یک مدل ریاضی جدید برای تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مشبک با استفاده از روش تفاضل مربعات DQM

محمد فدایی [۱]
دانشکده فنی مهندسی
دانشگاه صنعتی قم

سعید کلانتری [۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۸/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۸/۵)

چکیده

در این مقاله، با استفاده از تئوری پوسته نازک فلوگه و هم‌چنین بهره‌جستن از یک مدل جدیدِ ترکیب پوسته و شبکه منظم، کمانش خطی یک استوانه تقویت‌شده با شبکه منظم متساوی‌الاضلاع، تحت بار محوری مورد بررسی قرار گرفته است. پوسته و شبکه، ساخته‌شده از مواد همسانگرد فرض شده و دارای شرایط مرزی کلاسیک تکیه‌گاه ساده و گیردار است. در ابتدا، ماتریس سفتی مجموعه پوسته و شبکه منظم قرارگرفته بر روی پوسته، با استفاده از یک روش جدید به‌دست می‌آید. سپس، معادلات تعادل، براساس این ماتریس سفتی نوشته شده و درنهایت، با استفاده از روش کارآمد تفاضل مربعات، بار کمانش مجموعه به‌دست می‌آید. صحه‌سنجی نتایج با استفاده از یک مدل المان محدود، نشان از دقت بالای نتایج دارد. در پایان، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی بر روی بار کمانش بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: کمانش خطی، تئوری پوسته نازک فلوگه، پوسته‌های استوانه‌ای مشبک، بار محوری، روش تفاضل مربعات

A New Mathematical Procedure for Linear Buckling of Grid Stiffened Cylindrical Shells Using Differential Quadrature Method

M. Fadaee
Department of Engineering
Qom University of Technology

S. Kalantari
Mechanical Engineering Department
Iran University of Science and Technology

(Received: 5/November/2013; Accepted: 30/October/2014)

ABSTRACT

In this article, according to the thin shell theory of Flugge as well as using a new mathematical procedure, the linear buckling of waffle cylindrical shell under axial load is investigated. Skin and grids are composed of the same isotropic material and the classical boundary conditions of clamped and simply supported are considered. Firstly, using a new mathematical modeling, the structural stiffness matrix of skin and grids is obtained. Then, the equilibrium equations of the shell are derived based on the new stiffness matrix. Finally, these equations are solved using differential quadrature method. The results are compared by the finite element analyses. Comparative results reveal that the present procedure is very stable and accurate. Also, the effects of various geometrical parameters on the linear buckling loads are presented.

Keywords: Linear Buckling, The Thin Shell Theory of Flugge, Waffle Cylindrical Shell, Differential Quadrature Method

---

۱- استادیار(نویسنده پاسخگو): fadaee@qut.ac.ir
۲- کارشناسی ارشد

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای، در صنایع مختلفی همچون هوافضا، خودرو، دریایی و...، یکی از پرکاربردترین سازه‌ها می‌باشند. از مهمترین دغدغه‌های مهندسان و طراحان مخصوصاً در صنعت هوافضا، دستیابی به سازه‌هایی با نسبت استحکام به وزن بالا بوده است. این امر باعث شده، از گذشته‌های دور، مهندسان به نوآوری در این زمینه بپردازند. یکی از بهترین سازه‌های طراحی شده سبک وزن، سازه مشبک است که در آن، شبکه‌ای از تقویت‌کننده‌ها به‌صورت یک‌پارچه به‌همراه یک پوسته ساخته می‌شوند و موجب بروز استحکام به وزن و چقرمگی به وزنِ استثنایی برای بسیاری از کاربردهای هوافضا می‌گردند. بازده پوسته‌های مشبک، بیشتر از ساختارهای استرینگری می‌باشد [۱] و هزینه ساخت کمتری نسبت به آنها دارند. سازه با ساختار مشبک یک‌پارچه، باعث کاهش تعداد اتصالات می‌شود. به‌عبارتی، قطعات کمتر و زمان مونتاژ کمتر، به‌معنای کاهش هزینه است. این سازه‌ها به‌صورت استوانه‌ای، مخروطی و یا صفحه‌های تقویت‌شده، در قسمت‌های مختلف مجموعه‌های هوافضایی کاربرد دارند. از آنجایی‌که اغلب این‌گونه سازه‌ها، در فضای کاری دچار کمانش می‌شوند، لذا کمانش یکی از بحرانی‌ترین موارد تخریب برای این‌گونه سازه‌ها است.

فعالیت‌های زیادی توسط محققین سازمان فضایی آمریکا[1] در زمینه طراحی و تحلیل سازه‌های مشبک انجام گرفته است. در سال ۱۹۶۴ در تحقیقاتی که برای ناسا انجام گرفت، دانشمندان متوجه شدند که سازه‌های تقویت‌شده با شبکه ۴۵ درجه، می‌تواند بار بیشتری نسبت به سازه‌های تقویت‌شده با شبکه عمودی تحمل کنند. این سازه‌های جدید، به سازه مشبک[2] نام‌گذاری شدند [۲]. روش‌های مختلفی برای مدل کردن تقویت‌کننده‌ها وجود دارد. طی چهار دهه گذشته، تحقیقات زیادی بر روی تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده انجام گرفته است. به‌طورکلی سه روش برای تحلیل این‌گونه از سازه‌ها وجود دارد که عبارتند از روش منشعب‌شده پوسته و استوانه[3]، روش معادل‌سازی[4] و روش گسسته‌سازی[5]. در روش گسسته‌سازی، اثر ممان و پیچش تقویتی‌ها، واردشده بر پوسته، مدل می‌شود. این روش، برای تقویت‌کننده‌هایی که بیشتر از دو جهت دارند، مقداری مشکل است، اما در مواردی که تقویتی‌ها به‌صورت ساده می‌باشند، روش بسیار خوبی است. یکی از این مدل‌ها، توسط منبع [۳] ارائه شده است که در این مدل، ریب‌ها یا همان تقویت‌کننده‌های محیطی، با تابع دیراک یا ضربه مدل شده‌اند. این روش، با استفاده از روش المان محدود، بهبودهای زیادی پیدا کرده است. نویسندگان در مرجع [۴] با استفاده از نرم‌افزار کاسموس[6] به‌بررسی کمانش استوانه تقویت‌شده مشبک پرداختند. آنها در تحلیل خود تقویت‌کننده‌ها را با المان تیر[7] مدل کردند. هم‌چنین یک مدل المان محدود سه‌بعدی برای تحلیل سازه‌های کامپوزیتی مشبک در منبع [۵] ساخته شده است. این محققان، از نرم‌افزار المان محدود آباکوس[8] برای مدل‌سازی استفاده کرده‌اند و مدل تحت بارمحوری، ممان خمشی و پیچش قرار گرفته و نتایج استخراج شده است.

روش مرسوم دیگر، روش منشعب شده از استوانه و پوسته است که برای پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده مناسب می‌باشد. این روش از روش اول دقیق‌تر و منعطف‌تر می‌باشد. قاسمی و همکارانش بار کمانش بحرانی یک پوسته کامپوزیتی با شبکه تقویتی لوزی تحت بار محوری را بررسی کرده‌اند [۶]. رن و همکارانش کمانش خطی استوانه‌های کامپوزیتی مشبک را توسط سه روش عددی و همچنین آزمون‌های آزمایشگاهی بررسی کرده‌اند [۷].

سومین روش، معادل‌سازی است. در این روش، تقویتی‌ها با استفاده از مدل‌های ریاضی، با پوسته معادل آن شبیه‌سازی می‌شود. محققان همیشه سعی داشته‌اند این روش معادل‌سازی را بهینه و به واقعیت نزدیک‌تر کنند. در مرجع [۸] یک روش معادل‌سازی برمبنای روابط انرژی به‌دست آورده شده است. نویسندگان در مراجع [۹] و [۱۰] سازه مشبک را با استفاده از تئوری الاستیسیته مدل کردند و در مدلشان، خمش و پیچش ریب‌ها را درنظر گرفتند. یک روش معادل‌سازی جدید در منبع [۱۱] ارائه‌شده که توسط سایر محققان مورد استفاده زیادی قرار گرفته است.

تفاضل مربعات[9]، روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. این روش برای اولین بار توسط ریچارد بلمن[10] در

1-NASA
2-Isogrid
3-Branched Plate and Shell
4-Smeared Stiffener Method
5-Discrete Method Model

6-COSMOS
7-Beam
8-Abaqus
9-DQM
10-Richard Bellman

اوایل دهه ۱۹۷۰ به‌وجود آمد [۱۲]. مسئله‌ای که در روش‌های عددی معمول وجود دارد این است که برای رسیدن به دقت‌های مورد قبول، باید از شبکه متراکمی در میدان حل استفاده شود که این باعث افزایش حجم محاسبات به‌صورت قابل ملاحظه‌ای خواهد شد. ولی با استفاده از روش تفاضل مربعات، ضمن دقت بالا، نیاز به شبکه متراکمی در میدان حل نیست. این باعث می‌شود حجم محاسبات کاهش قابل ملاحظه‌ای پیدا کند. ایده این روش برمبنای اصل انتگرال‌گیری بوده که مشتقات تابع را با استفاده از یک سری توابع وزنی در طول نقاط به‌دست می‌آورد. از این روش در زمینه تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی، کارهای زیادی توسط محققین برجای مانده است. منابعی مانند [۱۳] در سال ۱۹۹۶، [۱۴] در سال ۱۹۹۷، [۱۵و۱۶] در سال ۱۹۹۷ به تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از روش تفاضل مربعات پرداخته‌اند. نویسندگان مرجع [۱۷] با استفاده از روش تفاضل مربعات در سال ۱۹۹۸ به تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای پرداخته‌اند. آنها پوسته استوانه‌ای ساده را در شرایط مرزی مختلف ساده، گیردار و آزاد تحت بار محوری و فشاری به‌صورت جداگانه تحلیل کرده‌اند.

