۱۵

تحلیل استاتیکی پوستههای مخروطی ضخیم متقارن محوری از جنس FGM تحت بار حرارتی و مکانیکی بهروش DQ

مصطفى فتاحى و اكبر على بيگلو

دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج (تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱/۲۳)

چکیدہ

در این مقاله رفتارترموالاستیک پوسته مخروطی ضخیم ساختهشده از مواد مدرج تابعی که خواص آن در راستای ضخامت پوسته با رابطه توانی تغییر می کند با تکیهگاههای گیردار بررسی می شود. ابتدا با جایگزینی میدان جابهجایی روش تئوری تغییر شکل برشی مرتبهاول (FSDT) در روابط کرنش جابهجایی پوسته مخروطی، روابط کرنش جابهجایی برحسب جابهجاییها و چرخش درون صفحه تعیین شده و سپس با استفاده از این روابط و قانون تشکیل دهنده، منتجههای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در واحد طول بهدست می آیند. با جایگذاری روابط بهدست آمده در معادلات تعادل برحسب بر آیندهای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در واحد طول برای حالت متقارن محوری سه معادله و سه مجهول (دو جابهجایی درون صفحه و یک چرخش درون صفحه) بهدست می آید که این معادلات حاکم را می توان با روش DQ حل کرد و مجهولات را یافت. برای یافتن تنش ها، ابتدا با جایگزینی جابهجاییهای عددی به دست آمده و مشتق عددی آنها در روابط کرنش جابهجایی، کرنش ها بهدست می آید و درنهایت با جایگزینی این کرنش ها در روابط هوک، تنش ها تعیین می شود. با مقایسه ی نایج عددی حاصل با نتایج موجود در مقالات صحهگذاری روش حاضر تحقق می یابد. درنهایت تأثیر پرامترها در رفتار خمشی پوسته مخروطی ارائه گردیده است.

واژههای کلیدی: پوسته مخروطی، مواد مدرج تابعی، تئوری تغییر شکل بر شی مرتبه اول ، بار مکانیکی و حرارتی

Static Analysis of Thick Functionally Graded Axisymmetric Conical Shell Under Thermal and Mechanical Load Using Differential Quadrature Method

M. Fatahi and A. Alibeigloo

Mechanical Engineering Department Islamic Azad University Karaj Branch (Received: 6/May/2013; Accepted: 12/April/2014)

ABSTRACT

In this paper thermoelastic behavior of a functionally graded material (FGM) conical shell with clamped edges condition is investigated. Material properties vary according to power law along the thickness direction. Thermo elastic properties of the shell are assumed to vary along the thickness by a power law distribution with Poisson ratio is held to be constant. By using first order shear deformation theory, strain-displacement relations and constitutive equations, governing differential equations can be derived in term of mid radius displacements and rotation. By using the differential quadrature method (DQM) the obtained governing equations can be solved. To validate the accuracy of the present procedure, numerical results were compared with those available in published literature. Finally the effect of gradient index, geometry dimension and thermo mechanical load on the bending behavior of conical shell is considered.

Keywords: Conical Shell, FGM, DQ, FSDT, Thermal and Mechanical Load

۱ - کارشناس ارشد: wostafasasani@yahoo.com

۲ - دانشیار (نویسنده پاسخگو): beigloo@basu.ac.ir

۱۶ ۱– مقدمه

در مهندسی نوین بهطور گسترده از پوستهها بهعنوان بدنه اجزا استفاده میشود. یکی از پرکاربردترین شکلها در علوم هوافضا و دیگر بخشهای صنعتی پوسته حاصل از چرخش به هر دو صورت مخروط ناقص یا سطح دارای انحنای مخروطی است. سازههای مخروطی بهشکل مخروط کامل و یا مخروط ناقص در بدنه انواع وسایل پرنده بدون سرنشین و موشکهای حامل ماهواره بهعنوان آداپتور در بخشهای استوانهای با قطرهای متفاوت به کار میروند. لذا تحلیل این دسته از سازهها در روند کلی طراحی تمام اجزاء بدنه ماهوارهبرها موردنیاز و کاربردی است. با افزایش استفاده از پوستههای مخروطی و نیاز به بالا بردن کارایی و اطمینان از عمل کرد صحیح آنها استفاده از مواد نو مانند مواد مدرج تابعی افزایش یافته است. از طرفی انجام تحلیلهای تجربی روی این مواد با مشکلاتی از قبیل اندازه، قیمت، پیچیده بودن مدل آزمایشگاهی و... همراه است، از اینرو ارایه مدلهای تغری کلیتر مناسب بهنظر میرسد.

در سال ۱۹۵۹ پاسخ تحلیلی پوستههای مخروطی متقارن محوری نازک با استفاده از توابع بسل، هنکل و تامسون ارائه شد [1]. در سال ۱۹۶۰ تحلیل پانل مخروطی تحت بار مکانیکی با استفاده از روش جداسازی متغیرها که در آن از سری مثلثاتی در جهت محیطی و سری توانی در جهت نصفالنهاری استفاده شد، انجام گردید [۲]. در سال ۱۹۶۳ رفتار پوسته دورانی تحت بارگذاری دلخواه با استفاده از روش اختلاف محدود و روش سری فوریه بررسی گردید [۳]. در سال ۱۹۹۰ یک روش اختلاف محدود تکراری برای تعیین جابهجاییها و تنشها در پوستههای مخروطی متقارن محوری ناقص و کامل با شرایط مرزی گوناگون داده شد [۴] . در سال ۱۹۹۱ تغییرشکل پوسته نازک ضخامت متغیر مخروطی و متقارن محوری تحت فشار داخلی یکنواخت با شرایط مرزی گوناگون با استفاده از روش المان محدود [۵] بررسی شد. براساس تئوری کلاسیک پوسته، در سال ۱۹۹۲ با استفاده از روش مذکور در مرجع [۳] رفتار پوسته مخروطی با تکیه گاههای ساده ارائه شد [۶]. در سال ۱۹۹۵ براساس تئوری پوسته ضخیم و استفاده از روش نیمه تحلیلی که ترکیبی از بسط فوریه، اختلاف محدود و روش ماتریس تبدیل ریکاتی بود حل شد، تحليل تنش در پوسته مخروطی چندلايه تحت بارگذاری کلی مورد بررسی قرار گرفت [۷]. در سال ۱۹۹۶ تحلیل استاتیکی پوسته مخروطی نازک ناقص و یا کامل تحت

