

تحلیل غیرخطی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد تابعی تحت بارگذاری مکانیکی به کمک روش رهایی پویا

محمداسماعیل گلمکانی^۱ و مهران مروج^۲

گروه مهندسی مکانیک

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۸/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱۱/۱۶)

چکیده

هدف اصلی از این تحقیق، تحلیل غیرخطی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد تابعی تحت بارگذاری مکانیکی به کمک روش رهایی پویا می‌باشد. خواص مکانیکی پوسته‌ی تابعی در جهت ضخامت و با استفاده از سه مدل توابع قانون توانی، نمایی و موری - تاناکا تعیین شده است. نسبت پواسون برای مدل‌های قانون توانی ساده و تابع‌نمایی ثابت در نظر گرفته شده است ولی در مدل موری - تاناکا تغییرات نسبت پواسون به صورت تابعی در راستای ضخامت تعیین شده است. معادلات غیرخطی با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه‌اول و فرضیه تغییرشکل‌های بزرگ فون کارمن و به فرم نموی ارائه گردیده‌اند. برای حل معادلات غیرخطی نموی از روش رهایی پویا و اختلاف محدود استفاده شده است. به منظور اعتبارسنجی روش حل و نتایج تحلیل به مقایسه پاسخ‌های روش حل حاضر با گزارش‌های موجود در مقالات در زمینه پوسته‌های استوانه‌ای همسانگرد و همچنین نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس پرداخته شده است. در انتها اثرات پارامترهای مختلفی همچون شرایط مرزی گوناگون، توان ماده تابعی، نسبت شعاع به ضخامت، نسبت طول به شعاع و تغییرات نسبت پواسون در راستای ضخامت برای کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: کمانش، روش رهایی پویا، مواد تابعی، تئوری برشی مرتبه‌اول

Nonlinear Buckling Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells under Mechanical Loads by Dynamic Relaxation Method

M.E. Golmakani and M. Moravej

Department of Mechanical Engineering

Mashhad Branch, Islamic Azad University

(Received: 4/November/2013; Accepted: 5/February/2014)

ABSTRACT

The main purpose of this study is to investigate nonlinear buckling analysis of Functionally Graded (FG) cylindrical shells under uniform axial compressive loads by dynamic relaxation (DR) method. The mechanical properties of shell vary continuously throughout the thickness direction according to the power-law, exponential function and the Mori-Tanaka distribution. The poisson's ratio of the FG cylindrical shell is constant for power-law and exponential function. But in the Mori-Tanaka distribution variations of poisson's ratio is determined as a function of the thickness direction. The incremental form of nonlinear formulations are based on first order shear deformation theory (FSDT) and large deflection von Karman equations. The DR method combined with the finite difference discretization technique is employed to solve the equilibrium equations. Some comparison study is carried out to compare the current solution with the results reported in the literature and the ones obtained by the Abaqus finite element software for the isotropic cylindrical shells. Finally, numerical results are presented for critical buckling load with various boundary conditions, grading indices, radius -to- thickness ratio, length -to- radius ratio and variation of poisson's ratio.

Keywords: Buckling, Dynamic Relaxation Method, Functionally Graded Material, First Order Shear Deformation Theory

۱-استادیار (نویسنده پاسخگو): m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

۲-دانشجوی کارشناسی ارشد: mehnan8911@yahoo.com

۱- مقدمه

پوسته‌ها یکی از پرکاربردترین سازه‌های مهندسی به شمار می‌آیند که در زمینه‌های مختلفی مانند هوافضا، خودروسازی و کشتی‌سازی کاربردهای فراوانی دارند. از مثال‌های کاربرد پوسته‌ها می‌توان به طراحی مخازن تحت فشار، قطعات موشک‌ها و بدنه زیر دریایی‌ها اشاره نمود. با توجه به دامنه کاربرد وسیع پوسته‌ها در صنایع مختلف، تحلیل رفتار این نوع سازه‌ها در شرایط بارگذاری مختلف از جمله بررسی پدیده پایداری و کمانش آنها با اهمیت می‌باشد. یکی از مباحث مهم در ارزیابی پایداری سازه‌های مختلف پدیده کمانش می‌باشد. در واقع واژه کمانش به عدم پایداری اطلاق می‌شود یا به عبارتی دیگر وقتی سازه از حالت تعادل پایدار به حالت تعادل ناپایدار تغییر وضعیت می‌دهد سازه دچار کمانش می‌شود. کمانش در واقع نوعی از رفتار یک سازه تحت بارگذاری اطلاق می‌شود که در آن با افزایش کوچک بار، افزایش نامتناسب جابه‌جایی در سازه اتفاق می‌افتد. در طراحی و محاسبات مهندسی میزان حداقل بار بحرانی، اهمیت به‌سزایی دارد. به‌علاوه در مسائلی که به‌واسطه این پدیده ایجاد می‌شوند، معادلات پاره‌ای توصیف می‌شوند که در اکثر حالت‌ها، حل بسته آنها سخت است. روش‌های تقریبی عددی به‌صورت گسترده‌ای برای حل این معادلات، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در بسیاری از شرایط کارکردی مختلف قطعات، شرایط ایجاب می‌کند تا قطعه علاوه بر استحکام مناسب دارای انعطاف خوبی هم باشد و یا قسمتی از یک قطعه علاوه بر استحکام بالا در یک سطح، مقاومت حرارتی بالایی در سطح دیگر داشته باشد. بدیهی است با وجود چنین شرایط متفاوت بارگذاری در سطح قطعه، چنانچه ترکیب مواد تشکیل‌دهنده قطعه دارای تغییر ناگهانی خصوصیات مواد باشد، باعث ایجاد تمرکز تنش می‌شود. بنابراین تغییر تدریجی خواص مواد در یک جسم ایده اصلی ابداع و ساخت مواد تابعی^۱ شد. ساختار ترکیب‌بندی ذرات در این مواد به‌گونه‌ای است که خواص مواد به‌صورت پیوسته و ملایم از یک نقطه به نقطه دیگر در ماده تغییر می‌کند. نوع رایج این مواد از ترکیب فلز و سرامیک ساخته می‌شود. ساختار یکنواخت در این مواد باعث شده است تا نسبت به مواد مرکب لایه‌ای دارای مزایای بیشتری باشند زیرا به‌دلیل این پیوستگی از تمرکز تنش بین لایه‌های ماده جلوگیری می‌شود. امروزه مواد تابعی به‌دلیل

ترکیب خواص مواد مختلف، کاربردهای زیادی در صنایع هوافضا، صنایع دفاعی و راکتورهای هسته‌ای یافته‌اند.

تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش پوسته‌ها، همواره به‌عنوان یکی از مهم‌ترین موضوعات در تحلیل سازه‌ها مورد توجه بوده است. تیموشنکو و گیر [۱] و سپس آل‌مروث و بروش [۲] مسئله پایداری انواع سازه‌های مهندسی شامل ستون‌ها، صفحات و پوسته‌ها را مورد بحث قرار داده‌اند. هاف و سونک [۳] با استفاده از معادلات دائل، کمانش پوسته‌های استوانه‌ای را تحت بار فشاری محوری بررسی نمودند. همچنین جهت مقایسه نتایج خود، مقادیر به‌دست‌آمده را با نتایج به‌دست‌آمده از تئوری پوسته‌های سندرز مقایسه و نشان دادند که نتایج هر دو تئوری یکسان می‌باشند. کمانش پوسته‌های کامپوزیتی تحت بار فشار جانبی توسط الکساندر [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. فریرا و باربوسا [۵] رفتار کمانش پوسته‌های کامپوزیتی به روش المان محدود را تحلیل نمودند. درویزه و همکارانش [۶] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی نسبتاً ضخیم را تحت بار حرارتی متقارن محوری بررسی نمودند همچنین مظفری و جعفری [۷] پارامترهای موثر بر کمانش پنل‌های استوانه‌ای را بررسی نمودند. شی رانگ و باترا [۸] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای سه لایه با هسته ساخته‌شده از مواد تابعی را تحت بار فشاری محوری تحلیل نمودند. شاه‌سیاه و اسلامی [۹] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی را بررسی نمودند. همچنین میزاوند و اسلامی [۱۰] آنالیز پایداری ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی ناقص را مورد بررسی قرار دادند. آنها روابط معادلات حاکم را براساس تئوری کلاسیک به‌دست آوردند و به روش گلرگین مسئله را حل نمودند. شریعات [۱۱] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی را که تحت بار ترکیبی فشاری محوری و فشاری جانبی بودند و ناگهانی گرم می‌شدند را با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌سوم و به روش المان محدود بررسی نمود. ابراهیمی و سپیانی [۱۲] ارتعاشات و کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد تابعی را تحت ترکیب بارهای استاتیکی و نیروی تناوبی محوری مورد مطالعه قرار دادند. هایوی و گیانگ [۱۳] کمانش و پس‌کمانش استوانه‌ای مواد تابعی را تحت بار فشاری محوری با روش انرژی ریتز بررسی نمودند. همچنین هایوی و همکارانش [۱۴] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از مواد تابعی را تحت بار خمشی خالص براساس تئوری دائل مورد مطالعه قرار دادند. خزائی‌نژاد و نجفی‌زاده [۱۵] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با خواص مواد تابعی مختلف را برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به روش

1- Functionally Graded Matrials (FGMs)

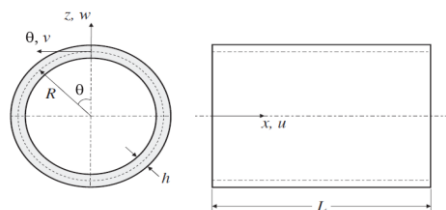
بر مبنای الگوریتم رهایی پویا و تکنیک اختلافات محدود مرکزی با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌نویسی فرترن حل گشته‌اند. گفتنی است که در این روش برخلاف روش تعادل همسایه، برای به‌دست آوردن بار بحرانی کمانش نیازی به خطی‌سازی معادلات نمی‌باشد. در مطالعه پارامتریک انجام‌شده اثراتی همچون شرایط مرزی گوناگون، مدل‌های مختلف اختلاط ماده تابعی، تاثیر توان ماده تابعی، نسبت شعاع به ضخامت و نسبت طول به شعاع و تغییرات ضریب پواسون در راستای ضخامت بر روی بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

در این قسمت به ارائه روابط حاکم بر کمانش پوسته استوانه‌ای از مواد تابعی پرداخته می‌گردد.