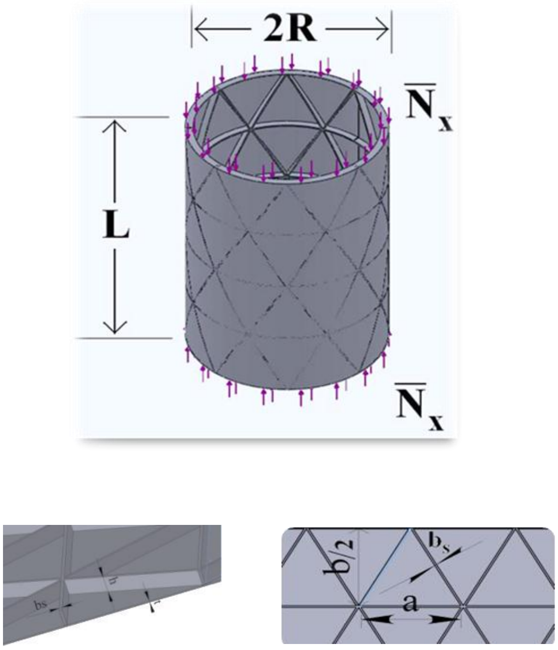
در این مقاله، کمانش خطی یک پوسته استوانه‌ای مشبک با ساختار منظم مثلث متساوی الاضلاع، تحت بار محوری، بررسی خواهد شد. شرایط مرزی پوسته به‌خاطر کاربرد عملی بیشتر، از نوع ساده و گیردار انتخاب شده‌اند. با استفاده از یک استراتژی جدید، ماتریس سفتی و درنتیجه معادلات تعادل حاکم بر پوسته مشبک به‌دست آمده است. برای حل این معادلات، از روش تفاضل مربعات بهره‌برداری شده‌است. مقایسه نتایج حاضر با نتایج به‌دست آمده از مدل المان محدود، نشان از پایداری و دقت بالای روابط حاضر را دارد.

۲- استخراج روابط و معادلات ریاضی حاکم

در این بخش با استفاده از هندسه مسئله ماتریس سفتی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با شبکه منظم به‌دست می‌آید و سپس با استفاده از معادلات تعادل و ماتریس سفتی روابط ریاضی حاکم بر استوانه تقویت‌شده استخراج می‌گردد.

۲-۱- هندسه مسئله

برای استخراج معادلات ریاضی، ابتدا به بررسی هندسه شکل پرداخته شود. هندسه مسئله، در شکل **۱** قابل مشاهده است که در آن، پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با شبکه منظم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با طول L، شعاع R و ضخامت پوسته t نشان داده شده است. پوسته مشبک تحت نیروی محوری $\bar{N}_x$ قرار دارد.



شکل (۱): هندسه پوسته استوانه‌ای مشبک.

باتوجه به شکل **۱**، h ارتفاع و b_s عرض تقویت‌کننده‌ها می‌باشد. همچنین a طول ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است.

۲-۲- انتخاب المان معادل

برای تعیین ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها، ابتدا یک سلول واحد به‌گونه‌ای انتخاب می‌گردد که معرف خصوصیات کل ساختار تقویت‌شده باشد (شکل **۲**). در این روند، عکس‌العمل‌های نیرویی و ممان تقویت‌کننده‌ها بر روی پوسته، به‌عنوان تابعی از انحناها و کرنش‌های صفحه میانی پوسته $(\varepsilon_x^0,\varepsilon_\theta^0,\varepsilon_{x\theta}^0,k_x,k_\theta,k_{x\theta})$ مورد تحلیل قرار می‌گیرد [۱۸]. در این روش، فرضیاتی درنظر گرفته شده است که عبارتند از:

۱) با توجه به این که ابعاد سطح مقطع در مقایسه با طول تقویت‌کننده‌ها بسیار کوچک می‌باشد، تقویت‌کننده‌ها فقط بارهای در راستای محورشان را تحمل می‌کنند و

۲) کرنش در سرتاسر سطح مقطع عرضی تقویت‌کننده‌ها یکنواخت می‌باشد [۱۸].

باتوجه به شکل **۲**، نیروی داخلی تمامی تقویت‌کننده‌ها، هم‌جهت با محور مختصات انتخابی نمی‌باشد، لذا باید از ماتریس تبدیل استفاده شود. بنابراین رابطه بین کرنش‌ها در دستگاه کلی استوانه‌ای $(x-\theta)$ و دستگاه مستقر بر روی تقویت‌کننده $(l-t)$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_l\\ \varepsilon_t\\ \varepsilon_{lt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & sc\\ s^2 & c^2 & -sc\\ -2sc & 2sc & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_{x\theta}\end{bmatrix}. \quad (1)$$

cو s به‌ترتیب کسینوس و سینوس زاویه ϕ می‌باشد که، ϕ زاویه چرخش سطح مقطع تقویت‌کننده، نسبت به محور استوانه است [۱۸].

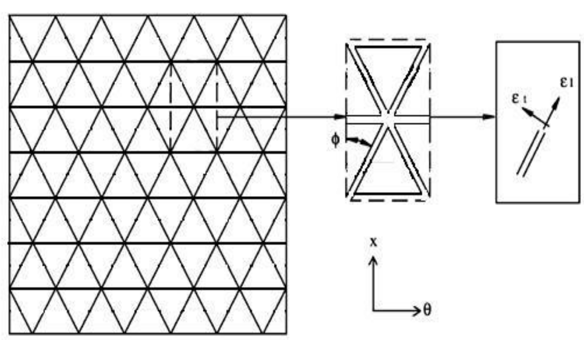
۲-۲-۱- تحلیل نیرویی المان معادل

باتوجه به شکل **۲**، نیروهای اعمالی بر یک سلول واحد، قابل استحصال است. طبق فرضیات ذکر شده و باتوجه به شکل **۳**، نیروها بر واحد طول یعنی $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

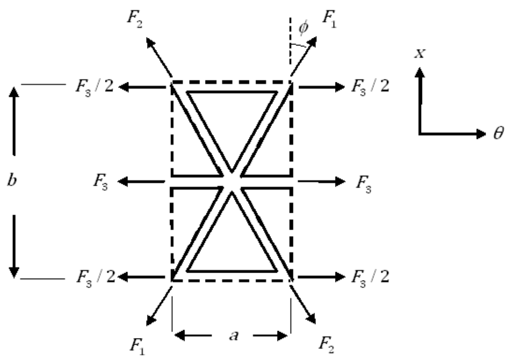
$$N_x=\frac{AE}{b}\left(2c^3\varepsilon_x^0+2c^3k_x\left(\frac{t}{2}\right)+2cs^2\varepsilon_x^0+2cs^2k_x\left(\frac{t}{2}\right)\right). \quad (2)$$

$$N_\theta=\frac{AE}{b}\left(\begin{array}{l}2sc^2\varepsilon_x^0+2sc^2k_x\left(\frac{t}{2}\right)\\ +(2s^3+2)\varepsilon_x^0+(2s^3+2)k_x\left(\frac{t}{2}\right)\end{array}\right). \quad (3)$$

$$N_{x\theta}=\frac{AE}{b}\left(2sc^2\varepsilon_{x\theta}^0+2sc^2k_{x\theta}\left(\frac{t}{2}\right)\right). \quad (4)$$



شکل (۲): سلول واحد و سیستم مختصات.



شکل (۳): توزیع نیرو.

که در آن، A و E به‌ترتیب سطح مقطع تقویت کننده‌ها و مدول الاستیسیته آنها می‌باشد.

۲-۲-۲- تحلیل گشتاور المان معادل

به‌واسطه وجود نیرو در تقویت‌کننده‌ها و اختلاف ارتفاع بین آنها و نیروی داخل پوسته، ممان تولید می‌گردد که این موضوع در شکل **۴** به‌خوبی نمایش داده شده است [۱۸].
شبیه تحلیل نیرو، می‌توان گشتاورهای موجود در المان را نیز استخراج نمود:

$$M_x=\frac{AEt}{b}\left(c^3\varepsilon_x^0+c^3k_x\left(\frac{t}{2}\right)+cs^2\varepsilon_x^0+cs^2k_x\left(\frac{t}{2}\right)\right). \quad (5)$$

$$M_\theta=\frac{AEt}{b}\left(\begin{array}{l}sc^2\varepsilon_x^0+sc^2k_x\left(\frac{t}{2}\right)+(s^3+1)\varepsilon_x^0\\ +(s^3+1)k_x\left(\frac{t}{2}\right)\end{array}\right). \quad (6)$$

$$M_{x\theta}=\frac{AEt}{b}\left(sc^2\varepsilon_{x\theta}^0+sc^2k_{x\theta}\left(\frac{t}{2}\right)\right). \quad (7)$$

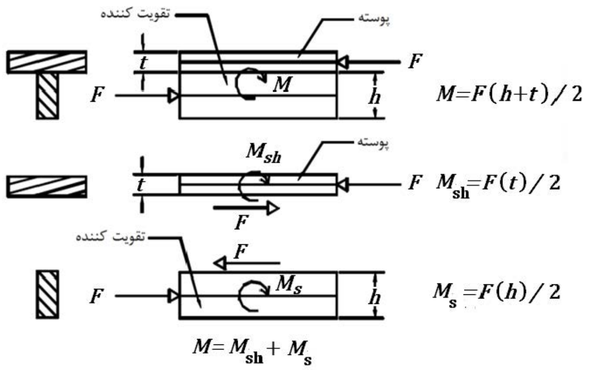
۲-۳- استخراج ماتریس سفتی سازه

جهت ایجاد ماتریس سفتی استوانه تقویت شده، باید پس از تحلیل نیرویی، ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها و پوسته جداگانه به‌دست آیند و سپس باهم ترکیب گردند.