بار متقارن محوری و یا متمرکز در امتداد نصفالنهاری ارائه شد [۸]. براساس معادلات سهبعدی الاستیسیته و استفاده از روش DQ تحليل خمشي پوسته مخروطي چندلايه DQ در سال ۱۹۹۹ ارایه شد [۹]. در سال ۲۰۰۱ یک روش تحلیلی ساده و دقیق در تحلیل رفتار تنشی پوسته مخروطی نازک ارایه شد [۱۰]. در سال ۲۰۰۲ تئوری اصلاح شدهای با درنظر گرفتن اثر تغيير شكل برشى عرضى جهت تحليل استاتیکی پوسته مخروطی معرفی گردید [۱۱]. در سال ۲۰۰۳ آنالیز پوسته مخروطی چندلایه نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری تشکل برشی مرتبه سوم (TSDT) و روش اجزا محدود انجام شد [17]. در سال ۲۰۰۴ مسئله ترموالاستیک کوپل شبهاستاتيك دوبعدى پوسته مخروطى متقارن محورى چندلایه با استفاده از روشهای تبدیل لاپلاس و اختلاف محدود مورد بررسی قرار گرفت [۱۳]. در سال ۲۰۰۷ دمای بحرانی کمانش یوسته مخروطی FGM با تکیه گاهای ساده با استفاده از روش پایداری دانل اصلاحشده تعیین گردید [۱۴]. در سال ۲۰۰۹ رفتار دینامیکی پوسته FGM مخروطی و استوانهای و ورق حلقوی، براساس FSDT و استفاده از روش GDQ برای ماده همسانگرد ارائه شد [۱۵]. در سال ۲۰۱۱ تحليل خمشى پنل مخروطي FGM نسبتاً ضخيم با لبههاي گیردار انجام شد [۱۶].

مرور پیشینه تحقیقات مرتبط نشان میدهد که تحلیل ترموالاستیک پوسته مخروطی FGM ضخیم تاکنون گزارش نشده است لذا این موضوع در این تحقیق ارائه میشود. در این مقاله از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای میدان جابهجایی استفاده میشود و اثر حرارت و بار عرضی برای تحلیل پوسته مخروطی مدرج تابعی درنظر گرفته میشود. روش DQ برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده میشود.

۲- فرمولبندی و معادلات حاکم

نخست یک پنل مخروطی تقریباً ضخیم FGM تحت بار حرارتی و مکانیکی با استفاده از تئوری تغییر شکل بر شی مرتبه اول مورد بررسی قرار می گیرد و سپس معادلات حاکم برای حالت خاص پوسته مخروطی متقارن محوری به دست می آید.

۲-۱- فرمولبندی پنل مخروطی

 (x, θ, z) مطابق شکل ۱، یک پوسته مخروطی با مختصات (x, θ, z) ، مطابق شکل ۰، یک پوسته مخروطی ما مختصات h ، کوچکترین شعاع

و شعاعهای R و $R_{ heta}$ که، $R_{ heta}$ بر سطح پوسته عمود است درنظر گرفته می شود.



شکل (۱): ساختار پنل مخروطی [۱۶].

$$R = a + x \sin(\alpha), \quad R_{\theta} = \frac{R}{\cos(\alpha)},$$
 (۱)

براساس روش FSDT ، [۱۷] و [۱۸] میتوان جابهجاییها را در پوسته مخروطی نشان دادهشده در شکل ۱، بهصورت زیر بیان کرد [۱۶]:

$$U_{x}(x, \theta, z) = u_{x}(x, \theta) + z \beta_{x}(x, \theta) ,$$

$$U_{\theta}(x, \theta, z) = u_{\theta}(x, \theta) + z \beta_{\theta}(x, \theta) ,$$

$$W(x, \theta, z) = W(x, \theta) .$$
(Y)

بهطوری که، U_x : جابهجایی در راستای یال، U_θ : جابهجایی $\beta_{\mathcal{B}}$: محیطی، $\beta_{\mathcal{X}}$: چرخش حول محور θ در صفحه میانی، $\beta_{\mathcal{X}}$: چرخش حول محور X در صفحه میانی، W: جابهجایی در راستای ضخامت و حروف کوچک نشاندهنده جابهجاییها در صفحه میانی است.

