تحلیل استاتیکی پوسته‌های مخروطی ضخیم متقارن محوری از جنس FGM تحت بار حرارتی و مکانیکی به‌روش DQ

مصطفی فتاحی[۱] و اکبر علی‌بیگلو[۲]

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱/۲۳)

چکیده

در این مقاله رفتارترموالاستیک پوسته مخروطی ضخیم ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی که خواص آن در راستای ضخامت پوسته با رابطه توانی تغییر می‌کند با تکیه‌گاه‌های گیردار بررسی می‌شود. ابتدا با جایگزینی میدان جابه‌جایی روش تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌اول (FSDT) در روابط کرنش جابه‌جایی پوسته مخروطی، روابط کرنش جابه‌جایی برحسب جابه‌جایی‌ها و چرخش درون صفحه تعیین شده و سپس با استفاده از این روابط و قانون تشکیل‌دهنده، منتجه‌های نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در واحد طول به‌دست می‌آیند. با جایگذاری روابط به‌دست‌آمده در معادلات تعادل برحسب برآیندهای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در واحد طول برای حالت متقارن محوری سه‌معادله و سه‌مجهول (دو جابه‌جایی درون‌صفحه و یک چرخش درون‌صفحه) به‌دست می‌آید که این معادلات حاکم را می‌توان با روش DQ حل کرد و مجهولات را یافت. برای یافتن تنش‌ها، ابتدا با جایگزینی جابه‌جایی‌های عددی به‌دست‌آمده و مشتق عددی آنها در روابط کرنش جابه‌جایی، کرنش‌ها به‌دست می‌آید و درنهایت با جایگزینی این کرنش‌ها در روابط هوک، تنش‌ها تعیین می‌شود. با مقایسه‌ی نتایج عددی حاصل با نتایج موجود در مقالات صحه‌گذاری روش حاضر تحقق می‌یابد. درنهایت تأثیر پرامترها در رفتار خمشی پوسته مخروطی ارائه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: پوسته مخروطی، مواد مدرج تابعی ، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌اول ، بار مکانیکی و حرارتی

Static Analysis of Thick Functionally Graded Axisymmetric Conical Shell Under Thermal and Mechanical Load Using Differential Quadrature Method

M. Fatahi and A. Alibeigloo

Mechanical Engineering Department

Islamic Azad University Karaj Branch

(Received: 6/May/2013; Accepted: 12/April/2014)

ABSTRACT

In this paper thermoelastic behavior of a functionally graded material (FGM) conical shell with clamped edges condition is investigated. Material properties vary according to power law along the thickness direction. Thermo elastic properties of the shell are assumed to vary along the thickness by a power law distribution with Poisson ratio is held to be constant. By using first order shear deformation theory, strain-displacement relations and constitutive equations, governing differential equations can be derived in term of mid radius displacements and rotation. By using the differential quadrature method (DQM) the obtained governing equations can be solved. To validate the accuracy of the present procedure, numerical results were compared with those available in published literature. Finally the effect of gradient index, geometry dimension and thermo mechanical load on the bending behavior of conical shell is considered.

Keywords: Conical Shell, FGM, DQ, FSDT, Thermal and Mechanical Load

۱ - کارشناس ارشد: mostafasasani@yahoo.com

۲ - دانشیار (نویسنده پاسخگو): beigloo@basu.ac.ir

۱- مقدمه

در مهندسی نوین به‌طور گسترده از پوسته‌ها به‌عنوان بدنه اجزا استفاده می‌شود. یکی از پرکاربردترین شکل‌ها در علوم هوافضا و دیگر بخش‌های صنعتی پوسته حاصل از چرخش به هر دو صورت مخروط ناقص یا سطح دارای انحنای مخروطی است. سازه‌های مخروطی به‌شکل مخروط کامل و یا مخروط ناقص در بدنه انواع وسایل پرنده بدون سرنشین و موشک‌های حامل ماهواره به‌عنوان آداپتور در بخش‌های استوانه‌ای با قطرهای متفاوت به‌کار می‌روند. لذا تحلیل این دسته از سازه‌ها در روند کلی طراحی تمام اجزاء بدنه ماهواره‌برها موردنیاز و کاربردی است. با افزایش استفاده از پوسته‌های مخروطی و نیاز به بالا بردن کارایی و اطمینان از عمل‌کرد صحیح آنها استفاده از مواد نو مانند مواد مدرج تابعی افزایش یافته است. از طرفی انجام تحلیل‌های تجربی روی این مواد با مشکلاتی از قبیل اندازه، قیمت، پیچیده بودن مدل آزمایشگاهی و... همراه است، از این‌رو ارایه مدل‌های تئوری کلی‌تر مناسب به‌نظر می‌رسد.

در سال ۱۹۵۹ پاسخ تحلیلی پوسته‌های مخروطی متقارن محوری نازک با استفاده از توابع بسل، هنکل و تامسون ارائه شد [۱]. در سال۱۹۶۰ تحلیل پانل مخروطی تحت بار مکانیکی با استفاده از روش جداسازی متغیرها که در آن از سری مثلثاتی در جهت محیطی و سری توانی در جهت نصف‌النهاری استفاده شد، انجام گردید [۲]. در سال ۱۹۶۳ رفتار پوسته دورانی تحت بارگذاری دلخواه با استفاده از روش اختلاف محدود و روش سری فوریه بررسی گردید [۳]. در سال ۱۹۹۰ یک روش اختلاف محدود تکراری برای تعیین جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در پوسته‌های مخروطی متقارن محوری ناقص و کامل با شرایط مرزی گوناگون داده شد [۴] . در سال ۱۹۹۱ تغییرشکل پوسته نازک ضخامت متغیر مخروطی و متقارن محوری تحت فشار داخلی یکنواخت با شرایط مرزی گوناگون با استفاده از روش المان محدود [۵] بررسی شد. براساس تئوری کلاسیک پوسته، در سال ۱۹۹۲ با استفاده از روش مذکور در مرجع [۳] رفتار پوسته مخروطی با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه شد [۶]. در سال ۱۹۹۵ براساس تئوری پوسته ضخیم و استفاده از روش نیمه‌تحلیلی که ترکیبی از بسط فوریه، اختلاف محدود و روش ماتریس تبدیل ریکاتی بود حل شد، تحلیل تنش در پوسته مخروطی چندلایه تحت بارگذاری کلی مورد بررسی قرار گرفت [۷]. در سال ۱۹۹۶ تحلیل استاتیکی پوسته مخروطی نازک ناقص و یا کامل تحت بار متقارن محوری و یا متمرکز در امتداد نصف‌النهاری ارائه شد [۸]. براساس معادلات سه‌بعدی الاستیسیته و استفاده از روش DQ تحلیل خمشی پوسته مخروطی چندلایه DQ در سال ۱۹۹۹ ارایه شد [۹]. در سال ۲۰۰۱ یک روش تحلیلی ساده و دقیق در تحلیل رفتار تنشی پوسته مخروطی نازک ارایه شد [۱۰]. در سال ۲۰۰۲ تئوری اصلاح شده‌ای با درنظرگرفتن اثر تغییرشکل برشی عرضی جهت تحلیل استاتیکی پوسته مخروطی معرفی گردید [۱۱]. در سال ۲۰۰۳ آنالیز پوسته مخروطی چندلایه نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری تشکل برشی مرتبه سوم (TSDT) و روش اجزا محدود انجام شد [۱۲]. در سال ۲۰۰۴ مسئله ترموالاستیک کوپل شبه‌استاتیک دوبعدی پوسته مخروطی متقارن محوری چندلایه با استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس و اختلاف محدود مورد بررسی قرار گرفت [۱۳]. در سال ۲۰۰۷ دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی FGM با تکیه‌گاهای ساده با استفاده از روش پایداری دانل اصلاح‌شده تعیین گردید [۱۴]. در سال ۲۰۰۹ رفتار دینامیکی پوسته FGM مخروطی و استوانه‌ای و ورق حلقوی، براساس FSDT و استفاده از روش GDQ برای ماده همسانگرد ارائه شد [۱۵]. در سال ۲۰۱۱ تحلیل خمشی پنل مخروطی FGM نسبتاً ضخیم با لبه‌های گیردار انجام شد [۱۶].

