

# تحلیل کشش - خمش ورق مستطیلی هدفمند ضخیم براساس تئوری

## مرتبۀ بالاتر تغییر شکل برشی و قائم

مریم لری دهسراجی<sup>۱</sup>      علیرضا سعیدی<sup>۲</sup>  
 دانشکده مهندسی مکانیک      دانشکده مهندسی مکانیک  
 دانشگاه ولی عصر<sup>(عج)</sup> رفسنجان      دانشگاه شهید باهنر کرمان  
 (تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۴/۷)

### چکیده

در این مقاله تحلیل کشش - خمش ورق ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند براساس تئوری جدید مرتبۀ بالاتر تغییر شکل برشی و قائم که توسط باترا و ویدولی ارائه شد، صورت گرفته است. در این تئوری، هر دو اثر تغییر شکل برشی و قائم در راستای ضخامت لحاظ می شود، همچنین خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت در نظر گرفته نمی شود. برای بیان خواص مکانیکی ماده هدفمند در امتداد ضخامت، از تابع توانی استفاده شده است. نتایج عددی براساس تئوری مرتبۀ اول تا پنجم تغییر شکل برشی و قائم به شکل جداول و نمودارها بیان شده اند. اثر خواص ماده هدفمند و پارامترهای هندسی ورق روی خیز و تنش ها در ضخامت و ابعاد مختلف ورق مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده می شود که این تئوری نه تنها برای ورق های نازک و نیمه ضخیم بلکه برای ورق های ضخیم هدفمند نیز نتایج بسیار دقیقی ارائه می کند.

**واژه های کلیدی:** ورق هدفمند، ورق ضخیم، کشش، خمش، تئوری مرتبۀ بالاتر تغییر شکل برشی و قائم

## Bending-Stretching Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plate Based on Higher Order Shear and Normal Deformable Theory

M. Lori Dehsaraji      A.R. Saidi  
 Mechanical Engineering Department      Mechanical Engineering Department  
 Vali-e-Asr University of Rafsanjan      Shahid Bahonar University of Kerman  
 (Received: 6/May/2014; Accepted: 28/June/2014)

### ABSTRACT

In this article, bending-stretching analysis of thick rectangular plate made of functionally graded material has been investigated based on higher order shear and normal deformable theory which was introduced by Batra and Vilodi. In this theory, both shear and normal deformation effects in the thickness direction are considered. Also, the deflection of plate is not considered as a constant in the thickness direction. A power law function is used to describe the mechanical properties of the functionally graded plate. The numerical results have been presented for first to fifth order shear and normal deformable theory in tables and diagrams. The effects of functionally graded material properties on deflection and stresses of plate have been studied for various thickness and dimensions of the plate. It is shown that this theory gives accurate results not only for thin and moderately thick plates, but also for functionally graded thick plates.

**Keywords:** Functionally Graded Plate, Thick Plate, Stretching; Bending, Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory

۱ - کارشناسی ارشد: loridehsaraji.maryam@gmail.com

۲ - استاد(نویسنده پاسخگو): saidi@uk.ac.ir

## ۱- مقدمه

عموماً مواد هدفمند، مواد مرکبی هستند که حاصل ترکیب دو فلز یا یک فلز و یک نافلز (معمولاً سرامیک) می‌باشند و در آنها خصوصیات مواد در یک یا چند جهت به‌طور پیوسته از یک لایه به لایه دیگر تغییر می‌کند. دلیل عمده استفاده از این مواد، دارا بودن خواص مناسب از قبیل مقاومت حرارتی بالا در کنار انعطاف‌پذیری، ماشین‌کاری بهتر نسبت به هریک از ترکیبات تشکیل‌دهنده آن و غیره می‌باشد. امروزه بیشترین کاربرد این مواد در محیط‌هایی با دمای بالا صورت می‌گیرد.

تاکنون تئوری‌های مختلفی برای تحلیل دوبعدی ورق، ارائه شده است، که براساس نسبت ضخامت به طول ورق مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله مهمترین این تئوری‌ها می‌توان به تئوری کلاسیک [۲]، تئوری برشی مرتبه‌اول [۳] و تئوری برشی مرتبه‌سوم [۴] اشاره نمود. در تئوری کلاسیک از اثر کرنش برشی و قائم در راستای ضخامت صرف‌نظر می‌شود و این تئوری فقط برای ورق‌های خیلی نازک، جواب‌های مناسبی را ارائه می‌دهد. در تئوری برشی مرتبه‌اول، کرنش برشی در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود ولی اثر کرنش قائم در راستای ضخامت صرف‌نظر می‌شود. این تئوری برای ورق‌های نازک و نیمه‌ضخیم جواب‌هایی نسبتاً نزدیک به حل دقیق را ارائه می‌دهد. البته اشکال این تئوری لزوم استفاده از ضریب تصحیح برشی در آن است. در تئوری برشی مرتبه‌سوم، کرنش برشی در راستای ضخامت غیرثابت در نظر گرفته می‌شود ولی در این تئوری نیز از اثر کرنش قائم در راستای ضخامت صرف‌نظر می‌شود. لذا جواب‌های آن برای ورق‌های خیلی ضخیم با خطا روبه‌روست. برای حل ورق‌های ضخیم، تئوری مرتبه‌بالای تغییرشکل برشی و قائم توسط باترا و ویدولی [۱] در سال ۲۰۰۲ معرفی شده است. در این تئوری، کلیه مولفه‌های جایجایی برحسب توابع متعامد لژاندر بسط داده می‌شوند. لذا از اثر کرنش‌های برشی و قائم در راستای ضخامت ورق صرف‌نظر نمی‌شود. همچنین در این تئوری برخلاف تئوری‌های برشی، خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت نیست.

تحقیقات بسیاری در زمینه تحلیل مکانیکی ورق‌های ضخیم صورت گرفته است. ردی<sup>۱</sup> در سال ۲۰۰۰ به ارائه‌ی یک مدل اجزاء محدود برای آنالیز استاتیکی و دینامیکی ورق‌هایی از جنس مواد هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌سوم

پرداخت [۵]. ژانگ<sup>۲</sup> و یانگ<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۴، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی آنالیز استاتیکی ورق‌های هدفمند پرداختند [۶]. افشار و زنکور<sup>۴</sup> در سال ۲۰۰۵، به بررسی خمش ورق‌های هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌اول پرداختند [۷]. باترا و ایمنی در سال ۲۰۰۵، ارتعاشات آزاد و توزیع تنش ورق‌های مستطیلی همگن و همسانگرد را با استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالاتر تغییرشکل برشی و قائم بررسی کردند [۸]. باترا در سال ۲۰۰۷، با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری مرتبه‌ی بالاتر تغییرشکل برشی و قائم را برای ورق‌های الاستیک خطی غیرقابل تراکم هدفمند ارائه کرد [۹]. سعیدی و همکاران در سال ۲۰۰۹، تحلیل خمش ورق چندلایه‌ای با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌سوم را ارائه کردند [۱۰]. جمعه‌زاده و همکاران در سال ۲۰۰۹، به بررسی خیز ورق نازک قطاعی هدفمند براساس تئوری برشی مرتبه‌اول پرداختند [۱۱]. همچنین در همان سال جمعه‌زاده و سعیدی تحلیل کشش و خمش ورق‌های مستطیلی الاستیک خطی با دو لبه تکیه‌گاه ساده را بررسی کردند [۱۲]. حسنی‌بافرانی و همکاران در سال ۲۰۱۰، ارتعاشات آزاد ورق ضخیم هدفمند را با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌بالا ارائه کردند [۱۳]. یانگ و همکاران در سال ۲۰۱۱، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی خمش ورق‌های هدفمند همسانگرد و همسانگرد عرضی با شرایط مرزی مختلف پرداختند [۱۴]. دهاران<sup>۵</sup> و همکاران، با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی به بررسی آنالیز استاتیکی و دینامیکی ورق‌های هدفمند همسانگرد پرداختند [۱۵]. وودوارد<sup>۶</sup> و کاشتالیان<sup>۷</sup> در سال ۲۰۱۱، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی خمش ورق‌های هدفمند همسانگرد عرضی پرداختند [۱۶]. سعیدی و همکاران در سال ۲۰۱۲، حل لوی ورق ضخیم با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌سوم برای شرایط مرزی متفاوت را مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. شیخ‌الاسلامی و سعیدی در سال ۲۰۱۳، با استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالاتر برشی و قائم به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند همسانگرد با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند [۱۸]. نجفی‌زاده و عنوانی به تحلیل کماتش ورق هدفمند دایروی بالایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌بالا پرداختند [۱۹]. نجفی‌زاده و

2- Zhong

3- Yang

4- Zenkour

5- Dharan

6- Woodward

7- Kashtalyan

1- Reddy

در تئوری تغییرشکل برشی و قائم ورق، میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۹]:

$$v_i(x, y, z) = v_{i\alpha}(x, y, z) \delta_{i\alpha} + w(x, y, z) \delta_{i3} \quad (2)$$

که در آن،  $v_i$  معرف مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی کلی جسم بوده،  $v_{i\alpha}$  و  $w$  به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی درون صفحه‌ای و خارج از صفحه می‌باشند. زیرنویس نشان‌دهنده‌ی راستاهای  $x$  و  $y$  بوده و  $\delta$  بیانگر تابع دلتای کرونکر<sup>۱</sup> می‌باشد. مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای  $z$  به صورت چندجمله‌ای لژاندر بسط داده می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} L_a(z) L_b(z) dz = \delta_{ab} \quad a, b = 0, 1, 2, \dots, K$$

$$L_{n-1}(z) = \sqrt{\frac{2n-1}{h}} P_{n-1}(z) \quad n \geq 1$$

$$P_0(z) = 1, \quad (3)$$

$$P_1(z) = \frac{2z}{h},$$

$$P_{n+1}(z) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(\frac{2z}{h}\right) P_n(z) - \left(\frac{n}{n+1}\right) P_{n-1}(z)$$

که در آن،  $K$  مرتبه‌ی تئوری مورد استفاده می‌باشد. با استفاده از چندجمله‌ای‌های فوق می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$v_{i\alpha}(x, y, z) = L_a(z) v_{i\alpha}^a(x, y) \quad (4)$$

$$w(x, y, z) = L_a(z) w^a(x, y)$$

که در آن،  $a = 0, 1, 2, \dots, K$  می‌توان مشتق چندجمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر نوشت:

$$L'_a(z) = D_{ab} L_b(z) \quad (5)$$

که در معادله‌ی فوق،  $D$  ماتریس ضرائب مشتق می‌باشد. برای نمونه، برای تئوری مرتبه‌ی پنجم، درایه‌های این ماتریس به صورت زیر می‌باشند:

$$[D] = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

همکاران به تحلیل خمشی ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌اول پرداختند [۲۰].

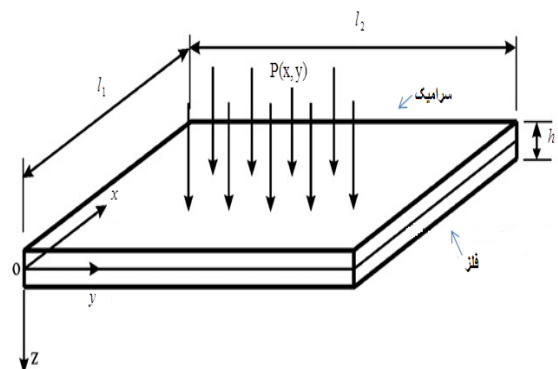
در این مقاله برای نخستین‌بار، تحلیل کشش و خمشی ورق ضخیم هدفمند، براساس تئوری مرتبه‌بالای تغییرشکل برشی و قائم ارائه شده است. ورق چهار طرف تکیه‌گاه ساده است و بار یکنواخت روی سطح بالای ورق وارد می‌شود. مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی براساس چندجمله‌ای‌های لژاندر در امتداد ضخامت تا پنج ترم بسط داده می‌شوند. با استفاده از اصل کار مجازی معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند. نتایج عددی برای نسبت‌های متفاوت ضخامت به طول با مقالات معتبر مقایسه شده و نشان داده شده است که مرتبه‌ی پنجم این تئوری برای تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج بسیار دقیقی ارائه می‌کند.

## ۲- میدان جابه‌جایی و تنش

ورق همسانگرد هدفمند با ضخامت  $h$  و طول اضلاع  $l_1$  و  $l_2$  که خواص آن در راستای ضخامت ( $z$ ) متغیر است را در نظر بگیرید (شکل ۱). محورهای  $x$  و  $y$  منطبق بر لبه‌های ورق و مرکز محور مختصات روی صفحه میانی ورق واقع شده است. آنجاکه تغییرات ضریب پواسون ورق در امتداد ضخامت کم است، مقدار آن ثابت فرض می‌شود. مدول یانگ ورق در راستای ضخامت به طور پیوسته براساس تابع توانی زیر تغییر می‌کند [۱۸]:

$$E(z) = E_M + (E_C - E_M) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^N \quad (1)$$

که، زیر نویس‌های  $C$  و  $M$  به ترتیب معرف سرامیک و فلز، و پارامتر  $N$  نشان‌دهنده‌ی توان ماده‌ی هدفمند می‌باشند.



شکل (۱): مدل هندسی ورق.

$$\int_A \delta \eta_{\alpha}^a M_{\alpha\beta,\beta}^a dA + \int_A \delta \eta_3^a T_{\alpha,\alpha}^a dA + \int_A \delta \eta_i^a (b_i^a + B_i^a - D_{ab} T_i^b) dA = 0, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (13)$$

که پارامترهای آن به صورت زیر بیان می شوند:

$$M_{\alpha\beta}^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} L_a dz, \quad T_i^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} L_a dz, \quad b_i^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho L_a b_i dz, \quad (14)$$

$$B_i^a = L_a \left( \frac{h}{2} \right) \sigma_{i3} (x, y, \frac{h}{2}) - L_a \left( -\frac{h}{2} \right) \sigma_{i3} (x, y, -\frac{h}{2}).$$

در این روابط، زیرنویس های  $\alpha, \beta$  نشان دهنده ی راستاهای X و Y می باشند.