با جایگزینی جابهجاییهای معادله (۲) در روابط کرنش جابهجایی پوسته مخروطی، پس از سادهسازی، روابط کرنش- جابهجایی زیر بهدست میآید [۱۹] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x} &= \left(\varepsilon_{x}^{0} + z \, kx\right), \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_{\theta}}\right)} \left(\varepsilon_{\theta}^{0} + z \, k\theta\right) \\ \gamma_{xz} &= \mu_{x}^{0}, \; \gamma_{\theta z} = \frac{\mu_{\theta}^{0}}{\left(1 + \frac{z}{R_{\theta}}\right)} \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\gamma_{x}^{0} + z \, \tau_{x}\right) + \frac{\gamma_{\theta}^{0} + z \, \tau_{\theta}}{\left(1 + \frac{z}{R_{\theta}}\right)} \end{aligned} \tag{(7)}$$

۱۷

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_x}{\partial x} , \quad \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x \sin \alpha + w \cos \alpha \right), \\ kx &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} , k\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \beta_x \sin \alpha \right), \quad \gamma_x^0 &= \frac{\partial u_\theta}{\partial x}, \\ \gamma_\theta^0 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \theta} - u_\theta \sin \alpha \right), \quad \tau_x = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x}, \quad \mu_x^0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x , \\ \tau_\theta &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} - \beta_\theta \sin \alpha \right), \quad \mu_\theta^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R} \cos \alpha + \beta_\theta , \end{aligned}$$
(f)

۲-۱-۱- معادلات تشکیلدهنده

روابط تنش - کرنش در پوستهٔ مخروطی [۱] عبارت است از:

$$\sigma_{x} = Q_{11} \varepsilon_{x} + Q_{12} \varepsilon_{\theta} + \alpha_{1} \tau, \quad \tau_{xz} = k_{s} Q_{66} \gamma_{xz}$$

$$\sigma_{\theta} = Q_{12} \varepsilon_{x} + Q_{22} \varepsilon_{\theta} + \alpha_{1} \tau, \quad \tau_{x\theta} = Q_{66} \gamma_{x\theta}$$

$$\sigma_{z} = 0, \quad \tau_{\theta z} = k_{s} Q_{66} \gamma_{\theta z} \qquad (\Delta)$$

$$Q_{11} = \frac{E}{1 - v^2} \qquad Q_{12} = \frac{v E}{1 - v^2} \qquad Q_{44} = \frac{E}{2(1 + v)}$$
$$Q_{22} = Q_{11} \qquad Q_{55} = Q_{44} = Q_{66} \qquad \alpha_1 = \frac{E \alpha_0}{v - 1}$$
(\$

که در آن، E مدول الاستیک و α_0 ضریب انبساط حرارتی است که طبق رابطه توانی درنظر در راستای z تغییر میکنند. v نسبت پواسون ، k_s ضریب تصحیح تنش برشی و T اختلاف دماست [۱].

با استفاده از معادلات (۱) و (۳) برآیندهای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در واحد طول [۱] بهصورت زیر بیان می شوند:

$$\left\{ G_{ii}, H_{ii}, j_{ii} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ii} \left(1 + z/R_{\theta} \right) \left\{ 1, z, z^{2} \right\} dz, \quad i = 1, 5, 6$$

$$\left\{ G_{ii}^{'}, H_{ii}^{'}, j_{ii}^{'} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ii} \frac{1}{\left(1 + z/R_{\theta} \right)} \left\{ 1, z, z^{2} \right\} dz, \quad i = 2, 4, 6$$

$$\left\{ A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} \left\{ 1, z, z^{2} \right\} dz, \quad i = 1, 2, j = 1, 2$$

$$G_{11} \frac{d^{2}}{dt^{2}} u + \left(\frac{G_{11}\sin(\alpha)}{R} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^{2}}B_{11}\right)\frac{d}{dx}u - \frac{G_{22}}{R^{2}}\sin(\alpha)(u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)) + \frac{A_{12}\cos(\alpha)}{R}\frac{d}{dx}w + \left(\frac{H_{11}\sin(\alpha)}{R} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^{2}}D_{11}\right)\frac{d}{dx}\beta + H_{11}\frac{d^{2}}{dx^{2}}\beta - \frac{H_{22}\sin(\alpha)^{2}}{R^{2}}\beta + \frac{d}{dx}T_{nx} + \frac{\sin(\alpha)}{R}(T_{nx} - T_{n\theta}) = 0$$

$$k_{s}G_{55} \frac{d^{2}}{dx^{2}}w + \left(\frac{k_{s}G_{55}\sin(\alpha)}{R} - \frac{k_{s}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R^{2}}B_{55}\right)\frac{d}{dx}w + \left(\frac{k_{s}G_{55}\sin(\alpha)}{R} - \frac{k_{s}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R^{2}}B_{55}\right)\frac{d}{dx}\beta + \left(\frac{k_{s}G_{55}\sin(\alpha)}{R} - \frac{k_{s}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R^{2}}B_{55}\right)\frac{d}{dx}\beta + \left(\frac{k_{s}G_{55}\sin(\alpha)}{R} - \frac{k_{s}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R^{2}}B_{55}\right)\frac{d}{dx}\beta - \frac{A_{12}\cos(\alpha)}{R}\frac{d}{dx}u - \frac{\cos(\alpha)}{R^{2}}G_{22}(u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)) - \frac{\cos(\alpha)}{R}T_{n\theta} = q_{z}$$

$$\left(\frac{\sin(\alpha)}{R}H_{11} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^{2}}D_{11}\right)\frac{d}{dx}u + H_{11}\frac{d^{2}}{dx^{2}}u - \frac{H_{22}\sin(\alpha)}{R^{2}}(u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)) + \left(\frac{B_{12}}{R}\cos(\alpha) - k_{s}G_{55}\right)\frac{d}{dx}w + \left(\frac{J_{11}\sin(\alpha)}{R} - \frac{\cos(\alpha)}{R}T_{n\theta} + J_{11}\frac{d^{2}}{dx^{2}}\beta - \left(\frac{J_{22}\sin(\alpha)^{2}}{R^{2}} + k_{s}G_{55}\right)\beta + \frac{d}{dx}T_{nx} + \frac{\sin(\alpha)}{R}(T_{nx} - T_{n\theta}) = 0$$

$$(1 \cdot)$$

با برابر صفر قراردادن جملات حرارتی روابط (۱۰)، معادلات حاکم در مرجع [۱۶] در حالت دوبعدی بهدست میآید.

