

تحلیل کمانش و خمش غیرخطی قطاع صفحات مدرج تابعی در راستای

شعاعی به روش رهایی پویا

محمد اسماعیل گلماکانی^۱ و مصطفی امامی^۲

گروه مهندسی مکانیک

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۵/۱)

چکیده

هدف از این تحقیق، تحلیل غیرخطی خمش و کمانش قطاع صفحات مدرج تابعی در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی می‌باشد. خواص مکانیکی صفحه مدرج تابعی در جهت شعاع، با استفاده از مدل موری-تاناکا تعیین شده است. معادلات غیرخطی به صورت نموی و با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه اول و فرضیه تغییرشکل‌های بزرگ فون کارمن ارائه گردیده‌اند. برای حل معادلات غیرخطی نموی از روش رهایی پویا و روش تفاوت‌های محدود استفاده شده است. با توجه به عدم وجود تحقیقی مشابه برای کمانش قطاع صفحات گرد مدرج تابعی، با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بارهای مکانیکی فشاری، برخی از نتایج با پاسخ‌های به دست آمده از نرم افزار المان محدود آباکوس برای صفحات تابعی مقایسه شده است و مطابقت خوب به دست آمده حاکی از صحت و دقت روش عددی به کاررفته می‌باشد. در انتها اثرات پارامترهای مختلفی همچون شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده مدرج تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی، زاویه قطاع برای خمش و کمانش صفحات مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: خمش، کمانش، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، مواد مدرج تابعی

Buckling and Nonlinear Bending Analysis of Radially Functionally Graded Sector Plates

M.E. Golmakani and M. Emami

Mechanical Engineering Department

Islamic Azad University, of Mashhad

(Received: 6/May/2014; Accepted: 23/July/2015)

ABSTRACT

The main purpose of this study is to investigate the nonlinear bending and buckling analysis of radially functionally graded sector plates subjected to uniform in-plane compressive loads. The mechanical properties of plates assumed to vary continuously along the radial direction by the Mori-Tanaka distribution. The incremental form of nonlinear formulations are derived based on first order shear deformation theory (FSDT) and large deflection von Karman equations. The dynamic relaxation (DR) method combined with the finite difference discretization technique is employed to solve the equilibrium equations. Also, due to the lack of similar research for the buckling of functionally graded sector plates with material variation in the radial direction, some results are compared with the ones reported by the ABAQUS finite element software. The achieved good agreements between the results indicate the accuracy of the present numerical method. Finally, numerical results for the maximum displacement and critical buckling load for various boundary conditions, effects of grading index, thickness-to-radius ratio, sector angle and inner radius-to-outer radius ratio are presented.

Keywords: Bending, Buckling, First Order Shear Deformation Theory, Functionally Graded Material

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

۲- کارشناسی ارشد: mostafaemami84@gmail.com

۱- مقدمه

از آنجا که مقاطع گرد و قطاع صفحات گرد هم از لحاظ وزن کم و هم از نظر کارایی و ظرفیت بالای تحمل بار و اقتصادی بودن حائز اهمیت هستند، به طور وسیعی در تمامی زمینه‌های مهندسی همچون سازه‌های معماری، پل‌ها، سازه‌های هیدرولیکی، هواپیماها، موشک‌ها و کشتی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱]. با وجود کاربرد وسیع قطاع صفحات گرد سوراخ‌دار در سازه‌های مختلف مکانیکی و عمرانی تاکنون مطالعات کم‌تری در این زمینه نسبت به صفحات گرد متقارن محوری انجام گرفته است. معادلات حاکم بر قطاع صفحات گرد که در معرض تغییرشکل‌های نسبتاً بزرگ می‌باشند به مراتب از معادلات صفحات مستطیلی شکل یا صفحات گرد متقارن محوری پیچیده‌تر هستند و برای حل‌های دقیق و تحلیلی مناسب نیستند و به خاطر پیچیدگی مربوط به حل معادلات حاکم بر تغییرشکل‌های بزرگ این نوع صفحات، حل‌های دقیق ارائه نشده‌اند. اگرچه برای تغییرشکل‌های کوچک قطاع گرد صفحات حل‌هایی دقیق به دست آمده است [۲] و این مطالعات و حل‌های تحلیلی که تاکنون بر روی قطاع صفحات گرد انجام شده است مختص حالت‌های خاص می‌باشد. بنابراین روش‌های عددی و شبه‌تحلیلی به عنوان جانشین روش‌های کاملاً تحلیلی برای تعیین رفتار قطاع صفحات گرد که در معرض انواع مختلف بارگذاری و شرایط مرزی بودند، مورد استفاده قرار گرفتند. تا کنون محققان زیادی تحلیل غیرخطی صفحات دایره‌ای تحت بارهای گوناگون و شرایط مرزی مختلف را بررسی کرده‌اند. اخیراً گلمکانی و امامی [۳] تحلیل غیرخطی خمش و کمانش صفحات حلقوی از جنس مواد مدرج تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی و تئوری برشی مرتبه اول را به کمک روش‌های پویا انجام دادند. همچنین گلمکانی و محرابیان [۴] تحلیل غیرخطی خمش صفحات گرد توخالی کامپوزیتی چندلایه، با تقویت‌کننده حلقوی و تئوری برشی مرتبه اول را بررسی کردند.

با وجود روش‌های عددی بنانهاده شده، تاکنون تحلیل غیرخطی قطاع صفحه گرد کم‌تر مورد توجه مناسب قرار گرفته است [۵]. کیم^۱ و همکارانش [۶] با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات نازک به ارائه حل‌های جدید در شکل سری لوی برای معادلات دیفرانسیلی حاکم بر تغییرشکل‌های کوچک قطاع صفحات گرد توخالی نازک همسانگرد در یک دستگاه مختصات

قطبی سه‌بعدی پرداختند. کوبایاشی^۲ و تروی^۳ [۷] با استفاده از حل‌های سری گونه لوی به تحلیل تغییرشکل‌های کوچک ناشی از خمش صفحات گرد توخالی ضخیم همسانگرد براساس تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. تروی و صالحی [۸] براساس تئوری کلاسیک به تحلیل الاستیک تغییرشکل‌های بزرگ قطاع گرد صفحات همسانگرد تحت بار یکنواخت فشاری پرداختند. سرنیواسان^۴ و تیرونکتاچار^۵ [۹] به تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ قطاع صفحات گرد سوراخ‌دار با استفاده از روش ماتریسی پرداختند. اقدام و همکارانش [۱۰] با به کارگیری روش کانترابویچ^۶ توسعه یافته به ارائه یک حل شبه‌تحلیلی برای خمش قطاع صفحات نازک پرداختند. چونگ^۷ و چان^۸ [۱۱] با به کارگیری روش نوار محدود به تحلیل استاتیکی و دینامیکی قطاع صفحات گرد ضخیم و نازک پرداختند. صالحی و تروی [۱۲] با استفاده از روش ترکیبی‌های پویا و اختلاف محدود به حل معادلات حاکم بر تغییرشکل‌های بزرگ الاستیک قطاع-های گرد نازک توپر و توخالی همسانگرد پرداختند. تروی و صالحی [۱۳-۱۴] به تحلیل معادلات الاستو پلاستیک حاکم بر تغییرشکل‌های بزرگ قطاع صفحات گرد توخالی نازک همسانگرد با استفاده از تئوری کلاسیک پرداختند. در این تحقیق نیز برای حل معادلات از روش ترکیبی اختلاف محدود و رهایی پویا استفاده شد. صالحی و سبحانی [۱۵] به تحلیل خطی و غیرخطی قطاع صفحات گرد چندلایه متقارن پرداختند. ناس^۹ و همکارانش [۱۶] به توسعه یک روش تحلیلی برای مطالعه تغییرشکل‌های بزرگ قطاع صفحات نسبتاً ضخیم گرد براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پرداختند. صالحی و شهیدی [۱۷] برای اولین بار معادلات غیرخطی حاکم بر تغییرشکل‌های بزرگ الاستیک قطاع صفحات گرد را که تحت بار فشاری یکنواخت بودند براساس تئوری میندلین تحلیل کردند. اقدام و محمدی [۱۸] از روش کانترابویچ توسعه یافته برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی با دقت بالا به منظور تحلیل خمش قطاع صفحات گرد توپر یا توخالی ضخیم تحت بارگذاری‌های متفاوت و شرایط مرزی مختلف استفاده کردند. اندخشیده و همکارانش [۱۹] با استفاده از روش دیفرانسیل

2 - Kobayashi

3 - Turvey

4 - Srinivasan

5 - Thiruvengkatachari

6- Extended Kantorovich Method

7 - Cheung

8 - Chan

9 - Nath

1 - Kim

قطاع صفحات ساخته شده از لایه های استوانه ای ارتوتروپیک^{۱۰} ارائه دادند. نادری و سعیدی [۳۱] یک حل دقیق تحلیلی برای آنالیز کمانش قطاع صفحات نسبتاً ضخیم مدرج تابعی ساکن بر روی بستر الاستیک وینکلر^{۱۱} ارائه کردند. معادلات تعادل براساس تئوری برشی مرتبه اول صفحات استخراج شده است. رکنی دماوندی طاهر و همکارانش [۳۲] کمانش و ارتعاش آزاد صفحه های نازک مدور و قطاع حلقوی مواد مدرج تابعی تحت بار فشاری درون صفحه یکنواخت و ساکن بر روی بستر الاستیک را بررسی کرده اند. سعیدی و حسینی بافرانی [۳۳] آنالیز کمانش حرارتی قطاع صفحات حلقوی نسبتاً ضخیم مدرج تابعی را بررسی کردند. معادلات تعادل و پایداری براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات استخراج شده است. حسینی هاشمی و همکارانش [۳۴] تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد قطاع توپر و توخالی صفحات مدرج تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی و ساکن بر روی بستر پسترناک^{۱۲} را براساس تئوری کلاسیک و با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر بررسی کردند. آنها بار بحرانی کمانش را برای انواع مختلف بارگذاری شامل بارگذاری بر روی لبه شعاعی، لبه محیطی و برای حالت بارگذاری بر روی تمام لبه ها به دست آوردند. جبارزاده و باغداردلگشا [۳۵] تحلیل کمانش حرارتی قطاع ساخته شده از مواد مدرج تابعی را براساس تئوری برشی مرتبه اول و روش مربعات دیفرانسیل بررسی کرده اند.