با بسط معادله ی (۱۳)، و از آنجا که این معادله برای تمامی مقادیر  $\delta \eta^a$  برقرار است، لازم است روابط زیر برقرار باشند:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^a + B_{\alpha}^a - D_{ab} T_{\alpha}^b = 0 \quad (15)$$

$$T_{\alpha,\alpha}^a + B_3^a - D_{ab} T_3^b = 0, \alpha, \beta = 1, 2$$

در معادلات (۱۴)،  $M_{\alpha\beta}^0$  نیروهای درون صفحه ای، و  $M_{\alpha\beta}^a$  ممان های برون صفحه ای از مرتبه ی  $a$  است. به همین ترتیب،  $T_i^0$  برایند نیروهای جانبی،  $T_i^a$  ممان نیروهای جانبی از مرتبه ی  $a$  می باشد. افزون بر این، بیانگر نیروهای حجمی بر واحد سطح، و  $b_i^a$  ممان مرتبه ی  $a$  بر واحد سطح می باشد. در نهایت  $B_i^a$  ممان مرتبه ی  $a$  بردارهای تنش سطحی وارده بر سطوح بالا و پایین ورق می باشد. به منظور حل این معادلات، لازم است با استفاده از معادلات متشکله، روابط تنش- کرنش را برای ماده ی هدفمند نوشته و با استفاده از معادلات سینماتیکی، تمام مجهولات را بر حسب مؤلفه های میدان جابه جایی بیان کرد. با در نظر گرفتن بار بر واحد سطح  $P(x, y)$  روی سطح بالای ورق و صفر بودن تنش های برشی عرضی روی مرزهای ورق و صفر بودن تنش قائم برون صفحه روی سطح پایین ورق، و همچنین با صرف نظر کردن از نیروی حجمی در مقابل نیروی استاتیکی اعمال شده بر ورق، نهایتاً معادلات حاکم بر ورق به- صورت زیر حاصل می شوند:

(۱۶-الف)

تانسور کرنش بی نهایت کوچک به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (7)$$

و روابط بین تنش-کرنش برای ماده هدفمند همسانگرد به- صورت زیر بیان می شوند [۱۸]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

که، ثوابت الاستیسیته  $C_{11}, C_{12}$  و  $C_{44}$  بر حسب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به صورت زیر بیان می شوند:

$$C_{11}(z) = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (9)$$

$$C_{44}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

### ۳- معادلات حاکم بر ورق

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر ورق هدفمند مستطیلی از معادلات تعادل در دستگاه دکارتی به شکل زیر استفاده می شود:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (10)$$

که در آن،  $\sigma_{ij}$  مؤلفه های تانسور تنش،  $\rho$  چگالی ورق و  $b_i$  مؤلفه های بردار نیروهای حجمی ورق می باشند. به منظور دست- یابی به معادلات حاکمه، از اصل کار مجازی استفاده می شود. به- کمک ضرب داخلی میدان جابه جایی مجازی  $\delta \eta_i$  در معادله ی (۱۰) و انتگرال گیری روی حجم ورق، خواهیم داشت:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \eta_i \sigma_{ij,j} dz dA + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \delta \eta_i b_i dz dA = 0, i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

که،  $A$  مساحت صفحه ی میانی ورق می باشد. میدان جابه جایی مجازی  $\delta \eta_i$  را به صورت بسط چند جمله ای های لژاندر از  $z$  به- شکل زیر می نویسیم:

$$\delta \eta_i(x, y, z) = L_a(z) \delta \eta_i^a(x, y) \quad (12)$$

با قراردادن معادله ی (۱۲) در (۱۱) و همچنین استفاده از روابط (۲) و (۵) داریم:

$$\begin{aligned}
 v_1^a &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} v_1^{amn} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right) \\
 v_2^a &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} v_2^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right) \\
 w^a &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} w^{amn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right) \\
 P_0 &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{16P_0}{mn\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)
 \end{aligned} \quad (18)$$

با قراردادن روابط (۱۸) و (۹) در معادلات (۱۶) و بازکردن معادلات و مرتب سازی، معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند (فرم نهایی معادلات در پیوست ارائه شده‌اند)، دیده می‌شود که برای هر تئوری از مرتبه  $k$  تعداد معادلات  $3(k+1)$  می‌باشد.

#### ۵- بحث و نتایج عددی

نتایج عددی برای ورق هدفمند متشکل از آلومینیوم (فلز) و سیلیکون کربید (سرامیک) ارائه شده‌است، که مدول الاستیسیته آنها به صورت زیر است [۱۲]:

$$E_m = 70Gp, E_c = 420 Gp, \nu = 0.3 \quad (19)$$

اما پیش از آن جهت بررسی صحت نتایج مقایسه‌ای با دو مرجع صورت گرفته است. جدول ۱ مقایسه با تئوری الاستیسیته سه-بعدی مرجع [۱۴]، برای ورق مربعی هدفمند با توان‌های مختلف ماده هدفمند نشان می‌دهد، در این جدول نتایج برای ورق هدفمند با پروفیل نمایی زیر ارائه شده‌اند، که  $\alpha$  توان ماده هدفمند و  $E_0$  مدول یانگ لایه زیرین ورق می‌باشند:

$$E(z) = E_0 \exp\left(\left(\frac{z}{l_1} - \frac{h}{2l_1}\right)\alpha\right), E_0 = 100Gp \quad (20)$$

در جدول ۲ نتایج برای ورق همگن ( $E = 200Gpa$ )، با مراجع [۱۹] و [۲۰] که به ترتیب با روش گالرکین و المان محدود این مسئله را حل کرده‌اند، برای نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت مقایسه شده و نشان از صحت نتایج دارد. در این قسمت نتایج برای ورق هدفمند، به صورت نمودارها و جداول ارائه شده است. جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند [۱۵]:

$$\begin{aligned}
 Eq1: & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} L_a L_d dz (v_{1,11}^d + \frac{1}{2} v_{1,22}^d + \frac{1}{2} v_{2,21}^d) + \\
 & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} L_a L_d dz (v_{2,21}^d - \frac{1}{2} v_{1,22}^d - \frac{1}{2} v_{2,21}^d + D_{cd} w_{,1}^c) + \\
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{44} L_b L_d dz D_{ab} (D_{cd} v_{,1}^c + w_{,1}^d) = 0
 \end{aligned}$$

(۱۶-ب)

$$\begin{aligned}
 Eq2: & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} L_a L_d dz (v_{2,22}^d + \frac{1}{2} v_{1,12}^d + \frac{1}{2} v_{2,11}^d) + \\
 & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} L_a L_d dz (v_{1,21}^d - \frac{1}{2} v_{1,12}^d - \frac{1}{2} v_{2,11}^d + D_{cd} w_{,2}^c) + \\
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{44} L_b L_d dz D_{ab} (D_{cd} v_{,2}^c + w_{,2}^d) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Eq3: & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} L_b L_d dz D_{ab} (v_{1,1}^d + v_{2,2}^d) + \\
 & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{44} L_a L_d dz (D_{cd} v_{,1}^c + w_{,11}^d + (D_{cd} v_{,2}^c + w_{,22}^d)) + \\
 & - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} L_b L_d dz D_{cd} D_{ab} w^c -
 \end{aligned} \quad (16-ج)$$

$$P(x, y) L_a \left(\frac{-h}{2}\right) = 0 \quad a, b, c, d = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

