 \left[\frac{(c_{11}c_{22}a^{-(\beta+2)} - c_{12}c_{21}b^{-(\beta+2)}) (\beta+1)}{c_{12}c_{22}a^{-(\beta+1)} - c_{22}c_{12}b^{-(\beta+1)}} \right] \end{aligned} \right\}} \quad (۵-الف)$$

$$c'_2 = \frac{\left\{ \begin{aligned} & \left[3f_1k_0(\beta+1) + R c_{11}(\beta+1)r_i^{1-\beta} + \left(\frac{1+\beta}{2-\beta} \right) R c'_{12}r_i^{2-\beta} \right] \\ & \left[c'_{11}(\beta+1)r_o^{-(\beta+2)} - c'_{22}r_o^{-(\beta+1)} \right] - \\ & \left[3f_2k_0(\beta+1) + R c_{11}(\beta+1)r_o^{2-\beta} + \left(\frac{1+\beta}{2-\beta} \right) R c'_{12}r_o^{2-\beta} \right] \\ & \left[c'_{11}(\beta+1)r_i^{-(\beta+2)} - c'_{22}r_i^{-(\beta+1)} \right] \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} & 3k_0(\beta+1) \left[\frac{c'_{12}c'_{11}(\beta+1)r_o^{-(\beta+2)} - c'_{12}c'_{22}r_o^{-(\beta+1)}}{c'_{12}c'_{11}(\beta+1)r_o^{-(\beta+1)} + c'_{22}c'_{12}r_i^{-(\beta+1)}} \right] \end{aligned} \right\}} \quad (۵-ب)$$

انجام گرفته، توزیع درجه حرارت در راستای شعاع کره به دست آمده و چگونگی توزیع آن به‌ازای ترکیبات متفاوت مواد FGM مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی، معادله دیفرانسیل تعادل و همچنین رابطه تنش-کرنش در رژیم خزشی، معادله دیفرانسیل تعادل برحسب جابه‌جایی شعاعی که حاوی ترم‌های کرنش خزشی است، در راستای شعاع کره به دست می‌آید. سپس معادله حاصل با استفاده از متد حل ارائه‌شده حل گشته و نتایج به دست آمده در قالب نمودارهای بازتوزیع تنش‌ها، جابه‌جایی شعاعی، کرنش‌های خزشی و کل و همچنین نرخ تغییرات این کمیت‌ها طی زمان به‌ازای ضرایب توانی متفاوت مواد FGM و دماهای مختلف در بازه زمانی ۵۰ ساله رسم شده و مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

بررسی تاریخیچه تنش‌ها، تغییرشکل‌ها و نرخ تغییرات آنها در طی زمان و به‌ازای ترکیبات متفاوت مواد FGM، همچنین پی‌بردن به این موضوع که آیا بازتوزیع تنش‌ها دارای روندی است که افزایش عمر خزشی مخزن را سبب می‌شود و یا این‌که در جهت دیگری رفتار می‌کند، از جمله مواردی هستند که با توجه به نتایج به دست آمده در این تحقیق می‌توان به آنها پرداخت.

۲- هندسه مسئله، خواص مواد، شرایط بارگذاری،

شرایط مرزی و رابطه ساختاری

کره توخالی جدار ضخیم FGM با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود خواص مکانیکی و حرارتی ماده به‌غیر از ضریب پواسون که به دلیل تغییرات اندک در جهت شعاع ثابت در نظر گرفته می‌شود، به صورت تابع توانی ساده $\chi(r) = \chi_0 r^\beta$ در راستای شعاع تغییر می‌کند. مخزن کروی تحت فشار داخلی P_i ، فشار خارجی P_o و توزیع درجه حرارت شعاعی $T(r)$ قرار دارد. رابطه ساختاری ماده به صورت رابطه نورتون $\epsilon_e^c = B(r)\sigma_e^{n(r)}$ [۷] در نظر گرفته می‌شود که در آن، ϵ_e^c نرخ کرنش موثر، r شعاع کره، $B(r)$ ، $n(r)$ در مواد همگن ثابت و در مواد FGM تابعی از شعاع هستند. در این بررسی $B(r) = b_0 r^{b_1}$ ، $n(r) = n_0$ در نظر گرفته شده است [۴].

۴- فرمول بندی کلی مسئله

توزیع تنش ها و تغییر شکل ها در طول زمان بر اثر پدیده خزش تغییر خواهند کرد. اگرچه معادلات تعادل و سازگاری برای رژیم های الاستیک، پلاستیک و خزشی صادق هستند، اما معادلات تنش- کرنش در رژیم الاستیک متفاوت با رژیم پلاستیک و خزشی می باشند. در رژیم خزشی کرنش های کل مجموع کرنش های مکانیکی، خزشی و حرارتی هستند که هر یک از آنها تابعی از باز توزیع تنش ها و زمان می باشند.

روابط کرنش- جابه جایی در کره به صورت $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ می باشد [۸]. با استفاده از این روابط و روابط تنش- کرنش در مختصات کروی و همچنین توجه به این نکته که به دلیل تقارن کروی $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ می باشد، می توانیم روابط تنش برحسب جابه جایی شعاعی را به صورت زیر بنویسیم [۹]:

$$\sigma_r = c_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} - \lambda_1 T(r) - c_{11} \varepsilon_r^c - c_{12} \varepsilon_\theta^c \quad (۶-الف)$$

$$\sigma_\theta = c_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{22} \frac{u}{r} - \lambda_1' T(r) - c_{21} \varepsilon_r^c - c_{22} \varepsilon_\theta^c \quad (۶-ب)$$

که، ε_r^c و ε_θ^c کرنش های خزشی در جهات شعاعی و مماسی و λ_1 و λ_1' ثابت هایی به شرح زیر می باشند:

$$\lambda_1 = c_{11} \alpha_r + c_{12} \alpha_\theta \quad (۶-پ)$$

$$\lambda_1' = c_{21} \alpha_r + c_{22} \alpha_\theta \quad (۶-ت)$$

همچنین ضرایب C_{11} ، C_{12} ، C_{21} و C_{22} عبارتند از:

$$C_{11} = \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad C_{12} = \frac{2E(r)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{21} = \frac{C_{12}}{2} \quad C_{22} = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۷)$$

فرض می کنیم $\alpha_r = \alpha_\theta = \alpha_0 r^\beta = \alpha$ و $E(r) = E_0 r^\beta = E$ آنگاه $\lambda_1 = \lambda_1' = \lambda = \frac{E\alpha}{(1-2\nu)}$ خواهد بود.

رابطه تعادل در غیاب نیروهای جسمی در مختصات کروی به شکل زیر است:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (۸)$$

حال با جایگذاری روابط تنش برحسب جابه جایی در رابطه تعادل، معادله دیفرانسیل تعادل برحسب جابه جایی به دست می آید که ترم های کرنش خزشی نیز در آن ظاهر می شوند:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r(\beta+2) \frac{\partial u}{\partial r} + (L\beta-2)u =$$

$$\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) J \alpha_0 r^\beta \left[2\beta r T(r) + r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right]$$

$$+ \left[r^2 \frac{\partial \varepsilon_r^c}{\partial r} + r^2 (L) \frac{\partial \varepsilon_\theta^c}{\partial r} + r(\beta+2) J \varepsilon_r^c + r(N) \varepsilon_\theta^c \right] \quad (۹)$$

که،

$$J = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \quad (۱۰-الف)$$

$$L = \frac{2\nu}{(1-\nu)} \quad (۱۰-ب)$$

$$N = \frac{2\nu(\beta+2)-2}{(1-\nu)} \quad (۱۰-پ)$$

۵- روش حل

از آنجایی که توزیع کرنش های خزشی در هر زمان تابع باز توزیع تنش ها و زمان می باشند، حل تحلیلی معادله دیفرانسیل (۹) به صورت مستقیم امکان پذیر نیست. بنابراین با استفاده از متد حل به کار گرفته شده در این بررسی، حل مسئله را طی سه قسمت انجام می دهیم. در بخش اول با صرف نظر از ترم های کرنش خزشی در معادله (۹)، حل ترموالاستیک در زمان $(t=0)$ را انجام داده و توزیع تنش های ترموالاستیک را در این زمان به دست می آوریم. در بخش دوم به تحلیل پروسه خزش می پردازیم و نرخ تغییرات تنش ها در طی زمان را با مشتق گیری از معادله (۹) برحسب زمان به دست می آوریم. سپس در بخش آخر با استفاده از نتایج قسمت های اول و دوم، باز توزیع تنش ها را طی زمان در اثر پروسه خزش به دست می آوریم.