۲-۳- توزيع دما

میتوان سه نوع توزیع دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی در امتداد ضخامت درنظر گرفت [۱۴].

توزیع دمای یکنواخت زمانی بهوجود میآید که برای مثال، جسم بهطور کامل در دمایی بیشتر از دمای محیط قرار گیرد و با آن همدما شود و توزیع دمای خطی میتواند در جسم همگن در حالت یکبعدی رخ دهد.

توزیع دمای غیرخطی با استفاده از معادله هدایت حرارتی یک دیواره مسطح FGM در حالت پایا، با شرایط مرزی دمایی دادهشده بهدست میآید:

$$\begin{split} & \{A_{66}, B_{66}, \mathbf{D}_{66}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathcal{Q}_{66}\{1, z, z^2\} \, \mathrm{d}z, \\ & T_{nx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1 T \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \mathrm{d}z \\ & T_{n\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1 T \, \mathrm{d}z \\ & T_{mx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1 T \, z \, \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \mathrm{d}z \\ & T_{m\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1 T \, z \, \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \mathrm{d}z \end{split}$$

حالا می توان از روابط بهدست آمده برای بر آیندهای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در معادلات تعادل کلی پوسته مخروطی [۱۹] استفاده نمود، معادلات تعادل به صورت زیر است [۱۹]:

$$N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{\theta x, \theta} + \frac{\sin \alpha}{R} (N_x - N_{\theta}) = 0$$

$$N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta\theta, \theta} + \frac{\sin \alpha}{R} (N_x \theta + N_{\theta x}) + \frac{Q_{\theta} \cos \alpha}{R} = 0$$

$$Q_{x,x} + \frac{1}{R} Q_{\theta, \theta} + \frac{Q_x \sin \alpha}{R} - \frac{N_{\theta} \cos \alpha}{R} = q_z$$

$$M_{x,x} + \frac{1}{R} M_{\theta x, \theta} + \frac{\sin \alpha}{R} (M_x - M_{\theta}) - Q_x = 0$$

$$M_{x\theta,x} + \frac{1}{R} M_{\theta, \theta} + \frac{\sin \alpha}{R} (M_x \theta + M_{\theta x}) - Q_{\theta} = 0$$
(9)

۲-۲- فرمول بندی پوسته مخروطی متقارن محوری

برای حالت متقارن محوری شکل **۲** مولفه جابهجایی در راستای θ صفر است، بنابراین پنج مجهول جابهجایی به دو جابهجایی u(x) و w(x) و یک چرخش $\beta(x)$ در صفحه تبدیل میشود. همچنین برای این حالت با استفاده از روابط کرنش- جابهجایی و هوک، رابطه $\sigma_z = \tau_{\theta z} = \tau_{x \theta} = 0$ بهدست میآید.

با جایگذاری رابطه (۴) در (۷) و سپس در معادلات تعادل، برای حالت متقارن محوری پس از سادهسازی سه معادله بهدست میآید که معادلات حاکم پوسته مخروطی متقارن محوری از جنسFGM و دارای بار حرارتی نامیده میشوند.



شکل (۲): ساختار پوسته مخروطی متقارن محوری.

(λ)

۱٩

تحلیل استاتیکی پوستههای مخروطی ضخیم متقارن محوری از جنس...

$$MI(i) = \prod_{k=1, k \neq i}^{N} (X(i) - X(k))$$

$$a(i,j) = \frac{MI(i)}{(X(i) - X(j)) \cdot MI(j)} \text{ for } i \neq j$$

$$a(i,i) = -\sum_{j=1, j \neq i}^{N} a(i,j)$$

$$b(i,j) = 2 a(i,j) \left(a(i,i) - \frac{1}{X(i) - X(j)} \right) \text{ for } i \neq j$$

$$b(i,i) = -\sum_{j=1, j \neq i}^{N} b(i,j)$$
(1A)

پس از جایگذاری این مشتقها در معادلات حاکم، باید معادلات بهدستآمده در تکتک نقاط گرهی ارزیابی شوند. تا اینگونه، دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات خطی تبدیل شود. شرایط مرزی برای تکیهگاه گیردار بهصورت زیر درنظر گرفته می شود:

$$at \quad x = 0 \qquad \begin{cases} U = 0 \\ W = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \Rightarrow \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 = 0 \\ W_1 = 0 \\ B_1 = 0 \end{cases}$$
$$at \quad x = L \qquad \begin{cases} U = 0 \\ W = 0 \Rightarrow \\ W = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \Rightarrow \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_N = 0 \\ W_N = 0 \\ B_N = 0 \end{cases}$$
$$B_N = 0 \end{cases}$$
$$(19)$$

با استفاده از روش بخش سوم و با درنظرگیری تعداد نقاط \mathcal{R} برای پوسته با شرایط \mathcal{R} می \mathbb{R} و \mathcal{R} و \mathcal{R} در L/2 برای پوسته با شرایط فیزیکی و دمایی زیر بهدست آمده است. نتایج در جدول نشان داده شده است.

$$\upsilon = .3, \quad E_m = 70 \cdot 10^9 \ pa, \quad E_c = 380 \cdot 10^9 \ pa,$$

$$h = .01 \ m, \quad \alpha_m = 12 \cdot 10^{-6} \ \frac{1}{k}, \quad \alpha_c = 10 \cdot 10^{-6} \ \frac{1}{k}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6},$$

$$T = 200 \ k, \ L = 10 \ m, \quad q_z = 100000 \ pa, \quad a = 10 \ m,$$

$$E = \left(E_c - E_m\right) \left(\frac{z}{h} + .5\right)^2 + E_m \qquad (\Upsilon \cdot)$$

جدول (۱): چرخش در صفحه و جابهجاییهای طولی و عرضی در وسط پوسته بر حسب متر بهازای تعداد نقاط گرهی

مختلف.