#### ۴- حل ناویر

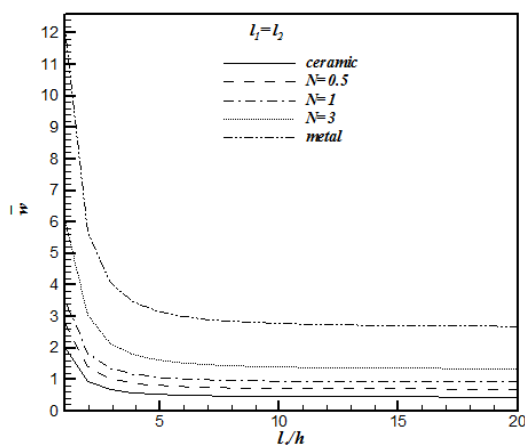
فرض می‌شود ورق مستطیلی از چهارطرف روی تکیه‌گاه ساده بوده و روی سطح بالای آن بار یکنواخت  $P_0$  اعمال می‌شود. به منظور حل معادلات حاکم بر ورق شرایط مرزی روی چهار لبه ورق به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$W^a = 0, M_{11}^a = 0, M_{12}^a = 0 \quad \text{on } x = 0, l_1 \quad (17)$$

$$W^a = 0, M_{22}^a = 0, M_{12}^a = 0 \quad \text{on } y = 0, l_2$$

بنابراین، با توجه به شرط مرزی بالا میدان جابه‌جایی جدید و بار یکنواخت  $P_0$  را به صورت زیر می‌توان بسط داد:

تقریباً ثابت باقی می ماند. شکل های ۱۱-۴ توزیع تنش های بی بعد قائم و برشی در راستای ضخامت ورق را برای ورق هدفمند  $(N = 2)$  نشان می دهند. همان طور که مشاهده می شود تنش های قائم  $\bar{\sigma}_x$  و  $\bar{\sigma}_y$  در قسمت های بالایی ورق فشاری اند و در قسمت های پایینی ورق کششی اند. و بیشترین مقدار تنش های قائم  $\bar{\sigma}_x$  و  $\bar{\sigma}_y$  و تنش برشی  $\bar{\tau}_{xy}$  در پایین و بالای ورق اتفاق می افتد. شکل ۱۲ تغییرات جابجایی بی بعد درون صفحه ای ورق مربعی  $\bar{v}_1$  در راستای ضخامت ورق را برای ورق هدفمند با توان های مختلف نشان می دهد. با توجه به شکل های ۱۱-۵ مشاهده می شود، مقدار تنش های قائم درون صفحه ای  $\bar{\sigma}_y$  و  $\bar{\sigma}_x$  و همچنین تنش برشی درون صفحه ای  $\bar{\tau}_{xy}$  در این ورق هدفمند با هر نسبت ابعادی و نسبت ضخامت به طول و با توان ماده هدفمند  $(N = 2)$  در صفحه  $(z = -0.15h)$  نزدیک صفر هستند، و همچنین در حالت کلی مقدار تنش های برشی و قائم برون صفحه ای  $\bar{\tau}_{xz}$ ،  $\bar{\tau}_{yz}$  و  $\bar{\sigma}_z$  در مقابل سه مؤلفه دیگر تنش کوچک هستند، پس می توان صفحه ای  $(z = -0.15h)$  را به عنوان رویه خنثی ورق دانست. شکل ۱۲، تغییرات جابجایی درون صفحه ای بی بعد ورق مربعی در امتداد ضخامت برای توان های متفاوت ماده هدفمند نشان می دهد. شکل ۱۳، تغییرات جابجایی برون صفحه ای بی بعد مرکز ورق مربعی در امتداد ضخامت ورق برای نسبت های متفاوت طول به ضخامت نشان می دهد، همان طور که مشاهده می شود، خیز ورق نازک در امتداد ضخامت ثابت است ولی برای ورق ضخیم تغییر می کند.



شکل (۲): تغییرات خیز بی بعد مرکز ورق بر حسب نسبت طول به ضخامت برای توان های متفاوت ماده هدفمند.

$$\begin{aligned}\bar{w} &= w \left( \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, 0 \right) \frac{E_c h^3}{P_0 l_1^4} * 10 \\ \bar{\sigma}_x &= \sigma_x \left( \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \frac{-h}{4} \right) \frac{h}{P_0 l_1} \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_y \left( \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \frac{-h}{4} \right) \frac{h}{P_0 l_1} \\ \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} \left( 0, 0, \frac{-h}{4} \right) \frac{h}{P_0 l_1} \\ \bar{\tau}_{xz} &= \tau_{xz} \left( 0, \frac{l_2}{2}, \frac{-h}{4} \right) \frac{h}{P_0 l_1} \\ \bar{\tau}_{yz} &= \tau_{yz} \left( \frac{l_1}{2}, 0, \frac{-h}{4} \right) \frac{h}{P_0 l_1} \\ \bar{v}_1 &= v_1 \left( 0, \frac{l_2}{2}, 0 \right) \frac{E_c h^3}{P_0 l_1^4} * 100\end{aligned}\quad (21)$$

لازم به ذکر است که تنش های بی بعد در جداول در نقطه  $(l_1/4, l_2/4, -h/4)$  محاسبه شده اند. در جداول ۳-۴ نتایج برای ورق مربعی هدفمند با توان های مختلف در نسبت های ضخامت به طول متفاوت برای  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود در نسبت های ضخامت به طول خیلی کم (ورق نازک و خیلی نازک) نتایج از تئوری مرتبه سوم به بعد ثابت می شوند و جواب دقیق حاصل می شود و نیاز به نوشتن مرتبه های بالاتر نیست. در ورق های ضخیم هرچه مرتبه تئوری بالاتر برود حاصل به جواب دقیق نزدیک تر می شود. همان طور که مشاهده می شود هرچه درصد فلز بیشتر می شود  $(N)$  زیادتر می شود  $\bar{w}$  افزایش و  $\bar{\sigma}_x$  کاهش می یابند. جالب توجه این است که تنش ها برای یک ورق همگن (سرامیک خالص و فلز خالص) یکسان اند. پس تنش ها در یک ورق همگن روی تکیه گاه ساده، به مدول الاستیسیته و جنس ورق بستگی ندارند. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق  $\bar{w}$ ، افزایش و  $\bar{\sigma}_x$  و  $\bar{\tau}_{xy}$  کاهش می یابند.

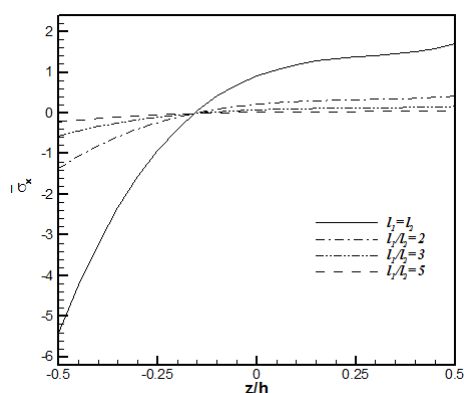
شکل های ۲-۳ تغییرات خیز بی بعد مرکز ورق را به ترتیب با نسبت ابعاد  $(l_1/l_2)$  و نسبت طول به ضخامت  $(l_1/h)$  نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود بیشترین خیز برای ورق فلز خالص  $(N \rightarrow \infty)$  و کمترین خیز برای ورق سرامیک خالص  $(N = 0)$  اتفاق می افتد و برای ورق هدفمند بین این دو قرار می گیرند و این تفاوت بین نمودارها با زیاد شدن نسبت ابعاد کاهش می یابد در حالی که با زیاد شدن نسبت طول به ضخامت

جدول (۱): مقایسه پارامترهای بی بعد خیز و تنش ها برای ورق مربعی هدفمند با استفاده از تئوری برشی و قائم مرتبه پنجم با مرجع [۱۴] (براساس تئوری الاستیسیته سه بعدی).