۵-۱- حل ترموالاستیک در زمان $(t=0)$

با نادیده گرفتن ترم های کرنش خزشی در معادله دیفرانسیل (۹) و در نظر گرفتن توزیع درجه حرارت شعاعی $T(r)$ ، معادله دیفرانسیل تعادل برحسب جابه جایی (معادله ناویر) در کره FGM به صورت زیر به دست می آید:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r(\beta+2) \frac{\partial u}{\partial r} + (L\beta-2)u =$$

$$-\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) J \alpha_0 \left\{ \left[\left(\frac{2\beta}{2-\beta} \right) + 1 \right] \frac{Rr^3}{3k_0} + \left[\left(\frac{2\beta}{\beta+1} \right) - 1 \right] \frac{C_1'}{k_0} - 2\beta C_2' r^{\beta+1} \right\} \quad (۱۱)$$

حل این معادله را به صورت جمع جبری جواب های عمومی و خصوصی آن در نظر می گیریم:

$$u = u_g + u_p \quad (۱۲)$$

۵-۱-۱- حل عمومی

واضح است که می توانیم جواب های عمومی معادله بالا را به صورت زیر بنویسیم:

$$u_g = Cr^m \quad (۱۳)$$

$$u_2(r) = \frac{-(1+\nu)J\alpha_0}{(1-2\nu)(m_2-m_1)} \left[\left(\frac{(2+\beta)R}{3k_0(2-\beta)(5-m_2)} \right) r^{5-m_2} + \left(\frac{(\beta-1)C'_1}{k_0(\beta+1)(2-m_2)} \right) r^{2-m_2} - \left(\frac{2\beta C'_2}{\beta-m_2+3} \right) r^{\beta-m_2+3} \right] \quad (۲۰-ب)$$

با جایگذاری روابط (۲۰) در رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$u_p = Fr^5 + Gr^2 + Hr^{\beta+3} \quad (۲۱)$$

که:

$$F = \frac{(1+\nu)(\beta+2)RJ\alpha_0}{(1-2\nu)(\beta-2)(5-m_1)(5-m_2)3k_0} \quad (۲۲-الف)$$

$$G = \frac{-(1+\nu)(\beta-1)C'_1J\alpha_0}{(1-2\nu)(\beta+1)(2-m_1)(2-m_2)k_0} \quad (۲۲-ب)$$

$$H = \frac{(1+\nu)(2\beta)C'_2J\alpha_0}{(1-2\nu)(\beta-m_1+3)(\beta-m_2+3)} \quad (۲۲-پ)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۶) و (۲۲) حل کلی

معادله دیفرانسیل (۹) به صورت زیر به دست می آید:

$$u(r) = C_1r^{m_1} + C_2r^{m_2} + Fr^5 + Gr^2 + Hr^{\beta+3} \quad (۲۳)$$

۵-۱-۳- به دست آوردن توزیع تنش های ترموالاستیک

در لحظه بارگذاری

رابطه (۲۳) فرم کلی جابه جایی در لحظه بارگذاری را بیان می کند. با جایگذاری رابطه (۲۳) در روابط کرنش- جابه جایی و سپس روابط (۵) و همچنین صرف نظر کردن از ترم های کرنش خزشی در معادلات حاصل، توزیع تنش های ترموالاستیک شعاعی و مماسی را در زمان $(t=0)$ به دست می آوریم:

$$\sigma_r = (\bar{c}_{11}m_1 + \bar{c}_{12})C_1r^{m_1+\beta-1} + (\bar{c}_{11}m_2 + \bar{c}_{12})C_2r^{m_2+\beta-1} +$$

$$(5\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})Fr^{\beta+4} + (2\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})Gr^{\beta+1} +$$

$$[\bar{c}_{11}(\beta+3) + \bar{c}_{12}]Hr^{2\beta+2} + \frac{\bar{\lambda}R}{3k_0(2-\beta)}r^{\beta+2} +$$

$$\frac{\bar{\lambda}C'_1}{k_0(\beta+1)}r^{\beta-1} - \bar{\lambda}C'_2r^{2\beta}$$

(۲۴-الف)

$$\sigma_\theta = (\bar{c}_{21}m_1 + \bar{c}_{22})C_1r^{m_1+\beta-1} + (\bar{c}_{21}m_2 + \bar{c}_{22})C_2r^{m_2+\beta-1} +$$

$$(5\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})Fr^{\beta+4} + (2\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})Gr^{\beta+1} +$$

$$[\bar{c}_{21}(\beta+3) + \bar{c}_{22}]Hr^{2\beta+2} +$$

$$\frac{\bar{\lambda}R}{3k_0(2-\beta)}r^{\beta+2} + \frac{\bar{\lambda}C'_1}{k_0(\beta+1)}r^{\beta-1} - \bar{\lambda}C'_2r^{2\beta}$$

(۲۴-ب)

با جایگذاری رابطه (۱۳) در فرم همگن معادله دیفرانسیل

(۱۱)، معادله مشخصه زیر به دست می آید:

$$m^2 + (\beta+1)m + (L\beta-2) = 0 \quad (۱۴)$$

ریشه های منحصر به فرد رابطه (۱۴) عبارتند از:

$$m_1 = -\frac{(\beta+1)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta+1)^2 - 4L\beta + 8} \quad (۱۵-الف)$$

$$m_2 = -\frac{(\beta+1)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\beta+1)^2 - 4L\beta + 8} \quad (۱۵-ب)$$

با بررسی روابط (۱۵) در می یابیم که به ازای $m_1, \beta \leq 2$ و m_2 ریشه های حقیقی و منحصر به فرد معادله (۱۴) می باشند.

بنابراین حل همگن معادله (۱۱) به صورت زیر است:

$$u_g = c_1r^{m_1} + c_2r^{m_2} \quad (۱۶)$$

۵-۱-۲- حل خصوصی

حل خصوصی معادله (۹) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u_p = u_1r^{m_1} + u_2r^{m_2} \quad (۱۷)$$

که،

$$u_1(r) = \int \frac{-R(r)r^{m_2}}{W(r^{m_1}, r^{m_2})} dr \quad (۱۸-الف)$$

$$u_2(r) = \int \frac{-R(r)r^{m_1}}{W(r^{m_1}, r^{m_2})} dr \quad (۱۸-ب)$$

و

$$R(r) = -\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) J\alpha_0 \left\{ \left[\left(\frac{2\beta}{2-\beta} \right) + 1 \right] \frac{Rr^3}{3k_0} + \left[\left(\frac{2\beta}{\beta+1} \right) - 1 \right] \frac{C'_1}{k_0} - 2\beta C'_2 r^{\beta+1} \right\} \quad (۱۹-الف)$$

$$W(r^{m_1}, r^{m_2}) = \begin{vmatrix} r^{m_1} & r^{m_2} \\ m_1 r^{m_1-1} & m_2 r^{m_2-1} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) r^{m_1+m_2-1} \quad (۱۹-ب)$$