تاکنون تحلیل کمانش قطاع صفحات حلقوی نسبتاً ضخیم از مواد مدرج تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی و براساس تئوری برشی مرتبه اول به روش رهایی پویا صورت نگرفته است. لذا در این تحقیق تحلیل غیرخطی خمش و کمانش قطاع صفحات حلقوی مواد مدرج تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی انجام گرفته است. معادلات غیرخطی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به فرم نموی^{۱۳} استخراج شده است و به منظور حل معادلات غیرخطی از روش رهایی پویا استفاده شده است. گفتنی است در اکثر کارهای به انجام رسیده تاکنون بر روی تحلیل کمانش صفحات، از روش تعادل همسایه استفاده شده است که به نوعی به خطی سازی معادلات تعادل می پردازد. در

کوادرچر جامع^۱ به تحلیل غیرخطی خمش قطاع صفحات گرد چندلایه پرداختند. آتشی پور و همکارانش [۲۰] به استخراج معادلات خمش قطاع صفحات گرد توخالی ضخیم براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم پرداختند. موسوی و طهانی [۲۱] به حل تحلیلی خمش خطی قطاع توخالی صفحات مدرج تابعی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی و تحت بار مکانیکی و براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از روش کانتراویچ توسعه یافته پرداختند. گلمکانی و علامتیان [۲۲] تحلیل تغییر شکل های بزرگ قطاع صفحات مدرج تابعی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی و تحت بارهای یکنواخت و غیر یکنواخت و بر روی بستر الاستیک وینکلر و پسترناک را با روش رهایی پویا و تئوری برشی مرتبه اول انجام دادند. اخیراً محرابیان و گلمکانی [۲۳] تحلیل غیرخطی تغییر شکل های بزرگ قطاع صفحات چندلایه با تقویت کننده شعاعی را با روش رهایی پویا و تئوری برشی مرتبه اول بررسی کرده اند.

هریک^۲ [۲۴] مطالعه بر روی مسئله کمانش قطاع صفحات با لبه های شعاعی گیردار را انجام داده است. سرینیواسان^۳ [۲۵] تحلیل کمانش قطاع صفحات حلقوی گیردار با ضخامت متغیر تحت بار یکنواخت در جهت شعاع را بررسی کرده است. لی^۴ و چن^۵ [۲۶] رفتار پایداری قطاع صفحات حلقوی با لبه های تقویت شده تحت بارهای خارجی یکنواخت شعاعی و مماسی را بررسی کرده اند. هریک و همکارانش [۲۷] بررسی کمانش قطاع صفحات حلقوی با تکیه گاه گیردار متحرک در صفحه تحت فشار یکنواخت و توزیع نیروی برشی در سرتاسر لبه های مستقیم را انجام داده اند. ونگ^۶ و ژیانگ^۷ [۲۸] یک رابطه بین بار کمانش قطاع توپر با استفاده از تئوری صفحه میندلین و کیرشرف به دست آوردند. شارما^۸ و شاردا^۹ [۲۹] تحلیل کمانش کمانش و ارتعاش آزاد قطاع صفحات را براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام دادند. همچنین، شارما و شاردا [۳۰] یک فرمول بندی تحلیلی ساده، برای آنالیز مسایل مقادیر ویژه کمانش و ارتعاش آزاد تغییر شکل برشی مرتبه اول

1- Generalized Differential Quadrature Method

2 -Harik

3 - Srinivasan

4 - Liu

5 - Chen

6 -Wang

7 -Xiang

8 - Sharma

9 - Sharda

10- Orthotropic

11- Winkler Elastic Foundation

12- Pasternak Foundation

13- Incremental

ورق‌های لایه‌ای در این حالت از بین می‌رود. به علاوه مواد تابعی علاوه بر استحکام مکانیکی بالا، مقاومت بالایی به سایش، خوردگی و حرارت را دارا هستند. امروزه مواد تابعی به دلیل امکان ترکیب خواص مواد مختلف، کاربردهای زیادی در صنایع هوافضا، صنایع دفاعی، کارخانه‌های مواد شیمیایی و راکتورهای هسته‌ای یافته‌اند. از دیدگاه ماکروسکوپی، پیش‌بینی پاسخ تنش- کرنش مواد کامپوزیتی، به توصیف رفتار میکروسازه‌ای اجزاء آن بستگی دارد. بنابراین استفاده از روشی بر پایه میکرومکانیک برای بیان خواص مواد مدرج تابعی، از قبیل مدل موری- تاناکا، می‌تواند پیش‌بینی واقعه‌گرایانه‌تری از رفتار این مواد را ارائه دهد. مقادیر مدول بالک^۱ B و مدول برشی G بر اساس مدل موری- تاناکا^۲ به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{B - B_c}{B_m - B_c} = \frac{V_m}{1 + (1 - V_m) \frac{3(B_m - B_c)}{3B_c + 4G_c}} \\ \frac{G - G_c}{G_m - G_c} = \frac{V_m}{1 + (1 - V_m) \frac{G_m - G_c}{G_c + f_c}} \end{cases} \quad (1)$$

در این رابطه، f_c به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_c = \frac{G_c(9B_c + 8G_c)}{6(B_c + 2G_c)} \quad (2)$$

زیرنویس‌های m و c به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کنند. کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده براساس قانون توانی ساده به صورت رابطه (۳) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} V_c = \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n \\ V_m = 1 - V_c \end{cases} \quad (3)$$

V_m و V_c به ترتیب نشان‌دهنده کسر حجمی سرامیک و فلز و همچنین n نشان‌دهنده توان تابعی می‌باشد. بر این اساس سطح داخلی صفحه حلقوی ($r = r_i$) فلز خالص و سطح خارجی صفحه حلقوی ($r = r_o$) سرامیک خالص می‌باشد. براساس این روش، مدول یانگ و ضریب پواسون به صورت رابطه (۴) در امتداد شعاعی تغییر می‌کنند.

$$\begin{cases} E = \frac{9BG}{3B + G} \\ \nu = \frac{3B - 2G}{2(3B + G)} \end{cases} \quad (4)$$

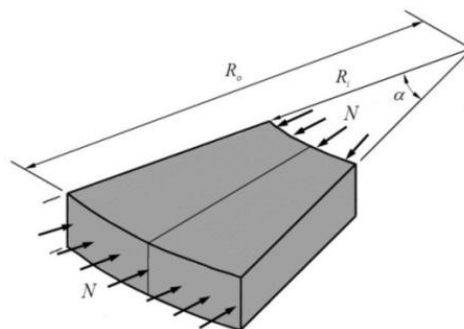
این تحقیق برای نخستین بار بدون ساده‌سازی در معادلات، به حل مساله کمانش با استفاده از روش نمودی پرداخته شده است. مزیت این روش نسبت به روش‌های دیگر حل کامل مساله و تعیین کلیه مقادیر میدان جابه‌جایی است که در مراحل بعدی برای تحلیل پدیده پس‌کمانش نیز می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. در مطالعه پارامتریک انجام شده، خیز و بار بحرانی کمانش برای زوایای مختلف قطاع، شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده مدرج تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

در این قسمت هندسه مسئله، روابط حاکم بر مواد مدرج تابعی، میدان تغییرمکان، معادلات تعادل و شرایط مرزی به اختصار شرح داده می‌شود.

۲-۱- هندسه مسئله

هندسه مورد بررسی برای تحلیل کمانش قطاع صفحه گرد مدرج تابعی شعاعی با ضخامت h ، شعاع داخلی R_i ، شعاع خارجی R_o ، زاویه قطاع α ، تحت اثر نیروی فشاری N در لبه‌های محیطی، در شکل ۱ دیده می‌شود.



شکل (۱): هندسه مورد بررسی برای کمانش قطاع صفحه گرد مدرج تابعی.

همچنین هندسه مورد بررسی برای مطالعه خمش قطاع صفحه گرد مدرج تابعی با ضخامت h ، شعاع داخلی R_i ، شعاع خارجی R_o ، زاویه قطاع α و تحت بار عرضی $q(r, \theta)$ در شکل ۲ نشان داده شده است.

۲-۲- روابط حاکم بر مواد مدرج تابعی

خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی به صورت پیوسته در یک یا چند جهت تغییر می‌کند از این رو اثر مخرب لایه‌لایه‌شدن

1-Bulk Modulus
2- Mori-Tanaka

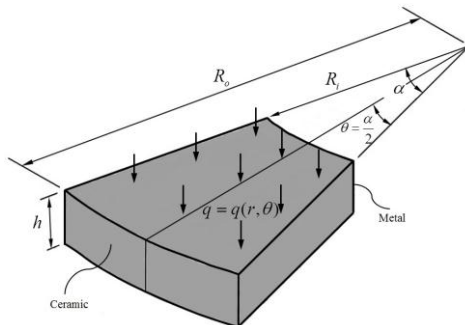
$$\begin{cases} \delta\sigma_r = \frac{E(r)}{1-\nu^2} [\delta\varepsilon_r + \nu\delta\varepsilon_\theta] \\ \delta\sigma_\theta = \frac{E(r)}{1-\nu^2} [\delta\varepsilon_\theta + \nu\delta\varepsilon_r] \\ \delta\sigma_{rz} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} [\delta\gamma_{rz}] \\ \delta\sigma_{r\theta} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} [\delta\gamma_{r\theta}] \\ \delta\sigma_{\theta z} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} [\delta\gamma_{\theta z}] \end{cases} \quad (۷)$$

منتجه‌های نیرو و گشتاور و نیروی برشی به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} (\delta N_r, \delta N_\theta, \delta N_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\delta\sigma_r, \delta\sigma_\theta, \delta\sigma_{r\theta}) dz \\ (\delta M_r, \delta M_\theta, M_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\delta\sigma_r, \delta\sigma_\theta, \delta\sigma_{r\theta}) z dz \\ (\delta Q_r, \delta Q_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (\delta\sigma_{rz}, \delta\sigma_{\theta z}) dz \end{cases} \quad (۸)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۶) و (۷) در رابطه (۸) نیروها و لنگرها برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta N_r &= A_{11} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \right)^2 + \nu \left(\frac{\delta u}{r} + \frac{\partial \delta v}{r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \right) \right] \\ \delta N_\theta &= A_{11} \left[\frac{\delta u}{r} + \frac{\partial \delta v}{r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \right) + \nu \left(\frac{\partial \delta u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \right)^2 \right) \right] \\ \delta N_{r\theta} &= A_{33} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) - \delta v \right) + \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right] \\ \delta M_r &= D_{11} \left[\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left(\delta \psi_r + \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \\ \delta M_\theta &= D_{11} \left[\frac{1}{r} \left(\delta \psi_r + \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial \delta \psi_r}{\partial r} \right] \\ \delta M_\theta &= D_{33} \left[\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial \theta} - \delta \psi_\theta \right) \right] \\ \delta Q_r &= C \left[\delta \psi_r + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \right] \\ \delta Q_\theta &= C \left[\delta \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (۹)$$



شکل (۲): هندسه مورد بررسی برای خمش قطاع صفحه گرد مدرج تابعی.