۲-۳-۱- ماتریس سفتی شبکه تقویت‌کننده‌ها

در این بخش، ماتریس سفتی شبکه تقویت‌کننده استخراج می‌شود. معادلات (۲) تا (۴)، مشخص‌کننده میزان نیرو بر واحد طول و معادلات (۵) تا (۷)،معرف ممان بر واحد طول می‌باشند که با جمع‌بندی آنها، ماتریس سفتی ناشی از شبکه

تقویت‌کننده‌ها به‌دست می‌آید. بالانویس st مشخص‌کننده سهم تقویت‌کننده‌ها است.



شکل (۴): گشتاور ایجادشده توسط تقویت‌کننده‌ها.

ماتریس بیان‌شده در رابطه (۸)، بر مبنای انحنا و کرنش‌های صفحه میانی پوسته می‌باشد. زیر ماتریس‌های A_{ij}^{st} ، B_{ij}^{st} و D_{ij}^{st} به‌ترتیب زیر ماتریس کششی، کوپلینگ و خمشی هستند.

$$
\begin{bmatrix} N_x^{st} \\ N_\theta^{st} \\ N_{x\theta}^{st} \\ M_x^{st} \\ M_\theta^{st} \\ M_{x\theta}^{st} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} A_{ij}^{st} & B_{ij}^{st} \\ B_{ij}^{st} & D_{ij}^{st} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix},
A_{ij}^{st}=AE\begin{bmatrix} \frac{2c^3}{a} & \frac{2s^2c}{a} & 0 \\ \frac{2c^2s}{b} & \frac{(2s^3+2)}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2c^2s}{b} \end{bmatrix},
$$
$$
B_{ij}^{st}=AE\begin{bmatrix} \frac{tc^3}{a} & \frac{ts^2c}{a} & 0 \\ \frac{tc^2s}{b} & \frac{(2s^3+2)\mathrm{t}}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{tc^2s}{b} \end{bmatrix},
$$
$$
D_{ij}^{st}=AE\begin{bmatrix} \frac{t^2c^3}{2a} & \frac{s^2ct^2}{2a} & 0 \\ \frac{sc^2t^2}{2b} & \frac{(2s^3+2)t}{4b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s^2ct^2}{2b} \end{bmatrix}.
\tag{۸}
$$

در اولین نگاه، ماتریس رابطه (۸) ممکن است نامتقارن به نظر برسد، اما به‌سبب رابطه‌ی هندسی بین پارامترهای $a,b,\sin(\phi)$ و $\cos(\phi)$، این مقادیر باهم برابر هستند [۱۸].

۲-۳-۲- ماتریس سفتی پوسته

پوسته مورد استفاده در این‌جا، از یک ماده هم‌سانگرد ساخته شده و بنابراین ماتریس سفتی آن عبارت است از [۱۹]:

$$
\begin{bmatrix} N_x^{sh} \\ N_\theta^{sh} \\ N_{x\theta}^{sh} \\ M_x^{sh} \\ M_\theta^{sh} \\ M_{x\theta}^{sh} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} A_{ij}^{sh} & B_{ij}^{sh} \\ B_{ij}^{sh} & D_{ij}^{sh} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix},
A_{ij}^{sh}=\begin{bmatrix} \frac{Et}{1-\upsilon^2} & \frac{Et\upsilon}{1-\upsilon^2} & 0 \\ \frac{Et\upsilon}{1-\upsilon^2} & \frac{Et}{1-\upsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et}{2(1+\upsilon)} \end{bmatrix},
$$
$$
B_{ij}^{sh}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
D_{ij}^{sh}=\begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\upsilon^2)} & \frac{Et^3\upsilon}{12(1-\upsilon^2)} & 0 \\ \frac{Et^3\upsilon}{12(1-\upsilon^2)} & \frac{Et^3}{12(1-\upsilon^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et^3}{24(1+\upsilon)} \end{bmatrix}.
\tag{۹}
$$

که در آن، υ ضریب پواسون پوسته است. بالانویس sh مشخص کننده سهم پوسته است.

۲-۳-۳- ماتریس سفتی کل سازه

روش‌های مختلفی برای تعیین ماتریس سفتی وجود دارد که در این مقاله، ماتریس سفتی کل، از جمع ماتریس سفتی پوسته با ضریب یک و ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها با نسبت حجمی تقویت‌کننده‌ها به حجم کل، به‌دست می‌آید. دلیل این پیشنهاد، آن است که پوسته، به‌طور کامل و با تمامی حجم خود با نیروی محوری فشاری درگیر بوده، درحالی‌که شبکه تقویتی، به‌علت گسسته‌بودن، باید به‌نسبت حجم خود درگیر شود. بنابراین برای ماتریس سفتی کل می‌توان نوشت:

$$
\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{st}A^{st}+V_{sh}A^{sh} & V_{st}B^{st}+V_{sh}B^{sh} \\ V_{st}B^{st}+V_{sh}B^{sh} & V_{st}D^{st}+V_{sh}D^{sh} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon \\ k \end{bmatrix},
\tag{۱۰}
$$
$$
V_{sh}=1\,,V_{st}=\frac{V_{st}}{V_{sh}+V_{st}}.
$$

که در آن، v_{sh} و v_{st} به‌ترتیب حجم مربوط به پوسته و تقویت‌کننده‌ها می‌باشند. بنابراین می‌توان برای کل سازه نوشت:

$$
\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix}.
\tag{۱۱}
$$

که در آن:

$$
A_{11}=\frac{Et}{1-\upsilon^2}+V_{st}\times AE\times\frac{2c^3}{a}, \qquad B_{11}=V_{st}\times AE\times\frac{c^3t}{a},
$$
$$
A_{12}=\frac{Et\upsilon}{1-\upsilon^2}+V_{st}\times AE\times\frac{2s^2c}{a}, \qquad B_{12}=V_{st}\times AE\times\frac{s^2ct}{a},
$$
$$
A_{22}=\frac{Et}{1-\upsilon^2}+V_{st}\times AE\times\frac{(2s^3+2)}{a}, \qquad B_{22}=V_{st}\times AE\times\frac{(2s^3+2)t}{2b},
$$

$$A_{33}=\frac{Et}{2(1+\upsilon)}+V_{st}\times AE\times\frac{2c^2s}{b},\qquad B_{33}=V_{st}\times AE\times\frac{c^2st}{b},$$
$$D_{11}=\frac{Et^3}{12(1-\upsilon^2)}+V_{st}\times AE\times\frac{c^3t^2}{2a},\qquad D_{12}=\frac{Et^3\upsilon}{12(1-\upsilon^2)}+V_{st}\times AE\times\frac{s^2ct^2}{2a},$$
$$D_{22}=\frac{Et^3}{12(1-\upsilon^2)}+V_{st}\times AE\times\frac{(2s^3+2)t^2}{4b}.\qquad D_{33}=\frac{Et^3}{24(1+\upsilon)}+V_{st}\times AE\times\frac{c^2st^2}{2b}.$$
(۱۲)

۲-۴- استخراج معادلات تعادل

در این بخش، با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون، معادلات تعادل حاکم بر استوانه مشبک، استخراج می‌گردد. براساس اصل همیلتون، کل انرژی پتانسیل جسم‌الاستیک در حالت تعادل، مینیمم خواهد شد. بر پایه این اصل، می‌توان نوشت [۱۹]:

$$\delta\Pi=\delta U_e-\delta V=0. \tag{۱۳}$$

که در آن، U_e انرژی کرنشی الاستیک و با فرض $\theta=y/R$ برابر است با [۱۹]:

$$U_e=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\int_{-t/2}^{t/2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\tau_{xy}\gamma_{xy})\,dzdydx. \tag{۱۴}$$

و مقدار کار نیروی محوری برابر خواهد بود با [۱۹]:

$$V=-\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\bar{N}_x\left[U_{,x}^2+V_{,x}^2+W_{,x}^2\right]dydx. \tag{۱۵}$$

که در آن، U ,Vو W به‌ترتیب جابه‌جایی صفحه میانی پوسته در راستاهای x , y و zبوده و $\bar{N}_x$ نیروی محوری کمانشی بر واحد طول است.