	_		
β(L/2)	U(L/2)	w(L/2)	Ν
٣.۴۵	•.••٢١٩٣٩	•.•9744•9	۵
•.••٨۵۴٧٨	•.•••	۰.۰۸۰۹۷۹۴	1.
•.••۶٩۶٠٣	•.•••٧۴۶٣	•.•۶٩•٣١•	۱۵
•.••\$7891	•.•••٧۴۵٣		۲۰
•.••\$9479	•.••• ٧۴۴٨	•.•9888949	۲۵
•.••۶۹۵۲۷	•.•••٧۴۴٨	•.•۶۸۸۶۲۲	۳۰
•.••۶9878	•.•••٧۴۴٨	•.•988977	۳۵
•.••۶9878	•.•••٧۴۴٨	•.•988977	4.
•.••۶9878	•.•••٧۴۴٨	•.•988977	۴۵
•.••۶9878	•.•••٧۴۴٨	•.•\$XX\$TT	۵۰

$$T\left(-\frac{h}{2}\right) = T_a \qquad T\left(\frac{h}{2}\right) = T_b \qquad (11)$$

که، T_a اختلاف دمای سطح درونی و T_b اختلاف دمای سطح بیرونی است. معادله هدایت حرارتی برای این حالت بهصورت زیر است: $\frac{d}{dz}\left(k(z)\frac{dT}{dz}\right) = 0$ (۱۳) که در آن، (k(z)) ضریب هدایت حرارتی است و میتوان آن را با رابطه توانی زیر در راستای ضخامت نشان داد: $k(z) = (k_m - k_c)\left(\frac{z}{h} + .5\right)^2 + k_c$ (۱۴) اندیسهای C و M مربوط به ضرایب انتقال حرارت سرامیک و فلز هستند. با حل معادله دیفرانسیل و اعمال شرایط مرزی

رابطه زیر برای توزیع دما بهدست میآید:

$$T(z) = \frac{\left(T_b - T_a\right) \arctan\left(\frac{1}{2} \frac{\left(k_c - k_m\right)\left(2 z + h\right)}{h \sqrt{k_c \left(k_m - k_c\right)}}\right)}{\arctan\left(\frac{\left(k_c - k_m\right)}{\sqrt{k_c \left(k_m - k_c\right)}}\right)} + T_a$$

۳- استفاده از روش DQ برای حل معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم و یافتن سه مجهول β ،u و w با روش DQ ، آنچنانکه در مرجع [۲۰] و [۲۱] گفته شده است، توزیع نقاط گرهی به صورت زیر درنظر گرفته می شود: $X(i) = \frac{L}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{(i-1)}{N-1} \cdot \pi\right)\right)$

که، N تعداد کل نقاط گرهی درنظر گرفته شده است. با استفاده از همین مراجع مشتق اول و دوم در نقاط گرهی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x = X(i)} = \sum_{j=1}^{N} a(i,j) U_{j}$$

$$\frac{d^{2}u}{dx^{2}}\Big|_{x = X(i)} = \sum_{j=1}^{N} b(i,j) U_{j}$$

$$\frac{d\beta}{dx}\Big|_{x = X(i)} = \sum_{j=1}^{N} a(i,j) B_{j}$$

$$\frac{d^{2}\beta}{dx^{2}}\Big|_{x = X(i)} = \sum_{j=1}^{N} b(i,j) B_{j}$$

$$\frac{dw}{dx}\Big|_{x = X(i)} = \sum_{j=1}^{N} a(i,j) W_{j}$$

$$\frac{d^{2}w}{dx^{2}}\Big|_{x = X(i)} = \sum_{j=1}^{N} b(i,j) W_{j}$$

$$() \forall)$$

که، U مقدار u در نقاط گرهی، B مقدار β در نقاط گرهی و b(i,j) مقدار w در نقاط گرهی را نشان میدهد. a(i,j) e(i,j)ضرایب وزنی بهترتیب برای مشتقات اول و دوم هستند که بهصورت زیر تعریف می شوند:



در شکلهای ۸–۵ نتایج مرجع [۲۲] و نتایج بهدست آمده در این مقاله برای مقایسه به صورت پشت سرهم آمده اند، با مقایسه این دو دسته نمودار و باتوجه به شباهت زیاد آنها به یکدیگر به درستی روش به کاررفته پی برده می شود.



در N=35 پاسخ بهطور مناسب همگرا میشود.

۴- صحهگذاری روش حاضر

در اینجا نتایج به دست آمده با نتایجی که در مرجع [۲۲] آمده است، برای نشان دادن درستی پاسخ به دست آمده مقایسه میشود. در مرجع یادشده، یک پوسته مخروطی ضخیم متقارن محوری همگن تحت بار عرضی استاتیک، با استفاده از روش محوری همگن تحت بار عرضی استاتیک، با استفاده از روش FSDT برای تکیه گاههای گیردار بررسی می شود. خصوصیات FSDT برای تکیه گاههای گیردار بررسی می شود. خصوصیات پوسته در مرجع [۲۲] به صورت: پوسته در مرجع [۲۲] به صورت: h=40mm b=30mm h=20mm L=400mm مدول P=80MPa داده شده است. مدول که، P, L, f, h, c در شکل P نشان داده شده است. مدول یانگ و نسبت پوآسون به ترتیب E=200GPa و S=0 است.







شکل (۱۱): تنش نرمال σ_x در سطح بیرونی پوسته در راستای طولی (x(m برای سه جنس گوناگون.

همان طور که در شکل **۹** نشان داده شده است، ماده FG2 که دارای سطح درونی سخت است، کمترین خیز را دارد [۲۴].