۲-۳- میدان تغییر مکان

میدان جابه‌جایی براساس تئوری برشی مرتبه اول برای یک صفحه نامتقارن محوری عبارتست از:

$$\begin{cases} U(r, \theta, z) = u(r, \theta) + z\psi_r(r, \theta) \\ V(r, \theta, z) = v(r, \theta) + z\psi_\theta(r, \theta) \\ W(r, \theta, z) = w(r, \theta) \end{cases} \quad (۵)$$

در اینجا u, v, w جابه‌جایی صفحه میانی به ترتیب درجهت r, θ, z و همچنین ψ_r, ψ_θ چرخش در راستای θ و r می‌باشند. برای به دست آوردن بار بحرانی کمانش، بار به صورت نمودی اعمال می‌شود و در پایان نمودار بار- تغییر مکان رسم می‌شود بدین منظور معادلات تعادل می‌بایست به شکل نمودی استخراج شوند. روابط کرنش- جابه‌جایی براساس تئوری تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن^۱ و به شکل نمودی به صورت رابطه (۶) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_r &= \frac{\partial \delta u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \right)^2 + z \frac{\partial \delta \psi_r}{\partial r} \\ \delta\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\delta u + \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{z}{r} \left(\frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial \theta} + \delta \psi_r \right) \\ \delta\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} - \delta v \right) + \frac{z}{r} \left(\frac{\partial \delta \psi_r}{\partial \theta} - \delta \psi_\theta \right) + z \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \delta v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \right) \\ \delta\gamma_{rz} &= \delta \psi_r + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \\ \delta\gamma_{\theta z} &= \delta \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (۶)$$

روابط تنش- کرنش براساس قانون هوک به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

1- Von Karman

۲-۵-۱- خمش قطاع صفحات مدرج تابعی

الف) تکیه‌گاه گیردار (بر روی لبه‌های محیطی یا شعاعی):

$$u = w = v = \psi_r = \psi_\theta = 0 \quad (12)$$

ب) تکیه‌گاه ساده (بر روی لبه‌های شعاعی)

$$u = w = v = \psi_r = M_\theta = 0 \quad (13)$$

ج) تکیه‌گاه ساده (بر روی لبه‌های محیطی)

$$u = w = v = \psi_\theta = M_r = 0 \quad (14)$$

۲-۵-۲- کمانش قطاع صفحات مدرج تابعی

الف) تکیه‌گاه گیردار (بر روی لبه‌های شعاعی):

$$u = w = v = \psi_r = \psi_\theta = 0 \quad (15)$$

ب) تکیه‌گاه گیردار (بر روی لبه‌های محیطی)

$$N_r = -q, N_{r\theta} = \psi_r = \psi_\theta = w = 0 \quad (16)$$

ج) تکیه‌گاه ساده (بر روی لبه‌های شعاعی)

$$u = w = v = \psi_\theta = M_\theta = 0 \quad (17)$$

د) تکیه‌گاه ساده (بر روی لبه‌های محیطی)

$$N_r = -q, N_{r\theta} = w = \psi_r = M_r = 0 \quad (18)$$

۳- روش رهایی پویا

روش رهایی پویا، فرایند تکراری حل دستگاه معادله‌های همزمان می‌باشد. این روش از قانون دوم ریچاردسون^۱ به‌دست می‌آید. بار خارجی در تکرارهای هم‌گرایی ثابت در نظر گرفته می‌شود. در تحلیل‌های نموی، یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌گردد و در هنگام اجرای تکرارهای رهایی پویا، مقدار بار ثابت نگه داشته می‌شود. پس از هم‌گرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌گردد و فرایند مزبور تا کامل شدن تمام بار خارجی تکرار می‌شود. به‌عبارت دیگر، رابطه‌سازی روش رهایی پویا با فرض ثابت بودن بار خارجی انجام می‌پذیرد و در تکرارهای رهایی پویا، بار خارجی سازه تغییر نمی‌کند. دستگاه معادله‌های ایستایی در روش رهایی پویا به فضای دینامیکی ساختگی منتقل می‌شود. رابطه‌سازی این فرآیند، به شیوه‌های گوناگون قابل انجام خواهد بود. از آن میان، می‌توان به دو روش تفاوت‌های محدود و اجزای محدود اشاره کرد. خاطر نشان می‌نماید، متداول‌ترین و اثرگذارترین راه‌کار وابسته، استفاده از

در رابطه (۹) ضرایب ماتریس سفتی صفحه مدرج تابعی

عبارتند از: $(A_{11}, A_{33}, C, D_{11}, D_{33})$

$$A_{11} = \frac{E(r)h}{1-\nu^2}, \quad A_{33} = \frac{E(r)h}{2(1+\nu)}, \quad D_{11} = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_{33} = \frac{E(r)h^3}{24(1+\nu)}, \quad C = \frac{k_s E(r)h}{2(1+\nu)}, \quad k_s = \frac{5}{6} \quad (10)$$

در روابط بالا k_s ضریب اصلاح برشی می‌باشد.

۲-۴- معادلات تعادل

معادلات تعادل را می‌توان با استفاده از روش انرژی استخراج کرد. معادلات تعادل به شکل نموی به صورت رابطه (۱۱) ارائه می‌شوند.

$$\frac{\partial \delta N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\delta N_r - \delta N_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_{r\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \delta N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \delta N_{r\theta} = 0$$

$$\frac{\partial \delta M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\delta M_r - \delta M_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta M_{r\theta}}{\partial \theta} - \delta Q_r = 0$$

$$\frac{\partial \delta M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \delta M_{r\theta} - \delta Q_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \delta Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\delta Q_r}{r} + (\delta N_r + N_r) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} +$$

$$+ (\delta N_\theta + N_\theta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \right) + \delta N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2 \delta N_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$+ (2 \delta N_{r\theta} + 2 N_{r\theta}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) + \delta q = 0 \quad (11)$$

برای مسئله کمانش δq از معادله آخر حذف می‌شود. با جایگذاری رابطه (۹) در معادلات تعادل نیرویی (۱۱) می‌توان معادلات تعادل را برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی $(u, v, w, \psi_r, \psi_\theta)$ نوشت.

۲-۵- شرایط مرزی

برای لبه‌های قطاع صفحات مدرج تابعی از دو نوع شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه ساده استفاده شده است. بسته به اینکه تکیه‌گاه روی کدام لبه‌ی قطاع صفحه قرار گرفته است، و همچنین با توجه به نوع تحلیل خمش و کمانش می‌توان شرایط مرزی را به صورت ذیل دسته‌بندی کرد:

گرشگورین^۱ است. این تئوری، مقادیرهای جرم را برای تضمین پایداری عددی روش رهایی پویا به صورت رابطه (۲۶) ارائه می دهد.

$$m_{ii} \geq 0.25(\tau^n)^2 \sum_{j=1}^N |k_{ij}| \quad (26)$$

تعداد درجه های آزادی سازه را با N نشان می دهند. مؤلفه K می باشد که به صورت رابطه (۲۷) محاسبه می شود:

$$K = \frac{\partial P}{\partial D} \quad (27)$$

اینجا $D = u, v, w, \psi_r, \psi_\theta$ بردار حل تقریبی، و P طرف چپ معادله تعادل (۱۱) است. براساس تئوری دینامیک سازه ها، اگر میرایی سازه بحرانی باشد، سرعت همگرایی به پاسخ پایدار بیشینه می شود. بنابراین، برای تخمین میرایی بحرانی، اصل ژانگ به کار می رود.

$$c^n = 2 \left\{ \frac{\left(\{D\}^n \right)^T \{F(D)^n\}}{\left(\{D\}^n \right)^T [M] \{D\}^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

در این رابطه، $\{D\}^n$ بردار تغییر مکان در گام n ام می باشد. در بسیاری از راهبردهای رهایی پویا، گام زمانی ثابت و برابر ۱ یا ۱.۱ فرض می شود. روش رهایی پویا یک روش قوی برای حل مسائل مقدار اولیه و از درجه غیرخطی بالا می باشد. این درحالی است که معادلات حاکم (۱۱) بیانگر مساله ای با مقدار مرزی مشخص می باشند. بنابراین به منظور به کارگیری الگوریتم روش رهایی پویا، این معادلات باید به صورت مسائلی با مقدار اولیه مشخص درآیند. برای تبدیل معادلات به صورت گفته شده باید جملات اینرسی و میرایی به صورت رابطه (۲۹) به سمت راست معادلات تعادل اضافه شوند.

$$\frac{\partial \delta N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\delta N_r - \delta N_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_{r\theta}}{\partial \theta} = m_u \frac{d^2 u}{dt^2} + c_u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \delta N_{r\theta} = m_v \frac{d^2 v}{dt^2} + c_v \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\delta M_r - \delta M_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta M_{r\theta}}{\partial \theta} - \delta Q_r = m_{\psi_r} \frac{d^2 \psi_r}{dt^2} + c_{\psi_r} \frac{d\psi_r}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \delta M_{r\theta} - \delta Q_\theta = m_{\psi_\theta} \frac{d^2 \psi_\theta}{dt^2} + c_{\psi_\theta} \frac{d\psi_\theta}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\delta Q_r}{r} + (\delta N_r + N_r) \frac{\partial^2 \delta v}{\partial r^2} +$$

شیوه تفاوت های محدود می باشد. این کار با افزودن نیروهای جرمی و میرایی ساختگی به رابطه ایستایی سازه، همانند رابطه (۱۲) انجام می پذیرد [۲۲].

$$[M]^n \{\ddot{D}\}^n + [C]^n \{\dot{D}\}^n + \{F\}^n = \{P\}^n \quad (19)$$

در این رابطه، $[M]^n$ ، $[C]^n$ ، $\{\dot{D}\}^n$ و $\{\ddot{D}\}^n$ ، به ترتیب، ماتریس های جرم و میرایی ساختگی و بردارهای شتاب و سرعت ساختگی در تکرار n ام می باشند. همچنین، $\{P\}^n$ و $\{F\}^n$ به ترتیب، بردارهای نیروی داخلی و بار خارجی سازه را در گام n ام مشخص می کنند. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای سرعت و شتاب می توانند به صورت روابط (۲۰) تا (۲۲) نوشته شوند.