بنابراین $u_1(r), u_2(r)$ با انتگرال گیری از روابط (۱۸) و در نظر

گرفتن روابط (۱۹) به دست خواهند آمد:

$$u_1(r) = \frac{(1+\nu)J\alpha_0}{(1-2\nu)(m_2-m_1)} \left[\left(\frac{(2+\beta)R}{3k_0(2-\beta)(5-m_1)} \right) r^{5-m_1} + \left(\frac{(\beta-1)C'_1}{k_0(\beta+1)(2-m_1)} \right) r^{2-m_1} - \left(\frac{2\beta C'_2}{\beta-m_1+3} \right) r^{\beta-m_1+3} \right] \quad (۲۰-الف)$$

باید توجه داشت که به دلیل پایدار بودن توزیع درجه حرارت، تغییرات دما در طی زمان صفر می باشد. نرخ کرنش های خزشی از طریق معادلات پراندتل روس به تنش ها و رفتار یک بعدی خزشی ماده طبق روابط زیر مرتبط می باشند [۷]:

$$\dot{\epsilon}_r^c = \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_e} [\sigma_r - 0.5(\sigma_\theta + \sigma_\phi)] \quad (۲۹-الف)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta^c = \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_e} [\sigma_\theta - 0.5(\sigma_r + \sigma_\phi)] \quad (۲۹-ب)$$

با در نظر گرفتن تقارن کروی $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ و استفاده از معادله ساختاری نورتون و روابط پراندتل روس (۲۹)، می توانیم روابطی برای نرخ کرنش های خزشی به دست آوریم:

$$\dot{\epsilon}_r^c = B(r) \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (۳۰-الف)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta^c = \frac{1}{2} B(r) \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (۳۰-ب)$$

با توجه به تقارن کروی، معیارهای تسلیم فون مایز و ترسکا بر یکدیگر منطبق هستند:

$$\sigma_e = |\sigma_r - \sigma_\theta| \quad (۳۱)$$

با قرار دادن روابط (۳۰) در معادله دیفرانسیل (۲۸) رابطه زیر حاصل می شود:

$$r^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + r(\beta + 2) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + (L\beta - 2)\dot{u} = \left\{ \left[b_1 - \left(\frac{L}{2} \right) b_1 + (\beta + 2J) - \frac{N}{2} \right] b_0 r^{b_1+1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_\theta) \right\} + \left\{ \left[1 - \left(\frac{L}{2} \right) \right] b_0 r^{b_1+2} \frac{\partial \sigma_e^{n_0-1}}{\partial r} (\sigma_r - \sigma_\theta) \right\} + \left\{ \left[1 - \left(\frac{L}{2} \right) \right] b_0 r^{b_1+2} \sigma_e^{n_0-1} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \right) \right\} \quad (۳۲)$$

برای حل این معادله مطابق روشی که برای حل معادله دیفرانسیل (۹) استفاده کردیم، عمل کرده و حل این معادله به صورت رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{u} = D_1 r^{m_1} + D_2 r^{m_2} + u_1' r^{m_1} + u_2' r^{m_2} \quad (۳۳)$$

که،

$$u_1'(r) = -b_0 \int \frac{\left\{ \left[b_1 - \left(\frac{L}{2} \right) b_1 + (\beta + 2J) - \frac{N}{2} \right] \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \left[1 - \left(\frac{L}{2} \right) \right] r \frac{\partial \sigma_e^{n_0-1}}{\partial r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \left[1 - \left(\frac{L}{2} \right) \right] r \sigma_e^{n_0-1} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \right) \right\}}{(m_2 - m_1) r^{m_1 - b_1 - 2}} dr \quad (۳۴-الف)$$

که، $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{22}, \bar{\lambda}$ فرم بدون بعد روابط (۷) هستند:

$$\bar{c}_{11} = \frac{E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \bar{c}_{12} = \frac{2E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\bar{c}_{21} = \frac{E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \bar{c}_{22} = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{E_0\alpha_0}{(1-2\nu)} \quad (۲۵)$$

شرایط مرزی:

$$\sigma_r = P_i(a) \quad r = r_i, \quad \sigma_r = P_0(a) \quad r = r_0 \quad (۲۶)$$

ثابت های C_1 و C_2 در معادلات (۲۴) بایستی از شرایط مرزی (۲۵) به دست آیند.

$$C_1 = \{ P_0 r_i^{m_2+\beta-1} - P_i r_o^{m_2+\beta-1} + (5\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) F(r_o^{\beta+4} r_i^{m_2+\beta-1} - r_i^{\beta+4} r_o^{m_2+\beta-1}) + (2\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) G(r_o^{\beta+1} r_i^{m_2+\beta-1} - r_i^{\beta+1} r_o^{m_2+\beta-1}) + [\bar{c}_{11}(\beta+3) + \bar{c}_{12}] H(r_o^{2\beta+2} r_i^{m_2+\beta-1} - r_i^{2\beta+2} r_o^{m_2+\beta-1}) + \frac{\bar{\lambda} R}{3k_0(2-\beta)} (r_o^{\beta+2} r_i^{m_2+\beta-1} - r_i^{\beta+2} r_o^{m_2+\beta-1}) + \frac{\bar{\lambda} C_1'}{k_0(\beta+1)} (r_o^{\beta-1} r_i^{m_2+\beta-1} - r_i^{\beta-1} r_o^{m_2+\beta-1}) - \bar{\lambda} C_2' (r_o^{2\beta} r_i^{m_2+\beta-1} - r_i^{2\beta} r_o^{m_2+\beta-1}) \} / \{ (\bar{c}_{11} m_1 + \bar{c}_{12}) (r_i^{m_1+\beta-1} r_o^{m_2+\beta-1} - r_o^{m_1+\beta-1} r_i^{m_2+\beta-1}) \} \quad (۲۷-الف)$$

$$C_2 = \{ P_0 r_i^{m_1+\beta-1} - P_i r_o^{m_1+\beta-1} + (5\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) F(r_o^{\beta+4} r_i^{m_1+\beta-1} - r_i^{\beta+4} r_o^{m_1+\beta-1}) + (2\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) G(r_o^{\beta+1} r_i^{m_1+\beta-1} - r_i^{\beta+1} r_o^{m_1+\beta-1}) + [\bar{c}_{11}(\beta+3) + \bar{c}_{12}] H(r_o^{2\beta+2} r_i^{m_1+\beta-1} - r_i^{2\beta+2} r_o^{m_1+\beta-1}) + \frac{\bar{\lambda} R}{3k_0(2-\beta)} (r_o^{\beta+2} r_i^{m_1+\beta-1} - r_i^{\beta+2} r_o^{m_1+\beta-1}) + \frac{\bar{\lambda} C_1'}{k_0(\beta+1)} (r_o^{\beta-1} r_i^{m_1+\beta-1} - r_i^{\beta-1} r_o^{m_1+\beta-1}) - \bar{\lambda} C_2' (r_o^{2\beta} r_i^{m_1+\beta-1} - r_i^{2\beta} r_o^{m_1+\beta-1}) \} / \{ (\bar{c}_{11} m_2 + \bar{c}_{12}) (r_i^{m_2+\beta-1} r_o^{m_1+\beta-1} - r_o^{m_2+\beta-1} r_i^{m_1+\beta-1}) \} \quad (۲۷-ب)$$

۵-۲- تحلیل پروسه خزش

تنش های به دست آمده توسط روابط (۲۴) در قسمت ۵-۱-۳ تنها در لحظه بارگذاری هستند، اما با گذشت زمانی بایستی تنش های خزشی نیز محاسبه شوند.

