

ارائه روش‌های المان برشی کامل و منتخب در تحلیل پس‌روی

گرین‌های سوخت جامد با روش مجموعه سطوح

محمد مهدی قیصری^۲

سید مهدی میرساجدی^۱

سازمان صنایع دفاع

دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین

دانشگاه شهید بهشتی

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۳/۱۸)

چکیده

در این تحقیق به منظور توصیف عددی دقیق‌تر پس‌روی گرین‌های دوبعدی با روش مجموعه سطوح، روش المان برشی ارائه و بررسی می‌شود. در این روش با تشکیل یک شبکه زمینه کارترین و تعیین تابع حداقل فاصله نسبت به مرز گرین، سلول‌های دربردارنده مرز مشخص می‌شوند. به منظور بررسی وضعیت مرز نسبت به سلول‌های شبکه، دو الگوریتم المان برشی کامل و منتخب در نظر گرفته شده و مقادیر طول مرز و مساحت محصور در هر المان محاسبه می‌شوند؛ الگوریتم کامل مورد استفاده شامل کلیه حالات ممکن (۳۰ حالت) برای برش یک مستطیل (المان) توسط پاره‌خط‌های مختلف (مرز) می‌باشد. اما در الگوریتم منتخب تنها حالات پرکاربرد مبنای عملکرد قرار می‌گیرند. برای اعتبارسنجی و مقایسه دو الگوریتم ارائه شده، ابتدا پس‌روی چند گرین ساده با روش مجموعه سطوح انجام و نتایج سه روش کلاسیک، المان برشی کامل و منتخب با حل تحلیلی آن مقایسه می‌شود. در ادامه با تحلیل پس‌روی چند گرین پیچیده تأثیر دو الگوریتم کامل و منتخب بر روی زمان اجرا سنجیده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند اگرچه روش المان برشی نسبت به روش کلاسیک زمان اجرا را افزایش می‌دهد اما دقت حل نیز به میزان قابل توجهی بهبود می‌یابد. از سوی دیگر با استفاده از الگوریتم منتخب می‌توان با داشتن دقتی نزدیک به الگوریتم کامل، زمان اجرا را کاهش داد.

واژه‌های کلیدی: سوخت جامد، پس‌روی گرین، المان برشی، روش مجموعه سطوح

Implementation of Full and Selected Cut Cell Method in Grain Burnback Analysis for Solid Rocket Motors According to Level Set Method

S.M. Mirsajedi

M.M. Gheisari

New Technologies and Engineering Faculty
Shahid Beheshti University

Defense Industries Organization

(Received: 24/April/2013; Accepted: 8/July/2014)

ABSTRACT

In this research, cut cells level set method despite of classic level set method is presented to evaluate more accurate grain burn-back analysis. This method is included of a Cartesian grid and by determination of the minimum distance to the grain boundary, boundary cells are specified. In order to investigate grain boundary condition with respect to Cartesian grids, two algorithms of perfect cut cells and selected cut cells are considered. In the perfect algorithm, all possible states (thirty states) for cutting cells by boundary lines, are considered. However, in the selected algorithm, more application states are considered. Comparison of results between classic, perfect and selected cut cells level set method prove, that CPU time increase, from classic to cut cells methods. However, accuracy of results increases also. The results of the selected method have a similar accuracy with a significant reduction in CPU time with respect to perfect method.

Keywords: Solid Propellant, Grain Burnback, Cut Cell, Level Set Method

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): m_mirsajedi@sbu.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: fbd_mc@yahoo.com

۱- مقدمه

در طراحی سیستمی وسیله‌های پرنده سوخت جامد، اولین گام تعیین الزامات مأموریت است که طی آن منحنی تراست زمان مشخص می‌گردد. تعیین این منحنی نیازمند تخمین فشار محفظه احتراق است که باید از محاسبات بالستیک داخلی موتور به ست آید. به‌عنوان مثال اگر حل‌کننده صفر بعدی جریان در نظر گرفته شود، تغییرات فشار درون موتور وسیله پرنده برحسب زمان و با رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{RT_f}{V^{(t)}} [\rho_p A_b^{(t)} \dot{r} - C_D A_{th} P] \quad (1)$$

در این رابطه، $A_b^{(t)}$ سطح سوزش سوخت است که در هر گام زمانی دارای مقادیر متفاوتی می‌باشد [۱]. به‌عبارت دیگر در اثر سوختن سطح پیشران، هندسه گرین تغییر می‌کند و تغییر در هندسه، تغییر سطح سوزش را به‌دنبال دارد. پس برای تحلیل بالستیک داخلی و در نتیجه طراحی یک موتور سوخت جامد باید تغییرات سطح سوزش در هر لحظه محاسبه گردد.

از طرف دیگر یکی از مهم‌ترین بخش‌های تأثیرگذار بر خصوصیات عملکردی وسیله پرنده، طراحی گرین است. یک گرین مناسب باید دارای کمترین پیشران باقی‌مانده، عدم سوزش فرسایشی و کمترین جابه‌جایی مرکز جرم در زمان سوزش باشد. پس در هر مرحله از طراحی، باید گرین موردنظر از تمام این جهات مورد ارزیابی قرار گیرد که ساده‌ترین راه آن مشاهده و تحلیل پروفیل پس‌روی می‌باشد. در مجموع با توجه به مطالب بیان شده، می‌توان گفت مقدمه طراحی و تحلیل یک موتور سوخت جامد، تحلیل پس‌روی گرین می‌باشد؛ از آنجاکه این تحلیل در واقع بررسی مرز متحرک و صرفاً یک تحلیل ریاضی و عددی است، صرف‌نظر از جریان داخلی و اثرات حرارتی انجام خواهد شد [۲]. تحلیل پس‌روی گرین به دو صورت تحلیلی و عددی انجام می‌گیرد [۳]. روش‌های تحلیلی هندسه گرین را به‌شکل‌های ساده‌تری مثل مکعب، کره، هلالی و یا هرمی تقسیم و مساحت سطح سوزش و سطح گذرگاه جریان را در هر گام زمانی محاسبه می‌کنند. به‌عنوان مثال می‌توان به کد SPP اشاره کرد که از سه روش تحلیل دوبعدی، متقارن محوری و سه‌بعدی استفاده می‌کند. بسته به پیچیدگی و زمان محاسبات و دقت مورد نیاز، کاربر باید یکی از سه روش را انتخاب کند [۴].

به‌دلیل عدم توانایی روش‌های تحلیلی در بررسی گرین‌هایی با اشکال پیچیده بهتر است از روش‌های عددی استفاده شود. روش‌های عددی برای تحلیل پس‌روی عموماً مرز متحرک بین

گاز و پیشران جامد را بررسی کرده که به دو دسته کلی تعقیب مرز (لاگرانژی) و تسخیر مرز (اویلری) تقسیم می‌شوند. در دسته اول نقاط شبکه گسترش یافته و مرز متحرک را دنبال می‌کنند و در دسته دوم نقاط شبکه ثابت هستند.