در شکل ۱۰ نشان داده شده است که چرخش در صفحه برای پوسته با جنس FG2 کمتر از حالت همگن و حالت FG1 است و چرخش در پوسته FG1 بیشترین مقدار را دارد [۲۵].

شکل **۱۱** تنش نرمال σ_x در سطح بیرونی پوسته را نشان میدهد. میبینیم که برای هر سه جنس تنش نرمال σ_x ماکزیمم بهصورت کششی است و در تکیهگاه بالایی (x=0) رخ میدهد. همانطورکه در این شکل نشان داده شده است، پوسته با جنس FG2 دارای کمترین تنش است و پوسته FG1 بیشترین تنش را داراست. همانطورکه انتظار میرود نمودار حالت همگن تقریباً میانگینی از این دو حالت است.

در شکل**۱۲** نمودار توزیع تنش در x=L/2 در راستای ضخامت z برای سه نوع ماده گوناگون کشیده شده است. همانطورکه دیده می شود باز هم پوسته با جنس FG2 از نظر مقدار ماکزیمم تنش، دارای وضعیت بهتری نسبت به حالت

تحلیل استاتیکی پوستههای مخروطی ضخیم متقارن محوری از جنس...

بهدلیل اینکه در روش FSDT ، خیز عرضی w تابع z نیست ، در شکل۶ جابهجایی شعاعی تغییر چندانی در یهای مختلف ندارد و آن اختلاف کم در یهای مختلف بهدلیل تأثیر مؤلفه جابهجایی در جهت x شکل۲ در تبدیل مختصات است.

۵- نتایج عددی و بحث در آن در این قسمت، مطالعه عددی پوسته مخروطی با جنس و ابعاد مشخص شده در روابط ۲۱ و ۲۲ ارائه میشود.

۵–۱– تاثیر جنس بر رفتار پوسته تحت بار عرضی

در زیر سه نوع ماده مختلف نشان داده شده است [۲۳]. که در آنها فقط توزیع مدول الاستیسیته E ، در راستای ضخامت بیان شدهاست ولی هر خاصیت ماده را میتوان به اینصورت بیان کرد:

FG1	$\mathbf{E} = \left(E_c - E_m\right) \left(\frac{z}{h} + .5\right)^2 + E_m$	
FG2	$\mathbf{E} = \left(E_m - E_c\right) \left(\frac{z}{h} + .5\right)^2 + E_c$	
home	egeneous $E = 225 Gpa$	(11)

با بهکاربردن خواص زیر برای پوسته شکل ۲ جابهجاییها و تنشها برای مواد FGM گوناگون رسم شده است:

 $E_m = 70 \cdot 10^9 \ pa$, $E_c = 380 \cdot 10^9 \ pa$, N = 35, $a = 1 \ m$, $q_z = 10 \cdot 10^6 \ pa$, $h = .1 \ m$, $T = 0 \ k$, $L = 1 \ m$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\upsilon = .3$ (YY)



شکل (۹): جابهجایی عرضی در راستای طولی X برای سه جنس گوناگون.



شکل (۱۴): تنش برشی در صفحه میانی در راستای طولی x(m) برای سه بار عرضی مختلف.



شکل (۱۵): تنش نرمال *σ*_θ در سطح بیرونی پوسته در راستای طولی (x(m برای سه بار عرضی مختلف.

در شکل **۱۳** خیز عرضی پوسته برای سه نوع بار عرضی گوناگون در راستای طولی X نشان داده شده است. با افزایش بار خیز بیشتر میشود ولی محل خیز ماکزیمم تغییری نمی کند. در شکل **۱۴** تنش برشی پوسته در صفحه میانی برای سه نوع بار عرضی گوناگون در راستای طولی X نشان داده شده است. با افزایش بار این تنش بیشتر میشود ولی محل ماکزیمم مقدار آن تغییری نمی کند. در شکل **۱۵** تنش نرمال ماکزیمم مقدار آن تغییری نمی کند. در شکل **۱۵** تنش نرمال مراکزیمم مقدار آن تغییری نمی کند. در شکل **۱۵** تنش نرمال در راستای طولی X نشان داده شده است. با افزایش بار این تنش بیشتر میشود ولی محل ماکزیمم مقدار آن تغییری نمی کند.

۵-۳- تاثیر تغییر ضخامت بر پوسته در نمودار شکل ۱۶ پوسته بخش ۵-۱ با بار عرضی 10 MPa، با سه ضخامت متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است.

FG2 و حالت همگن است و همان طور که انتظار می رود نمودار حالت همگن تقریباً میانگینی از حالت FG1 و FG2 است.



شکل (۱۲): تنش نرمال σ_{χ} در وسط پوسته در راستای ضخامت z(m) برای سه جنس گوناگون.

۲-۵- تاثیر بار عرضی بر پوسته

در شکلهای **۱۵–۱۳**، اثر سه نوع بار عرضی مختلف بر جابهجاییها و تنشهای پوسته بخش ۵–۱ از جنس FG1 نشان داده شده است.



شکل (۱۳): جابهجایی عرضی در راستای طولی (x(m) با سه نوع بار (MPa**).**

,

تحلیل استاتیکی پوستههای مخروطی ضخیم متقارن محوری از جنس... با درنظ



شکل (۱۶): جابهجایی عرضی در راستای طولی (x(m) برای سه ضخامت پوسته مختلف.