مقادیر k_x,k_y,k_{xy} و $\varepsilon_x^0,\varepsilon_y^0,\gamma_{xy}^0$ در رابطه (۱۱)، طبق تئوری فلوگه عبارتند از [۲۰]:

$$\varepsilon_x^0=U_{,x},\qquad k_x=-W_{,xx},$$
$$\varepsilon_y^0=V_{,y}+\frac{1}{R}W,\qquad k_y=-W_{,yy}-\frac{W}{R^2},$$
$$\gamma_{xy}^0=V_{,x}+U_{,y},\qquad k_{xy}=\frac{V_{,x}}{R}-\frac{U_{,y}}{R}-2W_{,xy}. \tag{۱۶}$$

با اعمال اصل تغییرات بر روی رابطه (۱۳) و استفاده از روابط (۱۴) تا (۱۶)، معادلات تعادل پوسته به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{R\partial y}-\bar{N}_x\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right)=0. \tag{الف.۱۷}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{R\partial x}-\bar{N}_x\left(\frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)=0. \tag{ب.۱۷}$$

$$\frac{N_y}{R}-\frac{\partial^2M_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2M_y}{\partial y^2}-\frac{M_y}{R^2}-2\frac{\partial^2M_{xy}}{R\partial x\partial y}-\bar{N}_x\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\right)=0. \tag{ج.۱۷}$$

معادلات به‌دست آمده، روابط تعادل حاکم بر پوسته استوانه مشبک براساس تئوری پوسته فلوگه است که ارتباط بین نیرو و ممان حاکم بر پوسته مشخص می‌شود.

حال با قراردادن معادلات (۱۶) دررابطه (۱۱) و سپس استفاده از نتیجه حاصل در معادلات تعادل (۱۷) و استفاده از تغییر متغیر $\varphi=x/R$ و $\theta=y/R$ ، می‌توان معادلات تعادل را به‌صورت نهایی زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}&A_{11}\left(\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}\right)+\left(A_{12}+A_{33}-\frac{D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^2V}{\partial\varphi\partial\theta}\\&+\left(A_{12}-\frac{B_{12}}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial\varphi}-\frac{B_{11}}{R}\left(\frac{\partial^3W}{\partial\varphi^3}\right)\\&+\left(-\frac{B_{12}}{R}-\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R}\right)\frac{\partial^3W}{\partial\theta^2\partial\varphi}\\&+\left(A_{33}-\frac{2B_{33}}{R}+\frac{D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}=\bar{N}_x\left(\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}\right),\end{aligned} \tag{الف.۱۸}$$

$$\begin{aligned}&A_{22}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}\right)+\left(-\frac{B_{12}}{R}-\frac{2B_{33}}{R}-\frac{2D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^3W}{\partial\varphi^2\partial\theta}\\&+\left(A_{22}-\frac{B_{22}}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial\theta}-\frac{B_{22}}{R}\left(\frac{\partial^3W}{\partial\theta^3}\right)\\&+\left(A_{33}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}\\&+\left(A_{12}+A_{33}-\frac{D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^2U}{\partial\varphi\partial\theta}=\bar{N}_x\left(\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}\right),\end{aligned} \tag{ب.۱۸}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{B_{11}}{R}\left(\frac{\partial^3U}{\partial\varphi^3}\right)-\left(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^3V}{\partial\varphi^2\partial\theta}\\&+\left(-\frac{2B_{12}}{R}+\frac{2D_{12}}{R^2}\right)\frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2}+\frac{D_{11}}{R^2}\left(\frac{\partial^4W}{\partial\varphi^4}\right)\\&+\left(\frac{2D_{12}}{R^2}+\frac{4D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^4W}{\partial\varphi^2\partial\theta^2}+\left(A_{12}-\frac{B_{12}}{R}\right)\frac{\partial U}{\partial\varphi}\\&+\left(A_{22}-\frac{B_{22}}{R}\right)\frac{\partial V}{\partial\theta}+\left(A_{22}-\frac{2B_{22}}{R}+\frac{D_{22}}{R^4}\right)W\\&+\left(-\frac{2B_{22}}{R}+\frac{2D_{22}}{R^2}\right)\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}-\frac{B_{22}}{R}\left(\frac{\partial^3V}{\partial\theta^3}\right)\\&-\left(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}-\frac{2D_{33}}{R^2}\right)\frac{\partial^3U}{\partial\theta^2\partial\varphi}\\&+\frac{D_{22}}{R^2}\frac{\partial^4W}{\partial\theta^4}=\bar{N}_x\left(\frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2}\right).\end{aligned} \tag{ج.۱۸}$$

۳- روش حل تفاضل مربعات

روش تفاضل مربعات، یک روش قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشد که در ضمن استفاده از تعداد المان پایین، از دقت بالایی برخوردار می‌باشد. در این

بخش به حل معادلات تعادل (۱۸) با استفاده از این روش پرداخته می‌شود. برای حل این مسئله، توابع جابه‌جایی به‌شکل زیر درنظر گرفته می‌شوند تا معادلات تعادل یک‌بعدی شده و سپس با استفاده از روش DQM به حل آنها پرداخته شود [۱۷]:

$$u(\varphi,\theta)=U(\varphi)\cos(n\theta),$$
$$v(\varphi,\theta)=\mathrm{V}(\varphi)\sin(n\theta), \qquad (۱۹)$$
$$w(\varphi,\theta)=\mathrm{W}(\varphi)\cos(n\theta).$$

که در آن، n می‌تواند به‌طور مجزا یکی از مقادیر ...,0,1,2 را اتخاذ کند. پس از جایگذاری معادلات (۱۹) در معادلات (۱۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&A_{11}(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2})+(A_{12}+A_{33}-\frac{D_{33}}{R^2})n(\frac{\partial V}{\partial\varphi})\\&+(A_{12}-\frac{B_{12}}{R})\frac{\partial W}{\partial\varphi}-\frac{B_{11}}{R}(\frac{\partial^3 W}{\partial\varphi^3})\\&-(-\frac{B_{12}}{R}-\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R})n^2(\frac{\partial W}{\partial\varphi})\\&-(A_{33}-\frac{2B_{33}}{R}+\frac{D_{33}}{R^2})n^2(U)=\bar{N}_\varphi(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}),\end{aligned} \qquad (\text{الف}-۲۰)$$

$$\begin{aligned}&-n^2A_{22}(V)+(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R^2})n\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\\&-n(A_{22}-\frac{B_{22}}{R})(W)-\frac{B_{22}}{R}n^3(W)\\&+(A_{33}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{D_{33}}{R^2})\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\\&-(A_{12}+A_{33}-\frac{D_{33}}{R^2})n(\frac{\partial U}{\partial\varphi})=\bar{N}_\varphi(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}),\end{aligned} \qquad (\text{ب}-۲۰)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{B_{11}}{R}(\frac{\partial^3 U}{\partial\varphi^3})+(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R^2})n\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\\&+(-\frac{2B_{12}}{R}+\frac{2D_{12}}{R^2})\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{D_{11}}{R^2}(\frac{\partial^4 W}{\partial\varphi^4})\\&-(\frac{2D_{12}}{R^2}+\frac{4D_{33}}{R^2})n^2\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+(A_{12}-\frac{B_{12}}{R})\frac{\partial U}{\partial\varphi}\\&+(A_{22}-\frac{B_{22}}{R})n(V)+(A_{22}-\frac{2B_{22}}{R}+\frac{D_{22}}{R^4})W\\&+(-\frac{2B_{22}}{R}+\frac{2D_{22}}{R^2})n^2(W)+\frac{B_{22}}{R}n^3(V)\\&+(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}-\frac{2D_{33}}{R^2})n^2\frac{\partial U}{\partial\varphi}\\&+\frac{D_{22}}{R^2}n^4(W)=\bar{N}_\varphi(\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}).\end{aligned} \qquad (\text{ج}-۲۰)$$

در روش تفاضل مربعات،مشتقات تابع پیوسته $f(x)$ به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\frac{d^m f}{dx^m}(at\ \mathrm{x}=\mathrm{x}_i)=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^m f(\mathrm{x}_j). \qquad (۲۱)$$

که، C_{ij}^m ضریب وزنی برای mامین مشتق است و باید در نقطه iام محاسبه شود. نکته اساسی دراین روش، محاسبه تابع‌های وزنی برای استخراج مقادیر مشتق می‌باشد. برای حل این معادله روش‌های مختلفی وجود دارد که به روندهای مختلفی برای به‌دست‌آوردن C_{ij}^m منجر می‌شود. در این مقاله، از روش مرجع [۱۲] برای محاسبه تابع‌های وزنی استفاده شده است. بنابراین برای مشتق مرتبه‌اول یعنی $m=1$ به‌دست می‌آید:

$$C_{ij}^1=\frac{M^{(1)}(\mathrm{x}_i)}{(\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_j)M^{(1)}(\mathrm{x}_j)}\quad \text{for } i\neq j \text{ and } i,j. \qquad (۲۲)$$

و

$$C_{ij}^1=-\sum_{j=1(j\neq i)}^{N}C_{ij}^1\quad i=1,2,\ldots,N. \qquad (۲۳)$$

که، $M^{(1)}$ برابر است با:

$$M(\mathrm{x})=\prod_{j=1}^{N}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_i)M^{(1)}(\mathrm{x}_k)=\prod_{j=1(j\neq k)}^{N}(\mathrm{x}_k-\mathrm{x}_i). \qquad (۲۴)$$

برای مشتقات مرتبه بالاتر از ۱، تابع وزنی عبارت است از:

$$C_{ij}^m=m(C_{ij}^1C_{ii}^{m-1}-\frac{C_{ii}^{m-1}}{\mathrm{x}_i-\mathrm{x}_j})\ , \qquad (۲۵)$$
$$\text{for } i\neq j \text{ and } i,j=1,2,\ldots,N \quad m=2,3,\ldots,N-1.$$

که، C_{ii}^{m-1} برابر است با:

$$C_{ii}^{m-1}=-\sum_{j=1(j\neq i)}^{N}C_{ij}^m\quad i=1,2,\ldots,N. \qquad (۲۶)$$

با دقت در معادلات بالا مشخص می‌شود که روابط، به نوع توزیع نقاط در شبکه حل بستگی زیادی دارد. روش‌های مختلفی برای شبکه‌بندی مسئله وجود دارد که به‌طور مثال می‌توان از توزیع یکنواخت یا توزیع سینوسی استفاده نمود [۱۲].