۲-۱- هندسه مسئله

هندسه مورد بررسی برای کمانش پوسته استوانه‌ای با شعاع R ، طول L و ضخامت h ، در مختصات استوانه‌ای (x, θ, z) ، در شکل ۱ دیده می‌شود.



شکل (۱): نمای کلی از یک پوسته استوانه‌ای از مواد تابعی [۱۵].

۲-۲- روابط حاکم بر مواد تابعی

در یک ماده تابعی خواص مواد از فلز به سرامیک به صورت تدریجی و پیوسته براساس توابع مشخصی تغییر می‌کند. در این تحقیق خواص مکانیکی مواد براساس سه مدل تابع قانون توانی ساده، تابع نمایی و موری-تاناکا محاسبه شده است، که روابط حاکم بر آن‌ها در ادامه آورده شده است.

۲-۲-۱- تابع قانون توانی ساده

با فرض تغییرات خواص مواد در جهت ضخامت، کسر حجمی یک ماده تابعی براساس تابع قانون توانی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵].

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k$$

تحلیلی بررسی نمودند. گفتنی است که در این تحقیق نسبت پواسون برای ماده تابعی ثابت فرض کرده‌اند. حسنی [۱۶] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تابعی با تقویت‌کننده تحت بار فشاری محوری براساس تئوری برشی مرتبه اول بررسی نمود.

همان‌طور که اشاره شد، به دلیل پیچیدگی حل معادلات غیرخطی کمانش، استفاده از روش‌های حل عددی مورد استقبال گسترده‌ای قرار گرفته است. از میان انواع روش‌های عددی موجود، روش رهایی پویا به دلیل سادگی و سرعت محاسبات، تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین برای تحلیل مسائل پیچیده مهندسی قرار گرفته است. لی و همکارانش [۱۸] رفتار پس‌کمانش سازه‌ها را با استفاده از روش رهایی پویا با میرایی جنبشی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین پس‌کمانش و تحلیل غیرخطی صفحات، پوسته‌ها و سازه‌های خاص با روش رهایی پویا توسط ژانگ و همکارانش [۱۹]، پاپادراکاکیس [۲۰] و رامش و کریشناامورسی [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته است. کدخدایان و همکارانش [۲۲] نیز به بررسی کمانش و چروکیدگی صفحات همسان‌گرد با استفاده از روش رهایی پویا پرداختند.

تحقیقات صورت‌گرفته در زمینه پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی نشان می‌دهد، تاکنون کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی تحت بار مکانیکی برای شرایط مرزی گوناگون به کمک روش رهایی پویا صورت نگرفته است. در این تحقیق تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی با تغییرات خواص در راستای ضخامت تحت بار فشاری محوری به کمک روش رهایی پویا و نرم‌افزار المان محدود آباکوس براساس مدل‌های اختلاط گوناگون انجام گرفته است. خواص مکانیکی مواد براساس سه مدل قانون توانی ساده^۱، تابع نمایی^۲ و موری-تاناکا^۳ به دست آمده است. نسبت پواسون برای مدل‌های قانون توانی ساده و تابع نمایی ثابت در نظر گرفته شده است ولی در مدل موری-تاناکا تغییرات نسبت پواسون به صورت تابعی در راستای ضخامت تعیین شده است. معادلات غیرخطی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول^۴ و فرضیه تغییرشکل‌های بزرگ فون کارمن^۵ و به فرم نموی^۶ استخراج شده است. سپس معادلات غیرخطی نموی حاکم به دست آمده، توسط کد نوشته شده

1 - Simple Power- Law

2 - Exponential Functions

3 - Mori - Tanaka

4 - First Order Shear Derformation Theory

5 - Von Karman

6 - Incremental

$$\vartheta = \frac{3B-2G}{2(3B+G)} \quad (۵)$$

۲-۳- میدان تغییر مکان

میدان جابه‌جایی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, z) &= u(x, \theta) + z\varphi_x(x, \theta) \\ V(x, \theta, z) &= v(x, \theta) + z\varphi_\theta(x, \theta) \\ W(x, \theta, z) &= w(x, \theta) \end{aligned} \quad (۶)$$

در اینجا u, v, w جابه‌جایی صفحه میانی پوسته به ترتیب در جهت x, θ و z و همچنین φ_x و φ_θ چرخش به ترتیب در راستای x و θ می‌باشند. روابط کرنش- جابه‌جایی براساس تئوری تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن و به شکل نموی به‌صورت رابطه (۷) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x} + z\frac{\partial\delta\varphi_x}{\partial x} \\ \delta\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R}\frac{\partial\delta v}{\partial\theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\delta w}{\partial\theta} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{z}{R}\frac{\partial\delta\varphi_\theta}{\partial\theta} \\ \delta\gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R}\frac{\partial\delta u}{\partial\theta} + \frac{\partial\delta v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta\delta w}{\partial\theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial\theta} + z\left(\frac{\partial\delta\varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial\delta\varphi_x}{\partial\theta}\right) \\ \delta\gamma_{xz} &= \delta\varphi_x(x, \theta) + \frac{\partial\delta w}{\partial x} \\ \delta\gamma_{\theta z} &= \delta\varphi_\theta(x, \theta) + \frac{1}{R}\frac{\partial\delta w}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (۷)$$

روابط تنش- کرنش نموی نیز براساس قانون هوک به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x &= \frac{E(Z)}{1-\vartheta^2} [\delta\varepsilon_{xx} + \vartheta\delta\varepsilon_{\theta\theta}] \\ \delta\sigma_\theta &= \frac{E(Z)}{1-\vartheta^2} [\delta\varepsilon_{\theta\theta} + \vartheta\delta\varepsilon_{xx}] \\ \delta\tau_{x\theta} &= \frac{E(Z)}{2(1+\vartheta)} [\delta\gamma_{x\theta}] \\ \delta\tau_{xz} &= \frac{E(Z)}{2(1+\vartheta)} [\delta\gamma_{xz}] \\ \delta\tau_{\theta z} &= \frac{E(Z)}{2(1+\vartheta)} [\delta\gamma_{\theta z}] \end{aligned} \quad (۸)$$

منتجه‌های نیرو، گشتاور و نیروی برشی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (\delta N_i, \delta M_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_i(1, z) dz \quad i = x, \theta, x\theta \\ \delta Q_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{iz} dz \quad i = x, \theta \end{aligned} \quad (۹)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۷) تا (۹) منتجه‌های نیرو و گشتاور بر اساس جابه‌جایی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta N_x &= A_{11} \left[\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x} \right] + A_{12} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\delta v}{\partial\theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\delta w}{\partial\theta} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial\theta}\right)^2 \right] + B_{11} \left[\frac{\partial\delta\varphi_x}{\partial x} \right] + B_{12} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\delta\varphi_\theta}{\partial\theta} \right] \\ \delta N_\theta &= A_{12} \left[\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x} \right] + A_{22} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\delta v}{\partial\theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\delta w}{\partial\theta} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial\theta}\right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial\delta\varphi_x}{\partial x} \right] + B_{22} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\delta\varphi_\theta}{\partial\theta} \right] \end{aligned}$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (۱)$$

در این فرمول‌بندی، V_m و V_c به ترتیب کسر حجمی فلز و سرامیک می‌باشند. h ضخامت پوسته و z راستای ضخامت را نشان می‌دهد. همچنین k توان کسر حجمی است که چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و فلز را در راستای ضخامت مشخص می‌کند. در صورتی که مقدار توان صفر باشد، خاصیت ماده تابعی معادل ماده سرامیک تشکیل‌دهنده آن خواهد بود و در صورتی که مقدار آن بی‌نهایت باشد، خاصیت ماده به سمت مؤلفه فلز میل می‌کند. با توجه به کسر حجمی، چگونگی پخش خواص مواد از جمله مدول الاستیسیته به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۵].

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad (۲)$$

E_m و E_c به ترتیب نشان‌دهنده مدول الاستیسیته فلز و سرامیک در لبه داخلی ($Z = -h/2$) و لبه خارجی ($Z = h/2$) پوسته تابعی هستند. همچنین ضریب پواسون در این مدل ماده تابعی ثابت فرض شده است.

۲-۲-۲- توابع نمایی

بسیاری از محققان تغییرات خواص مواد را براساس تابع نمایی مطابق زیر در نظر گرفته‌اند [۱۵].

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m \exp \left[A \left(\frac{2z+h}{2} \right) \right] \\ A &= \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \end{aligned} \quad (۳)$$

در این مدل نیز ضریب پواسون ماده تابعی ثابت در نظر گرفته شده است.