$$\{\ddot{D}\}^n = \frac{\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} - \{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau} \quad (20)$$

$$\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\{D\}^n - \{D\}^{n-1}}{\tau} \quad (21)$$

$$\{\dot{D}\}^n = \frac{\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} + \{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه های (۲۰) و (۲۲) در رابطه (۱۹) یک معادله تکرار برای سرعت در $(n+1/2)$ امین گام به شکل رابطه (۲۳) به دست می آید.

$$\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{([M]/\tau - [C]/2)}{([M]/\tau + [C]/2)} \{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\{P\} - \{F\}}{([M]/\tau + [C]/2)}$$

$$\{\dot{D}\}^{n+1} = \{\dot{D}\}^n + \tau \{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (23)$$

در عبارت معادلات تکرار صریح جرم ساختگی می بایست یک ماتریس قطری به دست آید. بنابراین ماتریس میرایی وابسته به ماتریس جرم خواهد بود و به شکل رابطه (۲۴) می باشد.

$$[C] = c[M] \quad (24)$$

c ضریب میرایی است. با جایگذاری رابطه (۲۴) در رابطه (۲۳) معادله به شکل رابطه (۲۵) به دست می آید.

$$\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2 - \tau^n c^n}{2 + \tau^n c^n} \{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c^n} \left\{ \frac{r_i}{m_{ii}} \right\}^n$$

$$\{r\}^n = \{P\}^n - \{F\}^n \quad (25)$$

در رابطه های کنونی، τ^n ، r_i^n و m_{ii}^n ، به ترتیب، گام زمانی در مرحله n ام، نیروی باقی مانده درجه آزادی i ام و درایه قطری i ام از ماتریس جرم می باشند. در روابط بالا ماتریس جرم، ضریب میرایی و گام زمانی مجهول می باشند. معمول ترین راه کار برای تعیین درایه های قطری جرم، استفاده از تئوری

1- Gershgorin's Theorem

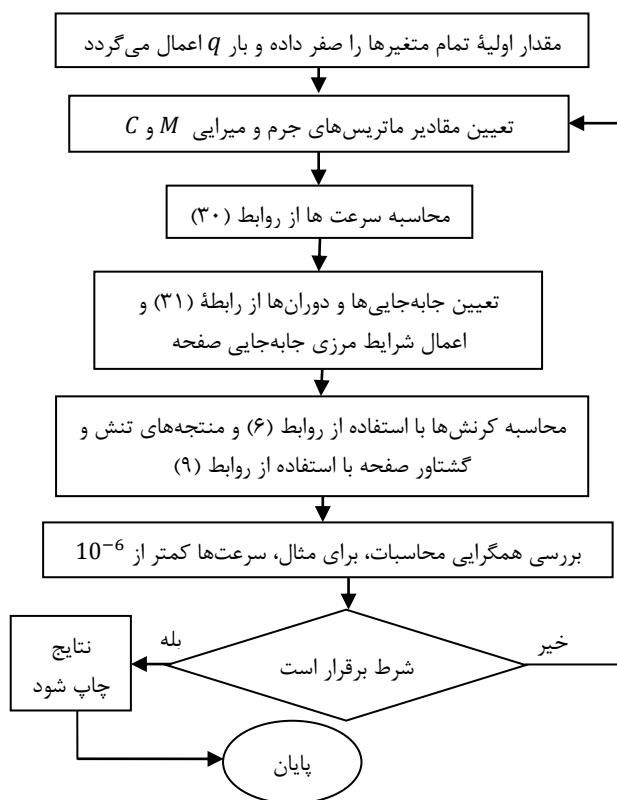
در رابطه (۲۴)، $x = u, v, w, \psi_r, \psi_\theta$ می باشد. ترتیب مراحل بیان شده برای حل مسئله به کمک روش رهایی پویا مطابق فلوجارت شکل ۳ می باشد.

۴- بحث و نتایج عددی

در این مبحث ابتدا با انجام یک مطالعه مقایسه‌ای به بررسی صحت و دقت نتایج تحلیل می پردازیم و سپس با انجام یک بررسی پارامتریک به مطالعه اثرات گوناگونی همچون شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده مدرج تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی برای خمش قطاع صفحات مدرج تابعی خواهیم پرداخت.

۴-۱- خمش قطاع صفحات مدرج تابعی

دقت و کارایی روش حل حاضر برای تحلیل خمش غیرخطی قطاع صفحات همسانگرد و مدرج تابعی نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت بار یکنواخت عرضی، به وسیله مثال های زیر بررسی شده است.



شکل (۳): فلوجارت مراحل حل مسئله به کمک روش رهایی پویا.

مثال ۱: برای بررسی صحت تحلیل، مقایسه نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر بر روی تغییرشکل های بزرگ قطاع صفحات

$$\begin{aligned} & \delta N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\delta N_\theta + N_\theta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \delta N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2\delta N_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \right. \\ & \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + (2\delta N_{r\theta} + 2N_{r\theta}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \\ & + \delta q = m_w \frac{d^2 w}{dt^2} + c_w \frac{dw}{dt} \end{aligned} \quad (29)$$

با جایگذاری روابط سرعت و شتاب در سمت راست رابطه (۲۹) معادلات سرعت به صورت رابطه (۳۰) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\delta N_r - \delta N_\theta) + \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_{r\theta}}{\partial \theta} \right)_i^n + \frac{2 - \tau^n c_i^n}{2 + \tau^n c_i^n} \dot{u}_i^{n-1/2} \\ \dot{v}_i^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \delta N_{r\theta} \right)_i^n \\ & + \frac{2 - \tau^n c_i^n}{2 + \tau^n c_i^n} \dot{v}_i^{n-1/2} \\ \dot{\psi}_{ri}^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\delta M_r - \delta M_\theta) + \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \delta M_{r\theta}}{\partial \theta} - \delta Q_r \right)_i^n + \frac{2 - \tau^n c_i^n}{2 + \tau^n c_i^n} \dot{\psi}_{ri}^{n-1/2} \\ \dot{\psi}_{\theta i}^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial \theta} - \delta Q_\theta \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} \delta M_{r\theta} \right)_i^n + \frac{2 - \tau^n c_i^n}{2 + \tau^n c_i^n} \dot{\psi}_{\theta i}^{n-1/2} \\ \dot{w}_i^{n+1/2} &= \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial \delta Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\delta Q_r}{r} + \right. \\ & (\delta N_r + N_r) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} + \delta N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\delta N_\theta + N_\theta) \\ & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \right) + \delta N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ & + 2\delta N_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + (2\delta N_{r\theta} + 2N_{r\theta}) \\ & \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \right)_i^n + \frac{2 - \tau^n c_i^n}{2 + \tau^n c_i^n} \dot{w}_i^{n-1/2} \end{aligned} \quad (30)$$

با انتگرال گرفتن از روابط سرعت بالا بعد از هر گام زمانی با استفاده از رابطه (۳۱) بردارهای جابه جایی محاسبه می شوند.

$$x^{n+1} = x^n + \tau^{n+1} \dot{x}^{n+1/2} \quad (31)$$

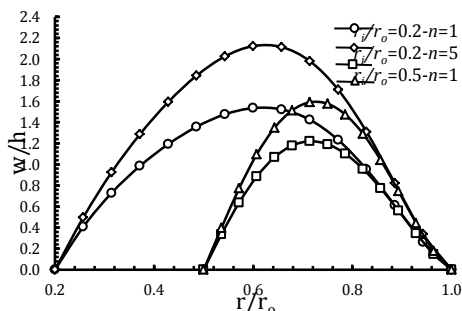
شعاع خارجی و نسبت $h/r_o = 0.1$ ، $\bar{q} = 500$ ، $r_i/r_o = 0.2$ ، زاویه $\alpha = 60^\circ$ همچنین نسبت‌های متفاوت توان ماده تابعی و شرایط مرزی ساده و گیردار برای قطاع توخالی مدرج تابعی رسم شده است.

جدول (۳): مقایسه مقادیر بی‌بعد \bar{w}^c در

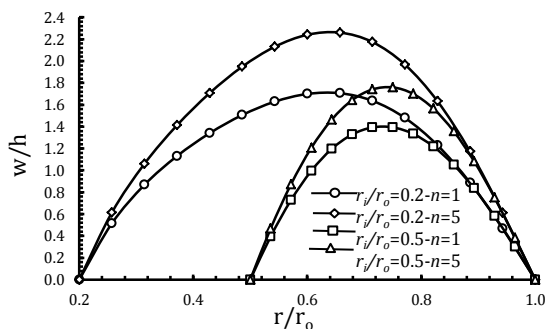
قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی با $c : ((r_i + r_o) / 2, \theta / 2)$

تغییرات خواص در راستای شعاعی و شرایط مرزی گوناگون.

مرجع [۲۲]	$\alpha = 90$		$\alpha = 60$		شاخص تابعی	نوع تکیه‌گاه
	پژوهش حاضر	مرجع [۲۲]	پژوهش حاضر	مرجع [۲۲]		
۰/۰۷۷۴	۰/۰۷۷۵	۰/۰۴۰۲	۰/۰۴۰۸	۰/۵	CCCC	
۰/۰۹۸۸	۰/۱۰۰۰	۰/۰۵۲۱	۰/۰۵۲۵	۱		
۰/۱۸۶۹	۰/۱۸۷۴	۰/۱۰۷۸	۰/۱۰۸۰	۵		
۰/۱۳۲۲	۰/۱۳۸۲	۰/۰۷۴۳	۰/۰۷۴۵	۰/۵	SSSS	
۰/۱۷۱۵	۰/۱۸۰۴	۰/۰۹۳۹	۰/۰۹۴۲	۱		
۰/۳۲۴۷	۰/۳۳۰۲	۰/۱۹۶۲	۰/۱۹۶۵	۵		
۰/۰۹۳۳	۰/۰۹۳۳	۰/۰۵۶۷	۰/۰۵۶۷	۰/۵	CSCS	
۰/۱۱۸۸	۰/۱۱۹۵	۰/۰۷۱۸	۰/۰۷۱۹	۱		
۰/۲۱۷۶	۰/۲۱۸۹	۰/۱۴۳۹	۰/۱۴۴۲	۵		



(الف)



(ب)

شکل (۴): نمودار جابه‌جایی عمودی بی‌بعد بر حسب فاصله شعاعی برای نسبت‌های مختلف توان تابعی و شعاع داخلی به خارجی و شرایط مرزی (الف) تکیه‌گاه گیردار، (ب) تکیه‌گاه ساده.