مرور پیشینه تحقیقات مرتبط نشان می‌دهد که تحلیل ترموالاستیک پوسته مخروطی FGM ضخیم تاکنون گزارش نشده است لذا این موضوع در این تحقیق ارائه می‌شود. در این مقاله از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای میدان جابه‌جایی استفاده می‌شود و اثر حرارت و بار عرضی برای تحلیل پوسته مخروطی مدرج تابعی درنظر گرفته می‌شود. روش DQ برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده می‌شود.

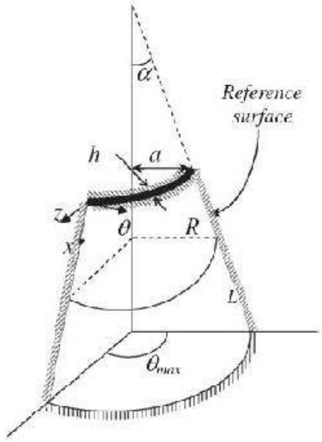
۲- فرمول‌بندی و معادلات حاکم

نخست یک پنل مخروطی تقریباً ضخیم FGM تحت بار حرارتی و مکانیکی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس معادلات حاکم برای حالت خاص پوسته مخروطی متقارن محوری به‌دست می‌آید.

۲-۱- فرمول‌بندی پنل مخروطی

مطابق شکل **۱**، یک پوسته مخروطی با مختصات (x,θ,z) ،ضخامت ثابت h ، طول L ، زاویه رأس α ، کوچک‌ترین شعاع

a و شعاع‌های R و R_θ که، R_θ بر سطح پوسته عمود است درنظر گرفته می‌شود.



شکل (۱): ساختار پنل مخروطی [۱۶].

$$R = a + x\sin(\alpha), \quad R_\theta = \frac{R}{\cos(\alpha)} \quad , \qquad (۱)$$

براساس روش FSDT ، [۱۷] و [۱۸] می‌توان جابه‌جایی‌ها را در پوسته مخروطی نشان داده‌شده در شکل ۱، به‌صورت زیر بیان کرد [۱۶]:

$$\begin{aligned} U_x(x,\theta,z) &= u_x(x,\theta) + z\,\beta_x(x,\theta) \quad , \\ U_\theta(x,\theta,z) &= u_\theta(x,\theta) + z\,\beta_\theta(x,\theta) \quad , \\ W(x,\theta,z) &= w(x,\theta) \quad . \end{aligned} \qquad (۲)$$

به‌طوری‌که، U_x: جابه‌جایی در راستای یال، U_θ: جابه‌جایی محیطی، β_x: چرخش حول محور θ در صفحه میانی، β_θ: چرخش حول محور X در صفحه میانی، W: جابه‌جایی در راستای ضخامت و حروف کوچک نشان‌دهنده جابه‌جایی‌ها در صفحه میانی است.

با جایگزینی جابه‌جایی‌های معادله (۲) در روابط کرنش جابه‌جایی پوسته مخروطی، پس از ساده‌سازی، روابط کرنش–جابه‌جایی زیر به‌دست می‌آید [۱۹] :

$$\varepsilon_x = \left(\varepsilon_x^0 + z\,kx\right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right)}\left(\varepsilon_\theta^0 + z\,k\theta\right)$$

$$\gamma_{xz} = \mu_x^0, \ \gamma_{\theta z} = \frac{\mu_\theta^0}{\left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right)}$$

$$\gamma_{x\theta} = \left(\gamma_x^0 + z\,\tau_x\right) + \frac{\gamma_\theta^0 + z\,\tau_\theta}{\left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right)} \qquad (۳)$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x \sin\alpha + w\cos\alpha\right), \\ &kx = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \ k\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \beta_x \sin\alpha\right), \quad \gamma_x^0 = \frac{\partial u_\theta}{\partial x}, \\ &\gamma_\theta^0 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_x}{\partial \theta} - u_\theta \sin\alpha\right), \ \tau_x = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x}, \ \mu_x^0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x, \\ &\tau_\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} - \beta_\theta \sin\alpha\right), \ \mu_\theta^0 = \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R}\cos\alpha + \beta_\theta, \end{aligned} \qquad (۴)$$

۲-۱-۱- معادلات تشکیل‌دهنده

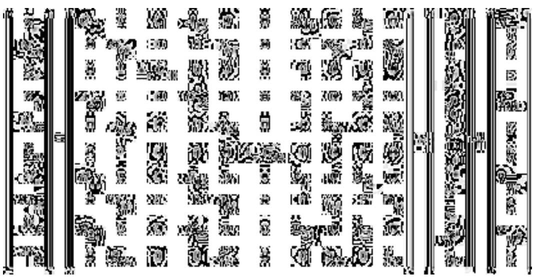
روابط تنش- کرنش در پوستهٔ مخروطی [۱] عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x + Q_{12}\varepsilon_\theta + \alpha_1 T, \quad \tau_{xz} = k_s Q_{66}\gamma_{xz} \\ &\sigma_\theta = Q_{12}\varepsilon_x + Q_{22}\varepsilon_\theta + \alpha_1 T, \quad \tau_{x\theta} = Q_{66}\gamma_{x\theta} \\ &\sigma_z = 0, \quad \tau_{\theta z} = k_s Q_{66}\gamma_{\theta z} \end{aligned} \qquad (۵)$$

$$\begin{aligned} &Q_{11} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \quad Q_{12} = \frac{\upsilon E}{1-\upsilon^2} \quad Q_{44} = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \\ &Q_{22} = Q_{11} \quad Q_{55} = Q_{44} = Q_{66} \quad \alpha_1 = \frac{E\alpha_0}{\upsilon - 1} \end{aligned} \qquad (۶)$$

که در آن، E مدول الاستیک و α_0 ضریب انبساط حرارتی است که طبق رابطه توانی درنظر در راستای z تغییر می‌کنند. υ نسبت پواسون ، k_s ضریب تصحیح تنش برشی و T اختلاف دماست [۱].