۲-۲-۳- مدل موری - تاناکا

تأثیر مدول حجمی B و مدول برشی G ، ماده تابعی براساس مدل پیوسته موری - تاناکا به شکل زیر بیان می‌شوند [۱۷].

$$\begin{aligned} \frac{B-B_c}{B_m-B_c} &= \frac{V_m}{1+(1-V_m)\frac{3(B_m-B_c)}{3B_c+4G_c}} \\ \frac{G-G_c}{G_m-G_c} &= \frac{V_m}{1+(1-V_m)\frac{G_m-G_c}{G_c+f_c}} \\ f_c &= \frac{G_c(9B_c+8G_c)}{6(B_c+2G_c)} \end{aligned} \quad (۴)$$

زیر نویس‌های m و c به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کنند. کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده از قانون اختلاط توانی ساده براساس رابطه (۱) بیان می‌شوند. براساس این روش، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به‌صورت رابطه (۵) در راستای ضخامت تغییر می‌کنند [۱۷].

$$E = \frac{9BG}{3B+G}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} (N_{X\theta} + \delta N_{X\theta}) + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \delta N_{X\theta} + \\ & \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} (N_\theta + \delta N_\theta) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \delta N_\theta - \frac{1}{R} \delta N_\theta = 0 \\ & \frac{\partial \delta M_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_{X\theta}}{\partial \theta} - \delta Q_X = 0 \\ & \frac{\partial \delta M_{X\theta}}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial \theta} - \delta Q_\theta = 0 \end{aligned}$$

(۱۳)

همین با جایگذاری روابط (۱۰) در روابط (۱۳) معادلات تعادل

براساس جابه‌جایی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial w}{\partial X} \right] + \\ & A_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\delta w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] + B_{11} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial X^2} \right] + \\ & B_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial X \partial \theta} \right] + \frac{1}{R} A_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial X \partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{R} B_{66} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial X \partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial \theta^2} \right] = 0 \\ & A_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial X \partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + B_{66} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial X \partial \theta} \right] + \\ & \frac{1}{R} A_{12} \left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial X \partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} \right] + \\ & \frac{1}{R} A_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R} B_{12} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial X \partial \theta} \right] + \frac{1}{R} B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right] = 0 \\ & F_{55} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \right] + \frac{1}{R} F_{44} \left[\frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \right] + \\ & \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \left[A_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] + A_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + B_{11} \left[\frac{\partial \varphi_X}{\partial X} \right] + B_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \right] + \\ & \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \left[A_{11} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + \right. \\ & A_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ & B_{11} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + B_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \left. \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \left[A_{11} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + A_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + B_{11} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + \right. \\ & \left. B_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \left[A_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + B_{66} \left[\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial X} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_X}{\partial \theta} \right] \right] + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \left[A_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + B_{66} \left[\frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial \theta} \right] \right] + \\ & \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \left[A_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] + B_{66} \left[\frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial \theta} \right] \right] + \\ & \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \left[A_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] + A_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta N_{X\theta} &= A_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + B_{66} \left[\frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta M_X &= \\ B_{11} & \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + B_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + D_{11} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + \\ D_{12} & \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta M_\theta &= \\ B_{12} & \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + D_{12} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + \\ D_{22} & \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta M_{X\theta} &= B_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + D_{66} \left[\frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\delta Q_\theta = F_{44} \left[\delta \varphi_\theta(X, \theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right]$$

$$\delta Q_X = F_{55} \left[\delta \varphi_X(X, \theta) + \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right]$$

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\theta^2} (1, z, z^2) dz$$

$$(A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\theta E(z)}{1-\theta^2} (1, z, z^2) dz$$

$$(A_{66}, B_{66}, D_{66}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\theta)} (1, z, z^2) dz$$

$$(F_{44}, F_{55}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{K_S E(z)}{2(1+\theta)} dz \quad (10)$$

در روابط بالا K_S ضریب اصلاح برشی می‌باشد که مقدار آن $\frac{5}{6}$ فرض شده است [۱۵].

۲-۴- معادلات تعادل

براساس اصل حداقل انرژی، انرژی پتانسیل کل از انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل حاصل از بارهای خارجی تشکیل می‌شود. طبق این اصل برای به دست آوردن معادلات تعادل رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\delta V = \delta U + \delta \Omega \quad (11)$$

که در آن، δU ، $\delta \Omega$ و δV به ترتیب تغییرات انرژی پتانسیل بارهای خارجی، انرژی کرنشی پوسته و انرژی پتانسیل کل می‌باشند. باتوجه به این که بار خارجی از نوع نیروی فشاری محوری می‌باشد، روابط آنها به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta \Omega &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi R} \frac{\partial u}{\partial X} R d\theta dx \\ \delta U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{XX} \delta \varepsilon_{XX} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \\ & \tau_{X\theta} \delta \gamma_{X\theta} + \tau_{Xz} \delta \gamma_{Xz} + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) R d\theta dx dz \quad (12) \end{aligned}$$

با جایگذاری روابط (۷) و (۹) در رابطه (۱۲) و جایگذاری آنها در رابطه (۱۱) و اعمال قوانین دیورژانس، معادلات تعادل به شکل زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta N_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta N_{X\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \delta N_{X\theta}}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta N_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \delta Q_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} (N_X + \delta N_X) &+ \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \delta N_X + \end{aligned}$$

۳- روش عددی

روش رهایی پویا، فرآیند تکراری حل دستگاه معادلات همزمان می‌باشد. این روش از قانون دوم ریچاردسون به دست می‌آید. بار خارجی در تکرارهای همگرایی ثابت در نظر گرفته می‌شود. در تحلیل‌های نموی، یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌گردد و در هنگام اجرای تکرارهای رهایی پویا، مقدار بار ثابت نگه داشته می‌شود. پس از همگرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌گردد و فرآیند مزبور تا کامل شدن تمام بار خارجی تکرار می‌شود. به عبارت دیگر، رابطه‌سازی روش رهایی پویا با فرض ثابت بودن بار خارجی انجام می‌پذیرد و در تکرارهای رهایی پویا، بار خارجی سازه تغییر نمی‌کند. دستگاه معادلات ایستایی در روش رهایی پویا به فضای دینامیکی ساختگی منتقل می‌شود. رابطه‌سازی این فرآیند، به شیوه‌های گوناگون قابل انجام خواهد بود. از آن میان، می‌توان به تفاوت‌های محدود و اجزای محدود اشاره کرد. استفاده از شیوه تفاوت‌های محدود یکی از متداول‌ترین و مؤثرترین شیوه‌ها می‌باشد. این کار با افزودن نیروهای جرمی و میرایی ساختگی به رابطه‌ی ایستایی سازه، همانند زیر انجام می‌پذیرد [۱۷].

$$[M]^n \{\dot{X}\}^n + [C]^n \{\dot{X}\}^n + \{F\}^n = \{P\}^n \quad (۱۶)$$

در این رابطه، $[M]^n$ ، $[C]^n$ ، $\{\dot{X}\}^n$ و $\{\ddot{X}\}^n$ به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی و بردارهای شتاب و سرعت ساختگی در تکرار nام می‌باشند. همچنین، $\{F\}^n$ و $\{P\}^n$ به ترتیب، بردارهای بار خارجی و نیروی داخلی سازه را در گام nام مشخص می‌کنند. با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی، بردارهای سرعت و شتاب می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند.

$$\{\ddot{X}\}^n = \frac{\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} - \{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau} \quad (۱۷)$$

$$\{\dot{X}\}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\{X\}^n - \{X\}^{n-1}}{\tau} \quad (۱۸)$$

$$\{\dot{X}\}^n = \frac{\{X\}^{n-\frac{1}{2}} + \{X\}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (۱۹)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۱۷) و (۱۹) در رابطه (۱۶) یک معادله تکرار برای سرعت در $(n + 1/2)$ امین گام به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{([M]/\tau - [C]/2) \{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} + \{P\} - \{F\}}{([M]/\tau + [C]/2)}$$

$$\{X\}^{n+1} = \{X\}^n - \tau \{\dot{X}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (۲۰)$$

در معادلات صریح تکراری (۲۰) جرم ساختگی می‌بایست به صورت یک ماتریس قطری به دست آید. همچنین ماتریس میرایی وابسته به ماتریس جرم خواهد بود و به شکل زیر می‌باشد:

$$[C] = c[M] \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \Big] + B_{12} \left[\frac{\partial \varphi_X}{\partial X} \right] + B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] + \\ & \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \left[A_{12} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + \right. \\ & A_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ & B_{12} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left[A_{12} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + A_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + B_{12} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + \right. \\ & \left. B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left[A_{12} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + \right. \right. \\ & A_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ & \left. B_{12} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \right] - \\ & \frac{1}{R} \left[A_{12} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] + \right. \\ & A_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ & \left. B_{12} \left[\frac{\partial \delta \varphi_X}{\partial X} \right] + B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \delta \varphi_\theta}{\partial \theta} \right] \right] = 0 \\ & B_{11} \left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial w}{\partial X} \right] + \\ & B_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] + D_{11} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial X^2} \right] + \\ & D_{12} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial X \partial \theta} \right] + \frac{1}{R} B_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial X \partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial X} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \right] + \\ & \frac{1}{R} D_{66} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial \theta^2} \right] - F_{55} \left[\delta \varphi_X + \frac{\partial \delta w}{\partial X} \right] = 0 \\ & B_{66} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial X \partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} \right] + D_{66} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial X \partial \theta} \right] + \\ & \frac{1}{R} B_{12} \left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial X \partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial X} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \delta w}{\partial X \partial \theta} \frac{\partial w}{\partial X} \right] + \frac{1}{R} B_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R} D_{12} \left[\frac{\partial^2 \delta \varphi_X}{\partial X \partial \theta} \right] + \\ & \left. \frac{1}{R} D_{22} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \delta \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right] - F_{44} \left[\delta \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (۱۴) \end{aligned}$$

۲-۵- شرایط مرزی

در این تحقیق شرایط مرزی مختلفی مورد استفاده در $X = 0, L$ عبارتند از:

تکیه‌گاه گیردار:

$$N_X = -\frac{q}{2\pi R} \quad v = w = \varphi_X = \varphi_\theta = 0 \quad (۱۵-۱)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$N_X = -\frac{q}{2\pi R} \quad v = w = \varphi_\theta = M_X = 0 \quad (۱۵-۲)$$