در مطالعات گذشته همواره تحلیل عددی پس‌روی گرین مورد توجه بوده است. در سال ۱۹۸۹، ساینوت^۱ و همکارانش یک کد کامپیوتری را برای تحلیل پس‌روی گرین به‌صورت تابعی از فاصله سوزش و نرخ سوزش محلی ارائه دادند [۵]. در سال ۱۹۹۴، حجل^۲ و همکارانش با استفاده از شبکه انطباقی، تحلیل پس‌روی را روی یک هندسه دوبعدی متقارن انجام دادند [۶]. در سال ۱۹۹۷، کاسالینو^۳ و همکارانش با استفاده از یک شبکه نقطه‌ای ثابت روی گرین، تحلیل پس‌روی دوبعدی را با استفاده از پیگیری مرز گاز - جامد در داخل موتور انجام دادند [۷]. در سال ۲۰۰۸، پوسکولسیو^۴ و همکارانش با استفاده از مدل‌سازی حجمی سوخت جامد، تحلیل پس‌روی را روی گرین موتور سوخت جامد انجام دادند. آنها در مقاله خود تحلیل پس‌روی دوبعدی را با نرم‌افزار اتوکد انجام دادند [۸].

به‌طور کلی تمام روش‌هایی که برای تحلیل پس‌روی گرین به‌کار می‌روند از سه مرحله ساخت مرز اولیه، گسترش مرز و بازسازی مرز جدید برای محاسبه پارامترهایی مانند مساحت سوزش و مساحت گذرگاه جریان تشکیل شده‌اند. در این بین روشی که برای گسترش مرز و محاسبه پارامترها استفاده می‌شود در دقت نتایج بسیار موثر است. در این مطالعه برای گسترش مرز از روش مجموعه سطوح که دقت بالایی در پیگیری مرزها دارد استفاده می‌شود و هدف ارائه روشی کارا برای محاسبه پارامترهای محیط و مساحت سوزش می‌باشد.

۲- فرمول‌بندی مرز متحرک

اگر یک منحنی محدب نباشد، طی حرکت خیلی سریع همواریش را از دست می‌دهد و همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود یک نقطه نوک‌تیز به‌وجود می‌آید.

از طرفی در نقاط گوشه نمی‌توان بردار عمود بر سطح را تعریف کرد لذا در این نقاط برای ادامه روند حل، یک حل ضعیف لازم است. یکی از روش‌هایی که برای حل ضعیف به‌کار برده می‌شود، قاعده هایگنز است. طبق این قاعده، موج‌های

1- Saintout

2- Hejl

3- Casalino

4- Püskülcü

در صورت گسترش مرز با سرعت مثبت یا منفی که منجر به پیشروی یا پس‌روی شدن حرکت مرز می‌شود، ممکن است مرز از یک نقطه (x, y) بیش از یک‌بار عبور کند. لذا تابع زمان $T(x, y)$ دیگر یک تابع تک‌مقداری نیست و باید فرمول‌بندی مقدار اولیه به کار گرفته شود. برای این کار موقعیت اولیه مرز به عنوان یک مجموعه سطوح صفر از یک تابع با بعد بالاتر φ در نظر گرفته می‌شود.

برای به دست آوردن معادله حرکت تابع مجموعه سطح φ و ترکیب مجموعه سطح صفر φ با توسعه مرز، ابتدا و مطابق با رابطه (۴) لازم است مقدار مجموعه سطح یک جزء روی مرز صفر باشد:

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad (4)$$

با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\varphi_t + \nabla \varphi(x(t), t) \cdot x'(t) = 0 \quad (5)$$

از آنجا که $n = \nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ و $x'(t) \cdot n = F$ ، لذا معادله توسعه مرز φ به صورت رابطه (۶) به دست می‌آید:

$$\varphi_t + F |\nabla \varphi| = 0, \varphi(x, t = 0) \quad (6)$$

این رابطه مجموعه سطح وابسته به زمان است.

هر دو فرمول‌بندی (۳) و (۶) جدا از اینکه از دیدگاه اوپلری استفاده می‌کنند در تمامی ابعاد اعم از یک، دو و یا سه‌بعدی بدون تغییر می‌مانند؛ بدون نیاز به تفکیک یا ترکیب منحنی‌ها و سطوح، توانایی منطبق شدن به هر مرز دلخواهی را دارند و هر دو را می‌توان با روش‌های محاسباتی تقریب زد. اما تحلیل پس‌روی بسته به درون‌سوز یا بیرون‌سوز بودن گرین موردنظر، می‌تواند دارای توابع سرعت مثبت یا منفی باشد و لذا فقط برای گرین‌های درون‌سوز می‌توان از فرمول‌بندی مقدار مرزی استفاده نمود، در حالی که فرمول‌بندی مقدار اولیه برای انواع گرین‌ها جوابگو است. در مجموع فرمول‌بندی مقدار اولیه برای مسئله تحلیل پس‌روی گرین انتخاب می‌شود.

۳- تقریب عددی برای حل مسئله مقدار اولیه

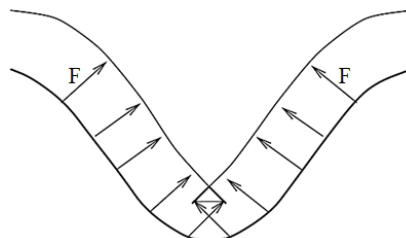
برای به دست آوردن معادله مجموعه سطوح، ابتدا رابطه (۶) به شکل عمومی معادله همیلتونین نوشته می‌شود:

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = 0 \quad (7)$$

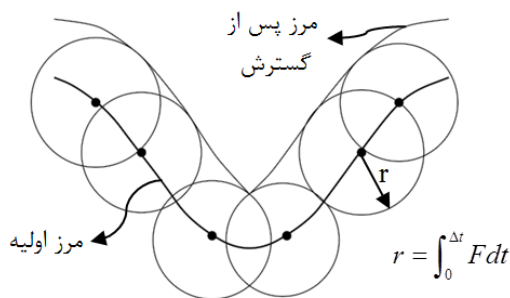
که در رابطه (۷)، همیلتونین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (8)$$

دایروی پیش‌رونده در هر نقطه روی منحنی با شعاع متناسب با سرعت حرکت منحنی (F)، رسم می‌شوند و همان‌گونه که در شکل ۲ نشان داده شده، موقعیت جدید منحنی به دست می‌آید.



شکل (۱): تشکیل نقطه نوک تیز در اثر گسترش مرز.



شکل (۲): حل هایگنز برای مسئله مرز متحرک.

از آنجا که در مسئله پس‌روی گرین نیاز به بررسی اشکال مختلفی از گرین است، باید عملکرد روش حل مشابه قاعده هایگنز باشد. بدین منظور در روش تسخیر مرز، دو فرمول‌بندی مقدار مرزی و مقدار اولیه مورد توجه قرار می‌گیرند. فرمول‌بندی مقدار مرزی برای حالتی است که سرعت حرکت مرز در محدوده حل مثبت باشد؛ در این حالت برای مشخص کردن موقعیت مرز در حال گسترش، باید زمانی که مرز به هر نقطه (x, y) از شبکه زمینه می‌رسد محاسبه شود $(T(x, y))$. با استفاده از اینکه فاصله برابر با سرعت ضرب در زمان است، می‌توان معادله تابع را در یک بعد به صورت زیر نوشت [۹]:

$$\frac{dT}{dx} F = 1 \quad (2)$$

در حالت کلی، ∇T بر مجموعه سطوح T عمود است و شبیه به حالت یک‌بعدی در حالت کلی نیز مقدار ∇T با معکوس سرعت متناسب است:

$$|\nabla T| F = 1 \quad (3)$$

در رابطه (۳)، T روی Γ برابر صفر است و Γ موقعیت اولیه مرز و در واقع یک شرط مرزی است.

