

# محاسبه تحلیلی و اجزاء محدود تنش برشی بین لایه‌ای در اتصالات لایه‌ای چسبی در کامپوزیت‌ها

محمد احمدی<sup>۳</sup>  
دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه شهید چمران اهواز

کرامت ملک‌زاده‌فرد<sup>۲</sup>  
دانشکده مکانیک و هوافضا  
دانشگاه صنعتی مالک اشتر  
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۷/۱۰)

جواد شهبازی کرمی<sup>۱</sup>  
دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

## چکیده

در این مقاله، توزیع تنش میان‌لایه‌ای در اتصالات چسبی تک‌لایه و جفت‌لایه مورد بررسی قرار گرفته است. یک معادله جابه‌جایی درجه‌دوم برای چسب در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. برای تحلیل تنش این اتصال، نمودار جسم آزاد المانی از الیاف، در نواحی چسبی و غیرچسبی اتصال رسم شده و با نوشتن معادلات تعادل برای این المان‌ها، معادلات دیفرانسیل حاکم بر اتصال استخراج شده است. سپس، با حل معادلات حاکم و با استفاده از معادلات شرایط مرزی، مقادیر جابه‌جایی در الیاف و در نتیجه تنش برشی ایجاد شده در چسب و بار محوری ایجاد شده در الیاف به دست آمده است. علاوه بر این موارد، اثرات انبساط گرمایی و نم گرمایی نیز در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که توزیع تنش علاوه بر مشخصات هندسی همچون ضخامت و طول ناحیه چسبی، به مشخصات فیزیکی اتصال از جمله مدول یانگ، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی لایه نیز بستگی دارد. برخی از انواع اتصالات توزیع تنش یکنواخت‌تری نسبت به بقیه دارند. مثلاً تنش برشی بیشینه در اتصال جفت‌لایه تقریباً نصف اتصال تک‌لایه است. نتایج حل‌های تحلیلی با نتایج به دست آمده از حل اجزا محدود به وسیله نرم‌افزار ANSYS صحت‌سنجی شده است و تطابق خوبی بین این نتایج مشاهده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع تنش، اتصال چسبی، مواد مرکب، ماتریس فلزی

## Analytical and FEM Solution for Under Layer Shear Stress in Adhesive Lap-Joints in Composites

J. Shahbazi Karami  
Mechanical Engineering  
Department

K. Malekzade Fard  
Mechanical and Aerospace  
Department

M. Ahmadi  
Mechanical Engineering  
Department

Shahid Rajaei Teacher Training University    Maleke Ashtar University of Technology

Shahid Chamran University

(Received: 1/December/2014; Accepted: 2/October/2015)

## ABSTRACT

In this article, the interfacial stresses in single and double lap joints are studied. A quadratic displacement field is assumed in the adhesive layer. For Analyzing stress in joint the free body diagram element of fiber in adhesive and unadhesive part of joint has been drawn. By writing the static equation for this elements, the differential equation for joint has been derived. Then by solving this differential equation and using the boundary condition equation, displacement in fibers and so the shear stress in adhesive and axial force in fibers has been derived. The effect of thermal and hygrothermal stresses are also included. It is observed that the peak shear stress developed within the adhesive layer is function of mechanical and physical parameters as Young's module, Poisson's ratio, thickness, thermal and hygrothermal coefficients of expansion. The results show that the double lap joint appears to reduce the peak shear stress within the joint significantly. For example maximum shear stress in double lap joints are nearly the half of single lap joints. The results are validated by FEM solution. An excellent agreement is observed between analytical and FE methods.

**Keywords:** Stress Distribution, Composite, Adhesive Joint, Metal Matrix

۱- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): shahbazi.mech@gmail.com

۲- دانشیار

۳- کارشناسی ارشد

## ۱- مقدمه

با توجه به کاربرد وسیع اتصالات چسبی مواد مرکب در صنایع مختلف از جمله صنایع هوایی، مطالعه رفتار این مواد از اهمیت بالایی برخوردار است، اما وجود خواص ناهمگن و غیرایزوتروپیک مواد مرکب تحلیل رفتار مکانیکی آنها را دشوار ساخته است. از این رو تحلیل جنبه‌های مختلف رفتار مکانیکی مواد مرکب ضروری به نظر می‌رسد.