تحلیل کمانش و خمش غیرخطی قطاع صفحات مدرج تابعی در راستای...

نسبتاً ضخیم توخالی همسانگرد با شرایط مرزی CCCC و SSSS برای نسبت ضخامت به شعاع خارجی $\lambda = h/r_o = 0.1$ و زاویه قطاع $\alpha = 60^\circ$ ، $\bar{r} = 0.647$ و مقادیر مختلف \bar{q} با مقادیر خیز گزارش شده توسط ناس و همکارانش [۱۶]، گلمکانی و علامتیان [۲۲] و محرابیان و گلمکانی [۲۳] در جدول‌های ۱-۲ ارائه شده است.

جدول (۱): مقایسه خیز بی‌بعد (\bar{w}) بین نتایج تحلیل حاضر

با شرایط مرزی گیردار و $h/r_o = 0.1$ با مقادیر خیز

گزارش شده توسط مراجع [۲۳-۱۶].

پژوهش حاضر	مرجع [۲۲]	مرجع [۱۶]	مرجع [۲۳]	\bar{q}
۰/۳۶۳۸	۰/۳۶۰۳	۰/۳۹۴۰	۰/۳۸۲۷	۱۰۰
۰/۶۳۳۱	۰/۶۳۶۸	۰/۶۶۷۰	۰/۶۵۴۱	۲۰۰
۰/۸۳۶۴	۰/۸۴۶۴	۰/۸۶۱۵	۰/۸۵۰۱	۳۰۰
۰/۹۹۰۵	۱/۰۱۴۱	۱/۰۱۲۴	۱/۰۰۳۱	۴۰۰
۱/۱۱۷۴	۱/۱۵۴۵	۱/۱۳۶۵	۱/۱۲۸۳	۵۰۰

جدول (۲): مقایسه خیز بی‌بعد (\bar{w}) بین نتایج تحلیل

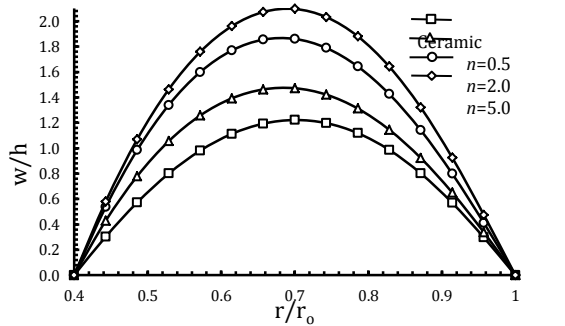
حاضر با شرایط مرزی ساده و $h/r_o = 0.1$ با مقادیر خیز

گزارش شده توسط مراجع [۲۳-۱۶].

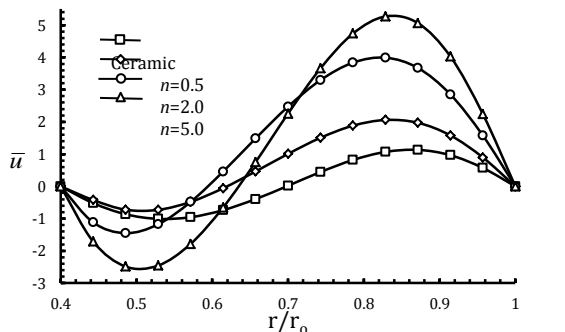
پژوهش حاضر	مرجع [۲۲]	مرجع [۱۶]	مرجع [۲۳]	\bar{q}
۰/۶۳۴۹	۰/۶۳۴۱	۰/۶۶۱۸	۰/۶۴۲۱	۱۰۰
۰/۹۰۲۵	۰/۹۲۴۸	۰/۹۱۶۷	۰/۹۰۳۷	۲۰۰
۱/۰۷۲۹	۱/۱۱۹۳	۱/۰۸۴۸	۱/۰۷۲۳	۳۰۰
۱/۲۰۹۵	۱/۲۷۱۰	۱/۲۱۴۳	۱/۲۰۶۷	۴۰۰
۱/۳۱۴۹	۱/۳۹۶۳	۱/۳۲۱۵	۱/۳۱۵۳	۵۰۰

مثال ۲: به منظور مقایسه نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر بر روی تغییر شکل‌های بزرگ قطاع صفحات نسبتاً ضخیم توخالی مدرج تابعی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی و شرایط مرزی مختلف، نسبت ضخامت به شعاع خارجی $\lambda = h/r_o = 0.15$ ، زاویه قطاع $\alpha = 60^\circ$ ، $\alpha = 90^\circ$ و $q = 1Gpa$ با مقادیر خیز گزارش شده توسط گلمکانی و علامتیان [۲۲] در جدول ۳ ارائه شده است. در ادامه به بررسی و مطالعه پارامتری عوامل مؤثری همچون شاخص تابعی، شرایط مرزی، نسبت شعاع داخلی به خارجی و نسبت ضخامت به شعاع خارجی بر روی رفتار غیرخطی قطاع صفحات گرد توپر و توخالی مدرج تابعی می‌پردازیم. در تحلیل ارائه شده شعاع خارجی صفحه $r_o = 100mm$ و خواص مواد فلزی و سرامیکی در نظر گرفته شده عبارتند از: $E_m = 70GPa$ ، $\nu_m = 0.3$ ، $E_c = 427GPa$ ، $\nu_c = 0.17$. شکل ۴ نمودار جابه‌جایی عمودی بی‌بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز برای نسبت‌های متفاوت شعاع داخلی به

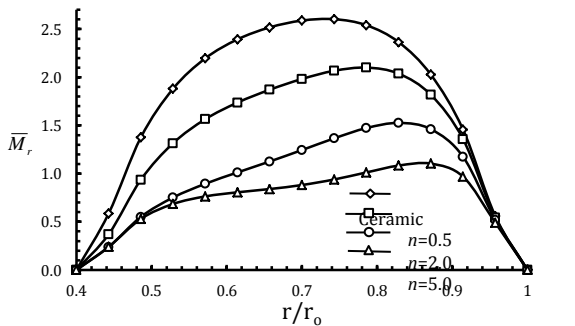
یکنواخت $\bar{q} = 500$ ، نسبت $h/r_0 = 0.1$ ، نسبت $r_i/r_0 = 0.4$ و زاویه $\alpha = 60^\circ$ ارائه شده است. کمیت‌های بی‌بعد $\bar{w} = w/h$ ، $\bar{M}_r = M_r r_0^2 / E_c h^4$ و $\bar{u} = u r_0 / h^2$ ، $\bar{q} = q r_0^4 / E_c h^4$ می‌باشند.



(الف)



(ب)

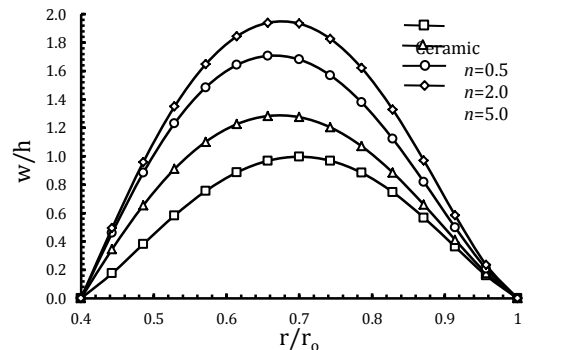


(ج)

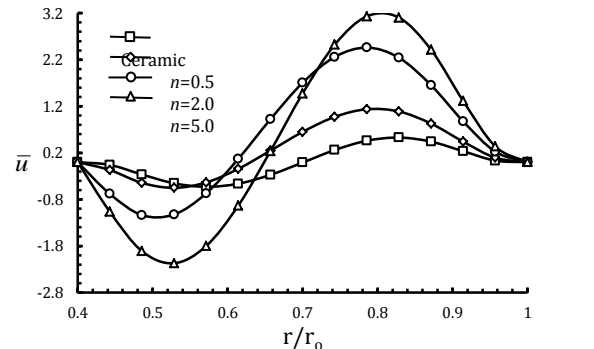
شکل (۶): تغییرات (الف) جابه‌جایی بی‌بعد عمودی، (ب) جابه‌جایی بی‌بعد شعاعی و (ج) لنگر شعاعی بی‌بعد در راستای شعاع قطاع توخالی مدرج تابعی با لبه‌های ساده.

همان‌طورکه انتظار می‌رود و قبلاً نیز اشاره شده است با افزایش n و میل کردن خواص مواد به سمت فلز میزان جابه‌جایی بی‌بعد عمودی و شعاعی افزوده می‌شود. همچنین ماکزیمم مقدار خیز برای شرایط مرزی ساده و گیردار در $\bar{r} = 0.7$ روی می‌دهد. بیشترین مقادیر اندازه \bar{M}_r در مرکز صفحه و مربوط به صفحه سرامیکی است و با افزایش n از مقدار آن به تدریج کاسته می‌شود.

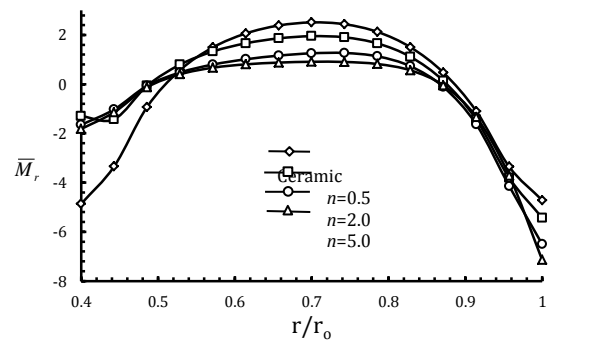
همان‌طورکه مشاهده می‌شود با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی جابه‌جایی صفحه در شرایط مرزی ساده و گیردار کاهش می‌یابد. اختلاف ماکزیمم جابه‌جایی بی‌بعد در $n=1$ بین نسبت $r_i/r_0 = 0.2$ و $r_i/r_0 = 0.5$ برای شرایط مرزی گیردار حدود $20/57$ درصد و برای شرایط مرزی ساده $18/3$ درصد می‌باشد.