در شکل **۱۶** خیز عرضی پوسته برای سه نوع ضخامت مختلف پوسته در راستای طولی x نشان داده شده است. دیده می شود که هرچه پوسته ناز ک تر باشد، خیز عرضی ماکزیمم در نزدیکی تکیه گاه پایینی رخ می دهد و در پوسته های ضخیم این جابه جایی عرضی ماکزیمم به L/2 یعنی وسط پوسته نزدیک می شود. پس ضخامت پوسته نه تنها در مقدار خیز، بلکه در شکل منحنی خیز نیز تأثیر می گذارد.

۵-۴- اثر دما روی پوسته

با حل معادله گرمای یکبعدی و استفاده از شرط مرزی دمای ثابت روی سطح درونی و بیرونی پوسته، توزیع دما در راستای ضخامت بهدست میآید. این توزیع دما برای سه ماده یادشده در بخش ۵–۱ بهصورت شکل ۱۷ است:



شکل (۱۷): توزیع دما در راستای ضخامت برای سه ماده مختلف.

در این شکل از پارامترهای زیر استفاده شده است:

$$T_b = 150 k$$
 $T_a = 50 k$
 $h = .1 m$
 $k_m = 20 \frac{w}{m k}$
 $k_c = .1 \frac{w}{m k}$
(۲۳۲)

با درنظرگرفتن پوسته بخش ۵-۱ با بار عرضی صفر ولی با جنسهای گوناگون و قرارگرفتن پوستههای حاصل در معرض اختلاف دمای سطح درونی k 50 و بیرونی k 150 و ضرایب هدایت حرارتی رابطه (۲۳) جابهجاییها و تنشها برای پوسته رسم شدهاند:



شکل (۱۸): جابهجایی عرضی در راستای طولی (x(m برای پوسته با بار حرارتی مشخص و سه جنس مختلف.



شکل (۱۹): چرخش در صفحه میانی در راستای طولی x(m) برای پوسته با بار حرارتی مشخص و سه جنس مختلف.



شکل (۲۰): تنش نرمال *σ*_θ در سطح بیرونی پوسته در راستای طولی (*x*(m برای پوسته با بار حرارتی مشخص و سه جنس مختلف.

در شکل ۱۷ توزیع دما برای پوستههایی با شرایط دمایی و فیزیکی یکسان ولی با جنسهای مختلف نشان داده شده است. از این توزیع دما در نمودار شکلهای ۲۰–۱۸ استفاده شده است.

در شکل ۱۸ جابهجایی عرضی پوسته با سه جنس مختلف در معرض اختلاف دمای سطح درونی k 50 و بیرونی 150 k نشان داده شدهاست. دیده میشود کمترین خیز برای ماده FG1 است، زیرا سرامیک لایه بیرونی بهعنوان عایق در حالت پایا عمل می کند و توزیع دما را در این ماده کاهش میدهد.

در شکل**۱۹** چرخش در صفحه با سه جنس مختلف در معرض همان بار حرارتی نشان داده شده است. دیده میشود که کمترین چرخش برای ماده FG1 است.

در شکل ۲۰ تنش نرمال *σ*_θ در سطح بیرونی پوسته با سه جنس مختلف در معرض بار حرارتی یادشده نشان داده شده است. دیده میشود که در این حالت تنش ماده FG2 کمتر از تنش ماده FG1 است و هر دو به صورت فشاری هستند، ولی ماده FG1 در سطح بیرونی دارای جنس سرامیک است که مقاومت تسلیم بالایی در برابر فشار دارد. در مقابل، ماده FG2 در سطح بیرونی دارای جنس فلز است.

با درنظرگرفتن پوسته بخش ۵-۴ و تغییر دمای سطح بیرونی برای ماده FG1 نمودارهای زیر بهدست آمده است. اختلاف دمای سطح درونی پوسته در نمودارهای زیر، ۵۰ کلوین است.



شکل (۲۱): جابهجایی عرضی در راستای طولی (x(m برای پوسته FG1 با سه دمای مختلف در سطح بیرونی پوسته.



شکل (۲۲): جابهجایی طولی در راستای طولی (x(m) برای پوسته FG1 با سه دمای مختلف در سطح بیرونی پوسته.



شکل(۲۳): تنش نرمال σ_x در سطح میانی پوسته در راستای طولی (x(m) برای پوسته FG1 با سه دمای مختلف در سطح بیرونی پوسته.

در شکلهای ۲۳–۲۱ جابهجایی و تنش پوسته FG1 برای سه نوع توزیع دما در راستای X کشیده شده است. که دما در سطح درونی ثابت و برابر 50 k است و در سطح بیرونی به $T_b = 400 \ k$ و $T_b = 150 \ k$ و $T_b = 400 \ k$ و $T_b = 150 \ k$ است. است.

در شکلهای $\mathbf{T} - \mathbf{T}$ بهترتیب جابهجایی عرضی پوسته، جابهجایی طولی در صفحه میانی پوسته و تنش نرمال σ_x در سطح میانی پوسته برای سه نوع بار حرارتی، در راستای طولی X نشان داده شدهاند. دیده میشود که افزایش دمای سطح بیرونی مانند افزایش بار عرضی باعث افزایش مقدار آنها میشود ولی در محل ماکزیمم مقدار آن تاثیر ندارد.

۶- نتیجهگیری

رفتار پوسته مخروطی متقارن محوری تحت بار حرارتی و مکانیکی استاتیک مورد بررسی قرار گرفت و نتایج زیر بهدست آمد: ۲۵

تحلیل استاتیکی پوسته های مخروطی ضخیم متقارن محوری از جنس...

Variable Thickness", Composites Engineering, Vol. 5, pp. 471–484. ,1995.