اتصالات چسبی ظرف ۷۰ سال اخیر مورد تحقیق و آزمایش بسیاری قرار گرفته‌اند [۱] و مدل‌های تحلیلی متفاوتی نیز ارائه شده است. برای اولین بار ولکرسون<sup>۱</sup> [۲] تحلیلی ارائه کرد که در آن، فرض شده که لایه چسب بتواند تغییر شکل برشی داشته باشد، به طوری که لایه‌های چسب‌شونده تنها بتوانند تغییر شکل طولی داشته باشند، زیرا این لایه‌ها به صورت الاستیک فرض شده‌اند نه صلب. کاهش کرنش در لایه چسب‌شونده در طول ناحیه چسبی و اتصال لایه‌های چسب به لایه‌های چسب‌شونده، باعث غیریکنواخت شدن توزیع کرنش و تنش برشی در لایه چسب خواهند شد. تنش برشی در دو انتهای لایه چسب، بیشینه و در ناحیه وسط بسیار کمتر است. البته این تحلیل نمی‌تواند اثرات ناشی از اعمال بار خارج از مرکزی را بر روی اتصالات یک‌طرفه در نظر بگیرد. به همین دلیل این روش برای تحلیل اتصالات جفت‌لبه که در آنها اثر خارج از مرکزی بار کم‌اهمیت‌تر از اتصالات تک‌لبه است، کاربرد بیشتری دارد.

اجالوو<sup>۲</sup> و ادینف<sup>۳</sup> [۳] به بررسی اثر ضخامت لایه چسب پرداختند. همچنین اجالوو و ادینف در تحلیل خود، کار گلاند<sup>۴</sup> و رزینر<sup>۵</sup> [۴] را با استفاده از یک معادله کرنش جابه‌جایی برشی کامل‌تر برای لایه چسب توسعه دادند و اثر ضخامت لایه چسب را روی توزیع تنش مورد بررسی قرار دادند. در این تحلیل تنش برشی در راستای ضخامت می‌تواند تغییر کند، ولی تنش نرمال پیل<sup>۶</sup> در راستای ضخامت ثابت فرض شده است. تحلیل آنها پیش‌بینی می‌کند که تنش برشی بیشینه در دو انتهای ناحیه اتصال اتفاق می‌افتد و شرایط مرزی تنش برشی صفر در دو انتها ارضاء نمی‌شود.

پس از کارهای تحلیلی کلاسیک نامبرده، بعضی از محققان سعی کردند تا حل بسته‌ای برای مواردی که لایه‌های

چسب‌شونده مشابه نباشند (از نظر ضخامت و جنس) یا از جنس مواد مرکب باشند، ارائه کنند [۵]. اما هر چه مدل‌ها کامل‌تر شوند، معادلات حاکم پیچیده‌تر و نیاز به حل کامپیوتری بیشتر می‌شود. چنانچه از لمینیت‌های مرکب به عنوان لایه‌های چسب‌شونده استفاده کنیم، می‌بایست تغییر شکل‌های برشی و عمودی در جهت ضخامت (عرضی) در این لایه‌ها در نظر گرفته شوند. اولین کارهایی که در این زمینه صورت گرفت، کارهایی بود که رنتون<sup>۷</sup> و وینسون<sup>۸</sup> [۵]، سرینیواس<sup>۹</sup> [۶] و آلمن<sup>۱۰</sup> [۷] انجام دادند. رنتون و وینسون و سرینیواس تحلیل‌های مشابهی ارائه دادند که در آنها تنش در لایه چسب در امتداد ضخامت ثابت است و از تنش عمودی طولی در لایه چسب نیز صرف‌نظر شده است. با این حال تنها مدل رنتون و وینسون شرایط تنش صفر در انتهای آزاد ناحیه اتصال را ارضاء می‌کند. از طرف دیگر در تحلیل آلمن [۷] تنش‌های پیل در امتداد ضخامت تغییر می‌کند و همچنین شرایط مرزی را نیز ارضاء می‌کند. در هر دو تحلیل قبل تنش برشی در لایه چسب در جهت ضخامت ثابت فرض شده است و از تنش عمودی طولی در لایه چسب نیز چشم‌پوشی شده است.