۳-۱- گسسته سازی معادلات

با توجه به معادلات بالا، مشخص است که ضرایب وزنی تنها تابعی از نقاط شبکه می‌باشند. روش‌های متفاوتی برای به‌دست آوردن نقاط شبکه وجود دارد. ساده‌ترین روش، انتخاب نقاطی با فواصل یکسان می‌باشد. اما نتایج نشان می‌دهد که استفاده از نقاطی با فواصل غیریکسان، سبب سرعت و دقت در جواب می‌گردد. بنابراین، در این مقاله از نقاطی با فواصل غیریکسان استفاده می‌شود. همان‌طورکه در بالا گفته شد، مودهای کمانشی در جهت محیطی، از یک منحنی سینوسی پیروی کرده و این باعث شده تا معادلات در جهت محوری حل شوند. درنتیجه یک مختصات محوری بدون‌بعد $\varphi=x/R$ تعریف شده و نقاط شبکه، از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۷]:

$$\varphi_i=\frac{L}{R}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi(i-1)}{M-1}\right)}{2}\right) \qquad 1\le i\le M. \tag{۲۷}$$

معادلات بدست‌آمده از روش تقاضل مربعات عبارتند از:

(۲۸- الف)
$$\begin{aligned}&A_{11}\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}U_j-(A_{33}-\frac{2B_{33}}{R}+\frac{D_{33}}{R^2})n^2U_i\\&+(A_{12}+A_{33}-\frac{D_{33}}{R^2})n\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(1)}V_j\\&+\sum_{j=1}^{M}((A_{12}-\frac{B_{12}}{R})C_{ij}^{(1)}-\frac{B_{11}}{R}C_{ij}^{(4)})C_{ij}^{(2)}\\&-(-\frac{B_{12}}{R}-\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R})n^2C_{ij}^{(1)}W_j=\bar{N}_{\varphi}\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}U_j,\end{aligned}$$

(۲۸- ب)
$$\begin{aligned}&-(A_{12}+A_{33}-\frac{D_{33}}{R^2})n\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(1)}U_j\\&+(A_{33}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{D_{33}}{R^2})\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}V_j\\&-n^2A_{22}V_i+(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R^2})n\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}W_j\\&-(n(A_{22}-\frac{B_{22}}{R})-\frac{B_{22}}{R}n^3)W_i=\bar{N}_{\varphi}\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}V_j,\end{aligned}$$

(۲۸- ج)
$$\begin{aligned}&+\sum_{j=1}^{M}\left\{(\frac{B_{12}}{R}+\frac{2B_{33}}{R}+\frac{2D_{33}}{R^2})nC_{ij}^{(2)}\right\}V_j\\&+\left\{(A_{22}-\frac{B_{22}}{R})n+\frac{B_{22}}{R}n^3\right\}V_i\\&+\sum_{j=1}^{M}\left\{\begin{array}{l}(-\frac{2B_{12}}{R}+\frac{2D_{12}}{R^2})nC_{ij}^{(2)}\\+\frac{D_{11}}{R^2}C_{ij}^{(4)}-(\frac{2D_{12}}{R^2}+\frac{4D_{33}}{R^2})n^2C_{ij}^{(2)}\end{array}\right\}W_j\\&+\sum_{j=1}^{M}\left\{\begin{array}{l}A_{22}-\frac{2B_{22}}{R}+\frac{D_{22}}{R^4}+\\(-\frac{2B_{22}}{R}+\frac{2D_{22}}{R^2})n^2+\frac{D_{22}}{R^2}n^4\end{array}\right\}W_i=\bar{N}_{\varphi}\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}W_j.\end{aligned}$$

۳-۲- شرایط مرزی و اعمال آن در معادلات

در این تحقیق، به بررسی دو نوع شرط مرزی کاربردی تکیه‌گاه گیردار- گیردار وتکیه‌گاه ساده - ساده پرداخته شده که معادلات آن به‌ترتیب عبارتند از [۱۹]:

تکیه‌گاه گیردار $\quad u=v=w=w_{,x}=0. \quad$ (۲۹- الف)

تکیه‌گاه ساده $\quad u=v=w=w_{,xx}=0. \quad$ (۲۹- ب)

معادلات شرایط مرزی با استفاده از روش تفاضل مربعات به‌شکل زیر می‌باشد:

تکیه‌گاه گیردار

$$\begin{aligned}&U_1=U_N=V_1=V_N=W_1=W_2=W_{N-1}=W_N=0,\\&\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(1)}w_j=0.\end{aligned} \tag{۳۰- الف}$$

تکیه‌گاه ساده

$$\begin{aligned}&U_1=U_N=V_1=V_N=W_1=W_2=W_{N-1}=W_N=0,\\&\sum_{j=1}^{M}C_{ij}^{(2)}w_j=0.\end{aligned} \tag{۳۰- ب}$$

درنتیجه، معادلات شرایط مرزی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$[BB]\{d_B\}+[BD]\{d_I\}=0. \tag{۳۱}$$

و معادلات تعادل به‌شکل زیر استخراج می‌گردند [۱۷]:

$$\begin{aligned}&[DB]\{d_B\}+[DD]\{d_I\}=\\&\bar{N}_{\varphi}([DBG]\{d_B\}+[DDG]\{d_I\}).\end{aligned} \tag{۳۲}$$

که،

$$\{d_B\}=\{U_1=U_N=V_1=V_N=W_1=W_2=W_{N-1}=W_N\}^T, \tag{۳۳}$$

$$\{d_I\}=\{U_2,U_3,...,U_{N-1},V_2,V_3,...,V_{N-1},W_3,W_4,...,W_{N-2}\}^T.$$

معادلات شرایط مرزی و معادلات تعادل به‌شکل کلی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\underset{8\times 8}{\lfloor BB\rfloor} & \underset{8\times(3M-8)}{\lfloor BD\rfloor}\\ \underset{(3M-8)\times 8}{[DB]} & \underset{(3M-8)\times(3M-8)}{[DD]}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[d_B]\\ [d_I]\end{bmatrix}=\bar{N}_{\varphi}\begin{bmatrix}0 & 0\\ \underset{(3M-8)\times 8}{[DBG]} & \underset{(3M-8)\times(3M-8)}{[DDG]}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[d_B]\\ [d_I]\end{bmatrix}. \tag{۳۴}$$

برای حل معادله بالا، به‌عنوان یک معادله مقادیر ویژه، باید $\lfloor d_B\rfloor$ از معادلات حذف گردد. درنتیجه معادله نهایی به‌شکل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}&(-[DBG][BB]^{-1}[DB]+[DDG]^{-1})^{-1}\\&(-[DB][BB]^{-1}[DB]+[DD])\{d_I\}=\\&\bar{N}_{\varphi}[I]\{d_I\}=0.\end{aligned} \tag{۳۵}$$

با محاسبه معادلـه بـالا، مقـادیر ویـژه بـه‌دسـت مـی‌آینـد کـه کوچکترین آن مقدار، بار کمانش محوری می‌باشد.

۴- تحلیل المان محدود

در این تحقیق، جهت مشاهده رفتار کمانشی استوانه تقویت شده مشبک و صحه سنجی تحلیل صورت‌گرفته براساس روش تفاضل مربعات، از یک مدل المان محدود سه‌بعدی با استفاده از نرم‌افزار انسیس[1] نسخه ۱۱ استفاده شده است. در این مدل، مدل، ابتدا کل استوانه ایجاد شده است. سپس تقویت‌کننده-

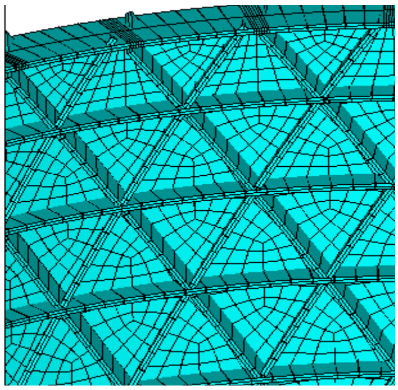
1-ANSYS

های عرضی به آن اضافه شده و درنهایت، جهت تشکیل شبکه منظم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، تقویت‌های مورب به استوانه موردنظر اضافه می‌گردد.

۴-۱- مدل‌سازی و شبکه‌بندی

پس از دریافت ورودی‌ها، ابتدا استوانه ساده با استفاده از ابعاد داده شده، توسط کاربر ساخته می‌شود. با توجه به اینکه استوانه مورد تحلیل، با یک شبکه منظم مثلثی متساوی‌الاضلاع، تقویت شده‌است، در مرحله بعد، تقویت‌کننده‌های مورب با زاویه ۶۰ درجه، به مدل اضافه می‌گردد. در مرحله سوم، ریب‌ها یا تقویت‌کننده‌های افقی، به مدل اضافه شده و مدل، نهایی می‌گردد (شکل **۵**). همان‌طورکه در بالا به آن اشاره شد، اندازه ریب‌ها (طول و عرض) و اندازه مثلث‌ها، توسط کاربر قابل تغییر است که با توجه به طراحی مورد نیاز، قابل تغییر می‌باشد.