با استفاده از معادلات (۱) و (۳) برآیندهای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در واحد طول [۱] به‌صورت زیر بیان می‌شوند:



(۷)

$$\{G_{ii}, H_{ii}, j_{ii}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ii}\left(1 + z/R_\theta\right)\{1, z, z^2\}\,dz, \quad i = 1, 5, 6$$

$$\{G'_{ii}, H'_{ii}, j'_{ii}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ii}\,\frac{1}{\left(1 + z/R_\theta\right)}\{1, z, z^2\}\,dz, \quad i = 2, 4, 6$$

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\,\{1, z, z^2\}\,dz, \quad i = 1, 2, \ j = 1, 2$$

$$
\begin{aligned}
&\{A_{66}, B_{66}, D_{66}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66}\{1, z, z^2\}\, dz, \\
&T_{nx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1\, T \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz \\
&T_{n\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1\, T\, dz \\
&T_{mx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1\, T z \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz \\
&T_{m\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_1\, T z\, dz
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

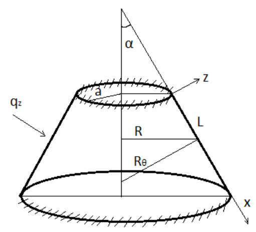
حالا می‌توان از روابط به‌دست‌آمده برای برآیندهای نیرو، گشتاورهای پیچشی و نیروهای عرضی در معادلات تعادل کلی پوسته مخروطی [۱۹] استفاده نمود، معادلات تعادل به‌صورت زیر است [۱۹]:

$$
\begin{aligned}
&N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{\theta x,\theta} + \frac{\sin\alpha}{R}\left(N_x - N_\theta\right) = 0 \\
&N_{x\theta,x} + \frac{1}{R} N_{\theta\theta,\theta} + \frac{\sin\alpha}{R}\left(N_{x\theta} + N_{\theta x}\right) + \frac{Q_\theta \cos\alpha}{R} = 0 \\
&Q_{x,x} + \frac{1}{R} Q_{\theta,\theta} + \frac{Q_x \sin\alpha}{R} - \frac{N_\theta \cos\alpha}{R} = q_z \\
&M_{x,x} + \frac{1}{R} M_{\theta x,\theta} + \frac{\sin\alpha}{R}\left(M_x - M_\theta\right) - Q_x = 0 \\
&M_{x\theta,x} + \frac{1}{R} M_{\theta,\theta} + \frac{\sin\alpha}{R}\left(M_{x\theta} + M_{\theta x}\right) - Q_\theta = 0
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

۲-۲- فرمول‌بندی پوسته مخروطی متقارن محوری

برای حالت متقارن محوری شکل **۲** مولفه جابه‌جایی در راستای θ صفر است، بنابراین پنج مجهول جابه‌جایی به دو جابه‌جایی $u(x)$ و $w(x)$ و یک چرخش $\beta(x)$ در صفحه تبدیل می‌شود. همچنین برای این حالت با استفاده از روابط کرنش- جابه‌جایی و هوک، رابطه $\sigma_z = \tau_{\theta z} = \tau_{x\theta} = 0$ به‌دست می‌آید.

با جایگذاری رابطه (۴) در (۷) و سپس در معادلات تعادل، برای حالت متقارن محوری پس از ساده‌سازی سه معادله به‌دست می‌آید که معادلات حاکم پوسته مخروطی متقارن محوری از جنس FGM و دارای بار حرارتی نامیده می‌شوند.



شکل (۲): ساختار پوسته مخروطی متقارن محوری.

$$
\begin{aligned}
&G_{11}\frac{d^2}{dx^2}u + \left(\frac{G_{11}\sin(\alpha)}{R} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^2}B_{11}\right)\frac{d}{dx}u \\
&\quad - \frac{G'_{22}}{R^2}\sin(\alpha)\left(u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)\right) + \frac{A_{12}\cos(\alpha)}{R}\frac{d}{dx}w \\
&\quad + \left(\frac{H_{11}\sin(\alpha)}{R} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^2}D_{11}\right)\frac{d}{dx}\beta + H_{11}\frac{d^2}{dx^2}\beta \\
&\quad - \frac{H'_{22}\sin(\alpha)^2}{R^2}\beta + \frac{d}{dx}T_{nx} + \frac{\sin(\alpha)}{R}\left(T_{nx} - T_{n\theta}\right) = 0 \\[2ex]
&k_sG_{55}\frac{d^2}{dx^2}w + \left(\frac{k_s G_{55}\sin(\alpha)}{R} - \frac{k_s\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R^2}B_{55}\right)\frac{d}{dx}w \\
&\quad + \left(\frac{k_s G_{55}\sin(\alpha)}{R} - \frac{k_s\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{R^2}B_{55}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)H'_{22}}{R^2}\right)\beta + \left(k_sG_{55} - \frac{B_{12}\cos(\alpha)}{R}\right)\frac{d}{dx}\beta \\
&\quad - \frac{A_{12}\cos(\alpha)}{R}\frac{d}{dx}u - \frac{\cos(\alpha)}{R^2}G'_{22}\left(u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)\right) \\
&\quad - \frac{\cos(\alpha)}{R}T_{n\theta} = q_z \\[2ex]
&\left(\frac{\sin(\alpha)}{R}H_{11} - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^2}D_{11}\right)\frac{d}{dx}u + H_{11}\frac{d^2}{dx^2}u \\
&\quad - \frac{H'_{22}\sin(\alpha)}{R^2}\left(u\sin(\alpha) + w\cos(\alpha)\right) + \left(\frac{B_{12}}{R}\cos(\alpha)\right. \\
&\quad \left. - k_sG_{55}\right)\frac{d}{dx}w + \left(\frac{J_{11}\sin(\alpha)}{R}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{R^2}C_{11}\right)\frac{d}{dx}\beta + J_{11}\frac{d^2}{dx^2}\beta - \left(\frac{J'_{22}\sin(\alpha)^2}{R^2}\right. \\
&\quad \left. + k_s G_{55}\right)\beta + \frac{d}{dx}T_{mx} + \frac{\sin(\alpha)}{R}\left(T_{mx} - T_{m\theta}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

که در آن:

$$
C_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^3\, dz \tag{۱۱}
$$

با برابر صفر قراردادن جملات حرارتی روابط (۱۰)، معادلات حاکم در مرجع [۱۶] در حالت دوبعدی به‌دست می‌آید.

۲-۳- توزیع دما

می‌توان سه نوع توزیع دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی در امتداد ضخامت درنظر گرفت [۱۴].

توزیع دمای یکنواخت زمانی به‌وجود می‌آید که برای مثال، جسم به‌طور کامل در دمایی بیشتر از دمای محیط قرار گیرد و با آن هم‌دما شود و توزیع دمای خطی می‌تواند در جسم همگن در حالت یک‌بعدی رخ دهد.

توزیع دمای غیرخطی با استفاده از معادله هدایت حرارتی یک دیواره مسطح FGM در حالت پایا، با شرایط مرزی دمایی داده‌شده به‌دست می‌آید:

$$T\left(-\frac{h}{2}\right)=T_a \qquad T\left(\frac{h}{2}\right)=T_b \tag{۱۲}$$

که، T_a اختلاف دمای سطح درونی و T_b اختلاف دمای سطح بیرونی است.