- Tavares, S.A. "Thin Conical Shells With Constant Thickness and Under Axisymmetric Load". Computer and Structures, pp. 895–921, 1996.
- Wu, C.P., and Hung, Y.C. "Asymptotic Theory of Laminated Circular Conical Shells". International Journal of Engineering Science, Vol. 37, pp. 977– 1005., 1999.
- Cui W, Pei J, and Zhang W. "A Simple and Accurate Solution for Calculating Stresses in Conical Shells". Comput Struct, pp. 79-265., 2001.
- 11. Wu, C.P, Hung, Y.C., and Lo, J.Y. "A refined Asymptotic Theory of Laminated Circular Conical Shells", European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 21,pp. 281–330., 2002.
- Pinto Correia I.F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A., and Herskovits. J. "Analysis of Laminated Conical Shell Structures Using Higher Order Models", Composite Structures Vol. 62, pp. 383– 390, 2003.
- 13. Jane, K.C. and Wu. Y.H. "A Generalized Thermoelasticity Problem of Multilayered Conical Shells", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 2205–2233, 2004.
- Sofiyev. A.H. "Thermoelastic Stability of Functionally Graded Truncated Conical Shells". Composite Structures, Vol. 77, pp. 56–65, 2007.
- 15. Francesco T., Erasmo Viola, D., Inman, J. "2-D Differential Quadrature Solution for Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures", Journal of Sound and Vibration Vol. 328, pp. 259– 290, 2009.
- Aghdam, M.M., Shahmansouri, N., and Bigdeli. K. "Bending Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Conical Panels". Composite Structures, Vol. 93, pp. 1376–1384, 2011.
- Auricchio, F. and Sacco, E. "Refined First-Order Shear Deformation Theory Models for Composite Laminates", Journal of Applied Mechanics. pp. 381-390, 2003.
- Nguyen T.K, Saba K, and Bonnet G. "First-Order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials". Compos Struct, Vol. 83, No. 1, pp. 25–36., 2008.
- 19. Reddy J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis", 2nd ed, CRC Press, 2004.
- 20. Shu C. "Differential Quadrature and Its Application In Engineering", London, Springer-Verlag, 2000.
- 21. Shu C. "Free Vibration Analysis of Thin Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method", J Sound Vib, Vol. 194, pp. 587– 604.,1996.
- 22. Ghannad, M. Zamani, M. Nejad, and Rahimi. G.H. "Elastic Solution of Axisymmetric Thick Truncated Conical Shells Based on First-Order Shear

درصورتی که تنها بار عرضی به سمت درون به پوسته وارد شود، جابهجایی عرضی برای ماده تابعی که سطح بیرون آن سخت تر است، بیشتر از مادهای است که سطح درون آن سخت تر است و تنشهای نرمال در سطحهایی که مدول الاستیسیته بیشتری دارند، بیشتر است. ماده FG2 که معرفی شد دارای وضعیت تنش بسیار بهتری نسبت به دیگر موارد است.

با نازکشدن پوسته مخروطیخیز ماکزیمم به تکیهگاه پایینی و با ضخیم شدن آن به میانه پوسته نزدیک می شود.

وقتی پوسته در معرض دمای سطح درونی و بیرونی ثابتی قرار گیرد، در حالت پایا اگر سطحی که ضریب هدایت حرارتی کمتری دارد، در مقابل دمای بیشتر قرار گیرد، باعث کاهش میانگین دما در جسم میشود و خیز ماکزیمم کاهش مییابد و تنشها در وضعیت بهتری قرار میگیرند.

افزایش مقدار دما و بار عرضی باعث افزایش مقدار تنشها و جابهجاییها میشود ولی در شکل نمودار آنها تاثیری ندارد درصورتی که تغییر ضخامت پوسته هم در مقدار و هم در شکل نمودارهای تنش و جابهجایی اثر می گذارد.

بار حرارتی و بار مکانیکی میتوانند بهصورت متقابل عمل کنند، برای مثال در پوستهای که به آن بار عرضی بهسمت درون پوسته وارد میشود، افزایش دما میتواند به جابهجایی عرضی در جهت بیرون کمک کند.

۷- مراجع

- Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", New York, McGraw-Hill, 1959.
- Wilson, B. "Asymmetrical Bending of Conical Shells", EngngMech, Div, Proc, ASCE, Vol. 86, No. 5 pp. 39-119, 1960.
- Budiansky, B. and Radkowski, "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution". AIA, Vol. 4, No. 8, pp. 42-1833, 1963.
- 4. Pei J, Harik I.E. "Iterative FD Solution to Bending of Axisymmetric Conical Shells" J Struct Eng ASCE, Vol. 116, pp. 2433–46, 1990.
- Sundarasivarao B.S.K. and Ganesan. N. "Deformation of Varying Thickness of Conical Shells Subjected to Axisymmetric Loading With Various End Conditions", Engineering Fracture Mechanics Vol. 39, No. 6, pp. 1003-1010,, 1991.
- 6. Chandrashekhara K, and Karekar M.S. "Bending Analysis of a Conical Shell Panel", Int J Struct, Vol. 12, No. 2, pp. 16-101, 1992.
- 7. Lu, C.H, Mao, R., and Winfield, D.C. "Stress Analysis of Thick Laminated Conical Tubes With

Deformation Theory", MECHANIKA, Vol. 79, No. 5, pp. 1207 – 1392, 2009.

- "Functionally Graded Materials in 21st Century", a Workshop on Trends and Forecasts. International Congress Center, 2000.
- 24. Ghorbani, A., "A Cruise Missile Conceptual Design Mythology, Using Genetic Algorithm", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 1, No. 3, pp. 69-81, 2006 (In Persian).
- 25. Dehkordi, R.I., Shahverdi, H., Nobari, A.S., and Khalili, A., "Numerical Investigation of the Aeroelastic Instability of an Aircraft Wing, Using Finite Element and Unsteady Panel Methods," Aerospace Mechanics Journal, Vol. 7, No. 4, pp. 13-23., 2012 (In Persian).