جهت مدل‌کردن پوسته استوانه، از المان پوسته ۶۳[1] و برای مدل‌کردن تقویت‌کننده‌ها، از المان تیر ۱۸۸[2] استفاده شده است. جنس پوسته از آلیاژ آلومینیوم با مدول الاستیسیته ۷۲ گیگا پاسکال و نسبت پواسون ۰/۳ درنظر گرفته شده است. قابل‌ذکر است که جنس نیز، توسط کاربر می‌تواند در کد تغییر یابد.



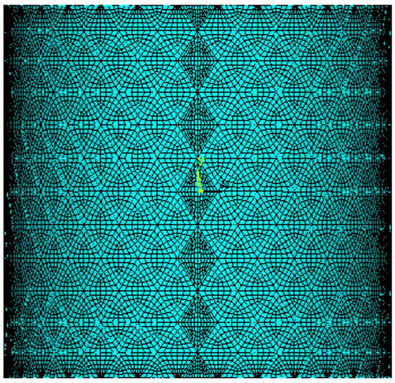
شکل (۵): المان‌بندی شبکه منظم.

جدول **۱** همگرایی المان‌بندی انجام‌شده بر روی یک استوانه با قطر و طول یک متر و تقویت‌کننده‌هایی با ارتفاع پنج سانتی‌متر و عرض پنج میلی‌متر را نشان می‌دهد. پس از مشخص‌شدن اندازه مناسب برای ابعاد المان‌ها، به‌طوری‌که این ابعاد در نتایج تأثیرگذار نباشند، این مقدار برای کلیه تحلیل‌ها، به‌عنوان مبنا قرار گرفته می‌شود.

1- Shell-63 Element
2 -Beam-188 Element

۴-۲- شرایط مرزی

مسئله مورد نظر، در دو حالت شرط مرزی تکیه‌گاه ساده- ساده و تکیه‌گاه گیردار-گیردار تحلیل شده است. قابل‌ذکر است شرایط مرزی به المان‌های بالا و پایین مدل، اعمال گردیده است.



شکل (۶): پوسته استوانه‌ای مشبک المان‌بندی‌شده.

برای حالت اول یعنی تکیه‌گاه ساده- ساده، جابه‌جایی المان‌ها پایینی و بالایی مدل در جهت‌های عرضی یعنی U و W و چرخش آنها در جهت y بسته شده است. در حالت دوم یعنی تکیه‌گاه گیردار- گیردار، تمامی جابه‌جایی‌ها و کلیه چرخش‌ها بسته شده است.

جدول (۱): بررسی تاثیر ابعاد المان‌ها بر روی همگرایی بار بحرانی.

بار بحرانی کمانش (تن)	اندازه المان
۳۷۱۳	۰/۰۴
۳۵۹۵	۰/۰۳
۳۵۶۱	۰/۰۲۵
۳۵۶۱	۰/۰۲
۳۵۵۰	۰/۰۱۷
۳۵۵۰	۰/۰۱۶
۳۵۵۰	۰/۰۱۵

۴- نتایج و تفسیر آنها

در این بخش، نتایج و بررسی‌ها بر روی بار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای مشبک $\bar{N}_x$ ارائه می‌گردد. در تمامی نمودارها، بار بحرانی برحسب تن و با استفاده از رابطه $N = 2\pi R \bar{N}_x / 10000$ به‌دست می‌آید. جهت بررسی جامع‌تر نتایج، پارامترهای مختلفی از سازه انتخاب و تأثیر آنها بر پایداری سازه تحلیل گردیده است. در بررسی تأثیر هر پارامتر

انتخابی بر روی بار کمانش محوری، سه روش مختلف بررسی شده که عبارتند از:

روش اول: تحلیل حاصل از المان محدود است که به تفصیل بیان شد. نتایج حاصل از این روش، با نام تحلیل عددی در نمودارها ارائه شده است.

روش دوم: تحلیل حاصل از روش تفاضل مربعات بر مبنای حل معادلات تعادل پوسته مشبک با استفاده از روش ارائه شده در مرجع [۱۸] می‌باشد. نتایج حاصل از این روش، با عنوان مرجع [۱۸]، در نمودارها مشخص است.

در این روش، ماتریس سفتی پوسته و تقویت‌کننده، با نسبت‌های حجمی زیر با هم جمع می‌شوند. به‌عبارت دیگر:

$$V_{sh} = \frac{V_{sh}}{V_{st} + V_{sh}}, \qquad V_{st} = \frac{V_{st}}{V_{st} + V_{sh}}. \tag{۳۶}$$

تأکید می‌شود که نتایج [۱۸]، طبق روند ارائه ده در منبع [۱۸] بوده و هیچ‌کدام از نتایج عیناً از مرجع [۱۸] آورده نشده است.

روش سوم: تحلیل ارائه شده در این مقاله می‌باشد که با نام تحلیل حاضر در نمودارها ارائه شده است که معادلات آن هم با روش تفاضل مربعات حل شده است.

روش دوم، دارای نقایصی می‌باشد. لذا در این مقاله، روش متفاوتی ارائه‌شده تا بتواند این کمبودها را رفع کند. در روش حاضر، ماتریس سفتی پوسته، با ضریب یک و ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها با نسبت حجمی تقویت‌کننده‌ها به کل، با یکدیگر جمع می‌شوند.

روش چهارم: نتایج به‌دست آمده از روش ارائه‌شده توسط اسناد ناسا [۲۱] می‌باشد، این روش، یک روش تخمینی است که به‌وسیله مرجع [۲۱] برای ضخامت معادل سازه‌های تقویت شده با شبکه مثلثی پیشنهاد شده است. در این روش، تقویت‌کننده‌ها با یک پوسته معادل تخمین زده می‌شوند و این ضخامت با ضخامت پوسته جمع شده و با استفاده از فرمول‌های کلاسیک، بار کمانش محوری پوسته معادل، به‌دست خواهد آمد. این روش، به‌عنوان یک روش ساده و کاربردی ارائه شده است. ضخامت پوسته ساده معادل، برابر است با:

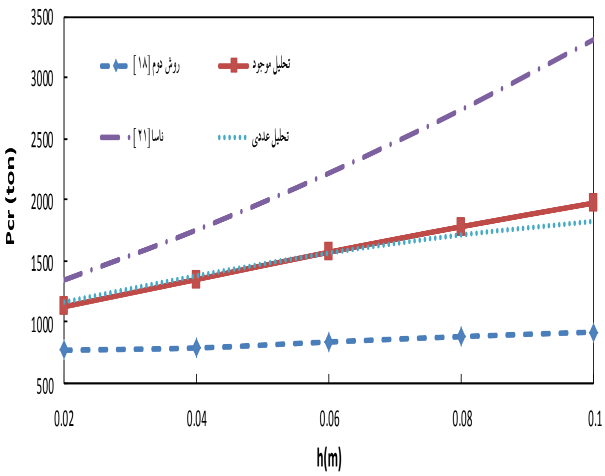
$$t_{eq} = t + \frac{(h \times b_s)}{a}. \tag{۳۷}$$

که ، t_{eq} ضخامت معادل، t ضخامت پوسته، h ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، b_s عرض تقویت‌کننده‌ها و a طول ضلع مثلث‌ها می‌باشد.

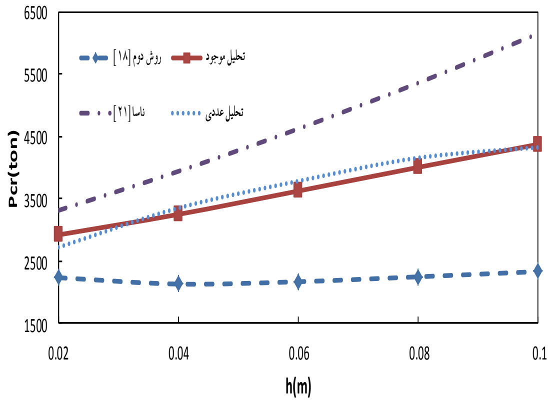
۵-۱- تاثیر ارتفاع تقویت کننده‌ها بر بار کمانش محوری

یکی از پارامترهای مهم در طراحی سازه‌های تقویت‌شده، ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بوده که در شکل‌های **۱۰-۷** بررسی شده است. در این بخش، استوانه‌هایی با ابعاد مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در حالت اول، قطر استوانه یک متر، طول یک متر و تقویت‌کننده‌ها با ضخامت ۵ میلی‌متر درنظر گرفته شده است که برای دو ضخامت پوسته ۶ و۱۰ میلی‌متر، نتایج ارائه شده است. طول ضلع مثلث‌های تقویتی نیز برابر ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد. بار بحرانی براساس تن و ارتفاع تقویت‌کننده‌ها برحسب متر می‌باشد. لازم‌به‌ذکر است که کلیه تحلیل‌ها برای شرایط مرزی ساده- ساده ارائه شده است.

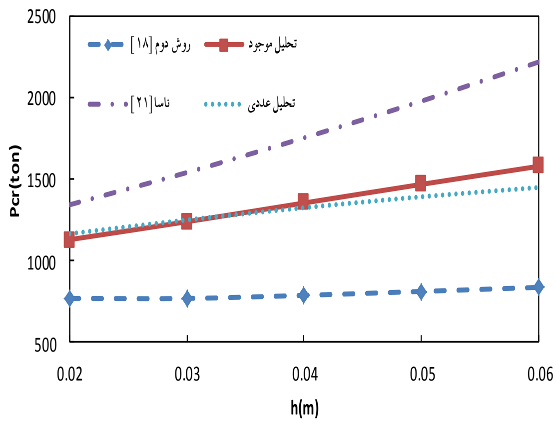
با دقت در نتایج شکل‌های **۱۰-۷**، دیده می‌شود با افزایش ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، میزان باربری سازه افزایش می‌یابد، که این افزایش به‌دلیل افزایش کمی ماتریس سفتی کل سازه می‌باشد. نمودار حاصل از روش چهارم (روش ناسا)، در بالای همه‌ی نمودارها می‌باشد، ولی علی‌رغم ساده بودن روش، دارای دقت خوبی می‌باشد که برای تخمین‌های اولیه، مناسب است.