۴- تعیین تابع حداقل فاصله

طبق رابطه (۱۵) برای تحلیل تحولات مرز با روش مجموعه سطوح ابتدا باید موقعیت اولیه مرز یا مجموعه سطوح صفر تعیین شود تا با به روزرسانی آن بتوان تحولات مرز را در گام‌های بعد پیگیری کرد.

تابع فاصله یا تابع مجموعه سطح، φ ، به صورت حداقل فاصله بین یک نقطه از شبکه با مرز مورد نظر تعریف می‌شود. در تعیین موقعیت نقاط شبکه نسبت به مرز، تابع فاصله با توجه قوانین زیر تصحیح می‌شود:

۱- اگر نقطه شبکه در داخل مرز واقع شده باشد، مقدار

حداقل فاصله در ۱- ضرب می‌شود،

۲- اگر نقطه شبکه در خارج از مرز باشد، مقدار حداقل

فاصله بدون تغییر باقی می‌ماند و

۳- اگر نقطه شبکه دقیقاً روی مرز قرار گیرد، حداقل فاصله

صفر در نظر گرفته می‌شود.

طبق تعریف، برای تعیین تابع حداقل فاصله با ایجاد یک شبکه زمینه، صفحه‌ای که گرین در آن قرار دارد به نقاطی

منفرد تجزیه و روند زیر دنبال می‌شود:

۱- محاسبه فاصله مرز با نقاط،

۲- انتخاب کمترین مقدار به عنوان تابع فاصله گره (φ_{ij}) ،

۳- تکرار این عمل برای کلیه نقاط،

۴- تعیین وضعیت نقاط نسبت به مرز و

۵- تصحیح مقدار تابع فاصله برای نقاط داخلی.

۵- تعیین سطح گذرگاه جریان و محیط سوزش

هدف اصلی از تحلیل پس‌روی گرین، محاسبه دو پارامتر محیط سوزش و سطح گذرگاه جریان است. با توجه به دقت بالای روش مجموعه سطوح در پیگیری مرزهای متحرک [۱۰]، میزان دقت نتایج را می‌توان به دقت الگوریتم محاسباتی مورد استفاده وابسته دانست. بنابراین با هدف رسیدن به دقت مطلوب، ابتدا الگوریتم محاسباتی متداول بررسی شده و در ادامه روش جدیدی برای محاسبه این دو پارامتر ارائه می‌شود.

۵-۱- روش کلاسیک

در الگوریتم اصلی تحلیل پس‌روی گرین با روش مجموعه سطوح مراحل کار برای تعیین سطح و محیط سوزش به صورت زیر است [۱۱]:

از طرف دیگر با در نظر گرفتن فرم یک‌بعدی و اسکالر قانون بقاء هایپربولیک (رابطه (۹)) و با استفاده از تقریب اختلاف محدود، معادله بقاء به صورت رابطه (۱۰) بازنویسی می‌شود.

$$u_t + [G(u)]_x = 0 \quad (9)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{\Delta x} \quad (10)$$

برای یافتن مقادیر جدید φ می‌توان از یک تقریب اختلاف مرکزی استفاده کرد؛ بنابراین در فضای دوبعدی معادله همیلتونین $\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = 0$ به صورت رابطه (۱۱) تقریب زده خواهد شد.

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - \Delta t g \left(\frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x}, \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \quad (11)$$

در ادامه شار به گونه‌ای باید انتخاب شود که شکل بقای معادله حفظ و یک جواب هموار با دقت بالا و به دور از ناپیوستگی ایجاد شود. یکی از ساده‌ترین تقریب‌های عددی شار، روش انکوویست-اوشر^۱ است، که توسط رابطه (۱۲) تعیین می‌گردد.

$$g_{EO}(u_1, u_2) = G(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} \min\left(\frac{dG}{du}, 0\right) du \quad (12)$$

برای معادله برگرز که در آن، $G(u) = u^2$ و با خلاصه کردن اجزا، تابع شار به صورت رابطه (۱۳) به دست می‌آید.

$$g_{EO}(u_1, u_2) = (\max(u_1, 0))^2 + \min(u_2, 0)^2 \quad (13)$$

لذا با اعمال روش EO، رابطه (۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$g(u_1, u_2, v_1, v_2) = (\max(u_1, 0))^2 + \min(u_2, 0)^2 + \max(v_1, 0)^2 + \min(v_2, 0)^2 \quad (14)$$

و در نهایت معادله مجموعه سطح به صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - \Delta t (\max(F, 0) \nabla^+ + \min(F, 0) \nabla^-) \quad (15)$$

که مقادیر ∇^+ و ∇^- با استفاده از رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= [\max(D_{i,j}^{-x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \\ &\quad \max(D_{i,j}^{-y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2]^{0.5} \\ \nabla^- &= [\max(D_{i,j}^{+x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \\ &\quad \max(D_{i,j}^{+y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y} \varphi_{i,j}^n, 0)^2]^{0.5} \end{aligned} \quad (16)$$

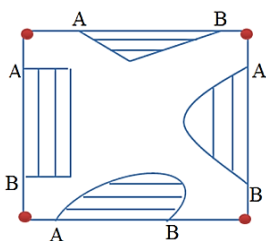
این روش، مجموعه سطح ارائه شده توسط ستیان است [۱۰].

در محاسبه طول AB از فرضیات زیر استفاده می‌شود:

۱- منحنی AB به صورت یک خط در نظر گرفته می‌شود؛

۲- منحنی مورد نظر حداقل دو وجه المان را قطع می‌کند.

با توجه به این فرضیات، حالات نشان داده شده در شکل ۵ حالات نامعتبر محسوب می‌شوند، اما چون این روش برای توصیف حرکت مرز یک گرین به کار می‌رود و اندازه المان‌های مدنظر کوچک هستند این حالات در عمل یا رخ نمی‌دهد یا تأثیر بسیار کمی دارند.



شکل (۵): حالات نامعتبر برای برش المان توسط مرز.

بیان شد اگر گره‌ای داخل شبکه اولیه قرار گیرد تابع فاصله آن منفی خواهد بود، پس در هر المان اگر دو گره واقع بر یک یال دارای تابع فاصله هم‌علامت نباشند، بدین معنی خواهد بود که مرز آن یال را قطع کرده است. بر این اساس و با در نظر گرفتن شکل ۴، مختصات نقاط تقاطع محاسبه می‌شود؛

۱- یال I (۲-۱)

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 < 0 \Rightarrow \quad (19)$$

$$x_{cut} = x_1 + \frac{|\varphi_1|}{|\varphi_1| + |\varphi_2|} dx \quad \text{و} \quad y_{cut} = y_1$$

۲- یال II (۴-۲)

$$\varphi_2 \cdot \varphi_4 < 0 \Rightarrow \quad (20)$$

$$x_{cut} = x_2 \quad \text{و} \quad y_{cut} = y_2 + \frac{|\varphi_2|}{|\varphi_2| + |\varphi_4|} dy$$

۳- یال III (۳-۴)

$$\varphi_1 \cdot \varphi_3 < 0 \Rightarrow \quad (21)$$

$$x_{cut} = x_1 \quad \text{و} \quad y_{cut} = y_1 + \frac{|\varphi_1|}{|\varphi_1| + |\varphi_3|} dy$$

۴- یال IV (۱-۳)

$$\varphi_4 \cdot \varphi_3 < 0 \Rightarrow \quad (22)$$

$$x_{cut} = x_3 + \frac{|\varphi_3|}{|\varphi_3| + |\varphi_4|} dx \quad \text{و} \quad y_{cut} = y_3$$