معادله هدایت حرارتی برای این حالت به‌صورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(k(z)\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)=0 \tag{۱۳}$$

که در آن، $k(z)$ ضریب هدایت حرارتی است و می‌توان آن را با رابطه توانی زیر در راستای ضخامت نشان داد:

$$k(z)=\left(k_m-k_c\right)\left(\frac{z}{h}+.5\right)^2+k_c \tag{۱۴}$$

اندیس‌های c و m مربوط به ضرایب انتقال حرارت سرامیک و فلز هستند. با حل معادله دیفرانسیل و اعمال شرایط مرزی رابطه زیر برای توزیع دما به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{T}(z)=\frac{\left(T_b-T_a\right)\arctan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\left(k_c-k_m\right)(2z+h)}{h\,\sqrt{k_c\left(k_m-k_c\right)}}\right)}{\arctan\left(\frac{\left(k_c-k_m\right)}{\sqrt{k_c\left(k_m-k_c\right)}}\right)}+T_a \tag{۱۵}$$

۳- استفاده از روش DQ برای حل معادلات حاکم

برای حل معادلات حاکم و یافتن سه مجهول u،β و w با روش DQ ، آن‌چنان‌که در مرجع [۲۰] و [۲۱] گفته شده است، توزیع نقاط گرهی به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\mathrm{X(i)}=\frac{\mathrm{L}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{(i-1)}{\mathrm{N}-1}\cdot\pi\right)\right) \tag{۱۶}$$

که، N تعداد کل نقاط گرهی درنظر گرفته شده است. با استفاده از همین مراجع مشتق اول و دوم در نقاط گرهی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=X(i)} &= \sum_{j=1}^{N} a(i,j)\,U_j\\
\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=X(i)} &= \sum_{j=1}^{N} b(i,j)\,U_j\\
\left.\frac{d\beta}{dx}\right|_{x=X(i)} &= \sum_{j=1}^{N} a(i,j)\,B_j\\
\left.\frac{d^2\beta}{dx^2}\right|_{x=X(i)} &= \sum_{j=1}^{N} b(i,j)\,B_j\\
\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=X(i)} &= \sum_{j=1}^{N} a(i,j)\,W_j\\
\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=X(i)} &= \sum_{j=1}^{N} b(i,j)\,W_j
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

که، U مقدار u در نقاط گرهی، B مقدار β در نقاط گرهی و W مقدار w در نقاط گرهی را نشان می‌دهد. $a(i,j)$ و $b(i,j)$ ضرایب وزنی به‌ترتیب برای مشتقات اول و دوم هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
MI(i) &= \prod_{k=1,\,k\neq i}^{N}\left(X(i)-X(k)\right)\\
a(i,j) &= \frac{MI(i)}{\left(X(i)-X(j)\right)\cdot MI(j)} \quad \textbf{for } i\neq j\\
a(i,i) &= -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} a(i,j)\\
b(i,j) &= 2\,a(i,j)\left(a(i,i)-\frac{1}{X(i)-X(j)}\right) \quad \textbf{for } i\neq j\\
b(i,i) &= -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} b(i,j)
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

پس از جایگذاری این مشتق‌ها در معادلات حاکم، باید معادلات به‌دست‌آمده در تک‌تک نقاط گرهی ارزیابی شوند. تا اینگونه، دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات خطی تبدیل شود. شرایط مرزی برای تکیه‌گاه گیردار به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{at}\quad x=0 \qquad \begin{cases}\mathrm{U}=0\\ W=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=0\\ w=0\\ \beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}U_1=0\\ W_1=0\\ \mathrm{B}_1=0\end{cases}\\
&\text{at}\quad x=\mathrm{L} \qquad \begin{cases}\mathrm{U}=0\\ W=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=0\\ w=0\\ \beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}U_{\mathrm{N}}=0\\ W_N=0\\ \mathrm{B}_N=0\end{cases}
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

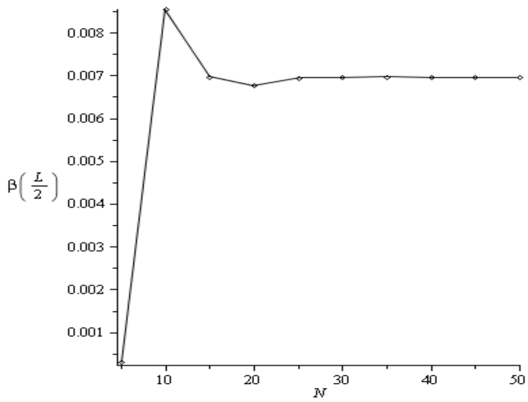
با استفاده از روش بخش سوم و با درنظرگیری تعداد نقاط گرهی N گوناگون، u و β و w در $L/2$ برای پوسته با شرایط فیزیکی و دمایی زیر به‌دست آمده است. نتایج در جدول **۱** نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
&\upsilon=.3,\quad \mathrm{E}_m=70\cdot10^9\ pa,\quad \mathrm{E}_c=380\cdot10^9\ pa,\\
&\mathrm{h}=.01\ \mathrm{m},\quad \alpha_m=12\cdot10^{-6}\ \frac{1}{k},\quad \alpha_c=10\cdot10^{-6}\ \frac{1}{k},\quad \alpha=\frac{\pi}{6},\\
&\mathrm{T}=200\,\mathrm{k},\ \mathrm{L}=10\,\mathrm{m},\quad q_z=100000pa,\quad \mathrm{a}=10\,\mathrm{m}\ ,\\
&\mathrm{E}=\left(E_c-E_m\right)\left(\frac{z}{h}+.5\right)^2+E_m
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

جدول (۱): چرخش در صفحه و جابه‌جایی‌های طولی و عرضی در وسط پوسته بر حسب متر به‌ازای تعداد نقاط گرهی مختلف.

N	w(L/2)	U(L/2)	β(L/2)
۵	۰.۰۹۲۴۴۰۶	۰.۰۰۲۱۹۳۹	۰.۰۰۰۳۰۴۵
۱۰	۰.۰۸۰۹۷۹۴	۰.۰۰۰۷۹۹۷	۰.۰۰۸۵۴۷۸
۱۵	۰.۰۶۹۰۳۱۰	۰.۰۰۰۷۴۶۳	۰.۰۰۶۹۶۰۳
۲۰	۰.۰۶۹۰۵۹۴	۰.۰۰۰۷۴۵۳	۰.۰۰۶۷۶۹۱
۲۵	۰.۰۶۸۸۶۴۹	۰.۰۰۰۷۴۴۸	۰.۰۰۶۹۴۲۹
۳۰	۰.۰۶۸۸۶۲۲	۰.۰۰۰۷۴۴۸	۰.۰۰۶۹۵۲۷
۳۵	۰.۰۶۸۸۶۲۲	۰.۰۰۰۷۴۴۸	۰.۰۰۶۹۵۲۶
۴۰	۰.۰۶۸۸۶۲۲	۰.۰۰۰۷۴۴۸	۰.۰۰۶۹۵۲۶
۴۵	۰.۰۶۸۸۶۲۲	۰.۰۰۰۷۴۴۸	۰.۰۰۶۹۵۲۶
۵۰	۰.۰۶۸۸۶۲۲	۰.۰۰۰۷۴۴۸	۰.۰۰۶۹۵۲۶

برای نشان‌دادن همگرایی و تعداد نقطه گرهی مورد نیاز چرخش در صفحه در شکل **۳** ترسیم شده است.