$\alpha$		$\bar{w}\left(\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(\frac{l_1}{4}, \frac{l_2}{4}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(\frac{l_1}{4}, \frac{l_2}{4}, 0\right)$
-۵	Present	۲۱/۱۷۹۰	۱۰/۰۷۱	۰/۹۵۱۸۳	۰/۳۹۸۵
	3d Exact	۲۱/۱۶۰۴	۱۰/۱۳۵۳	۱/۰۱۲۴	۰/۴۰۰۴
۰	Present	۱۳/۴۵۰۴	۱۲/۹۸۷۱	۰/۹۵۷۸	-۰/۰۴۳۷۸
	3d Exact	۱۳/۴۴۵	۱۳/۰۴۳۷	۱/۰۱۹۶	-۰/۰۴۲۰
۵	Present	۹/۹۰۷۱	۱۶/۷۱۷۲	۰/۹۵۱۴	-۰/۴۸۷۹
	3d Exact	۹/۸۹۸۵	۱۶/۷۰۸۶	۱/۰۱۲۴	-۰/۴۸۶۳

جدول (۲): مقایسه پارامترهای بی بعد خیز و تنش قائم برای ورق مربعی هدفمند با استفاده از تئوری برشی و قائم مرتبه پنجم با مراجع [۱۹] و [۲۰].

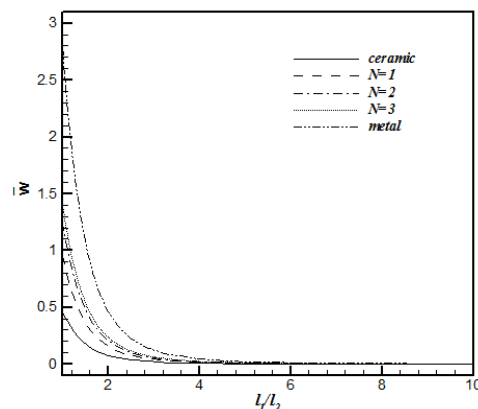
$h/l_1$		$\bar{w}\left(\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}, \frac{h}{2}\right)$
۰/۱	present	۰/۴۲۴۹	present
	[۱۹]	۰/۴۲۲۰	[۱۹]
	[۲۰]	۰/۴۲۴۹	[۲۰]
۰/۲	present	۰/۴۸۰۴	present
	[۱۹]	۰/۴۷۹۸	[۱۹]
	[۲۰]	۰/۴۸۰۳	[۲۰]
۰/۳	present	۰/۵۷۱۳	present
	[۱۹]	۰/۵۷۱۷	[۱۹]
	[۲۰]	۰/۵۷۱۰	[۲۰]
۰/۴	present	۰/۶۹۵۳	present
	[۱۹]	۰/۶۹۶۷	[۱۹]
	[۲۰]	۰/۶۹۵۲	[۲۰]
۰/۵	present	۰/۸۴۹۳	present
	[۱۹]	۰/۸۵۱۱	[۱۹]
	[۲۰]	۰/۸۴۸۷	[۲۰]



شکل (۴): تغییرات تنش قائم درون صفحه‌ای بی بعد در امتداد

ضخامت ورق برای نسبت ابعادی متفاوت (N = 2) و

$$(h / l_1 = 0.1)$$

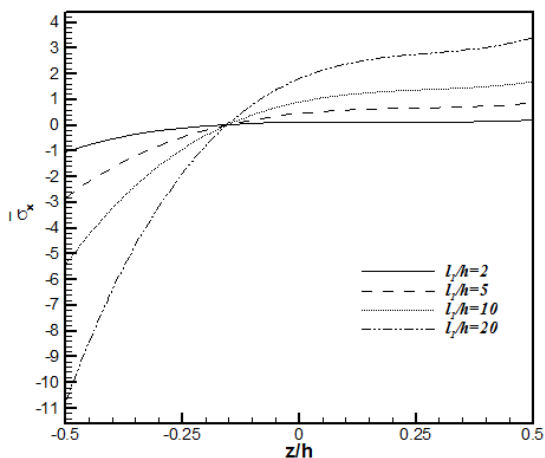


شکل (۳): تغییرات خیز بی بعد مرکز ورق برحسب نسبت

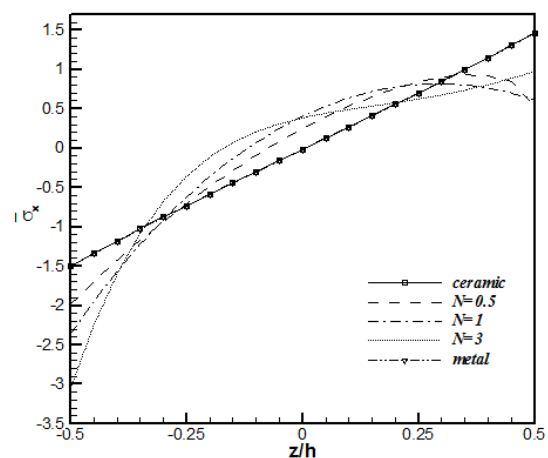
ابعاد برای توان‌های متفاوت ماده هدفمند ( $h/l_1 = 0.1$ ).

**جدول (۳):** خیز و بزرگی تنش قائم بی‌بعد برای ورق هدفمند مربعی با نسبت‌های مختلف ضخامت به طول و توان‌های مختلف براساس تئوری‌های مرتبه‌اول تا پنجم برشی و قائم.