برای اعمال روش المان برشی دو الگوریتم متفاوت در نظر گرفته می‌شود؛ گرچه مبنای هر دو الگوریتم یکسان است، اما

۱- برای هر گره از شبکه کارترین علامت تابع فاصله بررسی و تعداد گره‌هایی که دارای تابع فاصله منفی هستند محاسبه می‌شود. $(\sum \varphi_{i,j}^n < 0)$

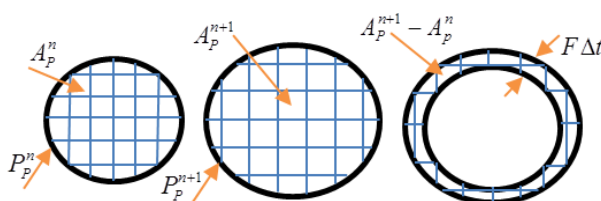
۲- مطابق با شکل ۳ و با کمک رابطه (۱۷) مساحت گذرگاه جریان (A_p) محاسبه می‌شود و

$$A_p = (\sum \varphi_{i,j}^n < 0) \times \Delta x \Delta y \quad (17)$$

۳- با استفاده از مقادیر فوق و رابطه (۱۸) محیط سوزش به دست می‌آید.

$$P_b = \frac{A_p^{n+1} - A_p^n}{F \Delta t} \quad (18)$$

در این رابطه n و $n+1$ پس‌روی در دو گام متوالی، Δt نمو زمانی و F سرعت پس‌روی مرز یا همان سرعت سوزش است.

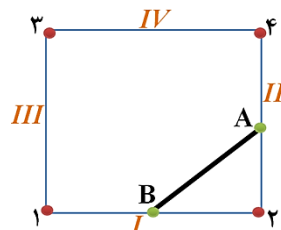


شکل (۳): محاسبه محیط سوزش در روش کلاسیک.

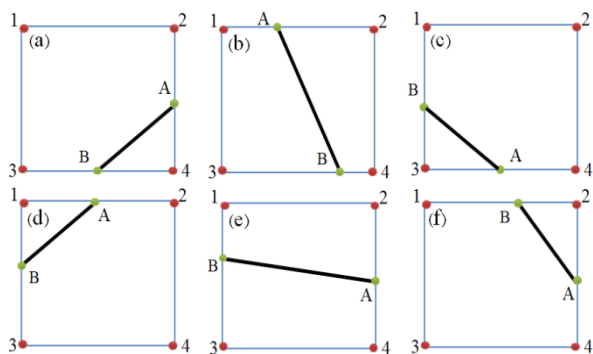
۵-۲- روش المان برشی

یکی از علت‌های نامناسب بودن روش کلاسیک، تخمین محیط یا مساحت بر اساس تعداد المان‌های مستطیلی داخلی و عدم توجه به المان‌های مرزی است. بنابراین روشی ارائه می‌شود که در آن المان‌هایی که توسط مرز برش می‌خورند مستقیماً در نظر گرفته شوند. در این روش هدف اول یافتن اندازه خطوطی است که المان‌ها را قطع کرده‌اند و هدف دوم محاسبه مساحت ایجاد شده در هر المان برشی می‌باشد.

همان‌گونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، در حالت دوبعدی المان‌ها مستطیلی و تقاطع مرز با المان، خطی به طول AB است. در این المان ۱، ۲، ۳ و ۴ رئوس المان مستطیلی و A و B نقاطی هستند که در آن مرز المان را قطع می‌کند.

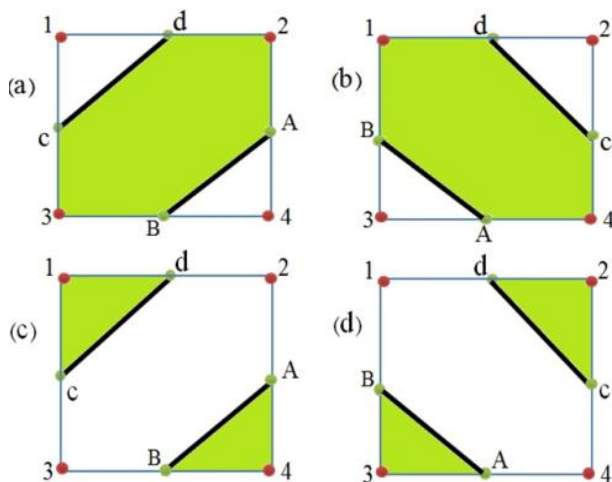


شکل (۴): المان مستطیلی قطع شده توسط مرز AB.



شکل (۶): حالات معتبر برای برش المان در دو نقطه.

در صورتی که این چهار حالت ممکن برای تعقیب مرز گرین‌ها مورد بررسی قرار گیرد، مشخص می‌شود که به دلیل ابعاد کوچک شبکه زمینه عملاً هیچ‌گاه حالات a و b رخ نخواهد داد. بنابراین حالات معتبر دسته دوم محدود به c و d می‌شود.



شکل (۷): حالات برش المان در بیش از دو نقطه (دسته دوم).

در دسته دوم برای محاسبه مقدار مرزی که المان را برش داده، کفایت با روابط (۱۹) تا (۲۲)، مختصات نقاط A، B، c و d و در نتیجه اندازه مجموع AB و cd را محاسبه کرد. از طرفی با داشتن مختصات نقاط A، B، c و d و محاسبه مجموع مساحت دو مثلث (برای مثال A3B و A3c در شکل ۷)، می‌توان مقدار مساحت گرین محصور در المان را یافت.

ج- دسته سوم

اگر مقدار تابع فاصله در یک یا چند رأس المان صفر باشد، یا به عبارت دیگر مرز از یک یا چند رأس المان عبور کند، مرز گرین در ۲۲ حالات می‌تواند المان را برش دهد.

نحوه پیاده‌سازی و تعداد حالات در نظر گرفته‌شده در هر الگوریتم متفاوت است.

۵-۲-۱- روش المان برشی کامل

در روش المان برشی کامل، کلیه حالات ممکن برای برش یک مستطیل (المان) توسط پاره‌خط‌های مختلف (مرز) بررسی می‌شود. بر این اساس ۳۰ حالت مختلف وجود دارد که می‌توان آنها را در سه دسته مجزا توصیف کرد. در دسته اول و دوم هر المان به ترتیب توسط یک و دو مرز برش داده می‌شود و دسته سوم شامل حالات مرزی می‌باشد.

الف- دسته اول

همان‌گونه که در شکل ۶ نشان داده شده، اگر قرار باشد تقاطع مرز و المان تنها در دو نقطه رخ دهد، شش حالت مجزا را می‌توان تصور نمود.

برای محاسبه طول AB کفایت مختصات نقاط A و B را با یکی از روابط (۱۹) تا (۲۲) محاسبه و با استفاده از رابطه آشنای (۲۳) فاصله نقاط را به دست آورد.

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad (23)$$

برای محاسبه مقدار مساحتی از گرین که درون المان قرار دارد ابتدا باید مشخص کرد که گرین در کدام سمت مرز AB قرار دارد. بدین منظور علامت تابع حداقل فاصله در دو رأس متفاوت در دو سمت خط AB بررسی و مساحت بخشی که شامل تابع حداقل فاصله منفی است.