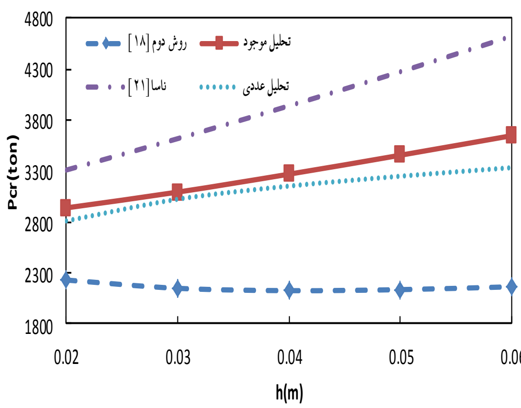
شکل (۷): تأثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی محوری (L=1 m , D=1 m , t=6mm).



شکل (۸): تأثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی محوری (L=1 m , D=1 m , t=10 mm).



شکل (۹): تأثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی محوری (L=0.5 m , D=0.5 m , t=6mm).



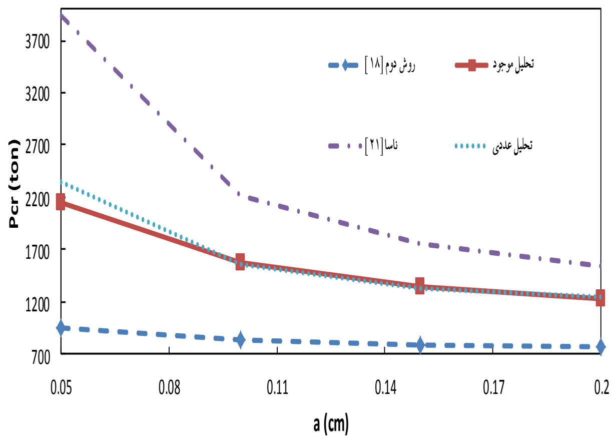
شکل (۱۰): تأثیر ارتفاع تقویت‌کننده‌ها بر بار بحرانی محوری (L=0.5 m , D=0.5 m , t=10 mm).

نکته‌ای که مخصوصاً در دو شکل **۸** و **۱۰** باید مورد تأمل قرار گیرد، نتایج حاصل از روش دوم است که علی‌رغم انتظار، در ابتدا با افزایش h، بار بحرانی کاهش می‌یابد. این موضوع به این دلیل است که ماتریس سفتی پوسته از نظر کمی، بزرگ‌تر از ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها می‌باشد. لذا هنگامی‌که حجم تقویت‌کننده‌ها کم باشد، به‌دلیل کوچک‌تر از یک بودن ضریب ماتریس سفتی پوسته و کوچک‌بودن ضریب ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها، ماتریس سفتی کل کاهش می‌یابد. درنتیجه بار بحرانی سازه کاهش می‌یابد. این رفتار، یکی از نقایص اصلی روش دوم بوده که اهمیت ارائه یک روشِ جدیدِ جایگزین را مشهود می‌سازد. بنابراین، روش سوم ارائه گردید. در روش سوم، ضریب ماتریس سفتی پوسته یک درنظر گرفته می‌شود و با ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها با ضریب حجم تقویت‌کننده‌ها به حجم کل، جمع می‌شود. با توجه به نتایج حاصل از المان محدود، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که روش سوم (روش حاضر)، روشی مناسب و کارآمدی می‌باشد.

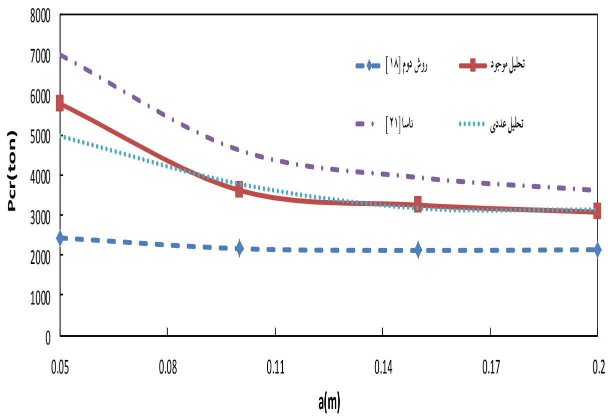
۵-۲- تأثیر طول ضلع مثلث‌های تقویت‌کننده a بر بار کمانش محوری

یکی از پارامترهایی که در بار بحرانی سازه، تأثیرگذار است، ابعاد مثلث‌های به‌کار رفته در شبکه تقویت‌کننده‌ها می‌باشد. شکل‌های **۱۲-۱۱** به این مورد پرداخته‌اند. استوانه موردنظر دارای قطر و طول یک متر و تقویت‌کننده‌هایی با ارتفاع ۶ سانتی‌متر و ضخامت ۵ میلی‌متر می‌باشد.

با دقت در شکل‌های **۱۲-۱۱** دیده می‌شود با افزایش طول ضلع مثلث‌های تقویت‌کننده، ظرفیت کمانشی سازه کاهش می‌یابد و این به‌خاطر کوچک‌شدن ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها است. با توجه به‌نتایج، می‌توان دید هرچه فاصله تقویت‌کننده‌ها زیاد می‌شود، یعنی ابعاد مثلث‌های به‌کاررفته بزرگ می‌شوند، بار بحرانی کاهش می‌یابد. کاملاً مشهود است که نتایج حاصل از روش حاضر دارای قرابت بسیار بالایی با نتایج حاصل از روش المان محدود دارد. در حالیکه دو روش دوم و چهارم دارای اختلاف چشم‌گیری با نتایج المان محدود هستند.



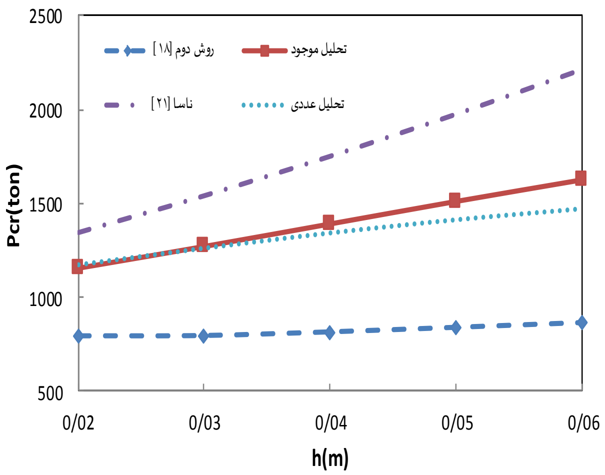
شکل (۱۱): تأثیر طول ضلع مثلث‌های تقویتی a بر بار بحرانی (t= 6 mm).



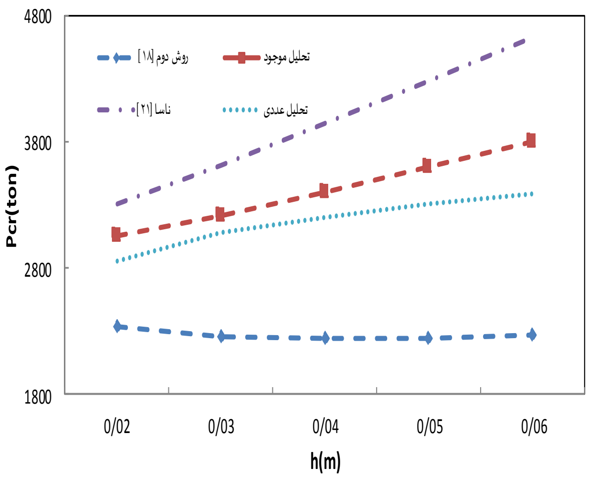
شکل (۱۲): تأثیر طول ضلع مثلث‌های تقویتی a در بار بحرانی (t= 10 mm).

۵-۳- تأثیر شرایط مرزی بر بار کمانش محوری

تحلیل‌های ارائه شده در قسمت‌های قبلی برای پوسته مشبک با شرایط مرزی ساده-ساده بود. برای بررسی توان‌مندی روش در تحلیل شرایط مرزی گیردار- گیردار، سعی شده از نمودارهایی شبیه نمودارهای بالا استفاده شود. در این قسمت، استوانه‌ای با قطر نیم متر، طول نیم متر و تقویت‌کننده‌ها با ضخامت ۵ میلی‌متر و طول ضلع مثلث‌های تقویتی برابر ۱۰ سانتی‌متر درنظر گرفته شده‌است که برای دو ضخامت پوسته ۶ و ۱۰ میلی‌متر نتایج ارائه خواهد شد. بار بحرانی براساس تن و ضخامت تقویت‌کننده‌ها برحسب متر می‌باشد.



شکل (۱۳): تأثیر ارتفاع تقویت‌کننده بر بار بحرانی برای شرایط مرزی گیردار- گیردار (t= 6 mm).