شان چن<sup>۱۱</sup> و همکاران [۸] اتصال تک‌لبه نامتقارن را که در آن طول، جنس و ضخامت لایه‌ها می‌تواند متفاوت باشد، تحلیل کردند. آنها با استفاده از حالت الاستیک خطی در حالت دوبعدی و روش حساب تغییرات<sup>۱۲</sup>، با کمینه‌کردن مکمل انرژی کرنشی<sup>۱۳</sup> در حالت کرنش صفحه‌ای، حل بسته‌ای<sup>۱۴</sup> برای توزیع تنش در طول ناحیه چسبی به دست آوردند. در این روش تمامی شرایط مرزی برای تنش، ارضاء شده و تنش برشی در دو انتهای لایه چسب، بیشینه و در ناحیه وسط بسیار کمتر است. آنها همچنین تأثیر ضخامت لایه‌ها را برای رسیدن به تنش کمتر بررسی کردند.

شاهین و طاهری [۹] اتصالات تک‌لبه، صلب و Single Strap را با استفاده از روش انرژی کرنشی مورد بررسی قرار دادند. آنها رابطه‌ای برای محاسبه خیز در لایه‌ها به دست آورده و با استفاده از فرضیه خمش استوانه‌ای<sup>۱۵</sup>، ضرایبی برای محاسبه گشتاورهای لبه‌ای<sup>۱۶</sup> (در ابتدا و انتهای ناحیه چسبی)

7 - Renton

8 - Vinson

9 - Srinivas

10 - Allman

11 - Cheng

12- Variation Method

13- Complementary Strain Energy

4- Close Form Solution

15- Cylindrically Bending

16- Edge Moments

1 - Volkersen

2 - Ojalvo

3 - Eidinoff

4 - Goland

5 - Reissner

6 - Peeling Stress

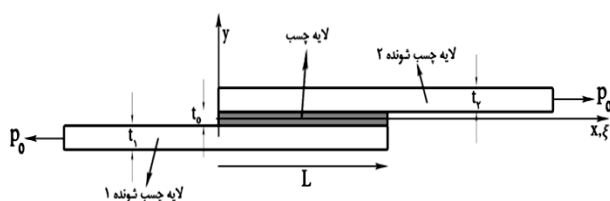
متغیر است و لایه‌ها می‌توانند از لحاظ مشخصات فیزیکی و هندسی غیرمشابه باشند. از این‌رو، این مدل نسبت به سایر مدل‌ها، یک حل بسته کلی‌تر از نحوه توزیع تنش ارائه می‌کند. همچنین نقطه قوت بسیار مهم این تحلیل این است که می‌تواند آن را به راحتی برای دسته وسیعی از انواع اتصالات لبه‌ای به کار برد. تمامی این مدل‌ها با نتایج به دست آمده از حل اجزاء محدود به وسیله نرم‌افزار ANSYS صحت‌سنجی شده است. تمامی فرضیات بنابر الاستیک خطی و بارگذاری‌ها به صورت استاتیکی در نظر گرفته شده است.

## ۲- معادلات حاکم

در این قسمت نحوه استخراج معادلات حاکم بر تنش در لایه چسب برای اتصالات تک‌لبه و جفت‌لبه در لایه چسب تشریح خواهد شد. با اعمال شرایط مرزی موجود، معادلات جابه‌جایی در الیاف و تنش برشی در چسب و بار محوری موجود در الیاف به دست آمده است.

### ۲-۱- اتصال تک‌لبه

با توجه به اینکه بار اعمالی به اتصال که به صورت بار گسترده یکنواخت به لایه‌های چسب‌شونده اعمال می‌شود تغییر نمی‌کند و تنش برشی نیز در ناحیه چسبی در امتداد پهنا (Z) تغییر نمی‌کند. می‌توان مدل سه‌بعدی اتصال را به مدل دوبعدی مطابق شکل ۱ تقلیل داد و سپس تنش برشی را محاسبه کرد.



شکل (۱): مدل دوبعدی اتصال تک‌لبه.