ب- دسته دوم

بر حسب علامت تابع فاصله در چهار رأس المان، می‌توان حالاتی را در نظر گرفت که در آن مرز در بیش از دو نقطه المان را برش دهد. با توجه به شکل ۷ می‌توان گفت اگر تابع فاصله در نقاط ۲ و ۳ منفی (مثبت) و در ۱ و ۴ مثبت (منفی) باشد یکی از حالات a یا d یا c یا b ممکن است رخ دهد.

$$P_b = \sum_{i=j=1}^{n,m} AB_{i,j} \quad (24)$$

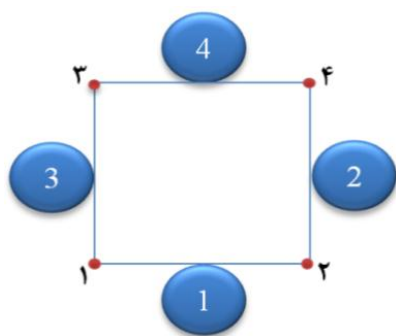
اما برای محاسبه مساحت گذرگاه جریان، تمام المان‌های شبکه زمینه از نظر علامت $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ بررسی شده و به‌ازای تعداد المان‌هایی که منفی باشد (n) به مساحت موجود به اندازه $dx.dy$ اضافه می‌شود.

$$A_p = \sum_{i=j=1}^{n,m} S_{i,j} + n.dx.dy \quad (25)$$

۵-۲-۲- روش المان برشی منتخب

در روش المان برشی منتخب، از میان ۳۰ حالتی که مرز می‌تواند المان را برش دهد، تنها حالات پرکاربرد (حالت‌های دسته اول و دوم) مدنظر قرار می‌گیرند. بر این اساس الگوریتم خاص و هدفمندی به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

گام ۱: مانند شکل ۹، ابتدا رئوس و یال‌های المان به‌صورت قراردادی شاخص‌گذاری می‌شوند.



شکل (۹): شاخص‌گذاری رئوس و یال‌های المان.

گام ۲: مقادیر تابع فاصله در رئوس بررسی می‌شود و به‌ازای هر مقدار منفی، متغیری به نام "Rank" براساس الگوی زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{If } \varphi_1 < 0 &\Rightarrow \text{Rank} = 1 \\ \text{If } \varphi_2 < 0 &\Rightarrow \text{Rank} = 2 \\ \text{If } \varphi_3 < 0 &\Rightarrow \text{Rank} = 4 \\ \text{If } \varphi_4 < 0 &\Rightarrow \text{Rank} = 8 \end{aligned} \quad (26)$$

گام ۳: با توجه به تعداد رئوسی که دارای تابع فاصله منفی هستند مقدار کل "Rank" محاسبه می‌شود.

گام ۴: فراخوانی ردیف N ام از "جدول برش"؛ که مقدار N برابر با مقدار Rank و جدول برش به‌صورت جدول ۱ می‌باشد.

گام ۵: یافتن مختصات نقاط برش با روابط (۲۲-۱۹).

گام ۶: محاسبه P_b و A_p با روابط (۲۵-۲۴).

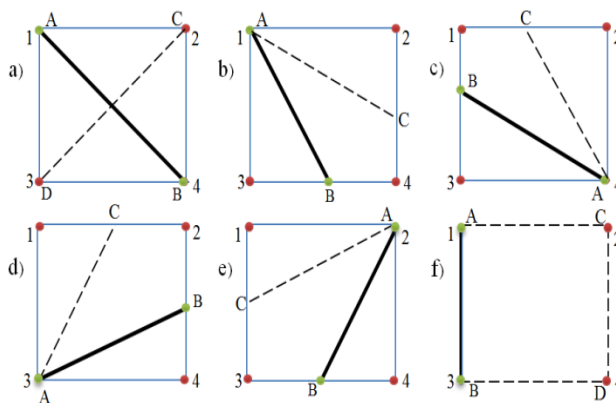
با توجه به شکل ۸، این ۲۲ حالت را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

۱- مرز با عبور از یک رأس، یک یال را قطع کند. مانند برش المان‌های a, b, c, d و e توسط پاره‌خط‌های AB و AC. (حالت ۸)

۲- مرز در دو رأس المان را قطع کند. مانند برش المان a با پاره‌خط‌های AB و CD، یا برش المان f با پاره‌خط‌های AC, BD. (حالت ۶)

۳- مرز با عبور از یک رأس، دو یال را قطع کند. مانند برش المان‌های a, b, c, d, e. (حالت ۴)

۴- مرز مماس بر دو یال، از سه رأس المان عبور کند. مانند عبور مرز از رئوس A, B, C و یال‌های AB و AC، در المان f. (حالت ۴)



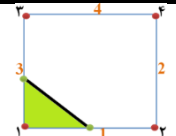
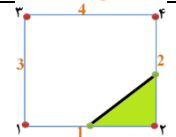
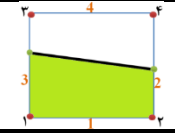
شکل (۸): حالات معتبر برای برش المان توسط مرز گذرنده از رئوس (دسته سوم).

در هر دو حالت برش المان a، اندازه مرز برابر قطر المان است. در هر چهار حالت المان f نیز طول یا عرض المان بیان‌گر اندازه مرز می‌باشد. در سایر حالات نیز مانند المان‌های دسته اول و دوم، با محاسبه مختصات نقطه تقاطع مرز با المان می‌توان اندازه مرز در المان را به‌دست آورد.

در المان a مقدار مساحت گرین برابر با نصف مساحت کل المان است و در المان f نیز بسته به علامت تابع فاصله (مثبت) در رئوسی که مرز از آن عبور نمی‌کند (۲ و ۴) مقدار مساحت صفر یا برابر کل مساحت المان (صفر) می‌باشد. در سایر المان‌ها نیز با توجه به علامت تابع فاصله و مختصات نقاط تقاطع مقدار مساحت گرین در المان محاسبه می‌شود.

در مجموع پس از محاسبه طول خطوط مرزی و مساحت در تمام المان‌های شبکه زمینه، محیط سوزش مستقیماً از جمع جبری اندازه خطوط مرزی به‌دست می‌آید.

جدول (۲): شرح داده‌های جدول برش.

ردیف	المان	شاخص یال	شاخص برش	شاخص وضعیت
۱		۱ ۳	۱۱	۱
۲		۱ ۲	۱۱	۲
۳		۲ ۳	۱۲	۲ ۱

۶- اعتبارسنجی و تحلیل نتایج

با توجه به اینکه تحلیل پس‌روی گرین صرفاً یک کار ریاضی است و نتایجی که به‌صورت تجربی تغییرات سطح سوزش نسبت به ضخامت جان را بیان کند عملاً وجود ندارد، برای ارزیابی روش المان برشی ارائه‌شده، ابتدا نتایج پس‌روی با دو روش کلاسیک و المان برشی کامل با نتایج حل تحلیلی مقایسه خواهد شد؛ سپس با بررسی دو الگوریتم المان برشی کامل و منتخب الگوریتم مطلوب‌تر پیشنهاد می‌شود. برای اعتبارسنجی و مقایسه نتایج حل عددی، سه گرین استوانه‌ای، چهارضلعی و شش‌ضلعی با مشخصاتی به‌صورت جدول ۳ انتخاب می‌شود.

جدول (۳): مشخصات گرین‌های مفروض در اعتبارسنجی.