معادله دیفرانسیل برحسب نرخ جابه جایی شعاعی با مشتق گیری برحسب زمان از رابطه (۹) به صورت زیر به دست می آید:

$$r^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + r(\beta + 2) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + (L\beta + 2)\dot{u} = \quad (۲۸-الف)$$

$$r^2 \frac{\partial \dot{\epsilon}_r^c}{\partial r^2} + r^2(L) \frac{\partial \dot{\epsilon}_\theta^c}{\partial r} + r(\beta + 2J) \dot{\epsilon}_r^c + r(N) \dot{\epsilon}_\theta^c \quad (۲۸-ب)$$

$$\sigma_{\theta}(r, t_i) = \sigma_{\theta}^{(i-1)}(r, t_{i-1}) + \int \dot{\sigma}_{\theta}^{(i-1)}(r, t_{i-1}) dt^{(i)} \quad (ب-۴۰)$$

در روابط (۴۰) اندیس i بیانگر مرحله زمانی زمان خواهد بود. بنابراین بازتوزیع تنش شعاعی در زمان مورد نظر از جمع جبری توزیع تنش شعاعی ترموالاستیک و انتگرال نرخ رشد تنش شعاعی در بازه زمانی مورد نظر به دست خواهد آمد. در مورد تنش مماسی نیز به همین ترتیب خواهد بود.

با جایگذاری توزیع تنش‌های ترموالاستیک طبق روابط (۲۴) و نرخ تغییرات تنش‌ها از روابط (۳۸) در معادلات (۴۰)، روابط (۴۱) که بیانگر بازتوزیع تنش‌ها طی زمان هستند، به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t_i) = & \{(\bar{c}_{11}m_1 + \bar{c}_{12})c_1 r^{m_1+\beta-1} \\ & + (\bar{c}_{11}m_2 + \bar{c}_{12})c_2 r^{m_2+\beta-1} + (5\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})Fr^{\beta+4} \\ & + (2\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})Gr^{\beta+1} + [\bar{c}_{11}(\beta+3) + \bar{c}_{12}]Hr^{2\beta+2} \\ & + \frac{\bar{\lambda}_1 R}{3k_0(2-\beta)} r^{\beta+2} + \frac{\bar{\lambda}_1 c'_1}{k_0(\beta+1)} r^{\beta+2} - \bar{\lambda}_1 c'_2 r^{2\beta} \}^{(i-1)} \\ & + \int \{[(m_1\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})r^{m_1+\beta-1}][D_1 + u'_1] + [(m_2\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})r^{m_2+\beta-1}][D_2 + u'_2] \\ & - (\bar{c}_{11} - \frac{1}{2}\bar{c}_{12})b_0 r^{\beta+b_1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_{\theta})\}^{(i-1)} dt^{(i)} \end{aligned} \quad (الف-۴۱)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r, t_i) = & \{(\bar{c}_{21}m_1 + \bar{c}_{22})c_1 r^{m_1+\beta-1} \\ & + (\bar{c}_{21}m_2 + \bar{c}_{22})c_2 r^{m_2+\beta-1} + (5\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})Fr^{\beta+4} \\ & + (2\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})Gr^{\beta+1} + [\bar{c}_{21}(\beta+3) + \bar{c}_{22}]Hr^{2\beta+2} \\ & + \frac{\bar{\lambda}_1 R}{3k_0(2-\beta)} r^{\beta+2} + \frac{\bar{\lambda}_1 c'_1}{k_0(\beta+1)} r^{\beta+2} - \bar{\lambda}_1 c'_2 r^{2\beta} \}^{(i-1)} \\ & + \int \{[(m_1\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})r^{m_1+\beta-1}][D_1 + u'_1] + [(m_2\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})r^{m_2+\beta-1}][D_2 + u'_2] \\ & - (\bar{c}_{21} - \frac{1}{2}\bar{c}_{22})b_0 r^{\beta+b_1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_{\theta})\}^{(i-1)} dt^{(i)} \end{aligned} \quad (ب-۴۱)$$

نکته‌ای که باید بدان توجه داشت این است که در هر بازه زمانی پس از محاسبه بازتوزیع تنش‌های شعاعی و مماسی، باید با استفاده از معیار تسلیم فون مایز (۳۱)، بازتوزیع تنش موثر را به دست آوریم و انتگرال‌های (۳۴) را با استفاده از تنش موثر جدید محاسبه کنیم و مجدداً مراحل حل را تا به دست آوردن بازتوزیع تنش‌ها برای بازه زمانی بعدی ادامه دهیم.

۶- نتایج عددی

در دو بخش به بررسی نتایج عددی به دست آمده طبق شرایط مرزی (۴۲)، تا ۵۰ سال پس از شروع بارگذاری و به‌ازای ترکیبات متفاوت مواد FGM پرداخته شده است. در بخش

$$u'_i(r) = b_0 \int \left\{ \begin{aligned} & \left[b_1 - \left(\frac{L}{2} \right) b_1 + (\beta + 2J) - \frac{N}{2} \right] \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) + \\ & \left[1 - \left(\frac{L}{2} \right) \right] r \frac{\partial \sigma_e^{n_0-1}}{\partial r} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) + \\ & \left[1 - \left(\frac{L}{2} \right) \right] r \sigma_e^{n_0-1} \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} dr$$

(ب-۳۴)

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از روابط کرنش-جابجایی و معادلات توزیع تنش برحسب کرنش داریم:

$$\dot{\sigma}_r = c_{11}\dot{\epsilon}_r + c_{12}\dot{\epsilon}_{\theta} - c_{11}\dot{\epsilon}_r^c - c_{12}\dot{\epsilon}_{\theta}^c \quad (الف-۳۵)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta} = c_{21}\dot{\epsilon}_r + c_{22}\dot{\epsilon}_{\theta} - c_{21}\dot{\epsilon}_r^c - c_{22}\dot{\epsilon}_{\theta}^c \quad (ب-۳۵)$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \quad (الف-۳۶)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta} = \frac{\dot{u}}{r} \quad (ب-۳۶)$$

از جایگذاری روابط (۳۶) در روابط (۳۵)، معادلات (۳۷) جهت محاسبه نرخ تغییرات تنش‌ها برحسب نرخ جابجایی شعاعی و نرخ تغییرات کرنش به دست می‌آیند:

$$\dot{\sigma}_r = c_{11}(r) \frac{\partial \dot{u}(r)}{\partial r} + c_{12}(r) \frac{\dot{u}(r)}{r} - c_{11}(r) \dot{\epsilon}_r^c - c_{12}(r) \dot{\epsilon}_{\theta}^c \quad (الف-۳۷)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta} = c_{21}(r) \frac{\partial \dot{u}(r)}{\partial r} + c_{22}(r) \frac{\dot{u}(r)}{r} - c_{21}(r) \dot{\epsilon}_r^c - c_{22}(r) \dot{\epsilon}_{\theta}^c \quad (ب-۳۷)$$

با استفاده از روابط (۳۳) و (۳۷) و بی‌بعدسازی ضرایب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r = & [(m_1\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})r^{m_1+\beta-1}][D_1 + u'_1] \\ & + [(m_2\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})r^{m_2+\beta-1}][D_2 + u'_2] \\ & - (\bar{c}_{11} - \frac{1}{2}\bar{c}_{12})b_0 r^{\beta+b_1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) \end{aligned} \quad (الف-۳۸)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\theta} = & [(m_1\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})r^{\beta+m_1-1}][D_1 + u'_1] \\ & + [(m_2\bar{c}_{21} + \bar{c}_{22})r^{\beta+m_2-1}][D_2 + u'_2] \\ & - (\bar{c}_{21} - \frac{1}{2}\bar{c}_{22})b_0 r^{\beta+b_1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) \end{aligned} \quad (ب-۳۸)$$

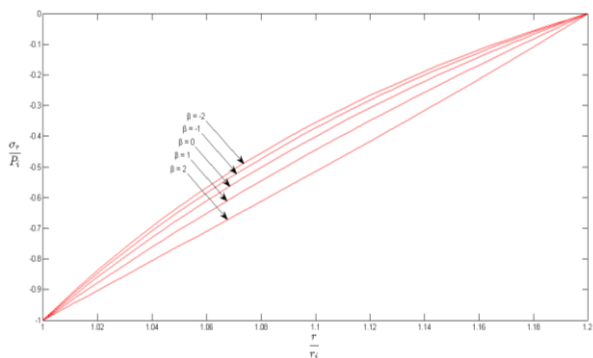
ثابت‌های D_1 و D_2 بایستی در هر مرحله از حل، پس از محاسبه تنش موثر و انتگرال‌های (۳۴)، جایگذاری آنها در رابطه (۳۸) و استفاده از شرایط مرزی (۳۹) به دست آیند:

$$\dot{\sigma}_r = 0 @ r = r_i, \quad \dot{\sigma}_r = 0 @ r = r_0 \quad (۳۹)$$

۵-۳- به دست آوردن باز توزیع تنش‌ها در طی زمان بر اثر پروسه خزش

با داشتن توزیع تنش‌های ترموالاستیک در زمان ($t=0$) و نرخ تغییرات تنش‌ها طی زمان بر اثر پروسه خزش، می‌توانیم با استفاده از روابط زیر بازتوزیع تنش‌ها را در هر زمان محاسبه کنیم:

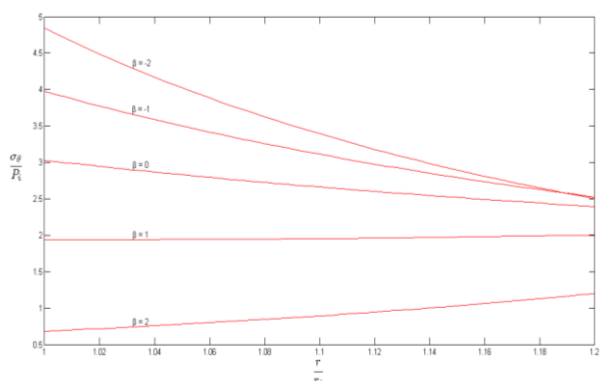
$$\sigma_r(r, t_i) = \sigma_r^{(i-1)}(r, t_{i-1}) + \int \dot{\sigma}_r^{(i-1)}(r, t_{i-1}) dt^{(i)} \quad (الف-۴۰)$$



شکل (۲): توزیع تنش شعاعی به ازای مقادیر مختلف β .

مشاهده می‌شود که شرایط مرزی در سطوح داخلی و خارجی به ازای تمامی مقادیر β ارضا شده است. تنش شعاعی به ازای تمامی مقادیر β در راستای ضخامت کره فشاری بوده، به ازای $\beta = 2$ بیشترین و $\beta = -2$ کمترین مقدار را در کلیه نقاط ضخامت دارد.

توزیع تنش مماسی بدون بعد در راستای ضخامت و در زمان $(t = 0)$ به ازای β های مختلف در شکل ۳ رسم شده است.



شکل (۳): توزیع تنش مماسی به ازای مقادیر مختلف β .

تنش مماسی به ازای تمامی مقادیر β در راستای ضخامت کره کششی می‌باشد. در سطح داخلی مخزن بیشترین تنش مماسی به ازای $\beta = -2$ رخ می‌دهد، در حالی که بیشترین مقدار تنش مماسی در سطح خارجی به ازای $\beta = -1$ اتفاق می‌افتد. بیشترین تنش برشی را در کره می‌توان طبق معیار حداکثر تنش برشی از رابطه $\tau_{max} = \frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{2}$ به دست آورد. با توجه به شکل‌های ۲-۳ می‌توان دریافت، حداکثر تنش برشی در زمان $(t = 0)$ در سطح داخلی و به ازای $\beta = -2$ رخ خواهد داد که ممکن است موجب شکست شود.

اول ابتدا توزیع تنش‌ها و نرخ تغییرات آنها در زمان $(t = 0)$ برای ترکیبات مختلف مواد FGM رسم شده‌اند و سپس تغییرات این کمیت‌ها طی زمان برای مواد با $\beta = 2$ و $\beta = -2$ مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش دوم باز توزیع تنش‌ها و کرنش‌ها طی زمان برای مواد FGM با $\beta = 2$ تحت اثر دمای بالا رسم شده و تأثیرات افزایش دما بر آنها بررسی شده است.

$$\beta = 2, 1, 0, -1, -2$$

$$\alpha_0 = 1.2 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

$$E_0 = 200 \text{ Gpa}$$

$$b_0 = 0.11 \times 10^{-36}$$

$$T_i = 50 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$P_i = 50 \text{ Mpa}$$

$$\frac{r_o}{r_i} = 1.2$$

$$\nu = 0.3$$

$$R = 0$$

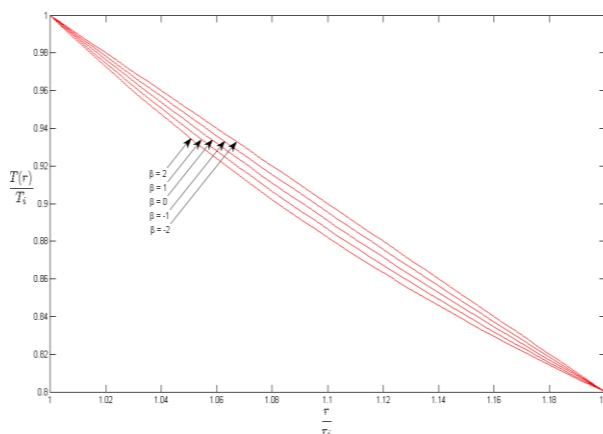
$$b_1 = -5$$

$$T_o = 40 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$P_o = 0 \text{ Mpa}$$

$$n_0 = 3$$

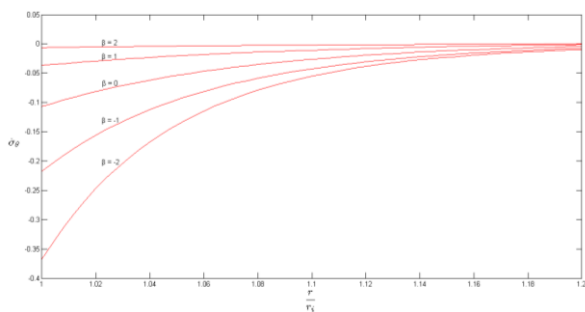
$$(42)$$



شکل (۱): توزیع درجه حرارت در راستای شعاع کره FGM تحت دمای داخلی 50°C و دمای خارجی 40°C به ازای مقادیر مختلف β .

همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، شرایط مرزی در سطوح داخلی و خارجی به ازای تمامی مقادیر β ارضا شده و درجه حرارت مخزن در هر نقطه از ضخامت با افزایش β کاهش می‌یابد.

۱-۶- نمودارهای باز توزیع تنش‌ها و نرخ تغییرات آنها
توزیع تنش شعاعی بدون بعد در راستای ضخامت و در زمان $(t = 0)$ به ازای β های مختلف در شکل ۲ رسم شده است.

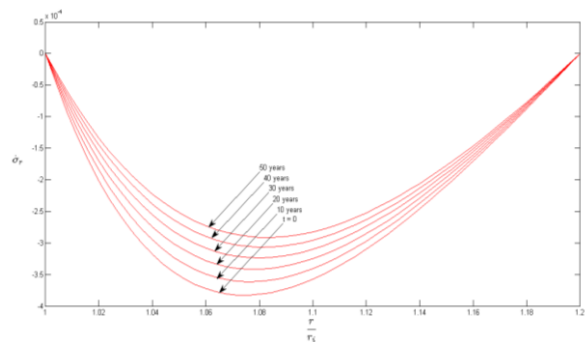


شکل (۶): توزیع نرخ تغییرات تنش مماسی به ازای مقادیر مختلف β .

نرخ تغییرات تنش مماسی به ازای تمامی مقادیر β در زمان $(t=0)$ و در سطح داخلی منفی است. بیشترین نرخ تغییرات به $\beta=-2$ و کمترین آن به $\beta=2$ تعلق دارد. مشاهده می شود بیشترین تغییرات تنش مماسی در سطح داخلی صورت می پذیرد و با پیشروی در راستای ضخامت از میزان آن کاسته خواهد شد.