در این تحلیل از فرضیات زیر استفاده می‌شود:

- ۱- رفتار تمامی لایه‌ها در محدوده الاستیک خطی در نظر گرفته می‌شود،
- ۲- فرض شده است که لایه چسب بتواند علاوه بر تغییر شکل برشی، تغییر شکل طولی نیز داشته باشد (تئوری شیرلگ اصلاح‌شده)،

ارائه دادند. نتایج به دست آمده در این تحلیل با روش اجزاء محدود و همچنین روش تجربی مقایسه شده است. لو<sup>۱</sup> و تانگبا<sup>۲</sup> [۱۰] در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ (غیرخطی) و جابه‌جایی‌های عرضی برشی در لایه‌ها و همچنین روابط تعادل، معادلات دیفرانسیلی حاکم را برای اتصال تک‌لبه استخراج کردند. این تحلیل برای اتصالاتی که دارای لایه‌هایی از مواد همسانگرد بوده و یا لایه‌های کامپوزیتی با چیدمان متقارن، دقت بالایی دارد. این تحلیل منجر به دست آمدن دو معادله دیفرانسیل کوپله مرتبه دوم بر حسب کرنش‌های برشی و ناشی از تورق لایه‌ها می‌شود و در صورتی که رفتار چسب به صورت غیرخطی در نظر گرفته شود، این معادلات حل بسته نخواهند داشت. اگر اتصال بالانس شده باشد، معادلات دیفرانسیل منتج شده، غیرکوپله خواهند شد. یکی از معادلات دیفرانسیل رابطه بین تنش برشی و کرنش برشی و دیگری ارتباط بین تنش با کرنش ناشی از تورق لایه‌ها را در لایه چسب نشان خواهد داد. رابطه به دست آمده برای تنش ناشی از تورق، به خوبی تغییرات تنش را در طول ناحیه چسبی نشان می‌دهد. آنها رابطه ساده‌تری برای تعیین گشتاورهای لبه‌ای نسبت به روش شاهین و طاهری [۹] ارائه کردند. همچنین این روش شرایط مرزی در دو انتهای آزاد ناحیه اتصال را ارضاء می‌کند و نتایج به دست آمده با روش حل عددی مقایسه شده است.

ساوا<sup>۳</sup> و همکاران [۱۱] نیز به بررسی تأثیر عواملی همچون نسبت ضخامت لایه‌های چسبیده به یکدیگر، نسبت ضخامت لایه‌های چسبیده به لایه چسب و نسبت مدول یانگ لایه‌های چسبیده، پرداختند. آنها در تحلیل خود با استفاده از توابع تنش ایری و شرایط مرزی تنش، رابطه‌ای برای محاسبه تنش‌ها در طول ناحیه چسبی به دست آوردند و روابط حاصل را با روش اجزاء محدود و روش تجربی مقایسه کردند.

در این پژوهش توزیع تنش میان لایه‌های در اتصالات چسبی لبه‌ای از جمله اتصال تک‌لبه، جفت لبه در حضور یک عیب در چسب مورد بررسی قرار گرفته است. در مدل‌های تحلیلی مربوط به این پژوهش، فرض شده است که لایه‌های چسب‌شونده تنها بتوانند تغییر شکل طولی داشته باشند. اما لایه چسب بتواند علاوه بر تغییر شکل برشی، تغییر شکل طولی نیز داشته باشد. یک معادله جابه‌جایی درجه دوم برای چسب در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. تنش برشی در راستای ضخامت چسب

1 - Lou  
2 - Tong  
3 - Sawa

وسط چسب که در  $y=0$  قرار دارد، می باشد. برای جابه جایی ها در صفحه میانی رابطه (۵) برقرار است:

$$u_1(x) = u_3(x, y) \Big|_{y = -t_0/2} \quad (\text{الف-۵})$$

$$u_0(x) = u_3(x, y) \Big|_{y = 0} \quad (\text{ب-۵})$$

$$u_2(x) = u_3(x, y) \Big|_{y = t_0/2} \quad (\text{ج-۵})$$

برای تنش برشی رابطه (۶) برقرار است:

$$\tau(x, y) = G_0 \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (۶)$$

$v$  جابه جایی در جهت (Z) است که به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. در نتیجه  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  می باشد. با توجه به روابط (۴) و (۶)، رابطه (۷) حاصل می شود:

$$\tau(x, y) = \frac{G_0}{t_0} [u_2(x) - u_1(x)] + \frac{4G_0y}{t_0^2} [u_1(x) - u_2(x) - 2u_0(x)] \quad (۷)$$