شماره گرین	نوع گرین	شعاع خارجی	شعاع داخلی / طول ضلع	ضخامت جان
۱	استوانه‌ای	۱۱۱	۴۱	۷۰
۲	چهارضلعی	۱۴۱	۱۰۰	۷۰
۳	شش‌ضلعی	۹۰	۲۰	۷۰

در انتخاب این گرین‌ها سه هدف مورد نظر است.

۱- هر سه گرین دارای حل تحلیلی‌اند.

۲- گرین‌های چهارضلعی و شش‌ضلعی دارای نقاط گوشه هستند و پیگیری نقاط گوشه از مهم‌ترین و دشوارترین نقاط در یک روش تسخیر مرز محسوب می‌شوند، به‌طوری‌که اگر یک روش عددی تسخیر مرز بتواند نقاط گوشه را با دقت پیگیری کرده و دچار خطا نشود، روش عددی مطلوبی خواهد بود [۱۰].

جدول برش (جدول ۱)، در واقع قلب این الگوریتم است؛ این جدول دارای ۱۵ سطر است، که نشان‌دهنده ۱۵ حالت پرکاربرد از تقاطع مرز و المان می‌باشد.

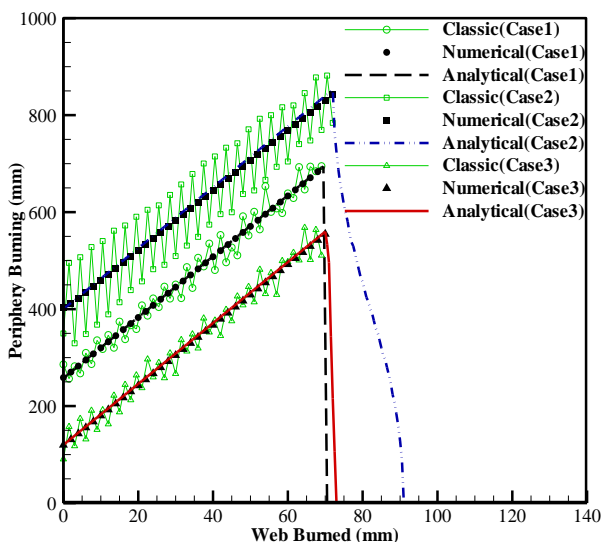
جدول (۱): بخشی از داده‌های جدول برش.

ردیف (N)	داده‌های برش المان						
۱	۱	۳	<u>۱۱</u>	۱	-۱	-۱	-۱
۲	۱	۲	<u>۱۱</u>	۲	-۱	-۱	-۱
۳	۲	۳	<u>۱۲</u>	۲	۱	-۱	-۱
.
۹	۱	۲	۳	۴	<u>۱۳</u>	۲	۳
.
۱۴	۱	۳	<u>۱۴</u>	۱	-۱	-۱	-۱
۱۵	<u>۱۵</u>	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱

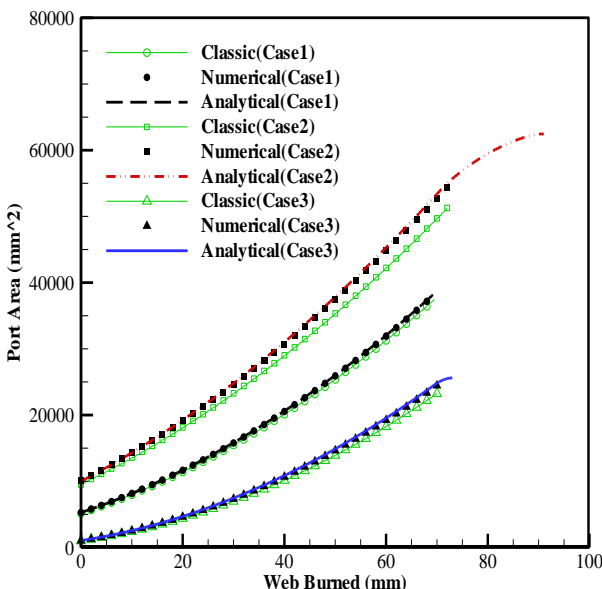
در هر ردیف از جدول برش، یک داده که شامل یکی از مقادیر ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و یا ۱۵ می‌باشد، از بقیه متمایز و "شاخص برش" نام‌گذاری می‌شود. این داده‌ها که به‌صورت دلخواه و قراردادی انتخاب شده‌اند، نشان‌دهنده نوع برش المان می‌باشند. به‌عنوان مثال مرز گرین می‌تواند یک مثلث (۱۱)، یک دوزنقه (۱۲)، دو مثلث (۱۳) و... را از المان جدا کند.

در جدول ۱، داده‌هایی که قبل از شاخص برش قرار دارند، بیانگر یال‌هایی از المان هستند که توسط مرز قطع شده‌اند و با عنوان "شاخص یال" نام‌گذاری می‌شوند. همچنین داده‌های بعد از شاخص برش و قبل از (-۱) نشان‌دهنده رؤسی از المان هستند که در داخل گرین (مرز) قرار دارند و شاخص وضعیت خوانده می‌شوند. درنهایت باید اضافه کرد که مقادیر منفی نشان‌دهنده این است که هیچ تقاطعی بین یال‌های المان و مرز وجود ندارد. با در نظر گرفتن موارد شرح داده‌شده، نحوه استخراج چند ردیف ابتدایی جدول برش در جدول ۲ تشریح شده است.

در مقایسه دو الگوریتم مطرح‌شده باید گفت، از نظر پیاده‌سازی الگوریتم المان برشی منتخب بسیار ساده‌تر است اما برای انتخاب روش مطلوب‌تر باید بررسی بیشتری در ادامه انجام شود.



شکل (۱۰): مقایسه محیط سوزش بر حسب جان سوخته شده برای سه گرین مفروض در جدول ۳.



شکل (۱۱): مقایسه سطح گذرگاه جریان بر حسب جان سوخته شده برای سه گرین مفروض در جدول ۳.

با توجه موارد فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر طی گام‌های پس‌روی تغییر ناگهانی در هندسه گرین به‌وجود نیاید و شبکه زمینه بسیار ریز در نظر گرفته شود، روش کلاسیک می‌تواند مساحت گذرگاه جریان را با دقت قابل‌قبولی محاسبه کند. گرچه مزیت روش کلاسیک در سادگی، زمان اجرای پایین و عدم نیاز به محاسبه مختصات نقاط مرزی است، اما با توجه به ضعف شدید آن در محاسبه محیط سوزش که اهمیت بالاتری

۳- با وجود سه نوع گوشه‌تیز (۹۰ درجه)، متوسط (۱۲۰ درجه) و پخ (گرین استوانه‌ای) می‌توان تأثیر گوشه‌ها را در دقت پس‌روی با روش المان برشی کامل و منتخب بررسی نمود.