(الف)



(ب)

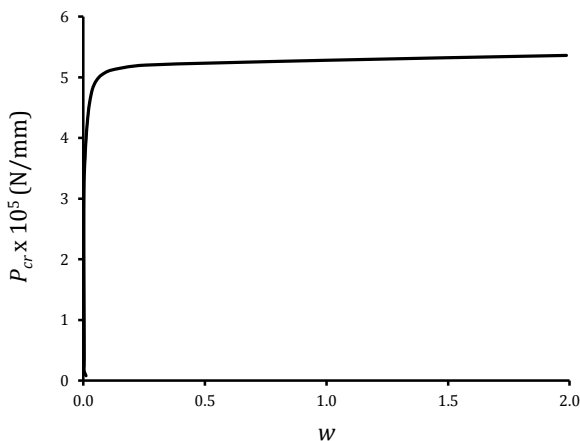


(ج)

شکل (۵): تغییرات (الف) جابه‌جایی بی‌بعد عمودی، (ب) جابه‌جایی بی‌بعد شعاعی و (ج) لنگر شعاعی بی‌بعد در راستای شعاع قطاع توخالی مدرج تابعی با لبه‌های گیردار.

در شکل‌های ۵-۶ به ترتیب بیانگر تغییر شکل‌های بزرگ بی‌بعد عمودی، شعاعی و لنگر بی‌بعد در راستای شعاعی برای قطاع صفحه توخالی با لبه‌های گیردار و ساده تحت بار

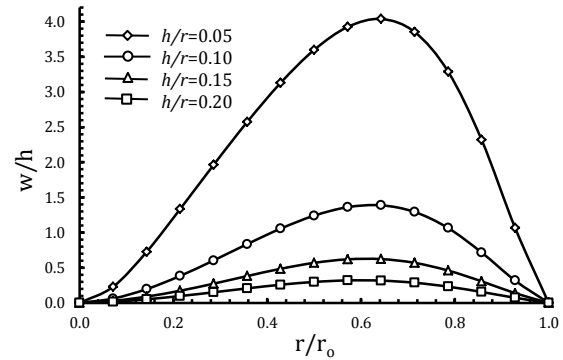
بحرانی یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌گردد و پس از همگرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌گردد و در پایان همگرایی میزان جابه‌جایی‌های حاصل از هر نمو با جابه‌جایی حاصل از نمو قبل جمع می‌شود و این فرایند تا کامل شدن بار خارجی تکرار می‌شود. در پایان نمودار بار- تغییر مکان رسم می‌شود و در نقطه‌ای از نمودار که افزایش نامتناسب تغییر مکان وجود دارد، آن نقطه بار بحرانی کمانش می‌باشد. در شکل ۸ نمودار بار- تغییر مکان برای قطاع توخالی با شرایط مرزی گیردار- ساده رسم شده است.



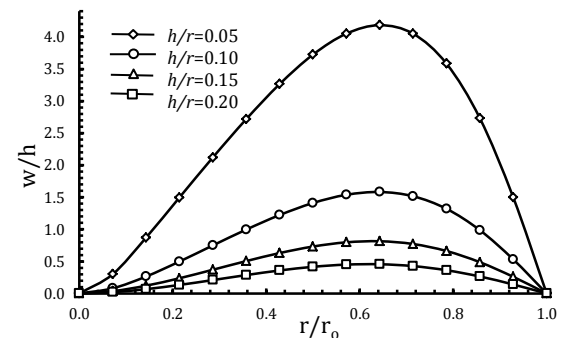
شکل (۸): نمودار بار- تغییر مکان برای قطاع توخالی با تکیه‌گاه گیردار- ساده.

به دلیل عدم وجود نتایجی به منظور مقایسه برای کمانش قطاع صفحات مدرج تابعی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی، هندسه موردنظر در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی شده و مقایسه بین نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. لازم به ذکر است که برای مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس صفحه در فضای سه‌بعدی به صورت پوسته/ صفحه‌ای فرض می‌گردد. به منظور مدل‌سازی به صورت ماده تابعی، صفحه به چندین قسمت در راستای شعاعی تقسیم‌بندی می‌شود. به طوری که مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در راستای شعاعی برای هر قسمت یکسان بوده و به طور تدریجی از یک قسمت به قسمت دیگر تغییر می‌کند. بدیهی است که با افزایش تعداد قسمت‌ها دقت در مدل‌سازی ماده تابعی افزایش می‌یابد. برای مش‌بندی صفحه نیز از المان S8R استفاده شده است.

مثال ۱: برای بررسی صحت و دقت روش حل حاضر هندسه موردنظر در نرم‌افزار المان محدود آباکوس مدل‌سازی شده و بار بحرانی کمانش قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی برای نسبت



(الف)



(ب)

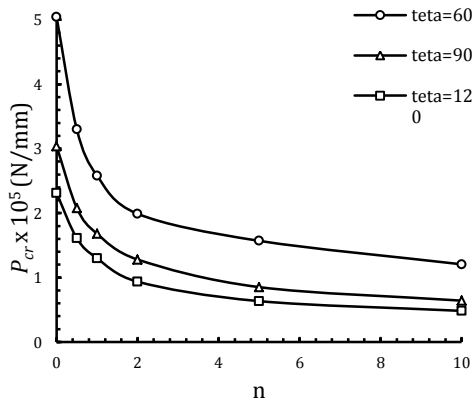
شکل (۷): نمودار جابه‌جایی عمودی بی‌بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع خارجی قطاع مدرج تابعی توپر، (الف) تکیه‌گاه گیردار، (ب) تکیه‌گاه ساده.

شکل ۷ نمودار جابه‌جایی عمودی بی‌بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع خارجی برای قطاع صفحه مدرج تابعی توپر برای $n=1$ ، $\alpha = 60^\circ$ و $q = 20Gpa$ و شرایط مرزی ساده و گیردار رسم شده است. درصد اختلاف ماکزیمم جابه‌جایی بی‌بعد بین نسبت $h/r_0 = 0.10$ و $h/r_0 = 0.05$ برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده $62/18$ درصد و شرایط مرزی گیردار $65/63$ درصد می‌باشد. این درصد اختلاف بین نسبت $h/r_0 = 0.10$ و $h/r_0 = 0.15$ برای شرایط مرزی ساده $48/52$ درصد و برای شرایط مرزی گیردار $55/12$ درصد می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که افزایش نسبت ضخامت به شعاع تأثیر بیشتری در شرایط مرزی گیردار نسبت به ساده دارا است. همچنین، مشاهده می‌شود با افزایش نسبت h/r_0 این درصد اختلاف بین دو نسبت متوالی h/r_0 برای شرایط مرزی ساده و گیردار کاهش می‌یابد.

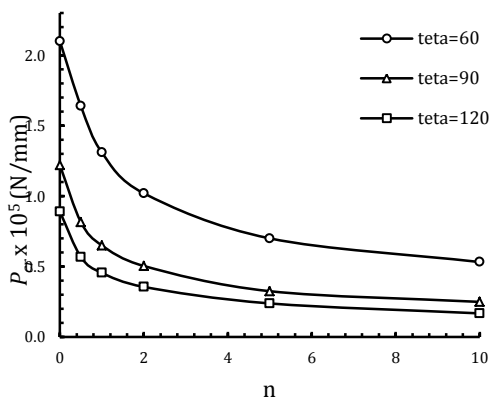
۲-۴- کمانش قطاع صفحات مدرج تابعی

با توجه به اینکه ماهیت کمانش عبارتست از افزایش نامتناسب تغییر مکان به علت افزایش کوچک بار، به منظور پیدا کردن بار

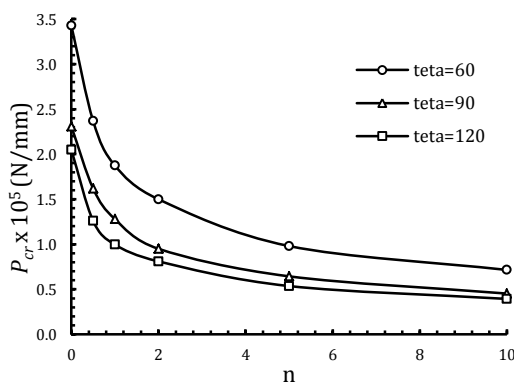
شعاع داخلی به خارجی باشد. درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین نسبت $r_i/r_o = 0.2$ و $r_i/r_o = 0.4$ در $n = 0.5$ برای شرایط مرزی گیردار و ساده حدود ۲۰ درصد می باشد که این اختلاف ناشی از کاهش درجه آزادی سامانه در حالت گیردار نسبت به ساده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۹): بار بحرانی کمانش صفحه توخالی مدرج تابعی برای زوایا مختلف، نسبت $h/r_o = 0.1$ و $r_i/r_o = 0.2$ و شرایط مرزی (الف) تکیه‌گاه گیردار (CCCC)، (ب) تکیه‌گاه ساده (SSSS)، (ج) تکیه‌گاه گیردار - ساده (CSCS).

نسبت $r_i/r_o = 0.2$ ، نسبت $h/r_o = 0.05$ و شرایط مرزی و توان‌های تابعی مختلف در جدول ۴ آورده شده است. شعاع خارجی $r_o = 100mm$ و خواص مواد طبق رابطه (۳۲) در نظر گرفته شده است. مقایسه بین نتایج ارائه شده در این قسمت نیز حاکی از کارایی و دقت روش حل حاضر و نتایج آن می باشد. در ادامه به بررسی و مطالعه پارامتری عوامل مؤثری همچون شاخص تابعی، شرایط مرزی، نسبت شعاع داخلی به خارجی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی و زاویه صفحه بر روی رفتار کمانش قطاع صفحات توخالی مدرج تابعی می پردازیم. در تحلیل ارائه شده شعاع خارجی صفحه $r_o = 100mm$ و خواص مواد طبق رابطه (۳۲) در نظر گرفته شده است.

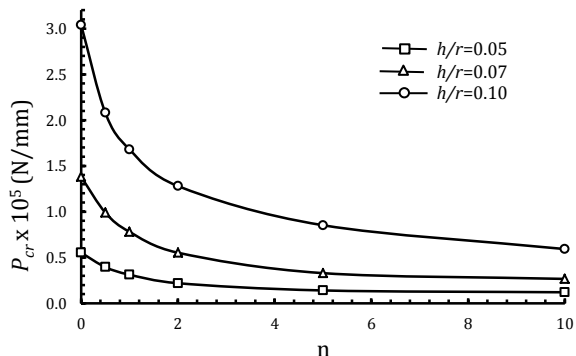
شکل ۹ نمودار بار بحرانی کمانش بر حسب ماده تابعی برای نسبت $r_i/r_o = 0.2$ ، نسبت $h/r_o = 0.10$ و شرایط مرزی مختلف و برای زوایای مختلف رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می شود با افزایش زاویه قطاع بار بحرانی کمانش کاهش می یابد. در واقع با بزرگ شدن زاویه قطاع، تاثیر شرایط مرزی روی لایه‌های میانی قطاع کاهش می یابد و باعث می شود قطاع در بارهای کمتر کمانش کند. بار بحرانی کمانش با افزایش توان مدرج تابعی کاهش می یابد و شدت این کاهش برای $n > 2$ به آهستگی انجام می شود که این رفتار می تواند ناشی از کاهش تغییرات خواص مواد در این محدوده باشد.