از طرفی نیروی محوری در لایه چسب به صورت معادله (۸) محاسبه می شود:

$$P_3(x) = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \sigma_{x3}(x, y) dy \quad (۸)$$

که در اینجا، تنش محوری در لایه چسب و تابعی از  $x$  و  $y$  است. تنش محوری در لایه های چسب شونده ۱ و ۲ به ترتیب برابر با  $\sigma_1 = \frac{P_1(x)}{t_1}$  و  $\sigma_2 = \frac{P_2(x)}{t_2}$  می باشد.

طبق قانون هوک و فرضیات تحلیلی رابطه بین تنش و کرنش به صورت رابطه (۹) است:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x1} = \frac{P_1(x)}{E_{x1t1}} (1 - \nu_{zx1}\sigma_{xz1}) + \alpha_1 \Delta T + \beta_1 \Delta c \\ \varepsilon_{x2} = \frac{P_2(x)}{E_{x2t2}} (1 - \nu_{zx2}\sigma_{xz2}) + \alpha_2 \Delta T + \beta_2 \Delta c \\ \varepsilon_{x3} = \frac{\sigma_{x3}(x, y)}{E_0} (1 - \nu_0^2) + \alpha_0 \Delta T + \beta_0 \Delta c \end{cases} \quad (۹)$$

همان طور که می بینید جهت کامل تر شدن تحلیل، علاوه بر در نظر گرفتن اثر کرنش های حرارتی، می توان اثر کرنش های رطوبتی را نیز اضافه نمود. از طرفی طبق رابطه بین میدان جابه جایی و کرنش (رابطه ۱۰):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x1} &= \frac{du_1}{dx} \\ \varepsilon_{x2} &= \frac{du_2}{dx} \\ \varepsilon_{x3} &= \frac{du_3}{dx} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

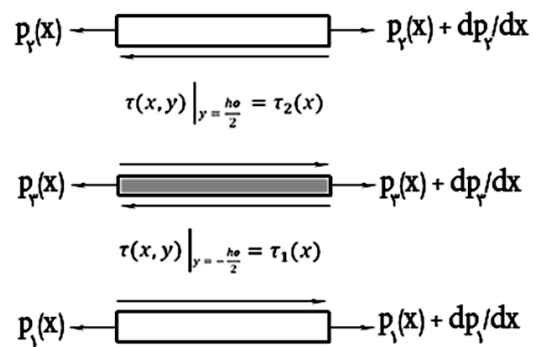
و با مشتق گیری از معادله (۱) و به کمک معادله (۶) رابطه (۱۱) حاصل می شود:

$$\frac{dp_1^2}{dx^2} = \frac{G_0}{t_0} \left[ 3 \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{du_2(x)}{dx} - \frac{4du_0}{dx} \right] \quad (۱۱)$$

۳- لایه های چسب شونده تنها بتوانند تغییر شکل طولی داشته باشند.

۴- چون ضخامت های  $t_0$ ،  $t_1$  و  $t_2$  در مقایسه با سایر ابعاد لایه ها ناچیز هستند، مسأله را تنش صفحه ای ( $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = 0$ ) فرض نمود. افزون بر این، فرض کرنش صفحه ای ( $\varepsilon_{z1,2,3} = 0$ ) نیز در نظر گرفته می شود. این فرضیات اساسی پیش از این [۵] نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

۵- مشابه تحلیل کلاسیک، معمولاً از تغییر شکل های برشی و عمودی در جهت ضخامت (یا عرضی) لایه های چسب شونده در مقابل تغییر شکل های طولی در این لایه چشم پوشی می شود و ۶- چون ضخامت لایه ها در مقایسه با سایر ابعاد ناچیز است، از گشتاور خمشی ناشی از غیرهم محور بودن بارها صرف نظر می شود. برای به دست آوردن معادلات تعادل، لازم است دیاگرام آزاد لایه اول، وسط و دوم به صورت شکل ۲ در نظر گرفته شود.