		$\bar{w}$					$ \bar{\sigma}_x $				
$h/l_1$	N	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5
۰/۰۱	سرامیک	۰/۳۶۲۳	۰/۴۴۳۸	۰/۴۴۳۸	۰/۴۴۳۸	۰/۴۴۳۸	۹/۷۰۵۸	۸/۸۳۳	۸/۸۳۱۳	۸/۸۳۱۳	۸/۸۳۱۳
	۱	۰/۷۴۸۴	۰/۹۱۶۶	۰/۹۱۶۷	۰/۹۱۶۷	۰/۹۱۶۷	۸/۳۱۳۹	۷/۵۶۵	۷/۵۶۴	۷/۵۶۴۸	۷/۵۶۴۱
	۲	۰/۹۷۹۷	۱/۲۰۰	۱/۲۰۰	۱/۲۰۰	۱/۲۰۰	۶/۲۵۴۶	۵/۶۹۰۵	۵/۶۸۹۸	۵/۶۹۱۴	۵/۶۸۹۸
	۳	۱/۰۸۶۹	۱/۳۳۱۴	۱/۳۳۲	۱/۳۳۱۵	۱/۳۳۱۵	۵/۰۳۰۳	۴/۵۷۶۳	۴/۵۷۶۱	۴/۵۷۷۸	۴/۵۷۵
	فلز	۲/۱۷۳۹	۲/۶۶۲۷	۲/۶۶۲۹	۲/۶۶۲۹	۲/۶۶۲۹	۹/۷۰۵۸	۸/۸۳۳	۸/۸۳۱۳	۸/۸۳۱۳	۸/۸۳۱۳
۰/۱	سرامیک	۰/۳۸۱۴	۰/۴۴۳۸	۰/۴۴۳۸	۰/۴۶۴۰	۰/۴۶۴۰	۰/۹۷۸۵	۰/۸۹۴۶	۰/۸۸۶۰	۰/۸۹۰۰	۰/۸۹۰۰
	۱	۰/۷۸۲۶	۰/۹۱۶۶	۰/۹۱۶۷	۰/۹۵۳۷	۰/۹۵۳۷	۰/۸۴۱۷	۰/۷۶۶۱	۰/۷۵۵۴	۰/۷۶۵۱	۰/۷۵۸۹
	۲	۱/۰۲۵	۱/۲۰۰	۱/۲۰۰	۱/۲۵۴۴	۱/۲۵۴۴	۰/۶۳۵۱	۰/۵۶۷۰	۰/۵۶۴۲	۰/۵۸۱۲	۰/۵۶۵۷
	۳	۱/۱۴۰۵	۱/۳۳۱۴	۱/۳۳۲	۱/۴۰۱۸	۱/۴۰۱۸	۰/۵۱۱۸	۰/۴۵۲۸	۰/۴۵۰۶	۰/۴۷۲۹	۰/۴۴۹۱
	فلز	۲/۲۸۸۴	۲/۷۶۷۲	۲/۷۸۳۸	۲/۷۸۳۸	۲/۷۸۳۸	۰/۹۷۸۵	۰/۸۹۴۶	۰/۸۸۶۰	۰/۸۹۰۰	۰/۸۹۰۰
۰/۲	سرامیک	۰/۴۳۹۷	۰/۵۱۳۶	۰/۵۲۴۶	۰/۵۲۴۵	۰/۵۲۴۵	۰/۵۰۲۱	۰/۴۶۴۴	۰/۴۴۷۲	۰/۴۵۵۹	۰/۴۵۵۷
	۱	۰/۸۸۶۱	۱/۰۵۲	۱/۰۶۴۷	۱/۰۶۴۶	۱/۰۶۴۷	۰/۴۳۷۲	۰/۳۸۶۴	۰/۳۷۶۳	۰/۳۹۵۴	۰/۳۸۳۱
	۲	۱/۱۶۱۸	۱/۳۹۶۱	۱/۴۱۵۸	۱/۴۱۶۷	۱/۴۱۷۲	۰/۳۳۲۷	۰/۲۸۰۳	۰/۲۷۵۰	۰/۳۰۸۵	۰/۲۷۷۸
	۳	۱/۳۰۲۳	۱/۵۷۴۶	۱/۶۰۸۹	۱/۶۱۱۷	۱/۶۱۲۴	۰/۲۶۹۷	۰/۲۱۸۸	۰/۲۱۵۰	۰/۲۵۹۲	۰/۲۱۱۷
	فلز	۲/۶۳۸۳	۳/۰۸۱۳	۳/۱۴۷۷	۳/۱۴۷۲	۳/۱۴۷۲	۰/۵۰۲۱	۰/۴۶۴۴	۰/۴۴۷۲	۰/۴۵۵۹	۰/۴۵۵۷
۰/۵	سرامیک	۰/۸۵۵۰	۰/۸۶۱۵	۰/۹۳۰۶	۰/۹۲۷۶	۰/۹۲۷۴	۰/۲۴۱۴	۰/۲۲۳۳	۰/۱۷۷۶	۰/۱۹۹۸	۰/۲۰۱۱
	۱	۱/۵۸۴۵	۱/۷۱۹۲	۱/۷۹۶۶	۱/۷۹۲۸	۱/۷۹۴۳	۰/۲۲۵۳	۰/۱۵۸۵	۰/۱۲۷۹	۰/۱۵۶۱	۰/۱۵۴۴
	۲	۲/۰۷۵۸	۲/۳۵۵۴	۲/۴۷۴۳	۲/۴۶۲۷	۲/۴۷۵۵	۰/۱۷۸۷	۰/۰۹۱۳	۰/۰۶۸۳	۰/۱۲۵۹	۰/۰۸۹۹
	۳	۲/۳۸۰۰	۲/۷۶۶۴	۲/۹۶۸۸	۲/۹۵۲۳	۲/۹۷۶۰	۰/۱۴۸۷	۰/۰۵۳۴	۰/۰۳۰۹	۰/۱۱۲۳	۰/۰۴۴۲
	فلز	۵/۱۳۰۰	۵/۱۶۸۹	۵/۵۸۳۴	۵/۵۶۵۳	۵/۵۶۴۴	۰/۲۴۱۴	۰/۲۲۳۳	۰/۱۷۷۶	۰/۱۹۹۸	۰/۲۰۱۱



**شکل (۶):** تغییرات تنش قائم درون صفحه‌ای بی‌بعد در امتداد ضخامت ورق مربعی برای نسبت طول به ضخامت متفاوت (N = 2).

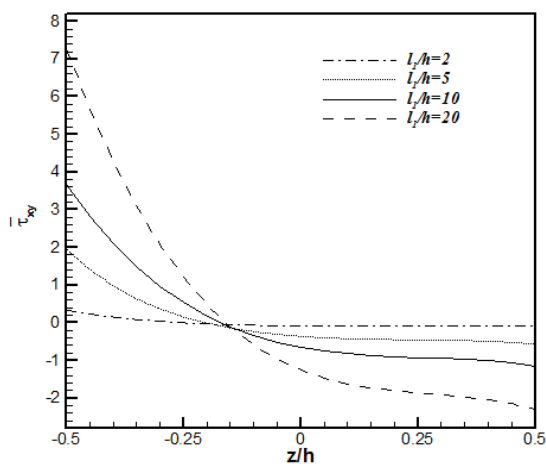


**شکل (۵):** تغییرات تنش قائم درون صفحه‌ای بی‌بعد در امتداد ضخامت ورق برای توان‌های متفاوت ماده هدفمند (h / l<sub>1</sub> = 0.2).

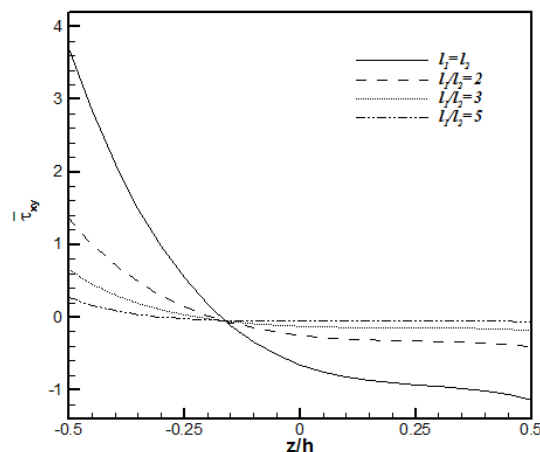


جدول (۴): تنش برشی درون صفحه‌ای بی‌بعد  $\tau_{xy}$  برای ورق هدفمند مربعی برحسب نسبت‌های مختلف ضخامت به طول و توان‌های مختلف براساس تئوری های مرتبه‌اول تا پنجم برشی و قائم.