حال با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۹) به جای مشتقات اول و دوم زمانی در رابطه (۲۶)، پنج معادله‌ی سرعت به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta N_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta N_{X\theta}}{\partial \theta} \right)_i^n + \frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n} \dot{u}_i^{n-1/2} \\ \dot{v}_i^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta N_{X\theta}}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta N_\theta}{\partial \theta} \right)_i^n + \frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n} \dot{v}_i^{n-1/2} \\ \dot{w}_i^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta Q_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta W}{\partial X^2} (N_X + \delta N_X) + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \delta N_X + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \theta} (N_{X\theta} + \delta N_{X\theta}) + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \theta} \delta N_{X\theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} (N_\theta + \delta N_\theta) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \delta N_\theta - \frac{1}{R} \delta N_\theta \right)_i^n + \frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n} \dot{w}_i^{n-1/2} \\ \dot{\phi}_{X_i}^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta M_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_{X\theta}}{\partial \theta} - \delta Q_X \right)_i^n + \frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n} \phi_{X_i}^{n-1/2} \\ \dot{\phi}_{\theta_i}^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta M_{X\theta}}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial \theta} - \delta Q_\theta \right)_i^n + \frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n} \phi_{\theta_i}^{n-1/2} \end{aligned} \quad (27)$$

جابه‌جایی‌ها در پایان هر گام زمانی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

$$X^{n+1} = X^n + \tau^{n+1} \dot{X}^{n+1/2} \quad X = u, v, w, \phi_X, \phi_\theta \quad (28)$$

لازم به ذکر است برای تبدیل مشتقات مکانی موجود در روابط حاکم از روش تفاضل محدود مرکزی استفاده شده است. برای نمونه تبدیل سه نوع از مشتقات مرتبه اول و دوم به روش تفاضل محدود مرکزی از مرتبه پایین در روابط (۲۹) آورده شده است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{w(I+1, J) - w(I-1, J)}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{w(I-1, J) - 2w(I, J) + w(I+1, J)}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} &= \frac{w(I+1, J+1) + w(I-1, J-1) - w(I+1, J-1) - w(I-1, J+1)}{4\Delta x \Delta \theta} \end{aligned} \quad (29)$$

الگوریتم مورد نظر برای حل به ترتیب زیر می‌باشد.

- ۱- مقدار اولیه تمام متغیرها را صفر داده و بار q اعمال گردد.
- ۲- تعیین مقادیر ماتریس‌های جرم و میرایی M و C.
- ۳- محاسبه سرعت‌ها از روابط (۲۷).
- ۴- تعیین جابجایی‌ها و دوران‌ها از رابطه (۲۸).
- ۵- اعمال شرایط مرزی.
- ۶- محاسبه کرنش‌ها و منتجه‌های تنش و گشتاور.
- ۷- بررسی همگرایی محاسبات، برای مثال، سرعت‌ها کمتر از 10^{-6} باشند و

که در رابطه بالا، c ضریب میرایی است. با جایگذاری رابطه (۲۱) در رابطه (۲۰) معادله به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \{X\}^{n+1/2} &= \frac{2-\tau^n c^n}{2+\tau^n c^n} \{X\}^{n+1/2} + \frac{2\tau^n}{2+\tau^n c^n} \{r_i\}^n \\ \{r\}^n &= \{P\}^n - \{F\}^n \end{aligned} \quad (22)$$

در رابطه‌های کنونی، τ_i^n و m_{ii}^n به ترتیب، گام زمانی در مرحله‌ی n ام، نیروی باقی‌مانده درجه آزادی نام و درایه‌ی قطری نام از ماتریس جرم می‌باشند. در رابطه بالا ماتریس جرم، ضریب میرایی و گام زمانی مجهول می‌باشند. معمول‌ترین راه کار برای تعیین درایه‌های قطری جرم، استفاده از تئوری گرشگورین است. این تئوری، مقدارهای جرم را برای تضمین پایداری عددی روش رهایی پویا به صورت زیر ارائه می‌دهد [۱۷]:

$$m_{ii} \geq 0.25(\tau^n)^2 \sum_{j=1}^N |K_{ij}| \quad (23)$$

که، در رابطه بالا تعداد درجه‌های آزادی سازه را با N نشان می‌دهند. K_{ij} مؤلفه‌ی K می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{\partial P}{\partial X} \quad X = u, v, w, \phi_X, \phi_\theta \quad (24)$$

که، P طرف چپ معادلات تعادل (۱۳) است. براساس تئوری دینامیک سازه‌ها، اگر میرایی سازه بحرانی باشد، سرعت همگرایی به پاسخ پایدار بیشینه می‌شود. بنابراین برای تخمین میرایی بحرانی، اصل ژانگ به کار می‌رود [۱۷].

$$c^n = 2 \frac{\{((X)^n)^T (F(X)^n)\}^{\frac{1}{2}}}{\{((X)^n)^T [M] (X)^n\}} \quad (25)$$

در این رابطه $\{X\}^n$ بردار تغییر مکان در گام n ام می‌باشد. در بسیاری از راهبردهای رهایی پویا، گام زمانی ثابت و برابر ۱ یا ۱/۱ فرض می‌شود. روش رهایی پویا یک روش قوی برای حل مسائل مقدار اولیه و از درجه غیرخطی بالا می‌باشد. این در حالی است که معادلات تعادل (۱۳) بیانگر مساله‌ای با مقدار مرزی مشخص می‌باشند. لذا به منظور به کارگیری الگوریتم روش رهایی پویا، این معادلات باید به فرمت مسائلی با مقدار اولیه مشخص درآیند. برای تبدیل فرمت معادلات، باید ترم‌های اینرسی و میرایی به صورت زیر به سمت راست معادلات تعادل اضافه شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta N_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta N_{X\theta}}{\partial \theta} &= m_u \frac{d^2 u}{dt^2} + c_u \frac{du}{dt} \\ \frac{\partial \delta N_{X\theta}}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta N_\theta}{\partial \theta} &= m_v \frac{d^2 v}{dt^2} + c_v \frac{dv}{dt} \\ \frac{\partial \delta Q_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta W}{\partial X^2} (N_X + \delta N_X) + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \delta N_X + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \theta} (N_{X\theta} + \delta N_{X\theta}) + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \theta} \delta N_{X\theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} (N_\theta + \delta N_\theta) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \delta N_\theta - \frac{1}{R} \delta N_\theta &= m_w \frac{d^2 w}{dt^2} + c_w \frac{dw}{dt} \\ \frac{\partial \delta M_X}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_{X\theta}}{\partial \theta} - \delta Q_X &= m_{\phi_X} \frac{d^2 \phi_X}{dt^2} + c_{\phi_X} \frac{d\phi_X}{dt} \\ \frac{\partial \delta M_{X\theta}}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial \theta} - \delta Q_\theta &= m_{\phi_\theta} \frac{d^2 \phi_\theta}{dt^2} + c_{\phi_\theta} \frac{d\phi_\theta}{dt} \end{aligned} \quad (26)$$

شعاع به ترتیب $L = 387.35 \times 10^{-3}m$ و $R = 60.643 \times 10^{-3}m$ می‌باشد. در این تحقیق، قسمت فلز از جنس آلومینیوم و قسمت سرامیک از جنس آلومینیا به ترتیب با مدول الاستیسیته $E_m = 70GPa$ و $E_c = 380GPa$ در نظر گرفته شده است. همچنین ضریب پواسون برای دو مدل تابع قانون توانی ساده و تابع نمایی به صورت ثابت $\theta = 0.3$ فرض شده است. ولی در مدل موری - تاناکا ضریب پواسون در راستای ضخامت با توجه به رابطه (۵) تغییر می‌کند، در این مدل ضریب پواسون قسمت فلز و سرامیک به ترتیب $\theta_m = 0.3$ و $\theta_c = 0.22$ می‌باشند. همچنین ضخامت پوسته برابر با $h = 0.001m$ می‌باشد. با توجه به دقت نتایج به دست آمده از جدول‌های ۱ و ۲ اطمینان از صحت نتایج برای پوسته استوانه‌ای همسانگرد، حال نتایج به دست آمده برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی با شرایط مرزی مختلف ارائه می‌شود. نتایج به دست آمده از این روش با نتایج حل اجزای محدود محاسبه شده در نرم‌افزار آباکوس آورده شده است.

۸- اگر معیار همگرایی برقرار شد نتایج را چاپ کن، در غیر این صورت به مرحله دو برگرد و محاسبات را دوباره انجام بده.

۴- بحث و نتایج

به منظور اعتبار بخشیدن به روش و نتایج حاضر، به مقایسه پاسخ‌ها برای کمانش پوسته استوانه‌ای همسانگرد پرداخته شده است. به همین منظور مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج خزائی‌نژاد و نجفی‌زاده [۱۵] و نتایج به دست آمده از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس (حل اجزای محدود) برای پوسته‌های استوانه‌ای همسان‌گرد با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در جدول ۱ آورده شده است. همچنین درصد اختلاف بین پژوهش حاضر با مرجع [۱۵] بیان شده است. در مثالی دیگر نتایج به دست آمده با نتایج حسنی [۱۶] برای پوسته‌های استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در جدول ۲ آورده شده است. در مرجع [۱۶] مدول الاستیسیته برابر با $E = 151GPa$ و نسبت پواسون $\theta = 0.3$ در نظر گرفته شده است. در این مرجع طول و

جدول (۱): مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از

تحقیق حاضر با حل اجزای محدود و مرجع [۱۵].