شکل (۳): چرخش صفحه میانی در وسط پوسته برحسب تعداد نقاط گرهی.

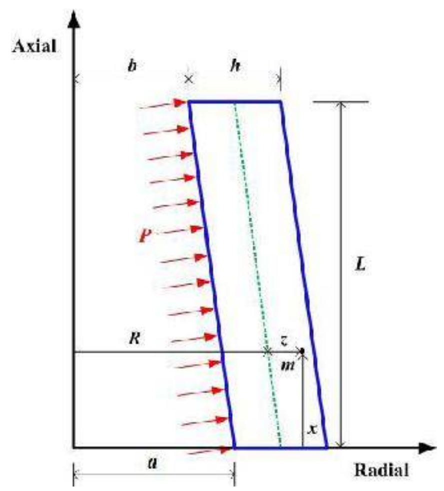
در N=35 پاسخ به‌طور مناسب همگرا می‌شود.

۴- صحه‌گذاری روش حاضر

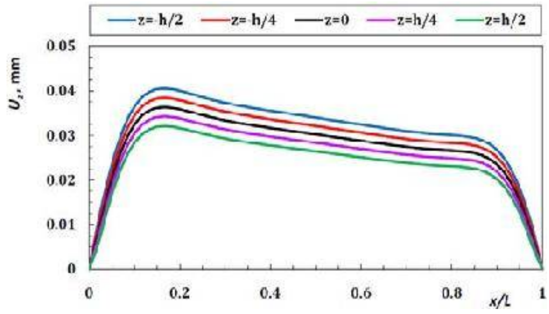
در اینجا نتایج به‌دست‌آمده با نتایجی که در مرجع [۲۲] آمده است، برای نشان‌دادن درستی پاسخ به‌دست‌آمده مقایسه می‌شود. در مرجع یادشده، یک پوسته مخروطی ضخیم متقارن محوری همگن تحت بار عرضی استاتیک، با استفاده از روش FSDT برای تکیه‌گاه‌های گیردار بررسی می‌شود. خصوصیات پوسته در مرجع [۲۲] به‌صورت:

a=40mm ,b=30mm ,h=20mm ,L=400mm و P=80MPa داده شده است.

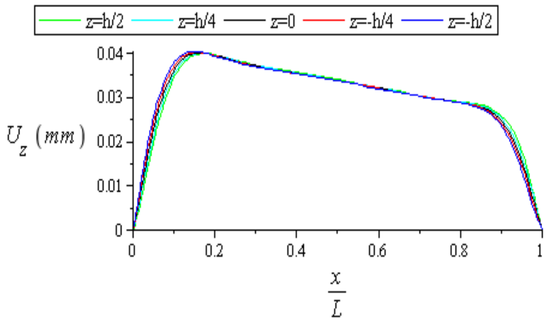
که، P, L, h, b, a در شکل **۴** نشان داده شده است. مدول یانگ و نسبت پوآسون به‌ترتیب E=200GPa و υ=.3 است.



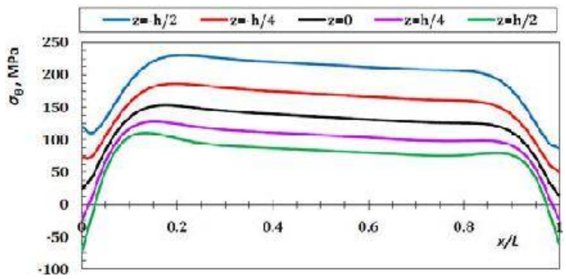
شکل (۴): ساختار پوسته مخروطی در مرجع [۲۲].



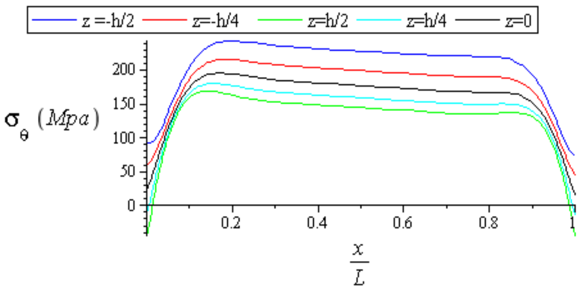
شکل (۵): توزیع جابه‌جایی شعاعی در مرجع [۲۲].



شکل (۶): توزیع جابه‌جایی شعاعی (نتایج حاضر).



شکل (۷): توزیع تنش محیطی در مرجع [۲۲].



شکل (۸): توزیع تنش محیطی (نتایج حاضر).

در شکل‌های **۸-۵** نتایج مرجع [۲۲] و نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله برای مقایسه به‌صورت پشت سرهم آمده‌اند، با مقایسه این دو دسته نمودار و باتوجه به شباهت زیاد آنها به یکدیگر به‌درستی روش به‌کاررفته پی برده می‌شود.

به‌دلیل اینکه در روش FSDT ، خیز عرضی w تابع z نیست ، در شکل۶ جابه‌جایی شعاعی تغییر چندانی در zهای مختلف ندارد و آن اختلاف کم در zهای مختلف به‌دلیل تأثیر مؤلفه جابه‌جایی در جهت x شکل۲ در تبدیل مختصات است.

۵- نتایج عددی و بحث در آن

در این قسمت، مطالعه عددی پوسته مخروطی با جنس و ابعاد مشخص شده در روابط ۲۱ و ۲۲ ارائه می‌شود.

۵-۱- تاثیر جنس بر رفتار پوسته تحت بار عرضی

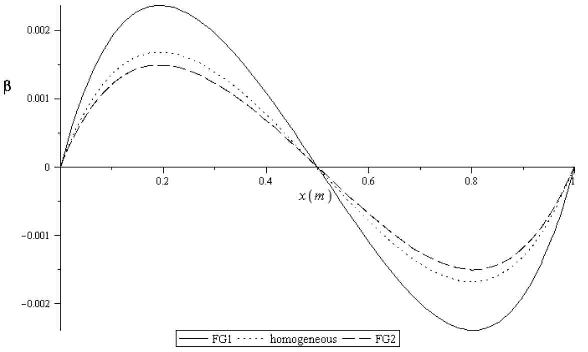
در زیر سه نوع ماده مختلف نشان داده شده است [۲۳]. که در آنها فقط توزیع مدول الاستیسیته E ، در راستای ضخامت بیان شده‌است ولی هر خاصیت ماده را می‌توان به این‌صورت بیان کرد:

$$\begin{aligned} &FG1 \quad E=(E_c-E_m)\left(\frac{z}{h}+.5\right)^2+E_m \\ &FG2 \quad E=(E_m-E_c)\left(\frac{z}{h}+.5\right)^2+E_c \\ &homogeneous \qquad E=225\,Gpa \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با به‌کاربردن خواص زیر برای پوسته شکل ۲ جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها برای مواد FGM گوناگون رسم شده است:

$$E_m=70\cdot10^9\ pa,\quad E_c=380\cdot10^9\ pa,\quad N=35,\quad a=1\ m,\quad q_z=10\cdot10^6\ pa,\quad h=.1\ m,\quad T=0\ k,\quad L=1\ m,\quad \alpha=\frac{\pi}{6},\quad \upsilon=.3 \tag{۲۲}$$

شکل (۹): جابه‌جایی عرضی در راستای طولی x برای سه جنس گوناگون.