شکل (۲): نمودار جسم آزاد المانی از اتصال تک لایه.

با توجه به شکل ۲ روابط تعادل به صورت ۱ تا ۳ هستند:

$$\frac{dp_2}{dx} = \tau_2(x) \quad (۱)$$

$$\frac{dp_3}{dx} = \tau_1(x) - \tau_2(x) \quad (۲)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\tau_1(x) \quad (۳)$$

$\tau_1(x)$  تنش برشی بین لایه چسب و لایه شماره ۱ و  $\tau_2(x)$  تنش برشی بین لایه چسب و لایه شماره ۲ می باشد.

معادله جابه جایی طولی لایه چسبی به صورت معادله (۴) در نظر گرفته می شود.

$$u_3(x, y) = u_0(x) + \frac{y}{t_0} [u_2(x) - u_1(x)] + \frac{2y^2}{t_0^2} [u_2(x) - u_1(x) - 2u_0(x)] \quad (۴)$$

که در اینجا،  $u_1$  و  $u_2$  به ترتیب جابه جایی طولی لایه شماره ۱ و ۲ تابعی از  $x$  هستند. همچنین،  $u_0$  جابه جایی طولی صفحه

اگر معادلات (۳ - ۲) برحسب کمیات بدون بعد نوشته شود رابطه بین تنش برشی بین لایه‌ای بدون بعد با نیروی کششی در لایه‌های چسب‌شونده به صورت رابطه (۱۷) خواهند بود:

$$S_1 = -\frac{dP_1}{d\xi}$$

$$S_2 = -\frac{dP_2}{d\xi} \quad (17)$$

توجه شود که،  $S_2$  و  $S_1$  به ترتیب تنش برشی بین چسب و لایه ۱ و ۲ هستند. از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم کوپله (۱۵) می‌توان  $P_2$  و  $P_1$  را مطابق معادله (۱۸) به دست آورد:

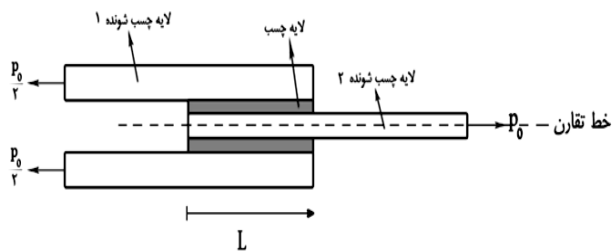
$$p_1(\xi) = H_1^{(1)}(c_1 e^{\lambda_1 \xi} + c_2 e^{-\lambda_1 \xi}) + H_1^{(2)}(c_3 e^{\lambda_2 \xi} + c_4 e^{-\lambda_2 \xi}) + A_1$$

$$p_1(\xi) = H_2^{(1)}(c_1 e^{\lambda_1 \xi} + c_2 e^{-\lambda_1 \xi}) + H_2^{(2)}(c_3 e^{\lambda_2 \xi} + c_4 e^{-\lambda_2 \xi}) + A_2 \quad (18)$$

$A_1$  و  $A_2$  پاسخ‌های خصوصی معادلات هستند  $\lambda_i^2$  نیز مقادیر ویژه ماتریس ضرایب دستگاه معادلات (که برحسب  $\Omega$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  هستند) و  $H_i$  بردار ویژه‌های متناظر با آنها هستند، با استفاده از روابط (۱۷) تنش‌های برشی میان لایه‌ای محاسبه می‌شوند.

### ۲-۲- اتصال جفت‌لبه متقارن

مدل اتصال جفت‌لبه متقارن در شکل ۳ آورده شده است. این اتصال متشکل از سه لایه کامپوزیتی با خواص ارتوتروپیک است. که البته مانند مدل قبلی بدون تغییر خاصی در معادلات، می‌توانند همسانگرد هم باشند. خواص مادی و هندسی لایه شماره ۱ و ۲ می‌تواند متفاوت باشد، ولی در اتصال متقارن خواص لایه بالا و پایین (که بار  $P_0/2$  به آنها اعمال شده است) مشابه است.



شکل (۳): اتصال جفت لبه متقارن.

برای به دست آوردن معادلات مربوط به توزیع تنش در این مدل، کافیست مطابق شکل ۴ تنها نیمه پایین یا بالا اتصال در نظر گرفته شود.