نسبت طول به شعاع												نسبت شعاع به ضخامت	جنس ماده
۵				۱				۰.۵					
٪	مرجع [۱۴]	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	٪	مرجع [۱۴]	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	٪	مرجع [۱۴]	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
۲/۸۳	۰/۲۴۷	۰/۲۳۹	۰/۲۴۰	۳/۳۲	۰/۲۷۱	۰/۲۵۰	۰/۲۸۰	۲/۰۴	۰/۲۹۴	۰/۲۹۲	۰/۳۰۰	۵	آلومینیوم
۱/۱۷	۰/۲۵۶	۰/۲۵۸	۰/۲۵۳	۰	۰/۲۵۸	۰/۲۵۶	۰/۲۵۸	۰	۰/۲۵۸	۰/۲۵۸	۰/۲۵۸	۱۰	
۰	۰/۲۶۱	۰/۲۵۱	۰/۲۶۱	۰/۳۷	۰/۲۷۰	۰/۲۷۰	۰/۲۷۱	۲/۳۸	۰/۲۹۳	۰/۲۸۶	۰/۳۰۰	۲۰	
۱/۱۴	۰/۲۶۳	۰/۲۶۰	۰/۲۶۰	۰/۷۵	۰/۲۶۴	۰/۲۶۵	۰/۲۶۲	۳/۱۱	۰/۲۸۹	۰/۲۹۵	۰/۲۸۰	۳۰	
۰	۰/۲۶۵	۰/۲۶۶	۰/۲۶۵	۰/۳۷	۰/۲۶۶	۰/۲۷۰	۰/۲۶۵	۰/۳۷	۰/۲۶۶	۰/۲۷۰	۰/۲۶۵	۱۰۰	
۰/۷۵	۰/۲۶۶	۰/۲۶۶	۰/۲۶۴	۰/۷۵	۰/۲۶۶	۰/۲۶۷	۰/۲۶۴	۰/۷۵	۰/۲۶۶	۰/۲۶۷	۰/۲۶۴	۳۰۰	
۰/۵۹	۱/۳۴۱	۱/۲۹۵	۱/۳۳۳	۰/۰۶	۱/۴۷۲	۱/۴۶۰	۱/۴۷۳	۰/۵	۱/۵۹۸	۱/۵۸۳	۱/۵۹۰	۵	آلومینیا
۰/۱۴	۱/۳۹۲	۱/۳۹۰	۱/۳۹۰	۱/۶۳	۱/۴۰۳	۱/۳۹۴	۱/۳۸۰	۰/۱۸۵	۱/۴۰۳	۱/۴۰۱	۱/۳۹۱	۱۰	
۰/۴۲	۱/۴۱۷	۱/۳۹۱	۱/۴۱۱	۰/۲۷	۱/۴۶۸	۱/۴۷۰	۱/۴۷۲	۰/۳۷	۱/۵۹۴	۱/۵۴۶	۱/۶۰۰	۲۰	
۰	۱/۴۲۶	۱/۴۱۷	۱/۴۲۶	۰/۳۴	۱/۴۳۵	۱/۴۵۵	۱/۴۴۰	۰/۳۱	۱/۵۶۶	۱/۶۱۱	۱/۵۷۱	۳۰	
۰/۷۶	۱/۴۳۹	۱/۴۴۵	۱/۴۲۸	۱/۰۳	۱/۴۴۳	۱/۴۷۰	۱/۴۲۸	۱/۰۳	۱/۴۴۳	۱/۴۷۰	۱/۴۲۸	۱۰۰	
۰/۹	۱/۴۴۳	۱/۴۲۴	۱/۴۳۰	۰/۹	۱/۴۴۳	۱/۴۵۵	۱/۴۳۰	۰/۹	۱/۴۴۳	۱/۴۵۸	۱/۴۳۰	۳۰۰	

جدول (۲): مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش (MN) برای

پوسته‌های استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی تکیه‌گاه

ساده از تحقیق حاضر با مرجع [۱۶].

٪	مرجع [۱۴]	پژوهش حاضر	ضخامت $h(\times 10^{-3}m)$
۰	۰/۰۸۳	۰/۰۸۳	۰/۳۰۵
۶/۹۷	۰/۱۲۹	۰/۱۲۰	۰/۳۸۱
۸/۱	۰/۱۸۵	۰/۲۰۰	۰/۴۵۷
۵.۵۵	۰/۲۵۲	۰/۲۶۶	۰/۵۳۳
۱/۲۱	۰/۳۲۹	۰/۳۳۳	۰/۶۱۰
۴/۰۷	۰/۴۱۷	۰/۴۰۰	۰/۶۸۶
۳/۶۹	۰/۵۱۴	۰/۵۳۳	۰/۷۶۲

لازم به ذکر است که برای مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس پوسته در فضای سه‌بعدی به صورت Shell /Extrusion فرض می‌گردد. به منظور مدل‌سازی صورت ماده تابعی، ده تا بیست لایه در راستای ضخامت تعریف می‌شود. به طوری که مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در راستای ضخامت به طور تدریجی از یک لایه به لایه دیگر تغییر می‌کند. بدیهی است که با افزایش تعداد لایه‌ها دقت در مدل‌سازی ماده تابعی افزایش می‌یابد. برای مش‌بندی پوسته نیز از المان S4R استفاده شده است.

مقادیر بار بحرانی کمانش برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع $\frac{L}{R}$ ، شعاع به ضخامت $\frac{R}{h}$ و توان‌های مختلف کسر حجمی ماده تابعی k از نوع تابع قانون توانی برای شرایط مرزی گوناگون در جدول‌های ۳-۵ آورده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده با افزایش توان کسر حجمی ماده تابعی باعث می‌شود که ماده تابعی به سمت فلز میل نموده و به دلیل آنکه سفتی فلز از سرامیک کمتر می‌باشد، مقدار بار بحرانی کمانش کاهش یابد. همان‌طور که مشاهده می‌شود درصد اختلاف بار بحرانی بین توان‌های مختلف کسر حجمی در شرایط مرزی گیردار برای نسبت‌های شعاع به ضخامت ۵ تا ۳۰ و نسبت‌های مختلف طول به شعاع، از شرایط مرزی ساده بیشتر می‌باشد. درحالی‌که برای نسبت‌های شعاع به ضخامت بالاتر از ۳۰ بین شرایط مرزی گیردار و ساده تفاوت چندانی وجود ندارد. البته هر چه مقدار طول به شعاع افزایش یابد، تأثیر توان کسر حجمی ماده تابعی کاهش می‌یابد. با توجه به جدول ۱ در صورتی که جنس پوسته از

سرامیک تشکیل شود $K = 0$ ، پوسته بیشترین مقدار بار بحرانی را دارا می‌باشد.

مقادیر بار بحرانی کمانش برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع و شعاع به ضخامت ماده تابعی از نوع توابع نمایی برای شرایط مرزی گوناگون در جدول ۶ آورده شده است. با توجه به جدول‌های ۳-۶، برای هر دو نوع مدل اختلاط، در شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده و نسبت‌های طول به شعاع ۰/۵ و ۱ با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۱۰ بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند ولی با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۱۰ تا ۲۰ بار بحرانی افزایش می‌یابد. درحالی‌که برای نسبت طول به شعاع ۵، با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۲۰ این میزان بار بحرانی افزایش می‌یابد. همچنین در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار و برای هر دو مدل اختلاط در نظر گرفته شده، در نسبت‌های طول به شعاع ۰/۵ و ۱ با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۲۰ میزان بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند. درحالی‌که برای نسبت طول به شعاع ۵، افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۱۰ میزان بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند ولی با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۱۰ تا ۲۰ میزان بار بحرانی افزایش می‌یابد.

باتوجه به نتایج ارائه شده، برای هر دو نوع مدل تابع قانون توانی ساده و تابع نمایی و در شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده و گیردار، برای نسبت مختلف شعاع به ضخامت از ۵ تا ۳۰، افزایش نسبت طول به شعاع باعث می‌شود میزان بار بحرانی کمانش کاهش پیدا کند. همچنین در نسبت‌های شعاع به ضخامت بالاتر از ۳۰، افزایش نسبت طول به شعاع تأثیر کمی بر روی بار بحرانی کمانش دارد. با مشاهده نتایج جدول‌های ۳-۶ برای مشخصات مختلف هندسی و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار، نتایج بار بحرانی کمانش ماده تابعی بر اساس تابع نمایی بین نتایج توان کسر حجمی $K = 1$ و $K = 2$ ماده تابعی مدل شده توسط قانون توانی ساده می‌باشد. همچنین مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی مدل شده توسط تابع نمایی بیشتر از مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی مدل شده با قانون توانی با توان‌های بزرگتر و یا مساوی از ۲ ($K \geq 2$) می‌باشد. همچنین بیشترین اختلاف بین نتایج به دست آمده از روش رهایی پویا و نتایج حاصل از روش اجزای محدود، هفت درصد می‌باشد.

جدول (۳): بار بحرانی کماتش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط تابع توانی

و نسبت طول به شعاع $\frac{L}{R} = 0.5$.

توان کسر حجمی										نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
۱۰		۵		۲		۱		حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر				
۰/۴۵۲	۰/۴۴۶	۰/۵۳۴	۰/۵۲۶	۰/۶۶۹	۰/۶۶۴	۰/۸۵۴	۰/۸۶۶	۵	ساده		
۰/۳۹۵	۰/۳۹۲	۰/۴۷۶	۰/۴۵۶	۰/۵۸۹	۰/۶۰۰	۰/۷۵۳	۰/۷۶۰	۱۰			
۰/۴۴۲	۰/۴۳۴	۰/۵۱۳	۰/۵۲۱	۰/۷۰۱	۰/۷۰۰	۰/۸۶۸	۰/۹۰۹	۲۰			
۰/۴۴۴	۰/۴۵۰	۰/۵۲۶	۰/۵۳۲	۰/۶۳۷	۰/۶۶۷	۰/۸۲۷	۰/۸۲۷	۳۰			
۰/۴۰۸	۰/۴۰۰	۰/۴۷۰	۰/۴۷۳	۰/۶۲۶	۰/۶۰۱	۰/۷۸۵	۰/۷۸۷	۱۰۰			
۰/۴۰۵	۰/۴۰۰	۰/۴۶۶	۰/۴۷۰	۰/۶۳۰	۰/۶۰۹	۰/۷۸۶	۰/۷۸۸	۳۰۰			
۰/۶۹۴	۰/۶۲۲	۰/۸۶۰	۰/۸۵۷	۱/۱۶۵	۱/۱۷۳	۱/۶۸۷	۱/۵۷۰	۵	گیردار		
۰/۵۳۲	۰/۵۳۳	۰/۸۵۷	۰/۸۵۴	۱/۱۵۶	۱/۱۵۹	۱/۵۳۳	۱/۵۳۲	۱۰			
۰/۶۷۳	۰/۶۷۳	۰/۷۸۴	۰/۷۸۳	۰/۹۷۰	۰/۹۶۴	۱/۳۱۹	۱/۳۱۷	۲۰			
۰/۵۸۶	۰/۵۸۰	۰/۶۶۵	۰/۶۷۳	۰/۸۳۵	۰/۸۳۷	۰/۹۸۰	۰/۹۷۷	۳۰			
۰/۴۱۱	۰/۴۱۵	۰/۴۷۲	۰/۴۷۶	۰/۶۱۲	۰/۶۱۵	۰/۷۸۹	۰/۷۹۰	۱۰۰			
۰/۴۰۸	۰/۴۱۰	۰/۴۶۹	۰/۴۷۲	۰/۶۱۶	۰/۶۱۸	۰/۷۹۲	۰/۷۹۳	۳۰۰			

جدول (۴): بار بحرانی کماتش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط تابع توانی

و نسبت طول به شعاع $\frac{L}{R} = 1$.