به عبارت دیگر روند آهسته شدن شدت کاهش بار بحرانی کمانش برای $n > 2$ می تواند ناشی از این باشد که افزایش سهم فلز ماده مدرج تابعی در بازه ۰ تا ۲ بیشینه است و این شدت فلز شدن ماده مدرج تابعی برای $n > 2$ کاهش می یابد. درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین $n = 0.5$ و $n = 1$ در شرایط مرزی مختلف و زوایای مختلف قطاع حدود ۲۰ درصد می باشد. همچنین درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین $\alpha = 60^\circ$ و $\alpha = 90^\circ$ در $n = 1$ برای شرایط مرزی گیردار (CCCC) حدود ۳۵ درصد و برای شرایط مرزی ساده (SSSS) حدود ۵۰ درصد و برای شرایط مرزی گیردار ساده (CSCS) حدود ۳۱ درصد می باشد.

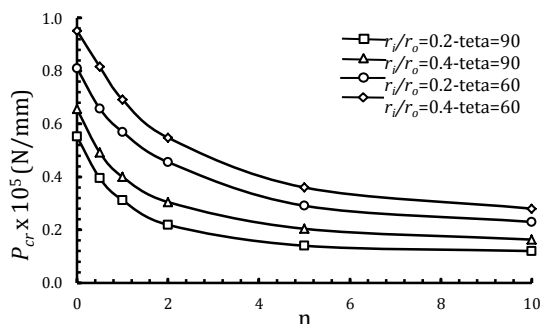
شکل ۱۰ نمودار بار بحرانی کمانش قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی بر حسب توان ماده تابعی و نسبت‌های $r_i/r_o = 0.2$ ، $h/r_o = 0.05$ و $\alpha = 60^\circ$ و $\alpha = 90^\circ$ ، $r_i/r_o = 0.4$ ، برای شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه ساده رسم شده است. مشاهده می شود با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی بار بحرانی کمانش افزایش می یابد که این رویداد می تواند ناشی از افزایش سفتی صفحه به علت ازدیاد نسبت

جدول (۴): مقایسه بار بحرانی کمانش $p_{cr}(N/mm)$ ، قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی برای نسبت $r_i/r_o = 0.2$

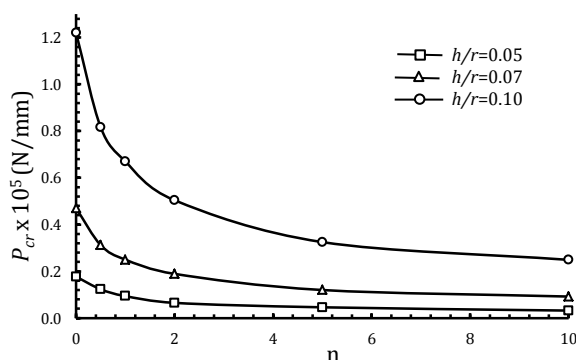
CSCS		نوع تکیه‌گاه	SSSS		CCCC		کسر حجمی سرامیک و فلز (n)
پژوهش حاضر	آباکوس		پژوهش حاضر	آباکوس	پژوهش حاضر	آباکوس	
۵۱۱۰۰	۵۰۶۰۵		۲۷۵۰۰	۲۶۳۵۲	۸۱۰۰۰	۸۰۱۲۱	سرامیک
۳۸۷۰۰	۳۸۴۰۶		۲۱۶۰۰	۲۱۰۰۸	۶۵۸۰۰	۶۵۰۷۱	۰/۵
۳۲۰۰۰	۳۲۱۴۲		۱۸۰۰۰	۱۷۷۳۷	۵۷۰۰۰	۵۶۱۱۶	۱
۲۴۶۶۶	۲۵۰۶۴		۱۴۰۰۰	۱۳۹۲۰	۴۵۶۰۰	۴۴۴۲۹	۲
۱۷۴۰۰	۱۷۲۲۴		۹۶۰۰۰	۹۳۲۵	۲۹۱۰۰	۲۸۹۵۳	۵
۸۴۰۰	۸۰۱۸		۴۶۵۰	۴۴۰۶	۱۲۹۰۰	۱۲۷۸۸	فلز



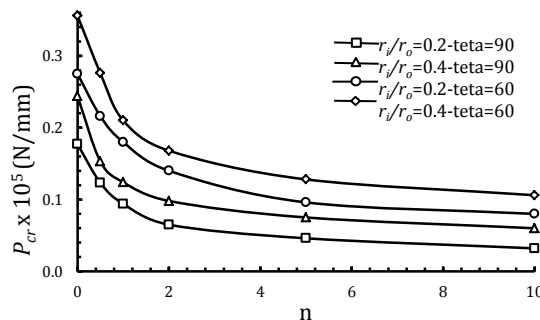
(الف)



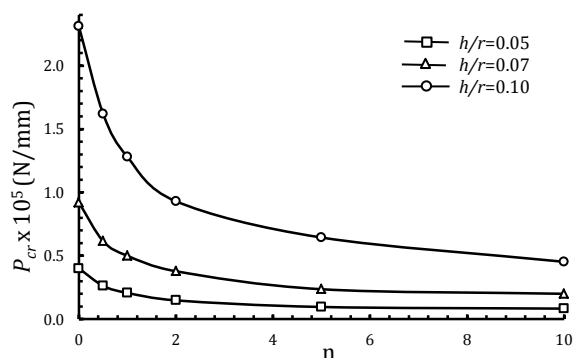
(الف)



(ب)



(ب)



(ج)

شکل (۱۱): بار بحرانی کمانش قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی برحسب توان ماده تابعی، نسبت $r_i/r_o = 0.2$ ، شرایط مرزی (الف) تکیه‌گاه گیردار (CCCC)، (ب) تکیه‌گاه ساده (SSSS)، (ج) تکیه‌گاه گیردار- ساده (CSCS).

شکل (۱۰): بار بحرانی کمانش قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی برای زوایا ، نسبت شعاع داخلی به خارجی مختلف، نسبت $h/r_o = 0.05$ و شرایط مرزی (الف) تکیه‌گاه گیردار (CCCC)، (ب) تکیه‌گاه ساده (SSSS).

شکل ۱۱ نمودار بار بحرانی کمانش قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی برحسب توان ماده تابعی برای شرایط مرزی مختلف و نسبت‌های گوناگون h/r_o ، نسبت $r_i/r_o = 0.2$ و زاویه قطاع $\alpha = 90^\circ$ رسم شده است. مشاهده می‌شود با افزایش نسبت h/r_o بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی مختلف افزایش می‌یابد. در واقع افزایش ضخامت، قطاع را در برابر پدیده کمانش مقاوم‌تر نموده و نیروی بیشتری برای وقوع کمانش نیازمند است. درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین نسبت‌های $h/r_o = 0.05$ و $h/r_o = 0.07$ همچنین بین نسبت $h/r_o = 0.07$ و $h/r_o = 0.10$ در $n = 1$ برای شرایط مرزی مختلف حدود ۶۰ درصد می‌باشد.

نسبت به روش‌های دیگر تعیین بار بحرانی کمانشی، حل کامل مسأله و تعیین کلیه مقادیر میدان جابه‌جایی است که در مراحل بعدی برای تحلیل پدیده پس‌کمانش می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. لذا در این تحقیق علاوه بر استفاده از روشی نو در حل مسأله کمانش، برای اولین بار به تحلیل کمانش قطاع صفحات مدرج تابعی در راستای شعاعی می‌پردازیم. در این راستا خمش این صفحات نیز مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی صفحه تابعی در جهت شعاع با استفاده از مدل موری-تاناکا تعیین شده است. معادلات غیرخطی نموی با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه اول و فرضیه تغییرشکل‌های بزرگ فون کارمن ارائه شده است. برای حل معادلات غیرخطی نموی از روش‌هایی پویا و روش تفاوت‌های محدود استفاده گردیده است. با توجه به عدم وجود تحقیقی مشابه برای کمانش قطاع صفحات گرد تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بارهای مکانیکی، برخی از نتایج با پاسخ‌های به‌دست آمده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس برای صفحات تابعی مقایسه شده است و مطابقت خوب به‌دست آمده حاکی از صحت و دقت روش عددی به‌کاررفته می‌باشد.