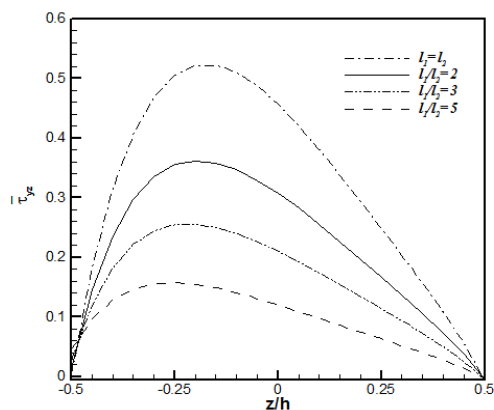
$h/l_1$	N	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5
۰/۰۱	سرامیک	۳/۲۶۹	۴/۰۰۴	۴/۰۰۴	۴/۰۰۳۹	۴/۰۰۴
	۱	۲/۷۹۹	۳/۴۲۹۶	۳/۴۲۹	۳/۴۲۹	۳/۴۲۹۴
	۲	۲/۱۰۶۲	۲/۵۷۹۸	۲/۵۷۹۶	۲/۵۷۹۵	۲/۵۷۹۵
	۳	۱/۶۹۳۹	۲/۰۷۴	۲/۰۷۴	۲/۰۷۴۳	۲/۰۷۴۳
	فلز	۳/۲۶۹	۴/۰۰۴	۴/۰۰۴	۴/۰۰۳۹	۴/۰۰۴
۰/۱	سرامیک	۰/۳۲۲۸	۰/۳۹۴۱	۰/۳۹۱۶	۰/۳۹۱۶	۰/۳۹۱۶
	۱	۰/۲۷۶۲	۰/۳۳۵۸	۰/۳۳۳۷	۰/۳۳۳۷	۰/۳۳۳۸
	۲	۰/۲۰۷۰	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۷۷	۰/۲۴۷۴	۰/۲۴۷۶
	۳	۰/۱۶۵۹	۰/۱۹۹۱	۰/۱۹۶۷	۰/۱۹۶۱	۰/۱۹۶۰
	فلز	۰/۳۲۲۸	۰/۳۹۴۱	۰/۳۹۱۶	۰/۳۹۱۶	۰/۳۹۱۶
۰/۲	سرامیک	۰/۱۵۵۴	۰/۱۸۷۵	۰/۱۸۲۶	۰/۱۸۲۶	۰/۱۸۲۶
	۱	۰/۰۱۳۲۵	۰/۱۵۷۰	۰/۱۵۲۹	۰/۱۵۲۹	۰/۱۵۳۰
	۲	۰/۰۹۸۱	۰/۱۱۲۶	۰/۱۰۸۴	۰/۱۰۷۸	۰/۱۰۸۱
	۳	۰/۰۷۷۸	۰/۰۸۶۹	۰/۰۸۲۰	۰/۰۸۰۹	۰/۰۸۱۸
	فلز	۰/۱۵۵۴	۰/۱۸۷۵	۰/۱۸۲۶	۰/۱۸۲۶	۰/۱۸۲۶
۰/۵	سرامیک	۰/۰۴۷۰	۰/۰۴۶۰۳	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۴۳	۰/۰۳۴۲۴
	۱	۰/۰۳۸۴	۰/۰۳۰۳۷	۰/۰۱۹۷	۰/۰۲۰۰	۰/۰۲۱۰۲
	۲	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۸۶	-۰/۰۰۲۹	-۰/۰۰۳۸	-۰/۰۰۱۹۸
	۳	۰/۰۱۷۶	-۰/۰۰۲۸	۰/۰۱۶۷	-۰/۰۱۸۹	-۰/۰۱۷۶
	فلز	۰/۰۴۷۰	۰/۰۴۶۰۳	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۴۳	۰/۰۳۴۲۴



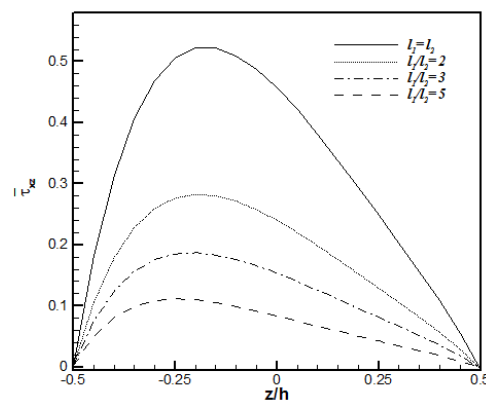
شکل (۸): تغییرات تنش برشی درون صفحه‌ای بی‌بعد در امتداد ضخامت ورق برای نسبت طول به ضخامت متفاوت ( $N = 2$ ).



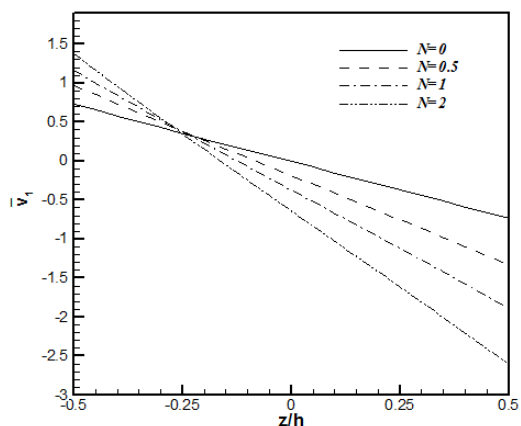
شکل (۷): تغییرات تنش برشی درون صفحه‌ای بی‌بعد در امتداد ضخامت ورق برای نسبت ابعادی متفاوت ( $N = 2$ ) و ( $h/l_1 = 0.1$ ).



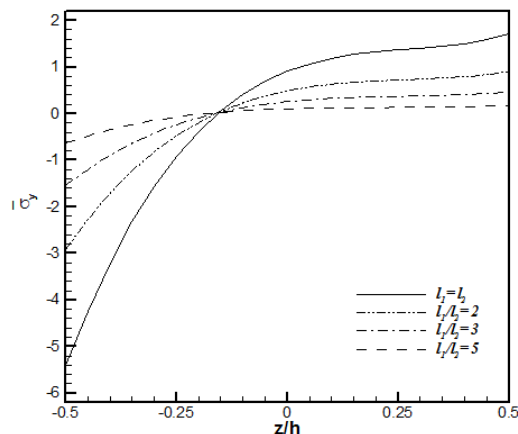
شکل (۱۰): تغییرات تنش برشی برون صفحه‌ای بی‌بعد در امتداد ضخامت ورق برای نسبت ابعادی متفاوت ( $N = 2$ ) و  $(h/l_1 = 0.1)$



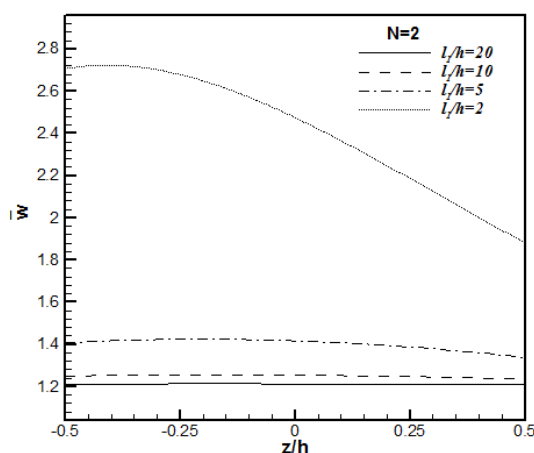
شکل (۹): تغییرات تنش برشی برون صفحه‌ای بی‌بعد در امتداد ضخامت ورق برای نسبت ابعادی متفاوت ( $N = 2$ ) و  $(h/l_1 = 0.1)$



شکل (۱۲): تغییرات جابه‌جایی درون صفحه‌ای بی‌بعد ورق مربعی  $\bar{v}_1$  در امتداد ضخامت ورق برای توان‌های متفاوت ماده هدفمند،  $(h/l_1 = 0.1)$



شکل (۱۱): تغییرات تنش قائم درون صفحه‌ای بی‌بعد  $\bar{\sigma}_y$  در امتداد ضخامت ورق برای نسبت ابعادی متفاوت ( $N = 2$ ) و  $(h/l_1 = 0.1)$



شکل (۱۳): تغییرات جابه‌جایی برون صفحه‌ای بی‌بعد ورق مربعی در امتداد ضخامت ورق برای نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت.