شکل (۱۰): چرخش در صفحه در راستای طولی x(m) برای سه جنس گوناگون.

شکل (۱۱): تنش نرمال σ_x در سطح بیرونی پوسته در راستای طولی x(m) برای سه جنس گوناگون.

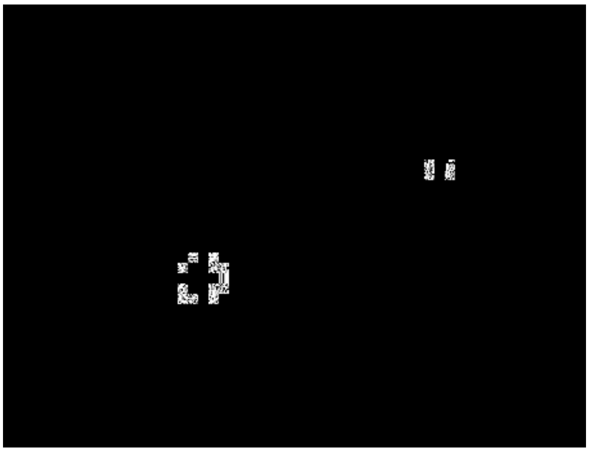
همان‌طورکه در شکل ۹ نشان داده شده است، ماده FG2 که دارای سطح درونی سخت است، کمترین خیز را دارد [۲۴].

در شکل ۱۰ نشان داده شده است که چرخش در صفحه برای پوسته با جنس FG2 کمتر از حالت همگن و حالت FG1 است و چرخش در پوسته FG1 بیشترین مقدار را دارد [۲۵].

شکل ۱۱ تنش نرمال σ_x در سطح بیرونی پوسته را نشان می‌دهد. می‌بینیم که برای هر سه جنس تنش نرمال σ_x ماکزیمم به‌صورت کششی است و در تکیه‌گاه بالایی (x=0) رخ می‌دهد. همان‌طورکه در این شکل نشان داده شده است، پوسته با جنس FG2 دارای کمترین تنش است و پوسته FG1 بیشترین تنش را داراست. همان‌طورکه انتظار می‌رود نمودار حالت همگن تقریباً میانگینی از این دو حالت است.

در شکل۱۲ نمودار توزیع تنش در x=L/2 در راستای ضخامت z برای سه نوع ماده گوناگون کشیده شده است. همان‌طورکه دیده می‌شود باز هم پوسته با جنس FG2 از نظر مقدار ماکزیمم تنش، دارای وضعیت بهتری نسبت به‌حالت

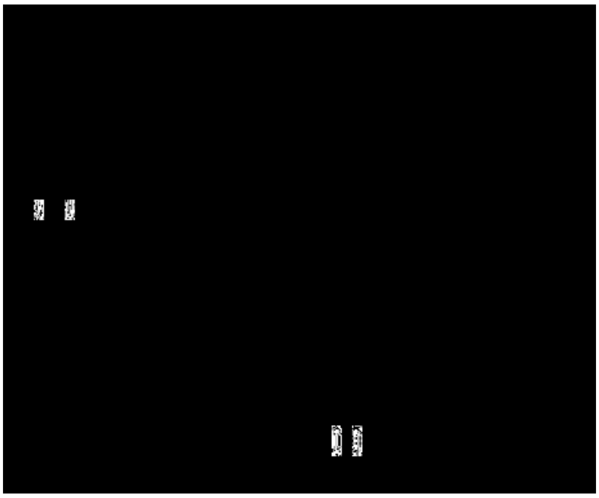
FG2 و حالت همگن است و همان‌طورکه انتظار می‌رود نمودار حالت همگن تقریباً میانگینی از حالت FG1 و FG2 است.



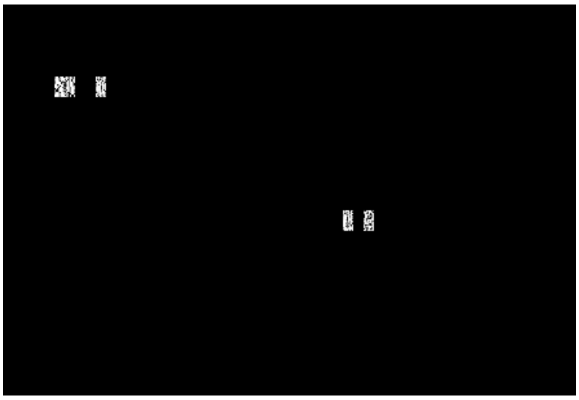
شکل (۱۲): تنش نرمال σ_x در وسط پوسته در راستای ضخامت z(m) برای سه جنس گوناگون.

۵-۲- تاثیر بار عرضی بر پوسته

در شکل‌های **۱۵-۱۳**، اثر سه نوع بار عرضی مختلف بر جابه‌جایی‌ها و تنش‌های پوسته بخش ۵-۱ از جنس FG1 نشان داده شده است.



شکل (۱۳): جابه‌جایی عرضی در راستای طولی x(m) با سه نوع بار q_z (MPa).



شکل (۱۴): تنش برشی در صفحه میانی در راستای طولی x(m) برای سه بار عرضی مختلف.

شکل (۱۵): تنش نرمال σ_θ در سطح بیرونی پوسته در راستای طولی x(m) برای سه بار عرضی مختلف.

در شکل **۱۳** خیز عرضی پوسته برای سه نوع بار عرضی گوناگون در راستای طولی x نشان داده شده است. با افزایش بار خیز بیشتر می‌شود ولی محل خیز ماکزیمم تغییری نمی‌کند. در شکل **۱۴** تنش برشی پوسته در صفحه میانی برای سه نوع بار عرضی گوناگون در راستای طولی x نشان داده شده است. با افزایش بار این تنش بیشتر می‌شود ولی محل ماکزیمم مقدار آن تغییری نمی‌کند. در شکل **۱۵** تنش نرمال σ_θ در سطح بیرونی پوسته برای سه نوع بار عرضی گوناگون در راستای طولی x نشان داده شده است. با افزایش بار این تنش بیشتر می‌شود ولی محل ماکزیمم مقدار آن تغییری نمی‌کند.

۵-۳- تاثیر تغییر ضخامت بر پوسته

در نمودار شکل **۱۶** پوسته بخش ۵-۱ با بار عرضی 10 MPa، با سه ضخامت متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است.

شکل (۱۶): جابه‌جایی عرضی در راستای طولی x(m) برای سه ضخامت پوسته مختلف.

در شکل **۱۶** خیز عرضی پوسته برای سه نوع ضخامت مختلف پوسته در راستای طولی x نشان داده شده است. دیده می‌شود که هرچه پوسته نازک‌تر باشد، خیز عرضی ماکزیمم در نزدیکی تکیه‌گاه پایینی رخ می‌دهد و در پوسته‌های ضخیم این جابه‌جایی عرضی ماکزیمم به $x=L/2$ یعنی وسط پوسته نزدیک می‌شود. پس ضخامت پوسته نه تنها در مقدار خیز، بلکه در شکل منحنی خیز نیز تأثیر می‌گذارد.