۱-۶- بررسی روش‌های کلاسیک و المان برشی کامل

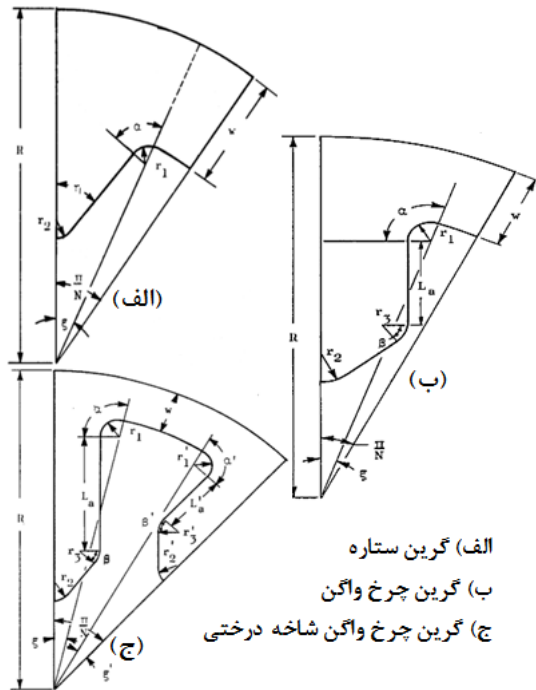
برای صحت‌گذاری، نتایج حل عددی دو روش کلاسیک و المان برشی کامل با نتایج حل تحلیلی مقایسه و به‌صورت جدول ۴ و شکل‌های ۱۰-۱۱ ارائه می‌شوند.

با توجه به نتایج جدول ۴ و نمودارهای ۱۰ و ۱۱، در مجموع می‌توان نتیجه گرفت روش مجموعه سطوح می‌تواند دقت مناسبی برای مسئله پس‌روی گرین ارائه دهد. همچنین مقایسه دو روش کلاسیک و المان برشی کامل نشان می‌دهد که:

- روش کلاسیک دارای زمان اجرای پایینی است.
- در روش کلاسیک با ریز کردن شبکه می‌توان A_p را با دقت مناسبی محاسبه کرد؛ اما تخمین P_b به‌صورت نوسانی و نامطلوب می‌باشد.
- در هر دو روش در نقاط گوشه‌تیز کمترین دقت و در گوشه‌های پخ کمترین مقدار خطا به‌وجود می‌آید.

جدول (۴): مقایسه نتایج حل عددی و تحلیلی.

اندازه شبکه	نوع گرین	بیشترین درصد	بیشترین زمان اجرا (sec)
		خطای P_b	خطای A_p
روش کلاسیک			
	استوانه‌ای	۲۸/۳۲	۸۳
۱۲۸×۱۲۸	چهارضلعی	۵۱/۲۳	۱۹۵
	شش‌ضلعی	۳۳/۴۶	۲۷
	استوانه‌ای	۱۳/۴۳	۱۵۸
۲۵۶×۲۵۶	چهارضلعی	۲۴/۴۶	۳۹۱
	شش‌ضلعی	۱۶/۱۱	۵۸
روش المان برشی کامل			
	استوانه‌ای	۰/۹۵	۱۶۷
۱۲۸×۱۲۸	چهارضلعی	۲/۲۵	۲۸۸
	شش‌ضلعی	۱/۵۸	۱۰۵
	استوانه‌ای	۰/۳۹	۳۴۲
۲۵۶×۲۵۶	چهارضلعی	۰/۸۸	۵۴۶
	شش‌ضلعی	۰/۶۸	۲۲۱



شکل (۱۲): پارامترهای سه گرین پیچیده مفروض [۱].

جدول (۶): اندازه پارامترهای سه گرین پیچیده مفروض.

الف) گرین ستاره							
N	R	W	r_1	r_2	η	ϵ	
۶	۱۵۰	۶۰	۱۰	۸	۳۳/۵۳	۰/۸۳	
ب) گرین چرخ واگن							
N	R	W	r_1	r_2	r_3	β	l_a
۶	۱۸۰	۸۰	۶	۸/۳۸	۵	۴۰	۴۴/۲۷
ج) گرین چرخ واگن شاخه درختی							
N	R	W	r_1	r_2	r_3	β	l_a
۶	۱۳۰	۴۰	۵	۲/۵۱	۶	۳۰	۴۶/۷
N	R	W	r_1'	r_2'	r_3'	β'	l_a'
۶	۱۳۰	۴۰	۵	۲/۵۱	۶	۳۰	۴۶/۷

الف) گرین ستاره
ب) گرین چرخ واگن
ج) گرین چرخ واگن شاخه درختی

جدول (۷): زمان اجرای دو روش المان برشی کامل و

منتخب.

روش منتخب	روش کامل	نوع گرین
۴۳۸ ثانیه	۵۶۲ ثانیه	ستاره
۶۱۲ ثانیه	۷۳۳ ثانیه	چرخ واگن
۳۳۵ ثانیه	۴۴۳ ثانیه	شاخه درختی

برای تحلیل بالستیک داخلی موتور دارد، باید از روش المان برشی بهره برد.

۲-۶- مقایسه المان برشی کامل و منتخب

با توجه به ماهیت یکسان دو روش المان برشی کامل و منتخب، مقایسه این دو روش تنها از لحاظ زمان اجرا و میزان دقت حائز اهمیت است. بنابراین با در نظر گرفتن سه گرین جدول ۳ و یک شبکه ۲۵۶×۲۵۶، دو روش در جدول ۵ مقایسه می‌شوند.

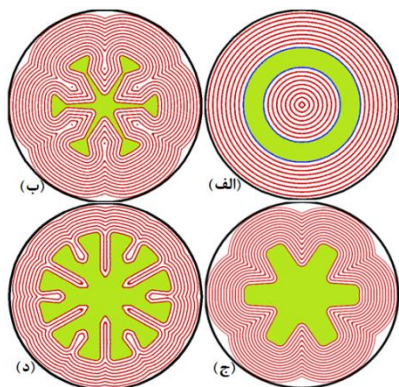
جدول (۵): مقایسه نتایج روش المان برشی کامل و منتخب.

نوع گرین	بیشترین درصد خطای P_b	بیشترین درصد خطای A_p	اجرا
روش المان برشی کامل			
استوانه‌ای	۰/۳۹	۰/۴۵	۳۴۲
چهارضلعی	۰/۸۸	۰/۹۸	۵۴۶
شش ضلعی	۰/۶۸	۰/۸۹	۲۲۱
روش المان برشی منتخب			
استوانه‌ای	۰/۳۹	۰/۴۵	۲۵۴
چهارضلعی	۰/۹۳	۱/۰۲	۴۲۲
شش ضلعی	۰/۷۱	۰/۹۱	۱۱۹

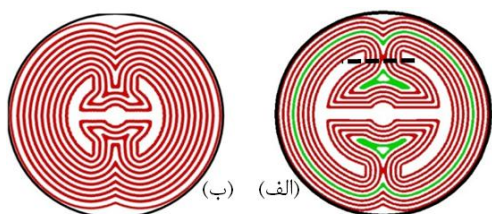
با دقت در هندسه سه گرین مفروض و درصد خطای حاصله می‌توان اظهار داشت که هرچه زاویه گوشه تیزتر باشد (گرین چهارضلعی) اختلاف درصد خطای دو روش المان برشی کامل و منتخب بیشتر است و از آنجاکه گرین‌های مرسوم دارای نقاط تیز نیستند، می‌توان پیش‌بینی کرد که در گرین‌های عملیاتی دو الگوریتم کامل و منتخب نتایج نزدیکی داشته باشند. برای تحقیق این موضوع سه گرین عملیاتی پیچیده (دارای بیشترین انحنا ممکن)، با مشخصات شکل ۱۲ و جدول ۶ انتخاب و ارزیابی می‌شوند.

به دلیل عدم وجود حل تحلیلی، پس‌روی هر سه گرین مفروض فقط با دو روش المان برشی کامل و منتخب بررسی شده و نتایج هر الگوریتم به صورت شکل‌های ۱۴-۱۳ و همچنین جدول ۷ ارائه می‌شود.