توان کسر حجمی										نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
۱۰		۵		۲		۱		حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر				
۰/۴۰۵	۰/۴۰۰	۰/۴۷۴	۰/۵۰۰	۰/۶۴۰	۰/۶۴۰	۰/۷۹۱	۰/۸۲۵	۵	ساده		
۰/۴۰۴	۰/۳۸۶	۰/۴۵۶	۰/۴۵۷	۰/۵۸۹	۰/۵۸۸	۰/۷۶۰	۰/۷۳۰	۱۰			
۰/۴۱۹	۰/۴۲۱	۰/۵۰۱	۰/۴۷۹	۰/۶۱۸	۰/۶۱۰	۰/۷۷۶	۰/۷۸۰	۲۰			
۰/۴۰۹	۰/۴۰۲	۰/۴۹۰	۰/۴۶۲	۰/۶۱۴	۰/۶۱۵	۰/۷۷۳	۰/۷۶۹	۳۰			
۰/۴۰۸	۰/۴۰۰	۰/۴۷۰	۰/۴۷۳	۰/۶۲۶	۰/۶۰۱	۰/۷۸۴	۰/۷۸۷	۱۰۰			
۰/۴۰۵	۰/۴۰۰	۰/۴۶۶	۰/۴۷۰	۰/۶۳۰	۰/۶۰۹	۰/۷۸۶	۰/۷۸۸	۳۰۰			
۰/۵۱۵	۰/۴۹۳	۰/۵۹۲	۰/۵۷۰	۰/۸۷۰	۰/۸۶۵	۱/۰۰۲	۰/۹۵۰	۵	گیردار		
۰/۴۷۶	۰/۴۷۴	۰/۵۹۰	۰/۵۶۹	۰/۷۰۳	۰/۷۰۰	۰/۸۲۳	۰/۸۲۷	۱۰			
۰/۴۳۷	۰/۴۳۲	۰/۵۱۰	۰/۵۰۸	۰/۶۲۷	۰/۶۲۵	۰/۷۸۸	۰/۷۸۳	۲۰			
۰/۴۲۹	۰/۴۲۹	۰/۵۰۵	۰/۵۰۰	۰/۶۳۰	۰/۶۲۸	۰/۷۹۲	۰/۷۸۳	۳۰			
۰/۴۱۱	۰/۴۱۵	۰/۴۷۲	۰/۴۷۶	۰/۶۱۲	۰/۶۱۲	۰/۷۸۹	۰/۷۹۰	۱۰۰			
۰/۴۰۸	۰/۴۱۰	۰/۴۶۹	۰/۴۷۲	۰/۶۱۶	۰/۶۱۶	۰/۷۹۲	۰/۷۹۳	۳۰۰			

جدول (۵): بار بحرانی کمناش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط تابع توانی

و نسبت طول به شعاع $\frac{L}{R} = 5$.

توان کسر حجمی										نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
۱۰		۵		۲		۱		حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر				
۰/۳۷۶	۰/۳۷۶	۰/۴۳۴	۰/۴۳۱	۰/۵۸۱	۰/۵۷۱	۰/۷۱۶	۰/۷۳۳			۵	ساده
۰/۳۷۸	۰/۳۸۶	۰/۴۶۳	۰/۴۵۴	۰/۵۸۷	۰/۵۹۰	۰/۷۳۵	۰/۷۸۱			۱۰	
۰/۴۰۰	۰/۳۹۰	۰/۴۹۰	۰/۴۵۵	۰/۶۳۰	۰/۶۱۱	۰/۷۷۶	۰/۷۷۷			۲۰	
۰/۴۱۲	۰/۳۸۵	۰/۴۷۶	۰/۴۶۲	۰/۶۰۵	۰/۵۹۶	۰/۷۷۱	۰/۷۷۴			۳۰	
۰/۴۰۸	۰/۴۰۰	۰/۴۷۰	۰/۴۷۳	۰/۶۲۶	۰/۶۰۱	۰/۷۸۱	۰/۷۸۷			۱۰۰	
۰/۴۰۵	۰/۴۰۰	۰/۴۶۶	۰/۴۷۰	۰/۶۳۰	۰/۶۰۹	۰/۷۹۰	۰/۷۸۸			۳۰۰	
۰/۳۸۳	۰/۳۸۲	۰/۴۷۱	۰/۴۶۹	۰/۶۱۸	۰/۶۱۲	۰/۷۶۰	۰/۷۵۰			۵	گیردار
۰/۳۸۰	۰/۳۸۱	۰/۴۷۰	۰/۴۶۷	۰/۵۹۳	۰/۵۹۴	۰/۷۴۷	۰/۷۴۹			۱۰	
۰/۴۰۳	۰/۴۰۰	۰/۴۹۲	۰/۴۸۰	۰/۶۳۵	۰/۶۳۹	۰/۸۴۴	۰/۸۴۲			۲۰	
۰/۴۲۱	۰/۴۱۵	۰/۴۸۰	۰/۴۷۲	۰/۶۱۴	۰/۶۱۲	۰/۷۸۲	۰/۷۸۳			۳۰	
۰/۴۱۱	۰/۴۱۵	۰/۴۷۱	۰/۴۷۶	۰/۶۱۲	۰/۶۱۵	۰/۷۸۶	۰/۷۸۹			۱۰۰	
۰/۴۰۸	۰/۴۱۰	۰/۴۶۹	۰/۴۷۲	۰/۶۱۶	۰/۶۱۸	۰/۷۹۰	۰/۷۹۳			۳۰۰	

جدول (۶): بار بحرانی کمناش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط تابع نمایی.

نسبت طول به شعاع										نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
۵		۱		۰/۵		حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر						
۰/۶۰۶	۰/۶۰۰	۰/۶۸۳	۰/۶۸۰	۰/۷۱۰	۰/۷۳۳					۵	ساده
۰/۶۲۹	۰/۶۲۵	۰/۶۲۹	۰/۶۲۵	۰/۶۲۹	۰/۶۲۸					۱۰	
۰/۶۴۰	۰/۶۴۰	۰/۶۵۲	۰/۶۵۱	۰/۷۴۲	۰/۷۳۴					۲۰	
۰/۶۴۴	۰/۶۴۶	۰/۶۵۳	۰/۶۵۲	۰/۶۸۹	۰/۶۸۲					۳۰	
۰/۶۴۸	۰/۶۴۲	۰/۶۴۸	۰/۶۴۲	۰/۶۴۸	۰/۶۴۲					۱۰۰	
۰/۶۵۰	۰/۶۵۴	۰/۶۵۲	۰/۶۵۴	۰/۶۵۲	۰/۶۵۴					۳۰۰	
۰/۶۶۷	۰/۶۷۵	۰/۸۹۴	۰/۸۹۵	۱/۲۷۲	۱/۲۷۲					۵	گیردار
۰/۶۳۲	۰/۶۳۴	۰/۷۳۳	۰/۷۲۸	۱/۲۶۳	۱/۲۶۹					۱۰	
۰/۶۳۵	۰/۶۳۶	۰/۶۸۱	۰/۶۷۳	۰/۹۹۸	۰/۹۹۰					۲۰	
۰/۶۳۹	۰/۶۴۲	۰/۶۶۶	۰/۶۶۴	۰/۸۸۲	۰/۸۸۴					۳۰	
۰/۶۵۲	۰/۶۴۷	۰/۶۶۱	۰/۶۶۶	۰/۶۶۰	۰/۶۶۶					۱۰۰	
۰/۶۶۸	۰/۶۷۲	۰/۶۷۱	۰/۶۷۵	۰/۶۷۱	۰/۶۷۵					۳۰۰	

مقادیر بار بحرانی کمانش برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع و شعاع به ضخامت ماده تابعی مدل موری - تاناکا برای شرایط مرزی گوناگون در جدول‌های ۹-۷ آورده شده است. با توجه به جدول ۷، برای نسبت طول به شعاع ۰/۵، مقدار بار بحرانی کمانش با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۱۰، کاهش می‌یابد درحالی‌که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۱۰ تا ۳۰ بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. همچنین در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۱۰ بار بحرانی افزایش می‌یابد اما با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۱۰ تا ۳۰ این مقدار کاهش پیدا می‌کند. همچنین افزایش شعاع به ضخامت از ۱۰۰ تا ۳۰۰ تأثیر چندانی بر روی بار بحرانی کمانش در شرایط مرزی گوناگون ندارد. با مشاهده نتایج ارائه‌شده در جدول ۸، در نسبت طول به شعاع ۱، میزان بار بحرانی کمانش در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۲۰، افزایش می‌یابد این درحالی است که در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار این میزان کاهش می‌یابد. همچنین مقدار بار بحرانی کمانش با افزایش شعاع به ضخامت از ۲۰ تا ۳۰۰ تغییر چندانی پیدا نمی‌کند. با توجه به جدول ۹، برای نسبت طول به شعاع ۵ و شرایط مرزی گوناگون با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۵ تا ۱۰ میزان بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد ولی با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از ۱۰ تا ۳۰ این میزان افزایش می‌یابد. همچنین افزایش شعاع به ضخامت ۱۰۰ تا ۳۰۰ در شرایط مرزی گوناگون تأثیر چندانی بر روی بار بحرانی کمانش ندارد. با توجه به نتایج جدول‌های ۹-۷ می‌توان نتیجه گرفت که در شرایط مرزی گوناگون، برای نسبت‌های شعاع به ضخامت ۵ تا ۳۰ با افزایش نسبت طول به شعاع مقدار بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. گفتنی است که در نسبت‌های شعاع به ضخامت بالاتر از ۳۰، افزایش نسبت طول به شعاع تأثیر کمی بر روی بار بحرانی کمانش دارد. همچنین بیشترین اختلاف بین نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های پویا و نتایج حاصل از روش اجزای محدود، کمتر از چهار درصد می‌باشد.