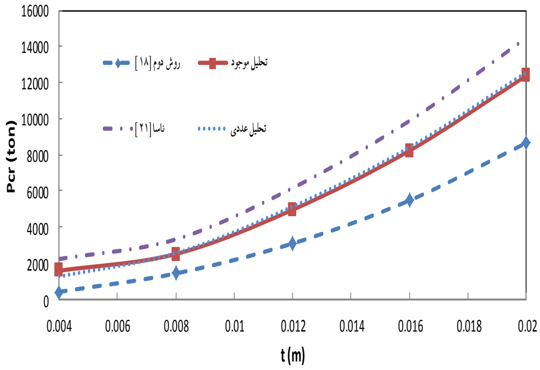
شکل (۱۴): تأثیر ارتفاع تقویت‌کننده بر بار بحرانی برای شرایط مرزی گیردار- گیردار (t= 10 mm).

درشکل‌های **۱۴-۱۳** دیده می‌شودکه با افزایش ارتفاع تقویت‌کننده‌ها، ظرفیت بارکمانشی سازه افزایش می‌یابد. نکته دیگری که باید به آن توجه کرد، این است که، درشرایط مرزی گیردار-گیردار، باتوجه به این‌که سفتی سازه بیشتر می‌شود، لذا باربری سازه افزایش می‌یابد. نمودارها نشان از دقت بالای نتایج روش حاضر دارد.

۵-۴- تاثیر ضخامت پوسته بر بار کمانش محوری

این بخش به بررسی اثر ضخامت پوسته بر بار کمانش پرداخته است. استوانه مورد تحلیل، دارای قطر و طول یک متر و

تقویت‌کننده‌هایی با ارتفاع ۶ سانتی‌متر، ضخامت ۵ میلی‌متر و طول ضلع مثلث‌های تقویتی، برابر ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد.

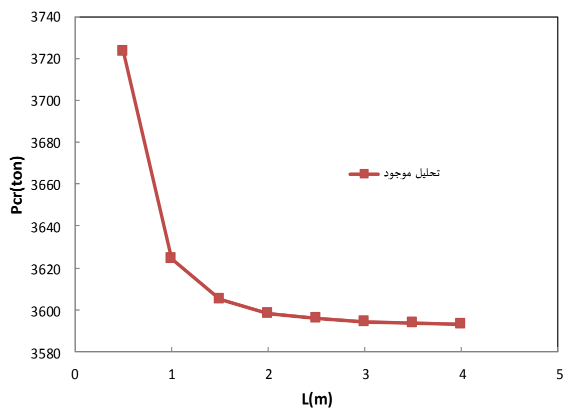


شکل (۱۵): تأثیر ضخامت پوسته بر بار بحرانی پوسته مشبک.

با دقت در نتایج، این نکته قابل مشاهده است که با افزایش ضخامت پوسته، بار کمانش افزایش می‌یابد که این موضوع به‌دلیل افزایش مقدار ماتریس سفتی پوسته بوده و درنتیجه، ظرفیت کمانشی سازه افزایش می‌یابد. اختلاف بسیار ناچیز بین نتایج حاضر و مدل المان محدود، حاکی از دقت بالای روش حاضر و وجود خطای چشم‌گیر در دو روش دوم و چهارم، به‌دلیل فرضیات آنها است.

۵-۵- بررسی اثر طول استوانه بر بار کمانش

یکی از موارد مهم، بررسی افزایش طول استوانه بر بار کمانش می‌باشد. در شکل **۱۶**، ابعاد استوانه مانند بخش (۵-۴) درنظر گرفته شده و فقط طول افزایش می‌یابد. طبیعی است که با افزایش طول استوانه، بار کمانش کاهش یابد.



شکل (۱۶): تأثیر طول استوانه مشبک بر بار بحرانی.

شکل **۱۶** نشان می‌دهد با افزایش طول سازه، یا افزایش نسبت طول به شعاع، باربری سازه کاهش می‌یابد.

۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، یک مدل ریاضی جدید برای ماتریس سفتی استوانه‌های همسانگرد مشبک پیشرفته در تحلیل کمانش خطی محوری آنها، ارائه شد. استوانه با استفاده از یک شبکه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع تقویت شده است. ابتدا با استفاده از تحلیل نیروی و ممان، ماتریس سفتی شبکه تقویتی به‌دست آمد. سپس با استفاده از یک مدل جدید نسبت حجمی، ماتریس‌های تقویتی شبکه و پوسته، با یکدیگر در آمیخته شد تا ماتریس سفتی کل سازه به‌دست آید. با استفاده اصل همیلتن و بر پایه تئوری پوسته فلوگه، معادلات تعادل سازه به‌دست آمده و در پایان برای شرایط مرزی مختلف و با استفاده از روش تفاضل مربعات DQM، بار کمانش محوری پوسته به‌دست آمده است. با استفاده از سه روش المان محدود، روش ارائه شده در مرجع [۱۸] و روش ساده ارائه‌شده در اسناد ناسا، روش پیشنهادی حاضر مورد صحه‌سنجی قرار گرفت. نتایج برای پارامترهای مختلف هندسی استوانه مشبک، نشان از دقت بالای مدل ریاضی حاضر دارد. اختلاف بین نتایج حاضر و نتایج المان محدود ناچیز است. بنابراین مهندسان و محققان می‌توانند مدل ریاضی حاضر را به‌عنوان یک روش دقیق، در تحلیل و طراحی کمانشی و حتی ارتعاشی استوانه‌های مشبک به‌کار برند.

۷- مراجع

1. Kalantari, S. and Fadaee, M. “Stability Analysis of Weight Optimum Waffle Cylindrical Shells -A New Approach”, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 14, pp. 177-174, 2014 (In Persian).
2. Hundington, B. “Isogrid Design Handbook”, NASA CR-124075, 1973.
3. Vasiliev, V. and Lopatin, A. “Theory of Lattice and Stiffened Composite Shells”, Proceedings of the First SSR-US Symposium on Mechanics of Composite Materials, Riga, Latvia USSR, ASME Publ. House, pp. 23–26 May, 1989.
4. Hou, A. and Gramoll, K. “Compressive Strength of Composite Latticed Structures” J. Reinforce Plastic Compos., Vol. 17, No.5 , pp. 462–483, 1998.
5. Morozov, E., Lopatin, A., and Nesterov, V. “Finite-Element Modelling and Buckling Analysis of Anisogrid Composite Lattice Cylindrical Shells”, Compos. Struct., Vol. 93, No. 17, pp. 308–323, 2011.

6. Mehrabadi, S.J., Karimi Samar, R., and Bohluli, M. "Mechanical Buckling Analysis of Open Circular Cylindrical Shells Reinforced with Single walled Carbon Nanotubes", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 9, No. 4, pp. 51-59, 2012 (In Persian).
7. Ren, M., Li, T., Huang, Q., and Wang, B. "Numerical Investigation into the Buckling Behavior of Advanced Grid Stiffened Composite Cylindrical Shell", J. Reinforce Plastic Compos., Vol. 33, No. 16, pp. 1508-1519, 2014.
8. Kidane, S. "Buckling Analysis of Grid Stiffened Composite Structures", Msc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Louisiana State University, 2002.
9. Bunakov, V. and Fedorov, L. "Application of Micropolar Theory of Elasticity to Lattice Structures", Mechanics of Solids, Proc of Russian Academy of Science, Vol. 4, No. 10, pp. 148–154, 1999 (in Russian).
10. Soong, T. "Bukling of Cylindrical Shells with Ecentric Spira- Type Stiffeners", AIAA Journal, Vol. 7, No. 1, pp. 65-72, 1996.
11. Slinchenko, D. and Verijenko, V. "Structural Analysis of Composite Lattice Shells of Revolution on the Basis of Smearing Stiffness", Compos. Struct., Vol. 54, No. 3, pp. 341–348, 2001.
12. Shu, C. "Differential Quadrature and Its Application in Engineering", First Edition, Springer-Verlag London, 2000.
13. Bert, C. and Malik, M. "Free Vibration Analysis of Tapered Rectangular Plates by Differential Quadrature Method: a Semi-Analytical Approach", J. Pressure Vessels Piping, Vol. 190, No. 1, pp. 41-63, 1996.
14. Loy, C., Lam, K., and Shu, C. "Analysis of Cylindrical Shell Using Generalized Differential Quadrature", Shock and Vibration, Vol. 4, No. 3, pp. 193-198, 1997.
15. Shu, C. and Du, H. "A Generalized Approach for Implementing General Boundary Conditions in the GDQ Free Vibration Analysis of Plates" Inter. J. Solids Struct., Vol. 34, No. 7, pp. 837-846, 1997.
16. Shu, C. and Du, H. "Free Vibration Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells by DQM", Composite Part B-Eng., Vol. 28, No. 3, pp. 267-274, 1997.
17. Mirfakhraei, P. and Redekop, D. "Buckling of Circular Cylindrical Shells by the Differential Quadrature Method", Inter. J. Pressure Vessels Piping, Vol. 75, No. 4, pp. 347-353, 1998.
18. Wodesenbet, E., Kidane, S., and Pang, S. "Optimization for Buckling Loads of Grid Stiffened Composite Panels", Compos. Struct., Vol. 60, No. 2, pp. 159–169, 2003.
19. Hosseini Hashemi, Sh., Bisadi, H., Ilkhani, M.R., and Fadaee, M. " Accuracy Analysis of Donnell & Sanders Theories for Free Vibration of Thick Functionally Graded Cylindrical Shell in Various Boundary Conditions"", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 9, No. 2, pp. 55-68, 2012 (In Persian).
20. Shu, C. "Generalized Differential–Integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscose Flows Including Parallel Computation", Phd thesis, University of Glasgow, 1999.
21. Knighton, D., "Delta Launch Vehicle Isogrid Structure Nastran Analysis", NASA Goddard Space Flight Center, 1970.