در مجموع مقایسه جدول ۷ و شکل‌های ۱۴-۱۳ نشان می‌دهد روش المان برشی منتخب با دقتی هم‌تراز با روش کامل، در زمان کمتری منتهی به نتیجه می‌شود. پس با مصالحه‌ای بین زمان اجرا و دقت حل می‌توان نتیجه گرفت که روش المان برشی منتخب مقرون به صرفه‌تر می‌باشد.

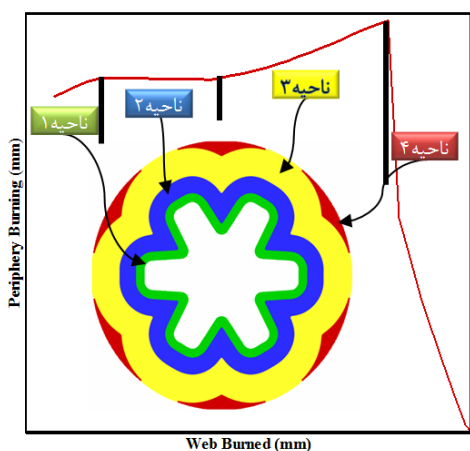


شکل (۱۵): پروفیل پس‌روی گرین‌های الف) استوانه‌ای درون‌سوز - بیرون‌سوز (ب) چرخ واگن (ج) ستاره شش‌پر مقعر (د) شاخه درختی.

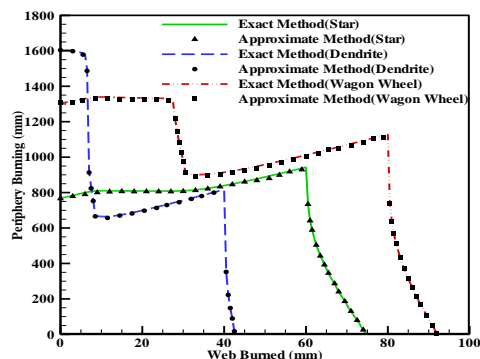


شکل (۱۶): پروفیل پس‌روی گرین لنگری با طراحی الف) نامناسب (ب) مناسب.

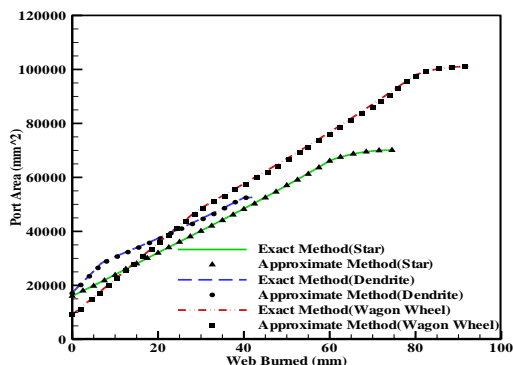
- منحنی محیط سوزش گرین ستاره از چهار بخش اصلی تشکیل شده [۱]، که در هر مأموریت بسته به الزامات باید نسبت معینی داشته باشند. اگر مانند شکل ۱۷ هر چهار بخش سوزش در سطح گرین تفکیک شود، می‌توان با توجه به هندسه و سطح درگیر، پروفیل هر بخش را مدیریت کرد.



شکل (۱۷): چهار ناحیه سوزش در گرین ستاره.



شکل (۱۳): تغییرات محیط سوزش برحسب جان برحسب جان سوخته‌شده برای سه گرین مفروض.



شکل (۱۴): مقایسه تغییرات سطح گذرگاه جریان برحسب جان سوخته‌شده برای سه گرین مفروض.

۳-۶- سایر مزایای روش المان برشی

روش المان برشی علاوه بر افزایش دقت تحلیل پس‌روی تا پایان جان گرین، می‌تواند با محاسبه مختصات دقیق مرز در هر گام قابلیت‌های زیر را به الگوریتم حل اضافه نماید:
۱- تحلیل دقیق پسماندهای^۱ موتور،

۲- تحلیل گرین‌های درون‌سوز - بیرون‌سوز (شکل ۱۵-الف) و

۳- ترسیم نحوه تغییرات مرز در هر گام زمانی (شکل ۱۵).

همان‌گونه که در بخش ۱ بیان شد، در هر مرحله از طراحی مفهومی گرین، ساده‌ترین راه برای ارزیابی ویژگی‌های کلی گرین، تحلیل فرم پس‌روی است؛ از جمله کاربردهای پروفیل پس‌روی می‌توان به دو مورد زیر اشاره کرد:

- از موارد حائز اهمیت در طراحی گرین‌های لنگری آن است که در حین سوزش هیچ قسمتی به‌صورت نسوخته جدا نشود، بر این مبنا و با مقایسه دو پروفیل سوزش شکل ۱۶ می‌توان گفت طراحی گرین الف نامناسب و گرین (ب) مناسب می‌باشد.

11. Yildirim, C. "Numerical Simulation of the Grain Burnback in Solid Propellant Rocket Motor", 41th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Tucson, Arizona, 2005.

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق روش المان برشی برای تحلیل عددی پس‌روی گرین‌های دوبعدی با روش مجموعه سطوح ارائه شد. با مقایسه این روش با روش کلاسیک متداول مشخص شد، روش المان برشی دقت بسیار بالاتری در محاسبه سطح گذرگاه جریان و محیط سوزش دارد. از طرفی برای کاهش زمان محاسبات، الگوریتم المان برشی منتخب معرفی و ارزیابی شد. در مجموع می‌توان گفت با استفاده از روش المان برشی قابلیت‌های الگوریتم پس‌روی عددی با روش مجموعه سطوح افزایش یافته و می‌توان در زمان مناسب به دقت بالایی در حل مسئله پس‌روی گرین رسید.

۸- مراجع

1. Sutton, G.P. and Biblarz, O. "Rocket Propulsion Elements", 7nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1992.
2. Puskulcu, G. "Analysis of 3-D Grain Burnback of Solid Propellant Rocket Motors and Verification with Rocket Motor Tests", MS Thesis of Middle East Technical University, Turkey, 2004.
3. Ucar, R. "Solid Propellant and Internal Ballistics", MS Thesis of Middle East Technical University, Turkey, 1993.
4. French, J.C. and Dunn, S.S. "New Capabilities in Solid Rocket Motor Grain Design Modeling (SPP 02)", 38th JANNAF Combustion Subcommittee Meeting, Nevada, ProQuest, pp. 317-331, 2002.
5. Saintout, E., Ribereau, D. and Perrin, P. "ELEA: A Tool for 3D Surface Regression Analysis in Propellant Grains", 25th AIAA/ASME/SAE, Joint Propulsion Conference, Monterey, 1989.
6. Hejl, R.J. and Heister, S.D. "Solid Rocket Motor Grain Burnback Analysis Using Adaptive Grids", 30th AIAA, ASME, SAE, Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis, 1994.
7. Casalino, L. "Numerical Tracking of the Solid-Gas Interface in Rocket Motors", AIAA/ ASME/ SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Seattle, 1997.
8. Puskulcu, G. and Ulas, A. "3-D Grain Burnback Analysis of Solid Propellant Rocket Motors", Int. J. Aerospace Science and Technology, Vol. 12, No. 8, pp. 585-591, 2008.
9. Osher, S. and Sethian, J.A. "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulation", Int. J. Computational Physics, Vol. 79, No. 1, pp. 12-49, 1988.
10. Sethian, J.A. "Level Set Methods and Fast Marching Methods", 2nd Edition, Cambridge University Press, Berkeley, 1999.