۵-۴- اثر دما روی پوسته

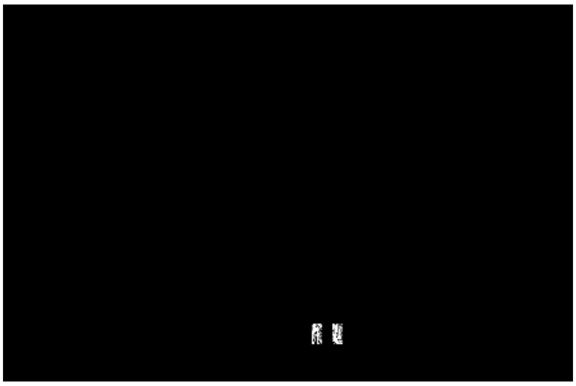
با حل معادله گرمای یک‌بعدی و استفاده از شرط مرزی دمای ثابت روی سطح درونی و بیرونی پوسته، توزیع دما در راستای ضخامت به‌دست می‌آید. این توزیع دما برای سه ماده یادشده در بخش ۵-۱ به‌صورت شکل **۱۷** است:

شکل (۱۷): توزیع دما در راستای ضخامت برای سه ماده مختلف.

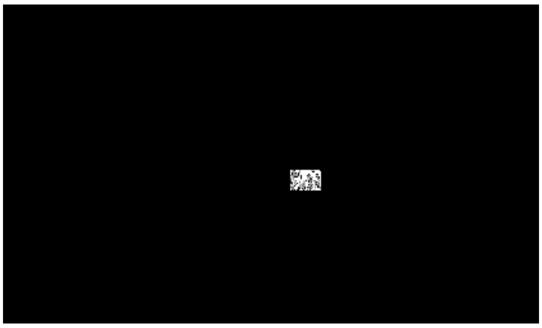
در این شکل از پارامترهای زیر استفاده شده است:

$$T_b = 150\,k \qquad T_a = 50\,k \qquad h = .1\text{ m}$$
$$k_m = 20\ \frac{w}{m\,k} \quad k_c = .1\ \frac{w}{m\,k} \tag{۲۳}$$

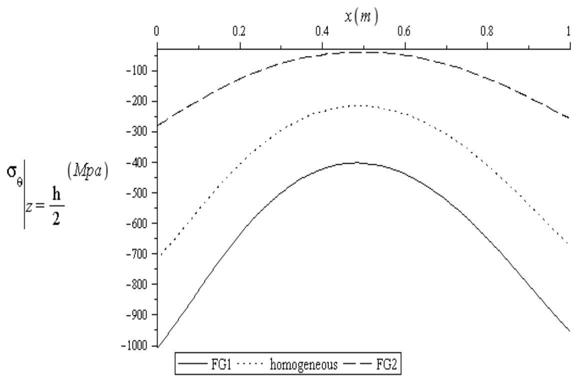
با درنظرگرفتن پوسته بخش ۵-۱ با بار عرضی صفر ولی با جنس‌های گوناگون و قرارگرفتن پوسته‌های حاصل در معرض اختلاف دمای سطح درونی $50\ k$ و بیرونی $150\ k$ و ضرایب هدایت حرارتی رابطه (۲۳) جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها برای پوسته رسم شده‌اند:



شکل (۱۸): جابه‌جایی عرضی در راستای طولی x(m) برای پوسته با بار حرارتی مشخص و سه جنس مختلف.



شکل (۱۹): چرخش در صفحه میانی در راستای طولی x(m) برای پوسته با بار حرارتی مشخص و سه جنس مختلف.



شکل (۲۰): تنش نرمال σ_θ در سطح بیرونی پوسته در راستای طولی x(m) برای پوسته با بار حرارتی مشخص و سه جنس مختلف.

در شکل**۱۷** توزیع دما برای پوسته‌هایی با شرایط دمایی و فیزیکی یکسان ولی با جنس‌های مختلف نشان داده شده است. از این توزیع دما در نمودار شکل‌های **۲۰-۱۸** استفاده شده است.

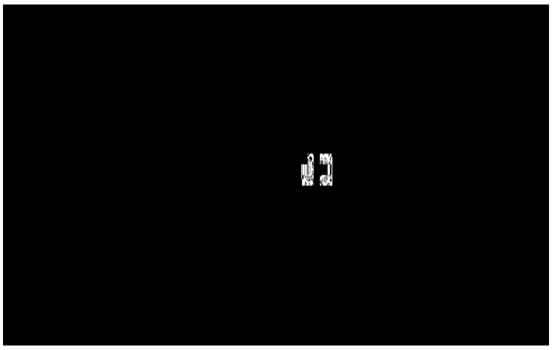
در شکل**۱۸** جابه‌جایی عرضی پوسته با سه جنس مختلف در معرض اختلاف دمای سطح درونی $50\ k$ و بیرونی $150\ k$ نشان داده شده‌است. دیده می‌شود کمترین خیز برای ماده FG1 است، زیرا سرامیک لایه بیرونی به‌عنوان عایق در حالت پایا عمل می‌کند و توزیع دما را در این ماده کاهش می‌دهد.

در شکل**۱۹** چرخش در صفحه با سه جنس مختلف در معرض همان بار حرارتی نشان داده شده است. دیده می‌شود که کمترین چرخش برای ماده FG1 است.

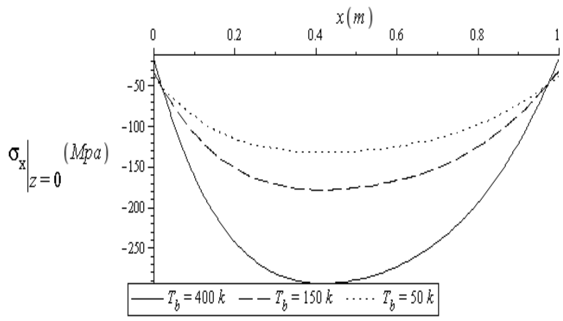
در شکل **۲۰** تنش نرمال σ_θ در سطح بیرونی پوسته با سه جنس مختلف در معرض بار حرارتی یادشده نشان داده شده است. دیده می‌شود که در این حالت تنش ماده FG2 کمتر از تنش ماده FG1 است و هر دو به‌صورت فشاری هستند، ولی ماده FG1 در سطح بیرونی دارای جنس سرامیک است که مقاومت تسلیم بالایی در برابر فشار دارد. در مقابل، ماده FG2 در سطح بیرونی دارای جنس فلز است.

با درنظرگرفتن پوسته بخش ۵-۴ و تغییر دمای سطح بیرونی برای ماده FG1 نمودارهای زیر به‌دست آمده است. اختلاف دمای سطح درونی پوسته در نمودارهای زیر، ۵۰ کلوین است.

شکل (۲۱): جابه‌جایی عرضی در راستای طولی x(m) برای پوسته FG1 با سه دمای مختلف در سطح بیرونی پوسته.



شکل (۲۲): جابه‌جایی طولی در راستای طولی x(m) برای پوسته FG1 با سه دمای مختلف در سطح بیرونی پوسته.



شکل(۲۳): تنش نرمال σ_x در سطح میانی پوسته در راستای طولی x(m) برای پوسته FG1 با سه دمای مختلف در سطح بیرونی پوسته.