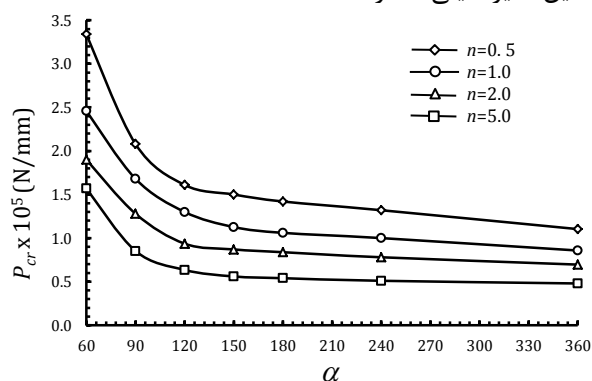
در انتها اثرات پارامترهای مختلفی همچون شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی، زاویه قطاع برای خمش و کمانش صفحات مورد بررسی قرار گرفته است. برخی از نتایج به‌دست آمده عبارتند از:

۱- با افزایش توان ماده تابعی درصد کسر حجمی سرامیک کاهش و درصد کسر حجمی فلز افزایش می‌یابد و چون سفتی فلز کمتر از سرامیک می‌باشد در اثر افزایش توان ماده تابعی در خمش خیز صفحه افزایش و در کمانش بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش زاویه قطاع بار بحرانی کمانش در شرایط مرزی مختلف کاهش می‌یابد،

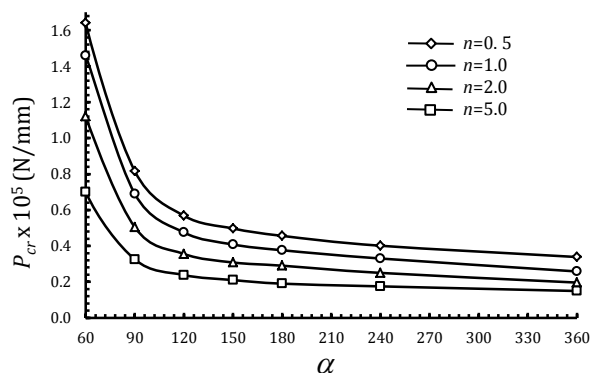
۲- مشاهده می‌شود که افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی و همچنین افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شوند،

۳- مشاهده می‌شود با افزایش نسبت h/r_o بار بحرانی کمانش برای قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف افزایش می‌یابد. درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین نسبت‌های $h/r_o = 0.05$ و $h/r_o = 0.07$ همچنین بین نسبت $h/r_o = 0.07$

شکل ۱۲ نمودار بار بحرانی کمانش برحسب زاویه قطاع برای توان‌های گوناگون ماده تابعی، نسبت $r_i/r_o = 0.20$ ، $h/r_o = 0.10$ و شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار و ساده رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش توان ماده تابعی و میل کردن خواص ماده به سمت فلز بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش زاویه بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر تأثیر افزایش زاویه بر بار بحرانی کمانش تا زاویه ۱۲۰ زیاد بوده و از زاویه ۱۲۰ درجه به بعد این تأثیر خیلی کمتر است.



(الف)



(ب)

شکل (۱۲): بار بحرانی کمانش قطاع صفحه توخالی مدرج تابعی برحسب زاویه قطاع برای توان‌های مختلف ماده تابعی، نسبت $r_i/r_o = 0.2$ ، $h/r_o = 0.1$ و شرایط مرزی (الف) تکیه‌گاه گیردار، (ب) تکیه‌گاه ساده.

۵- نتیجه‌گیری

در اکثر کارهای به انجام رسیده تا کنون بر روی تحلیل کمانش صفحات، از روش تعادل همسایه استفاده شده است که به نوعی به خطی‌سازی معادلات تعادل می‌پردازد. در این تحقیق برای نخستین بار بدون ساده‌سازی در معادلات به حل مسأله کمانش با استفاده از روش نموی پرداخته شده است. مزیت این روش

11. Cheung, M.S. and Chan, M.Y.T. "Static and Dynamic Analysis of thin and Thick Sectorial Plates by the Finite Strip Method", *Computers and Structures*, Vol. 14, pp. 79–88, 1981.
12. Turvey, G.J. and Salehi, M. "Elastic Large Deflection Response of Annular Sector Plates-A Comparison of DR Finite-Difference, Finite Element and other Numerical Solutions", *Computers and Structures*, Vol. 40, No. 5, pp. 1267–1291, 1991.
13. Turvey, G.J. and Salehi, M. "Elasto-Plastic Response of Uniformly Loaded Sector Plates: Full-Section Yield Model Predictions and Spread of Plasticity", *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 2335–2348, 2001.
14. Turvey, G.J. and Salehi, M. "Annular Sector Plates: Comparison of Full-Section and Layer Yield Predictions", *Computers & Structures*, Vol. 83, pp. 2431–2441, 2005.
15. Salehi, M. and Sobhani, A.R. "Elastic Linear and Nonlinear Analysis of Fiber-Reinforced Symmetrically Laminated Sector Plate", *Computers & Structures*, Vol. 65, pp. 65–79, 2004.
16. Nath, Y., Sharda, H.B. and Sharma, A. "Non-Linear Analysis of Moderately Thick Sector Plates", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 10, pp. 765–778, 2005.
17. Salehi, M. and Shahidi, A. "Large Deflection Analysis of Elastic Mindlin Sector Plates", *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 5, pp. 987–998, 1994.
18. Aghdam, M.M. and Mohammadi, M. "Bending Analysis of Thick Orthotropic Sector Plates with Various Loading And Boundary Conditions", *Computers & Structures*, Vol. 88, pp. 212–218, 2009.
19. Andakhshideh, A., Maleki, S. and Aghdam, M.M. "Non-Linear Bending Analysis of laminated Sector Plates Using Generalized Differential Quadrature", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 2258–2264, 2010.
20. Atashipour, S.R., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E. "On the Boundary Layer Phenomenon in Bending of Thick Annular Sector Plates Using Third-Order Shear Deformation Theory", *Acta Mechanica*, Vol. 211, pp. 89–99, 2010.
21. Mousavi, S.M. and Tahani, M. "Analytical Solution for Bending of Moderately Thick Radially Functionally Graded Sector Plates with General Boundary Conditions Using Multi-Term Extended Kantorovich Method", *Composites: Part B*, Vol. 43, pp. 1405–1416, 2012.
22. Golmakani, M.E. and Alamatian, J. "Large Deflection Analysis of Shear Deformable Radially Functionally Graded Sector Plates on Two-Parameter Elastic Foundations", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 42, pp. 251–265, 2013.
23. Mehrabian, M. and Golmakani, M.E. "Nonlinear Bending Analysis of Radial-Stiffened Annular Laminated Sector Plates with Dynamic Relaxation Method", *Computers and Mathematics with Applications*, In press, 2015.
- تحلیل کمانش و خمش غیرخطی قطاع صفحات مدرج تابعی در راستای...
 $h/r_o = 0.10$ در $n = 1$ برای شرایط مرزی مختلف حدود ۶۰ درصد می‌باشد و
- ۴- تاثیر افزایش زاویه بر بار بحرانی کمانش تا زاویه ۱۲۰ زیاد بوده و از زاویه ۱۲۰ درجه به بعد این تاثیر خیلی کمتر است.
- ۵- مشاهده می‌شود که شرایط تکیه‌گاهی ساده- گیردار نسبت به شرایط مرزی گیردار- ساده به دلیل اینکه طول مرز گیردار بیشتر از ساده است برای خمش صفحه دارای کمترین خیز و برای کمانش صفحه دارای بیشتر بار بحرانی کمانش می‌باشد.
- ۶- ملاحظه می‌شود که شرایط مرزی ساده- ساده دارای بیشترین منتهج تنش بی‌بعد و گیردار- گیردار دارای کمترین مقدار می‌باشد.
- ۶- مراجع
- Ventsel, E. and Krauthammer, T. "Thin Plates and Shells Theory, Analysis and Applications", *Marker Dekker Inc, New York, USA*, 2001.
 - Harik, I.E. "Analytical Solution to Orthotropic Sector", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, pp. 554–568, 1984.
 - Golmakani, M.E. and Emami, M. "Nonlinear Bending and Buckling Analysis of Functionally Graded Annular Plates", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 11, pp. 1-14, 2013 (in Persian).
 - Golmakani, M.E. and Mehrabian, M. "Elastic Large Deflection Analysis of Ring-Stiffened Annular Laminated Plates by Using of Dynamic Relaxation Method", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 109-123, 2013 (in Persian).
 - Carrier, G.F. "The Bending of a Clamped Sectorial Plate", *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 11, pp. 134–139, 1944.
 - Kim, K. and Yoo, C.H. "Analytical Solution to Flexural Responses of Annular Sector Thin-Plates", *Thin-Walled Structures*, Vol. 48, pp. 879–887, 2010.
 - Kobayashi, H. and Turvey, G.J. "Elastic Small Deflection Analysis of Annular Sector Mindlin Plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 36, No. 9, pp. 811–827, 1994.
 - Turvey, G.J. and Salehi, M. "DR Large Deflection Analysis of Sector Plates", *Computers & Structures*, Vol. 34, pp. 101–112, 1990.
 - Srinivasan, R.S. and Thiruvengkatachari, V. "Non-Linear Bending of Annular Sector Plates Using a Matrix Method", *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 5, pp. 803–812, 1984.
 - Aghdam, M.M., Mohammadi, M. and Erfanian, V. "Bending Analysis of Thin Annular Sector Plates Using Extended Kantorovich Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, pp. 983–990, 2007.

24. Harik, I.E. "Stability of Annular Sector Plates with Clamped Radial Edges", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 971-972, 1985.
25. Srinivasan, R.S. and Thiruvenkatacharit, V. "Stability of Annular Sector Plates with Variable Thickness", *Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 22, No. 2, pp. 315-317, 1984.
26. Liu, W.H. and Chen, W.C. "Note on the Stability of Annular Sector Plates with Elastically Restrained Edges", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 31, No. 8, pp. 611-622, 1989.
27. Zhou, Y.H., Zheng, X. and Harik, E. "A Semi Numerical Method for Buckling of Sector Plates", *Computers and Structures*, Vol. 57, No. 5, pp. 847-854, 1995.
28. Wang, C.M. and Xiang, Y. "Deducing Buckling Loads of Sectorial Mindlin Plates from Kirchhoff Plates", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 5, pp. 596-598, 1999.
29. Sharma, A. and Sharda, H.B. "Stability and Vibration of Mindlin Sector Plates: an Analytical Approach", *Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 43, No. 5, pp. 1109-1115, 2005.
30. Sharma, A., Sharda, H.B. and Nath, Y. "Stability and Vibration of Thick Laminated Composite Sector Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, pp. 1-23, 2005.
31. Naderi, A. and Saidi, A.R. "Exact Solution for Stability Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Sector Plates on Elastic Foundation", *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 629-638, 2011.
32. Hosseini-Hashemi, Sh. Akhavan, H., Rokni Damavandi Taher, H., Daemi, N. and Alibeigloo, A. "Differential Quadrature Analysis of Functionally Graded Circular and Annular Sector Plates on Elastic Foundation", *Materials and Design*, Vol. 31, pp. 1871-1880, 2010.
33. Saidi, A.R. and Hasani-Baferani, A. "Thermal Buckling Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Annular Sector Plates", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 1744-1752, 2010.
34. Hosseini-Hashemi, Sh. Akhavan, H., Rokni Damavandi Taher, H., Daemi, N. and Alibeigloo, A. "Large Differential Quadrature Analysis of Functionally Graded Circular and Annular Sector Plates on Elastic Foundation", *Journal of Materials & Design*, Vol. 31, pp. 1871-1880, 2010.
35. Jabbarzadeh, M. and Baghdar-Delgosha, M.K. "Thermal Buckling Analysis of FGM Sector Plates Using Differential Quadrature Method", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 33-45, 2013 (in Persian).