با توجه به توزیع تنشها و نرخ تغییرات آنها در زمان $(t=0)$ می توان بازتوزیع تنشها را در بازه زمانی بعدی پیش بینی کرد. اما بایستی توجه داشت که با گذر زمان، به دلیل تغییر تنش موثر، نرخ تغییرات تنشها و به تبع آن بازتوزیع تنشها دچار تغییر خواهند شد.

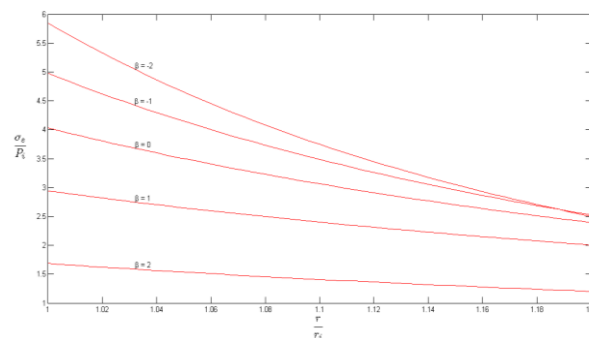
در ادامه روند این تغییرات برای ماده با $\beta=2$ تا زمان ۵۰ سال پس از شروع بارگذاری بررسی شده است. بازتوزیع نرخ تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت به ازای $\beta=2$ و در طول زمان در شکل ۷ رسم شده است.



شکل (۷): بازتوزیع نرخ تغییرات تنش شعاعی به ازای $\beta=2$.

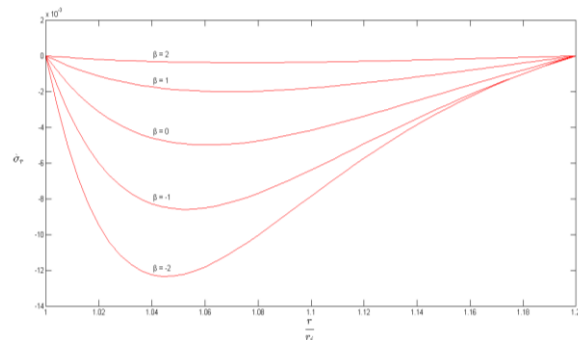
مشاهده می شود که شرایط مرزی در طول زمان در سطح داخلی و خارجی ارضا می شود. نرخ تغییرات تنش شعاعی در طول زمان (تا ۵۰ سال) منفی بوده و با گذر زمان به سمت صفر میل می کند.

با توجه به رابطه (۳۱)، توزیع تنش موثر بدون بعد در راستای ضخامت، در زمان $(t=0)$ و به ازای β های مختلف در شکل ۴ رسم شده است. با توجه به این نکته که مقدار تنش موثر در هر نقطه از ضخامت کره دو برابر مقدار حداکثر تنش برشی می باشد، می توان نتایج به دست آمده از نمودارهای ۲-۳ در مورد بیشترین مقدار تنش برشی ماکزیمم را از طریق شکل ۴ نیز استنباط کرد.



شکل (۴): توزیع تنش موثر به ازای مقادیر مختلف β .

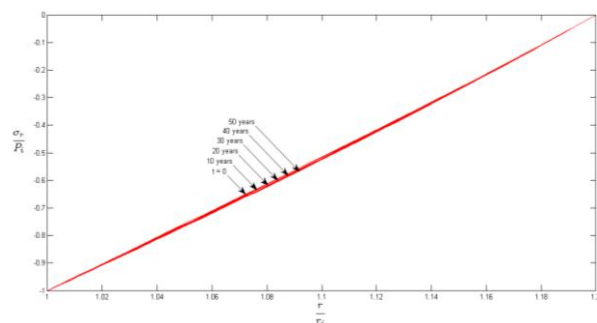
نرخ تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت برای زمان $(t=0)$ و به ازای مقادیر مختلف β در شکل ۵ رسم شده است.



شکل (۵): توزیع نرخ تغییرات تنش شعاعی به ازای مقادیر مختلف β .

همانطور که انتظار می رود شرایط مرزی به ازای تمامی مقادیر β ارضا می شود. نرخ تغییرات تنش شعاعی برای تمامی مقادیر β منفی است و بیشترین میانگین نرخ تغییرات به $\beta=-2$ و کمترین آن به $\beta=2$ تعلق دارد. نرخ تغییرات تنش مماسی در راستای ضخامت در زمان $(t=0)$ به ازای β های مختلف در شکل ۶ رسم شده است.

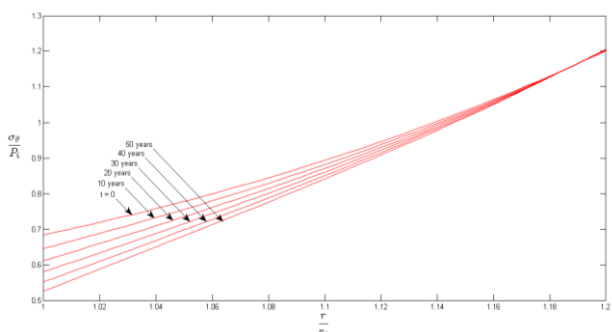
با استفاده از روش بیان شده در ارائه شکل ۸، به کارگیری روابط (۴۰) و بررسی شکل‌های ۹ و ۳ به پیش‌بینی بازتوزیع تنش مماسی در طول زمان می‌پردازیم. از آنجایی‌که، با توجه به شکل ۳ تنش مماسی به‌ازای $\beta = 2$ در زمان $(t = 0)$ کششی است و همچنین طبق شکل ۹ نرخ تغییرات تنش مماسی در طول زمان در سطح داخلی منفی و در سطح خارجی مثبت می‌باشد، بازتوزیع تنش مماسی در سطح داخلی به‌صورت کششی و با روند افزایشی طی زمان خواهد بود. بنابراین در نقاطی از ضخامت که نرخ تغییرات تنش مماسی صفر می‌باشد، تنش مماسی نسبت به زمان قبلی بدون تغییر خواهد ماند.



شکل (۸): بازتوزیع تنش شعاعی به‌ازای $\beta = 2$.

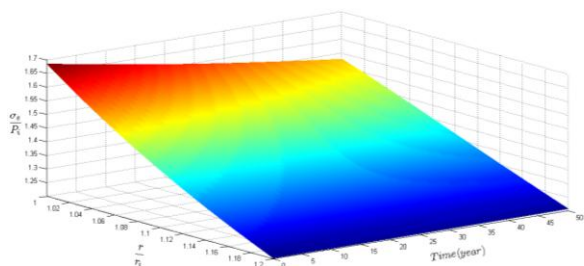
با توجه به روابط (۴۰) بازتوزیع تنش شعاعی در طی زمان به توزیع تنش شعاعی در زمان $(t = 0)$ و نرخ تغییرات آن طی زمان بستگی دارد. بنابراین با استفاده از شکل ۲ به‌ازای $\beta = 2$ و همچنین شکل ۷ می‌توان تغییرات تنش شعاعی را برای این ماده در طی زمان پیش‌بینی کرد. با بررسی این نمودارها درمی‌یابیم که توزیع تنش شعاعی در راستای ضخامت در زمان $(t = 0)$ به‌صورت فشاری بوده و نرخ تغییرات آن نیز در طی زمان منفی می‌باشد، در نتیجه بازتوزیع تنش شعاعی در طی زمان بایستی به‌صورت فشاری بوده و روند افزایشی داشته باشد.

از آنجایی‌که با گذر زمان از نرخ رشد تنش شعاعی کاسته می‌شود، بایستی در نهایت نمودارهای تنش شعاعی همگرا شوند. شکل ۸ بازتوزیع تنش شعاعی را در طی زمان برای $\beta = 2$ نمایش می‌دهد. صحت پیش‌بینی‌های انجام‌شده را به‌وضوح می‌توان در این نمودار مشاهده کرد.