با مشاهده نتایج ارائه‌شده در جدول‌های ۹-۳ و با توجه به این‌که بر خلاف مدل موری - تاناکا نسبت پواسون در ماده تابعی براساس مدل اختلاط تابع توانی ثابت فرض شده است، می‌توان نتیجه گرفت در نسبت‌های طول به شعاع ۰/۵، ۱ و ۵ و برای شرایط مرزی گوناگون و توان‌های کسر حجمی ۱ و ۲، مقدار بار بحرانی کمانش در ماده تابعی مدل شده موری - تاناکا از ماده تابعی توابع قانون توانی کمتر می‌باشد. همچنین برای نسبت‌های طول به شعاع ۰/۵ و ۱ و برای شرایط مرزی گوناگون و توان‌های کسر حجمی ۵ و ۱۰، مقدار بار بحرانی کمانش در ماده تابعی مدل شده موری - تاناکا از ماده تابعی توابع قانون توانی بیشتر می‌باشد ولی در نسبت طول به شعاع ۵، برای نسبت شعاع به ضخامت ۵ تا ۲۰ و توان‌های کسر حجمی ۵ و ۱۰، مقدار بار بحرانی کمانش در ماده تابعی مدل شده موری - تاناکا از ماده تابعی توابع قانون توانی کمتر می‌باشد. این درحالی است که برای نسبت شعاع به ضخامت ۳۰ تا ۳۰۰، مقدار بار بحرانی کمانش در ماده تابعی مدل شده موری - تاناکا از ماده تابعی توابع قانون توانی بیشتر می‌باشد.

با مشاهده روند تغییرات مقادیر بار بحرانی کمانش در نتایج ارائه‌شده در جدول‌های ۹-۳، با افزایش نسبت طول به شعاع در پوسته‌های نازک مقادیر بار بحرانی در دو حالت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار به هم نزدیک می‌شوند به طوری‌که با مشاهده نتایج ارائه‌شده در نسبت طول به شعاع ۵ و با عبارتی در پوسته‌های طویل مقادیر بار بحرانی در دو حالت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار با هم اختلاف چندانی ندارند. با توجه نتایج به‌دست‌آمده برای شرایط مرزی گوناگون، میزان بار بحرانی کمانش با شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در مشخصات مختلف هندسی و توابع مواد تابعی در نظر گرفته‌شده، از شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بیشتر می‌باشد و نشان می‌دهد که استوانه در حالت تکیه‌گاه گیردار دارای مقاومت کمانش بیشتری می‌باشد.

جدول (۷): بار بحرانی کمانش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط موری - تاناکا

و نسبت طول به شعاع $\frac{L}{R} = 0.5$.

توان کسر حجمی										نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
۱۰		۵		۲		۱		حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر				
۰/۴۹۶	۰/۵۰۰	۰/۵۲۱	۰/۵۲۳	۰/۶۲۵	۰/۶۲۷	۰/۷۲۶	۰/۷۲۷	۵	ساده		
۰/۵۰۸	۰/۵۱۲	۰/۵۲۰	۰/۵۱۷	۰/۵۸۸	۰/۵۸۸	۰/۷۰۱	۰/۷۰۵	۱۰			
۰/۵۷۵	۰/۵۷۱	۰/۵۹۱	۰/۵۸۴	۰/۶۷۳	۰/۶۶۹	۰/۷۷۰	۰/۷۷۳	۲۰			
۰/۵۸۴	۰/۵۸۳	۰/۶۱۶	۰/۶۲۰	۰/۷۱۰	۰/۷۱۴	۰/۷۸۶	۰/۷۸۲	۳۰			
۰/۵۴۲	۰/۵۴۰	۰/۵۵۶	۰/۵۵۰	۰/۶۱۷	۰/۶۱۰	۰/۶۹۷	۰/۶۹۷	۱۰۰			
۰/۵۳۷	۰/۵۳۵	۰/۵۵۰	۰/۵۵۰	۰/۶۱۱	۰/۶۱۰	۰/۶۹۴	۰/۶۹۴	۳۰۰			
۰/۷۳۵	۰/۷۳۴	۰/۸۱۹	۰/۸۱۵	۱/۰۹۳	۱/۰۹۲	۱/۳۴۴	۱/۳۳۴	۵	گیردار		
۰/۹۴۲	۰/۹۴۴	۰/۹۷۳	۰/۹۶۷	۱/۱۳۷	۱/۱۴۲	۱/۵۳۹	۱/۵۴۵	۱۰			
۰/۷۹۹	۰/۸۰۰	۰/۸۱۸	۰/۸۲۱	۰/۹۲۶	۰/۹۲۳	۱/۰۴۴	۱/۰۴۳	۲۰			
۰/۷۰۸	۰/۷۱۴	۰/۷۱۸	۰/۷۱۰	۰/۸۳۴	۰/۸۳۸	۰/۹۵۱	۰/۹۴۷	۳۰			
۰/۵۷۳	۰/۵۷۰	۰/۵۸۷	۰/۵۸۷	۰/۶۴۸	۰/۶۴۰	۰/۷۳۵	۰/۷۳۰	۱۰۰			
۰/۵۸۳	۰/۵۷۸	۰/۵۷۱	۰/۵۷۱	۰/۶۳۴	۰/۶۳۰	۰/۷۲۰	۰/۷۱۰	۳۰۰			

جدول (۸): بار بحرانی کمانش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط موری - تاناکا

و نسبت طول به شعاع $\frac{L}{R} = 1$.

توان کسر حجمی										نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
۱۰		۵		۲		۱		حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر				
۰/۴۷۱	۰/۴۷۶	۰/۴۹۰	۰/۴۸۵	۰/۵۷۸	۰/۵۸۷	۰/۶۵۳	۰/۶۴۹	۵	ساده		
۰/۵۰۷	۰/۵۰۰	۰/۵۲۲	۰/۵۱۹	۰/۵۸۸	۰/۵۸۳	۰/۶۹۵	۰/۶۹۶	۱۰			
۰/۵۲۵	۰/۵۲۲	۰/۵۳۸	۰/۵۳۲	۰/۵۹۹	۰/۵۹۵	۰/۶۹۷	۰/۶۹۶	۲۰			
۰/۵۲۴	۰/۵۲۴	۰/۵۳۰	۰/۵۳۳	۰/۵۹۷	۰/۵۹۳	۰/۶۹۷	۰/۶۹۹	۳۰			
۰/۵۲۷	۰/۵۲۶	۰/۵۴۰	۰/۵۴۰	۰/۶۰۰	۰/۶۰۰	۰/۶۹۷	۰/۶۹۷	۱۰۰			
۰/۵۲۹	۰/۵۲۸	۰/۵۳۹	۰/۵۴۰	۰/۶۲۰	۰/۶۱۰	۰/۶۹۱	۰/۶۹۴	۳۰۰			
۰/۵۹۹	۰/۵۵۱	۰/۵۹۹	۰/۵۹۲	۰/۷۱۶	۰/۷۱۴	۰/۸۳۷	۰/۸۴۲	۵	گیردار		
۰/۵۴۷	۰/۵۴۵	۰/۵۸۱	۰/۵۸۶	۰/۶۵۴	۰/۶۵۱	۰/۷۷۲	۰/۷۶۹	۱۰			
۰/۵۲۶	۰/۵۲۴	۰/۵۳۹	۰/۵۳۸	۰/۶۰۰	۰/۶۰۰	۰/۶۸۶	۰/۶۹۲	۲۰			
۰/۵۲۵	۰/۵۲۲	۰/۵۳۲	۰/۵۳۹	۰/۵۹۸	۰/۶۰۰	۰/۷۰۹	۰/۷۰۶	۳۰			
۰/۵۳۰	۰/۵۲۸	۰/۵۴۲	۰/۵۴۰	۰/۶۰۳	۰/۶۰۹	۰/۷۱۰	۰/۷۰۸	۱۰۰			
۰/۵۳۲	۰/۵۳۰	۰/۵۴۸	۰/۵۴۵	۰/۶۰۱	۰/۶۰۵	۰/۶۸۷	۰/۶۸۹	۳۰۰			

جدول (۹): بار بحرانی کمانش (MN) برای پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی براساس مدل اختلاط موری - تاناکا

و نسبت طول به شعاع $\frac{L}{R} = 5$.