10. Saidi A.R., Atashipour S.R., and Keshavarzi ,H. "Bending Analysis of Thick Laminated Rectangular Plates Using a Boundary Layer Function", Journal of Mechanical Engineering Science. Vol. 224, pp.2073-2081, 2010.
11. Jomezadeh, E., Saidi, A.R., and Atashipour, S, R.. "An Analytical Approach for Stress Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 30, No. 9, pp. 3679-3678, 2009.
12. Saidi, A.R., and Jomezadeh, E. "On the Analytical Approach for the Bending/Stretching of Linearly Elastic Functionally Graded Rectangular Plates with Two Opposite Edges Simply Supported", Mechanical Engineering Science, Vol. 223, pp. 2009-2016, 2009.
13. Hasani Baferani, A., Saidi, A.R., and Jomezadeh E. "Exact Solution for Free Vibration of Thin Functionally Graded Rectangular Plates", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 225, No. 10, pp. 526-536, 2011.
14. Yang, B., Ding, H.J., and Chen, W.Q. "Elasticity Solutions for Functionally Graded Rectangular Plates with Two Opposite Edges Simply Supported", Journal of Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, No.5, pp. 488-503, 2011.
15. Dharan, S., Prakash, S., and Savithri. "A Higher Order Shear Deformation Model for Functionally Graded Plate", Vol. 16, No. 2, pp. 1-9, 2011.
16. Woodward, B., and Kashtalyan, M. "Three-Dimensional Elasticity Solution for Bending of Transversely Isotropic Functionally Graded Plates", European Journal of Mechanics Solids, Vol. 30, No. 5, pp. 705-718, 2011.
17. Saidi A.R., Bodaghi, M, and Atashipour, S.R.. "Levy-Type Solution for Bending Stretching of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on Third-Order Shear Deformation Theory", Department of Mechanical Engineering, Vol. 19, No. 8, pp. 577-589, 2012.
18. Sheikholeslami, S.A., and Saidi, A.R. "Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory", Composite Structures, Vol. 106, No. 13, pp. 350-361, 2013.
19. Najafzadeh, M.M and Onvani, A. "Mechanical Buckling Analysis of a FGM Circular Plate with Actuator-Actuator Piezoelectric Layers, Based on Neutral-Axis' Position and Using Higher-Order Shear Deformation Plate Theory". Aerospace Mechanics Journal. Vol. 6, No. 4, pp. 43-54, 2010 (In Persian).
20. Najafzade, M.M., Azari, Sh and Salmani, F. "Bending Analysis of Rectangular Composite Plates with Piezoelectric Layers, Based on the First Order Shear Deformation Theory, Using The Extended Kantorovich Method", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 6, No. 4, PP. 57-69, 2010 (In Persian).

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، تئوری مرتبه بالاتر برشی و قائم ( با استفاده از بسط توابع لژاندر مؤلفه‌های جابه‌جایی) برای به‌دست‌آوردن خیز و تنش‌های ورق هدفمند چهار طرف تکیه‌گاه ساده، که بار عرضی یکنواخت روی سطح بالای آن وارد می‌شود، استفاده شد. شرایط مرزی ورق به‌طور دقیق با حل ناویر ارضا شدند. نشان داده شد که این تئوری نه تنها برای ورق‌های نازک و نیمه‌ضخیم بلکه برای ورق‌های ضخیم نیز نتایج بسیار نزدیک به جواب‌های حاصل از حل تئوری الاستیسیته سه‌بعدی ارائه می‌کند. مزیت این تئوری این است که برخلاف تئوری‌های برشی ورق، در آن از کرنش قائم برون‌صفحه‌ای صرف‌نظر نشده و همچنین خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نمی‌شود. همچنین دست‌یابی و حل معادلات حاکم بر ورق با استفاده از این تئوری بسیار آسان‌تر از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی است.

## ۷- مراجع

1. Batra, R.C. and Vidoli, S. "Higher Order Piezoelectric Plate Theory Derived from a Three-Dimensional Variational Principle", AIAA Journal, Vol. 40, No. 1, pp. 91-104, 2002.
2. Reissner, E. "On The Theory of Bending of Elastic Plates", Journal of Mathematics and Physics, Vol. 23, NO. 2, pp. 184-91, 1944.
3. Mindlin, R.D., and Schaknow, A., and Deresiewicz, H. "Flexural Vibration of Rectangular Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, NO. 2, pp. 430-436, 1956.
4. Reddy, J. N. "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, No. 4, pp. 745-752, 1984.
5. Reddy, J.N. "Analysis of Functionally Graded Plates". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, pp. 663-684, 2000.
6. Yang, Z.G., Zhong, Z., and Dai, Y. "Three Dimensional Elasticity Analysis of a Functionally Graded Rectangular Plate", Chinese Quarterly Mechanic. China, 2004.
7. Ashraf, M., and Zenkour. "Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates". Mathematical Modelling, Vol. 30, No. 1, pp. 67-84, 2006.
8. Batra, R.C., and Aimmanee, S. "Vibrations of Thick Isotropic Plates With Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theories", Computers and Structures, Vol. 83, No. 12, pp. 934-955, 2005.
9. Batra, R.C. "Higher Order Shear and Normal Deformable Theory for Functionally Graded Incompressible Linear Elastic Plates", Thin-Walled Structures, Vol. 45, No. 2, pp. 974-982, 2007.

معادلات حاکم بر خمش ورق:

$$\begin{aligned}
 Eq\ 1): & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)(1-v)}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \right] \right. \\
 & \left. - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \right\} \\
 & + \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)(1-v)}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] \right\} + \\
 & \tilde{W}^{dmn} \left\{ D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \right] - \right. \\
 & \left. D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \right] \right\} = 0 \\
 Eq\ 2): & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)(1-v)}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] \right\} \\
 & + \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)(1-v)}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 \right] \right. \\
 & \left. - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \right\} + \\
 & \tilde{W}^{dmn} \left\{ D_{dc} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] - \right. \\
 & \left. D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \left[ \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] \right\} = 0 \\
 Eq\ 3): & \tilde{V}_1^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \left[ D_{cd} \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \right] \right. \\
 & \left. + D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right) \right] \right\} + \\
 & \tilde{V}_2^{cmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \left[ D_{cd} \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] + \right. \\
 & \left. D_{ab} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c \frac{E(z)v}{(1+v)(1-2v)} dz \left[ \left(\frac{n\pi}{l_2}\right) \right] \right\} + \\
 & \tilde{W}^{dmn} \left\{ -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \left[ \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - D_{ab} D_{cd} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d \frac{E(z)}{2(1+v)} dz \right\} + P(x, y) L_a \left(\frac{-h}{2}\right) = 0
 \end{aligned}$$