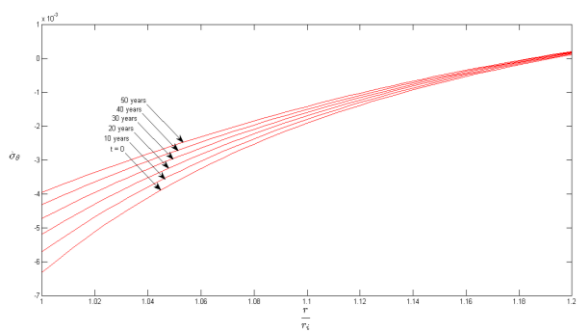
شکل (۱۰): بازتوزیع تنش مماسی به‌ازای $\beta = 2$.

این موضوع را می‌توان از برخورد نمودارهای تنش مماسی همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده، دریافت. همچنین از آنجایی‌که با گذر زمان از نرخ تغییرات تنش مماسی کاسته می‌شود، نمودارهای تنش مماسی در نهایت همگرا خواهند شد.



شکل (۱۱): بازتوزیع تنش موثر به‌ازای $\beta = 2$.

با بررسی شکل‌های ۱۰ و ۸ مشخص است که حداکثر تنش برشی طی پروسه خزش در سطح داخلی مخزن واقع خواهد شد. این نتیجه را می‌توان با استفاده از شکل سه‌بعدی ۱۱ که بازتوزیع تنش موثر را طی زمان، در راستای ضخامت برای



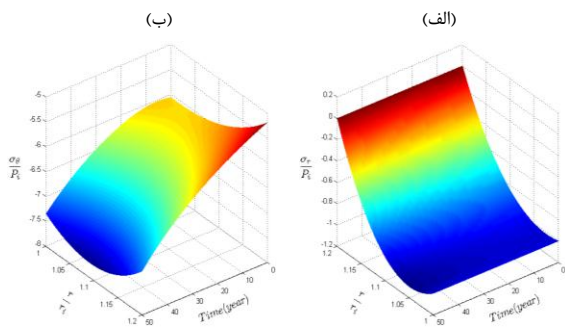
شکل (۹): بازتوزیع نرخ تغییرات تنش مماسی به‌ازای $\beta = 2$.

بازتوزیع نرخ تغییرات تنش مماسی در راستای ضخامت به‌ازای $\beta = 2$ و در طول زمان در شکل ۹ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نرخ تغییرات تنش مماسی تا ۵۰ سال در سطح داخلی منفی و در سطح خارجی مثبت می‌باشد.

تمامی مواد دارد و بیشترین مقدار جابه‌جایی به ماده با $\beta = -2$ مربوط می‌شود.

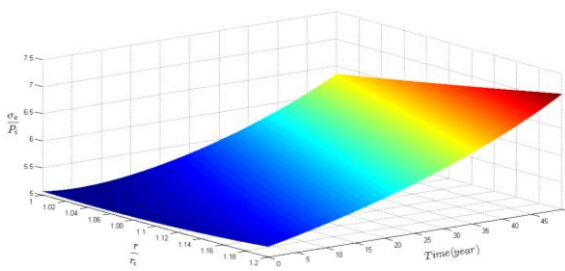
۲-۶- نمودارهای بازتوزیع تنش‌ها و کرنش‌ها به‌ازای $\beta = 2$ تحت دماهای بالا تا ۵۰ سال پس از شروع بارگذاری

از آنجایی‌که از مخازن تحت فشار معمولاً در دماهای بالا استفاده می‌شود، در این قسمت تحلیلی با فرضیات مشابه با روابط (۴۲) ولی تحت دمای داخلی ۲۰۰ و دمای خارجی ۱۹۰ درجه سانتی‌گراد برای مخزن کروی FGM صورت گرفته است و نتایج به‌دست آمده در شکل‌های ۱۵-۱۸ رسم شده‌اند. بازتوزیع تنش‌های شعاعی و مماسی در راستای ضخامت و طی زمان در شکل ۱۵ به‌صورت سه‌بعدی رسم شده است.



شکل (۱۵): الف. بازتوزیع تنش شعاعی تحت درجه حرارت $200^{\circ}C$ به‌ازای $\beta = 2$. ب. بازتوزیع تنش شعاعی تحت درجه حرارت $200^{\circ}C$ به‌ازای $\beta = 2$.

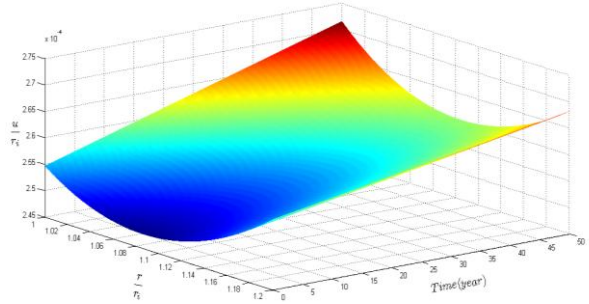
با توجه به تأثیر منفی کرنش حرارتی در تغییرات تنش مماسی، با افزایش دما شاهد کاهش تنش مماسی هستیم، به‌طوری‌که در کلیه نقاط ضخامت به‌صورت فشاری وارد خواهد شد. بازتوزیع تنش موثر در راستای ضخامت و طی زمان در شکل (۱۶) به‌صورت سه‌بعدی رسم شده است.



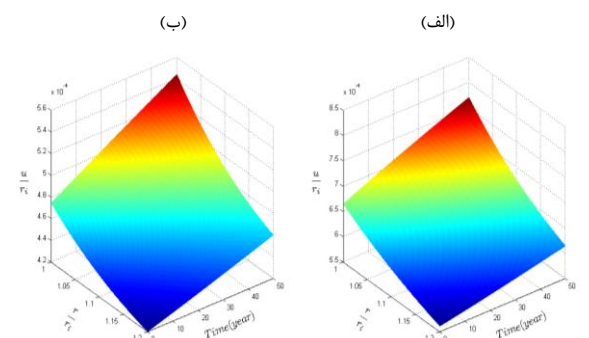
شکل (۱۶): بازتوزیع تنش موثر تحت درجه حرارت $200^{\circ}C$ به‌ازای $\beta = 2$.

$\beta = 2$ نمایش می‌دهد و همچنین روابط تنش موثر و حداکثر تنش برشی اثبات کرد.

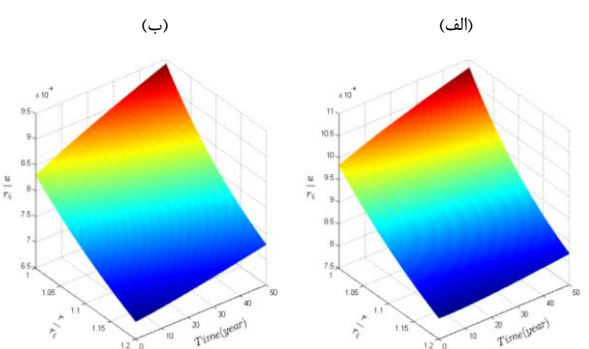
کرنش‌های کل، طبق روابط کرنش- جابه‌جایی تابعی از جابه‌جایی شعاعی می‌باشند. بازتوزیع جابه‌جایی شعاعی طی زمان در راستای ضخامت به‌ازای ضرایب توانی متفاوت مواد FGM در شکل‌های ۱۴-۱۲ رسم شده است.



شکل (۱۲): بازتوزیع جابه‌جایی شعاعی به‌ازای $\beta = 2$.

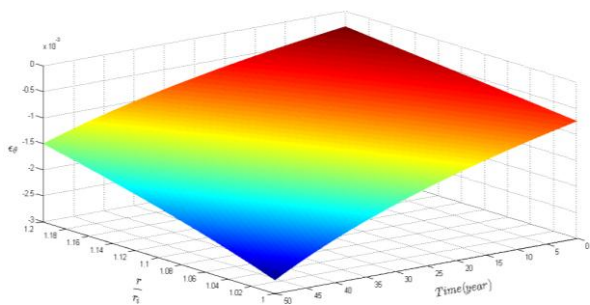


شکل (۱۳): الف. بازتوزیع جابه‌جایی شعاعی به‌ازای $\beta = 0$. ب. بازتوزیع جابه‌جایی شعاعی به‌ازای $\beta = 1$.