در شکل‌های **۲۳-۲۱** جابه‌جایی و تنش پوسته FG1 برای سه نوع توزیع دما در راستای x کشیده شده است. که دما در سطح درونی ثابت و برابر 50 k است و در سطح بیرونی به سه صورت $T_b = 50\ k$ و $T_b = 150\ k$ و $T_b = 400\ k$ است.

در شکل‌های**۲۳-۲۱** به‌ترتیب جابه‌جایی عرضی پوسته، جابه‌جایی طولی در صفحه میانی پوسته و تنش نرمال σ_x در سطح میانی پوسته برای سه نوع بار حرارتی، در راستای طولی x نشان داده شده‌اند. دیده می‌شود که افزایش دمای سطح بیرونی مانند افزایش بار عرضی باعث افزایش مقدار آنها می‌شود ولی در محل ماکزیمم مقدار آن تاثیر ندارد.

۶- نتیجه‌گیری

رفتار پوسته مخروطی متقارن محوری تحت بار حرارتی و مکانیکی استاتیک مورد بررسی قرار گرفت و نتایج زیر به‌دست آمد:

درصورتی‌که تنها بار عرضی به‌سمت درون به پوسته وارد شود، جابه‌جایی عرضی برای ماده تابعی که سطح بیرون آن سخت‌تر است، بیشتر از ماده‌ای است که سطح درون آن سخت‌تر است و تنش‌های نرمال در سطح‌هایی که مدول الاستیسیته بیشتری دارند، بیشتر است. ماده FG2 که معرفی شد دارای وضعیت تنش بسیار بهتری نسبت به دیگر موارد است.

با نازک‌شدن پوسته مخروطی‌خیز ماکزیمم به تکیه‌گاه پایینی و با ضخیم شدن آن به میانه پوسته نزدیک می‌شود.

وقتی پوسته در معرض دمای سطح درونی و بیرونی ثابتی قرار گیرد، در حالت پایا اگر سطحی که ضریب هدایت حرارتی کمتری دارد، در مقابل دمای بیشتر قرار گیرد، باعث کاهش میانگین دما در جسم می‌شود و خیز ماکزیمم کاهش می‌یابد و تنش‌ها در وضعیت بهتری قرار می‌گیرند.

افزایش مقدار دما و بار عرضی باعث افزایش مقدار تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها می‌شود ولی در شکل نمودار آنها تاثیری ندارد درصورتی‌که تغییر ضخامت پوسته هم در مقدار و هم در شکل نمودارهای تنش و جابه‌جایی اثر می‌گذارد.

بار حرارتی و بار مکانیکی می‌توانند به‌صورت متقابل عمل کنند، برای مثال در پوسته‌ای که به آن بار عرضی به‌سمت درون پوسته وارد می‌شود، افزایش دما می‌تواند به جابه‌جایی عرضی در جهت بیرون کمک کند.

۷- مراجع

1. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, “Theory of Plates and Shells”, New York, McGraw-Hill, 1959.
2. Wilson, B. “Asymmetrical Bending of Conical Shells”, EngngMech, Div, Proc, ASCE, Vol. 86 , No. 5 pp. 39-119, 1960.
3. Budiansky, B. and Radkowski, ”Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution”. AIA, Vol. 4, No. 8, pp. 42-1833, 1963.
4. Pei J, Harik I.E. “Iterative FD Solution to Bending of Axisymmetric Conical Shells” J Struct Eng ASCE, Vol. 116, pp. 2433–46, 1990.
5. Sundarasivarao B.S.K. and Ganesan. N. “Deformation of Varying Thickness of Conical Shells Subjected to Axisymmetric Loading With Various End Conditions”, Engineering Fracture Mechanics Vol. 39, No. 6, pp. 1003-1010,, 1991.
6. Chandrashekhara K, and Karekar M.S. “Bending Analysis of a Conical Shell Panel”, Int J Struct, Vol. 12, No. 2, pp. 16-101, 1992.
7. Lu, C.H, Mao, R., and Winfield, D.C. “Stress Analysis of Thick Laminated Conical Tubes With Variable Thickness”, Composites Engineering, Vol. 5, pp. 471–484. ,1995.
8. Tavares, S.A. “Thin Conical Shells With Constant Thickness and Under Axisymmetric Load”. Computer and Structures, pp. 895–921, 1996.
9. Wu, C.P., and Hung, Y.C. “Asymptotic Theory of Laminated Circular Conical Shells”. International Journal of Engineering Science, Vol. 37, pp. 977–1005., 1999.
10. Cui W, Pei J, and Zhang W. “A Simple and Accurate Solution for Calculating Stresses in Conical Shells”. Comput Struct, pp. 79-265., 2001.
11. Wu, C.P, Hung, Y.C., and Lo, J.Y. “A refined Asymptotic Theory of Laminated Circular Conical Shells”, European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 21,pp. 281–330., 2002.
12. Pinto Correia I.F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A., and Herskovits. J. “Analysis of Laminated Conical Shell Structures Using Higher Order Models”, Composite Structures Vol. 62, pp. 383–390, 2003.
13. Jane, K.C. and Wu. Y.H. “A Generalized Thermoelasticity Problem of Multilayered Conical Shells”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 2205–2233, 2004.
14. Sofiyev. A.H. “Thermoelastic Stability of Functionally Graded Truncated Conical Shells”. Composite Structures, Vol. 77, pp. 56–65, 2007.
15. Francesco T., Erasmo Viola, D., Inman, J. “2-D Differential Quadrature Solution for Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures”, Journal of Sound and Vibration Vol. 328, pp. 259–290, 2009.
16. Aghdam, M.M., Shahmansouri, N., and Bigdeli. K. “Bending Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Conical Panels”. Composite Structures, Vol. 93, pp. 1376–1384, 2011.
17. Auricchio, F. and Sacco, E. “Refined First-Order Shear Deformation Theory Models for Composite Laminates”, Journal of Applied Mechanics. pp. 381-390, 2003.
18. Nguyen T.K, Saba K, and Bonnet G. “First-Order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials”. Compos Struct, Vol. 83, No. 1, pp. 25–36., 2008.
19. Reddy J.N. “Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis”, 2nd ed, CRC Press, 2004.
20. Shu C. “Differential Quadrature and Its Application In Engineering”, London, Springer-Verlag, 2000.
21. Shu C. “Free Vibration Analysis of Thin Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method”, J Sound Vib, Vol. 194, pp. 587–604.,1996.
22. Ghannad, M. Zamani, M. Nejad, and Rahimi. G.H. “Elastic Solution of Axisymmetric Thick Truncated Conical Shells Based on First-Order Shear

Deformation Theory", MECHANIKA, Vol. 79, No. 5, pp. 1207 – 1392, 2009.

23. "Functionally Graded Materials in 21st Century", a Workshop on Trends and Forecasts. International Congress Center, 2000.
24. Ghorbani, A., "A Cruise Missile Conceptual Design Mythology, Using Genetic Algorithm", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 1, No. 3, pp. 69-81, 2006 (In Persian).
25. Dehkordi, R.I., Shahverdi, H., Nobari, A.S., and Khalili, A., "Numerical Investigation of the Aeroelastic Instability of an Aircraft Wing, Using Finite Element and Unsteady Panel Methods," Aerospace Mechanics Journal, Vol. 7, No. 4, pp. 13-23., 2012 (In Persian).