توان کسر حجمی									
۱۰		۵		۲		۱		نسبت شعاع به ضخامت	شرایط مرزی
حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر	حل اجزای محدود	پژوهش حاضر		
۰/۳۶۱	۰/۳۵۷	۰/۳۷۰	۰/۳۷۰	۰/۴۱۷	۰/۴۱۶	۰/۴۸۰	۰/۴۷۶	۵	ساده
۰/۳۳۰	۰/۳۲۶	۰/۳۳۷	۰/۳۳۲	۰/۳۷۷	۰/۳۸۴	۰/۴۳۲	۰/۴۳۴	۱۰	
۰/۳۹۸	۰/۴۰۰	۰/۴۱۲	۰/۴۱۴	۰/۴۶۹	۰/۴۶۱	۰/۵۴۲	۰/۵۴۵	۲۰	
۰/۴۶۷	۰/۴۷۰	۰/۴۹۱	۰/۴۹۰	۰/۵۵۲	۰/۵۵۲	۰/۶۲۳	۰/۶۱۵	۳۰	
۰/۴۹۱	۰/۴۹۰	۰/۵۰۷	۰/۵۰۵	۰/۵۶۵	۰/۵۷۰	۰/۶۶۹	۰/۶۶۶	۱۰۰	
۰/۵۲۲	۰/۵۲۰	۰/۵۳۳	۰/۵۲۹	۰/۵۸۹	۰/۵۸۸	۰/۶۸۱	۰/۶۸۵	۳۰۰	گیردار
۰/۳۶۹	۰/۳۶۷	۰/۳۸۳	۰/۳۸۰	۰/۴۳۰	۰/۴۲۴	۰/۴۹۰	۰/۴۸۹	۵	
۰/۳۴۱	۰/۳۳۵	۰/۳۴۷	۰/۳۴۰	۰/۳۸۸	۰/۳۸۵	۰/۴۴۲	۰/۴۳۵	۱۰	
۰/۴۰۵	۰/۴۰۰	۰/۴۱۷	۰/۴۱۶	۰/۴۷۴	۰/۴۷۴	۰/۵۵۲	۰/۵۵۶	۲۰	
۰/۴۷۰	۰/۴۷۰	۰/۴۹۳	۰/۵۰۰	۰/۵۵۴	۰/۵۵۵	۰/۶۲۵	۰/۶۲۵	۳۰	
۰/۴۹۳	۰/۴۹۰	۰/۵۰۹	۰/۵۰۵	۰/۵۶۸	۰/۵۷۱	۰/۶۶۹	۰/۶۶۶	۱۰۰	۳۰۰
۰/۵۲۵	۰/۵۲۸	۰/۵۳۳	۰/۵۲۹	۰/۵۸۹	۰/۵۸۸	۰/۶۸۲	۰/۶۸۵		

۵- نتیجه‌گیری

۱- در شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده و گیردار برای هر دو نوع مدل اختلاط توانی ساده و نمایی، برای نسبت‌های طول به شعاع $0/5$ و 1 با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از 5 تا 10 بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند ولی برخلاف شرط مرزی گیردار با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از 10 تا 20 در شرط مرزی ساده بار بحرانی افزایش می‌یابد. همچنین در شرط مرزی ساده برای نسبت طول به شعاع 5 ، با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از 5 تا 20 میزان بار بحرانی افزایش می‌یابد. درحالی‌که در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار برای نسبت طول به شعاع 5 ، افزایش نسبت شعاع به ضخامت از 5 تا 10 میزان بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند ولی با افزایش نسبت شعاع به ضخامت از 10 تا 20 میزان بار بحرانی افزایش می‌یابد. ۲- برای مشخصات مختلف هندسی و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار، نتایج بار بحرانی کمانش ماده تابعی براساس تابع‌نمایی بین نتایج توان $K = 1$ و $K = 2$ ماده تابعی مدل شده توسط قانون توانی ساده می‌باشد. همچنین مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی مدل شده تابع‌نمایی بیشتر از مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی مدل شده با قانون توانی با توان‌های بزرگتر و یا مساوی از 2 ($K \geq 2$) می‌باشد.

از اهداف کلی این تحقیق، تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مواد تابعی با تغییرات خواص در راستای ضخامت با استفاده از روش‌هایی پویا و مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس (حل اجزای محدود) براساس سه نوع مدل اختلاط (توانی، نمایی و موری - تاناکا) تحت بارگذاری فشاری محوری می‌باشد. نسبت پواسون برای دو مدل اختلاط توانی ساده و تابع‌نمایی ثابت فرض شده است ولی به‌منظور بررسی اثر تغییرات نسبت پواسون، در مدل موری - تاناکا تغییرات نسبت پواسون به‌صورت تابعی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. معادلات غیرخطی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌اول و فرضیه تغییرشکل‌های بزرگ فون کارمن و به فرم نمودی استخراج شده است. به‌منظور حل معادلات غیرخطی از روش‌هایی پویا استفاده شده است. در این روش برای به‌دست‌آوردن بار بحرانی کمانش نیاز به خطی‌سازی معادلات نمی‌باشد. به‌منظور مطالعه پارامتریک نیز اثرات شرایط مرزی، توابع مختلف اختلاط، توان ماده تابعی، نسبت شعاع به ضخامت و نسبت طول به شعاع و تغییرات نسبت پواسون در راستای ضخامت بر روی بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. برخی نتایج به‌دست‌آمده عبارتند از:

- Shells”, Int. J. Thermal Stresses, Vol. 26, pp. 277-294, 2003.
10. Mirzavand, B. and Eslami, M.R. “Thermoelastic Stability Analysis of Imperfect Functionally Graded Cylindrical Shells”, Int. J. Mechanics of Materials and Structures, Vol. 3, No. 8, pp. 1561-72, 2008.
 11. Shariyat, M. “Dynamic Thermal Buckling of Suddenly Heated Temperature-Dependent FGM Cylindrical Shells under Axial Compression and External Pressure”, Int. J. Solids and Structures, Vol. 45, pp. 2601-14, 2008.
 12. Ebrahimi, F. and Sepiani, H.A. “Vibration and Buckling Analysis of Cylindrical Shells Made of FG Materials under Combined Static and Periodic Axial Forces”, Int. J. Advanced Composites Letters, Vol. 19, pp. 67-74, 2010.
 13. Huang, H. and Qiang, H. “Nonlinear Elastic Buckling and Post buckling of Axially Compressed Functionally Graded Cylindrical Shells”, Int. J. Mechanical Sciences, Vol. 51, pp. 500-507, 2009.
 14. Huang, H. Qiang, H., and Demin, W. “Buckling FGM Cylindrical Shells Subjected to Pure Bending Load”, Int. J. Composite Structures, Vol. 93, pp. 2945-52, 2011.
 15. Khazaeinejad, P. and Najafzadeh, M.M. “Mechanical Buckling of Cylindrical Shells With Varying Material Properties”, Int. J. Mechanical Engineering Science, Vol. 224, pp. 51-57, 2010.
 16. Hasani, A. “First Order Formulation for Functionally Graded Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression”, Int. J. Solid Mechanics, Vol. 1, pp. 358-364, 2009.
 17. Kadkhodayan, M. and Golmakani, M.E. “Nonlinear Bending Analysis of Shear Deformable FG Rotating Disk”, Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 58, pp. 41-56, 2014.
 18. Lee, K., Sang, H., and Park, T. “a Simple Explici Arc-Length Method Using the Dynamic Relaxation Method with Kinetic Damping”, Int. J. Computers and Structures, Vol. 14, No. 54., pp. 216-233, 2011.
 19. Zhang, W. Hisada, H., and Noguchi, H. “ Post-Buckling Analysis of Shell and Membrane Structures by DR Method”, Int. J. Computational Mechanics, Vol. 26, pp. 267-272, 2000.
 20. Papadrakakis, M. “ Post-Buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods”, Int. J. Computers and Structures, Vol. 14, pp. 393-402, 1981.
 21. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S. “ Geometrically Non-Linear Analysis of Plates and Shallow Shells by Dynamic Relaxation”, Int. J. Computer Methodes in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 123, pp. 15-32, 1995.
 22. Kadkhodayan, M. Zhang, L.C., and Sowerby, R. “ Analysis of Wrinkling Elastic Plates by DXDR Method”, Int. J. Computers and Structures, Vol. 65, No. 4, pp. 561-574, 1997.
- ۳- به دلیل تغییرات نسبت پواسون در مدل موری- تاناکا مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی براساس این مدل کمتر از مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی مدل شده توسط تابع توانی برای توان‌های ۱ و ۲ ($K = 1,2$) می‌باشد، درحالی که برای توان‌های بیشتر ($K = 5,10$) مقدار بار بحرانی کمانش ماده تابعی براساس تابع قانون توانی از ماده تابعی مدل شده توسط روابط موری- تاناکا کمتر است.
- ۴- مقدار بار بحرانی کمانش برای نسبت‌های شعاع به ضخامت ۵ تا ۳۰، با افزایش نسبت طول به شعاع کاهش می‌یابد. ۵- برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک و یا با نسبت شعاع به ضخامت بالا، افزایش نسبت طول به شعاع تأثیر کمی به روی بار بحرانی کمانش دارد. ۶- با توجه به نتایج ارائه شده، در پوسته‌های طویل مقادیر بار بحرانی کمانش در دو حالت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار با هم اختلاف چندانی ندارند.
- ۶- مراجع
1. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. “Theory of Elastic Stability”, 2nd ed., McGraw Hill, New York, 1961.
 2. Brush, D.O. and Almroth, B.O. “Buckling of Bars, Plates and Shell”, McGraw Hill, New York, 1975.
 3. Hoff, N.J. and Soong, T. “ Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression”, Int. J. Mechanical Sciences, Vol. 7, pp. 489-520, 1965.
 4. Alesksander, M. “on the Buckling of Composite Shells of Revolution under External Pressure”, Int. J. Composite Structures, Vol. 21, pp. 107-119, 1992.
 5. Ferreire, A.J.M. and Barbosa, J.T. “Buckling Behaviour of Composite Shells”, Int. J. Composite Structures, Vol. 50, pp. 93-98, 2000.
 6. Darvizeh, M., Darvizeh, A., Shaterzadeh, A.R., and Ansari, R. “Thermal Buckling Analysis of Moderately Thick Composite Cylindrical Shells under Axisymmetric Thermal Loading”, Aerospace Mechanics Journal, Vol. 3, No. 2, pp. 99-107, 2007, (in Persian).
 7. Mozaffari, A. and Jafari, H. “Investigation of the Effective Parameters on Buckling Load of FML Cylindrical Panel Using FSDT Shells Theory”, Aerospace Mechanics Journal, Vol. 3, No. 4, pp. 95-104, 2010, (in Persian).
 8. Shi-Rong, Li. and Batrab, R.C. “Buckling of Axially Compressed Thin Cylindrical Shells with Functionally Graded Middle Layer”, Int. J. Thin-Walled Structures, Vol. 44, pp. 1039-47, 2006.
 9. Shahsiah, R. and Eslami, M.R. “Thermal Buckling of Functionally Graded Cylindrical