شکل (۱۴): الف. بازتوزیع جابه‌جایی شعاعی به‌ازای $\beta = -2$. ب. بازتوزیع جابه‌جایی شعاعی به‌ازای $\beta = -1$.

همانطور که مشاهده می‌شود ماده با $\beta = 2$ کمترین میزان جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت و طی زمان را در بین



شکل (۱۸): بازتوزیع کرنش مماسی کل تحت درجه حرارت 200°C به ازای $\beta = 2$.

۷- نتیجه گیری

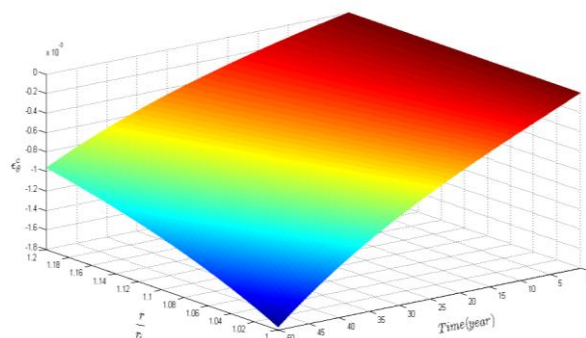
با بررسی نتایج به دست آمده از نحوه تغییرات این کمیت‌ها به ازای ترکیبات متفاوت مواد FGM درمی‌یابیم که به‌طور کلی می‌توان میزان پارامتر توزیع‌کننده تغییرات غیرهمگن مواد FGM در راستای ضخامت (β) را طوری در نظر گرفت که توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی یکنواخت‌تر باشد و یا به‌عبارتی دیگر به‌ازای شرایط بارگذاری مشخص، کمترین مقدار حداکثر تنش برشی ممکن را داشته باشیم. همچنین می‌توانیم مقدار β را طوری در نظر بگیریم که پس از سپری شدن زمان موردنظر از شروع بارگذاری، تنش‌ها به‌میزان مشخصی برسند که این نکته در صنایع هوافضا یا صناعی که عمر محدود و مشخص مخازن را مدنظر دارند، کاربرد ویژه‌ای دارد.

با توجه به نمودارهای بازتوزیع تنش‌ها در طول زمان مشخص است که به‌طور کلی تغییرات تنش شعاعی با گذر زمان ناچیز بوده و تنش مماسی به‌دلیل تغییرات گسترده‌تر، بر بازتوزیع تنش موثر و میزان حداکثر تنش برشی ماکزیمم تأثیر چشمگیرتری دارد. بنابراین جهت کنترل تنش موثر و در نتیجه کنترل مقدار حداکثر تنش برشی ماکزیمم، بایستی توجه ویژه‌ای به تغییرات تنش مماسی و عوامل موثر در آن داشت.

مشاهده شد که افزایش دمای مخزن باعث رشد شدید تنش موثر شده و جسم را به سمت گسیختگی خواهد برد و همچنین در دماهای بالا نمودار کرنش کل با کرنش خزشی همخوانی بسیار مناسبی دارند. به بیان دیگر می‌توان گفت در دماهای بالا، دلیل اصلی تغییر شکل جسم، پدیده خزش است و همان‌طور که در مباحث تئوری بیان می‌شود، پدیده خزش در دماهای بالا بیشتر به چشم می‌آید. البته این امر پس از اوج‌گیری نمودار تنش موثر کاملاً قابل رویت خواهد بود.

با مقایسه این نمودار با شکل ۱۱ مشخص است که افزایش گرادیان دما باعث افزایش شدید مقدار تنش موثر در تمام نقاط و در هر زمان شده است. افزایش دمای جسم باعث می‌شود که تنش موثر پس از افت مقطعی دچار افزایش شدید شود. هرچه مقدار افزایش دما بیشتر باشد، افزایش تنش موثر در نقاط بیشتری از ضخامت مخزن اتفاق می‌افتد.

بازتوزیع کرنش خزشی مماسی در راستای ضخامت و طی زمان در شکل ۱۷ به صورت سه‌بعدی رسم شده است.



شکل (۱۷): بازتوزیع کرنش خزشی مماسی تحت درجه حرارت 200°C به ازای $\beta = 2$.

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر کرنش خزشی مماسی منفی هستند. با توجه به اینکه طبق شکل ۱۵ تنش مماسی در تمامی ضخامت به صورت فشاری وارد می‌شود و همچنین با در نظر گرفتن تأثیر علامت قدرمطلق در معیار تسلیم (۳۱)، همان‌طور که در شکل ۱۶ دیدیم همواره $\sigma_e \geq 0$ خواهد بود. بنابراین نرخ تغییرات کرنش خزشی مطابق رابطه (۳۰) با منفی شدن تنش مماسی تغییر علامت داده و از آنجایی که کرنش‌های خزشی طی زمان پدیدار می‌شوند و رشد آنها تابع تغییراتشان است، تغییر علامت تنش مماسی سبب منفی شدن کرنش مماسی خزشی خواهد شد. همچنین نیمه ابتدایی ضخامت جسم پس از گذشت حدود ۴۰ سال از شروع بارگذاری وارد فاز سوم خزش می‌شود. بازتوزیع کرنش مماسی کل طی زمان در راستای ضخامت در شکل ۱۸ به صورت سه‌بعدی رسم شده است. با تغییر علامت کرنش خزشی و افزایش تنش موثر طی زمان و در راستای ضخامت که به‌دلیل افزایش درجه حرارت اتفاق افتاده است، تغییر علامت و افزایش مقدار کرنش کل نیز در هر نقطه در طی زمان بدیهی است.

با توجه به منحنی‌های رسم شده مشاهده می‌شود که کمترین میزان تنش برشی ماکزیمم و جابه‌جایی شعاعی طی زمان و در راستای ضخامت به‌ازای ماده FGM با $\beta = 2$ رخ می‌دهد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که تحت شرایط بارگذاری بررسی شده در این مقاله، این نوع ماده ایمن‌ترین عملکرد را طی زمان نسبت به بقیه مواد خواهد داشت.

۸- مراجع

1. You, L.H. Zhang, J.J. and You. X.Y. "Elastic Analysis of Internally Pressurized Thick-Walled Spherical Pressure Vessels of Functionally Graded Materials", *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 5, pp. 347-354, 2005.
2. Eslami M.R., Babaei M.H., and Poultangari R. "Thermal and Mechanical Stresses in Functionally Graded Thick Sphere", *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 7, pp. 522-527, 2005.
3. Jabbari M., Sohrabpour S., and Eslami M.R. "Mechanical and Thermal Stresses in Functionally Graded Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads", *Int. J. Pressure Vessel and Piping*, Vol. 79, No. 7 pp. 493-497, 2002.
4. You L.H., Ou H., and Zheng Z.Y. "Creep Deformations and Stresses in Thick-Walled Cylindrical Vessels of Functionally Graded Materials Subjected to Internal Pressure", *Int. J. Composite Structures*, Vol. 78, No. 2, pp. 285-291, 2007.
5. Xuan F.Z., Chen J.J., Wang Z.D., and Tu S.T. "Time-Dependent Deformation and Fracture of Multi-Material Systems at High Temperature", *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, No. 9, pp. 604-610, 2009.
6. Yang Y.Y. "Time-Dependent Stress Analysis in Functionally Graded Materials" *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 37, No. 51, pp. 7593-7608, 2000.
7. Harry K. "Creep Analysis.", First Edition. Willer Interscience Publication, 1990.
8. Hetnarski R.B. and Eslami M.R. "Thermal Stresses and Applications", Second Edition. Springer. 2009.
9. Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Amir S., and Vajedi S. "Magnetoelastostatic Creep Analysis of Functionally Graded Cylinders" *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 87, No. 7, pp. 389-395, 2010.