حال با ترکیب روابط (۱۱-۷) رابطه (۱۲) حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} = \left[ \frac{4G_0}{t_0} \left( \frac{1 - v_{zx1} v_{xz1}}{E_{x1} t_1} \right) + \frac{6G_0}{t_0} \left( \frac{1 - v_0^2}{E_0 t_0} \right) \right] p_1$$

$$+ \left[ \frac{2G_0}{t_0} \left( \frac{1 - v_{zx2} v_{xz2}}{E_{x2} t_2} \right) + \frac{6G_0}{t_0} \left( \frac{1 - v_0^2}{E_0 t_0} \right) \right] p_2$$

$$+ \frac{G_0}{t_0} [4K_1 + 2K_2 - 6K_0 - 6 \frac{6G_0}{t_0} \left( \frac{1 - v_0^2}{E_0 t_0} \right)] \quad (12)$$

برای پرهیز از طول شدن روابط و همچنین کاهش تعداد متغیرها، از کلمات بدون بعد به صورت رابطه (۱۳) استفاده می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{L}, P_1 = \frac{p_1}{p_0}, P_2 = \frac{p_2}{p_0},$$

$$S = \pm \frac{dP}{d\xi} = \frac{L}{p_0} \frac{dp}{dx} = \frac{L}{p_0} \tau \left( x, y = \pm \frac{t_0}{2} \right)$$

$$(U_1, U_2, U_0) = \frac{LG_0}{t_0 p_0} (U_1, U_2, U_0), \Omega = 2(1 - v_0) \left( \frac{L}{t_0} \right)^2$$

$$\delta_1 = \frac{2E_0 t_0}{3E_{x1} t_1} \left( \frac{1 - v_{zx1} v_{xz1}}{1 - v_0^2} \right),$$

$$\delta_2 = \frac{2E_0 t_0}{3E_{x2} t_2} \left( \frac{1 - v_{zx2} v_{xz2}}{1 - v_0^2} \right)$$

$$\Phi_1 = \frac{t_0 G_0 \Delta T}{p_0} \left( \frac{4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_0}{3(1 - v_0)} \right),$$

$$\Phi_2 = \frac{t_0 G_0 \Delta T}{p_0} \left( \frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 6\alpha_0}{3(1 - v_0)} \right) \quad (13)$$

در روابط (۱۳)  $U, S, P, \xi$  به ترتیب موقعیت طولی، نیرو محوری، تنش برشی میان لایه‌ای و جابه‌جایی طولی بدون بعد هستند.  $\delta_1$  و  $\delta_2$  به ترتیب بیان کننده خواص مادی و هندسی لایه‌های چسب‌شونده و چسب و  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  دربرگیرنده خواص گرمایی لایه‌ها، خواص چسب و  $P_0$  می‌باشد.

با جایگذاری روابط (۱۳) در معادله (۱۲)، معادله‌ای برحسب کمیات بدون بعد به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2 P_1}{d\xi^2} = \Omega(1 + \delta_1)P_1 + \left(1 + \frac{\delta_2}{2}\right)P_2 - \Omega(1 - \Phi_1) \quad (14)$$

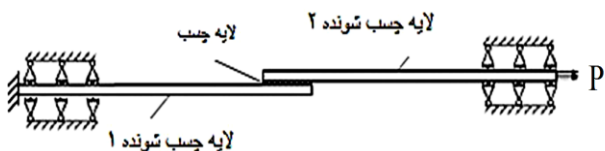
همین روند را می‌توان برای معادله (۳) نیز انجام داد و دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپله (۱۵) را تشکیل داد.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 P_1}{d\xi^2} &= \Omega(1 + \delta_1)P_1 + \left(1 + \frac{\delta_2}{2}\right)P_2 - \Omega(1 - \Phi_1) \\ \frac{d^2 P_2}{d\xi^2} &= \Omega\left(1 + \frac{\delta_1}{2}\right)P_1 + (1 + \delta_2)P_2 - \Omega(1 - \Phi_2) \end{aligned} \right. \quad (15)$$

برای اتصال تک‌لبه شرایط مرزی مطابق رابطه (۱۶) است:

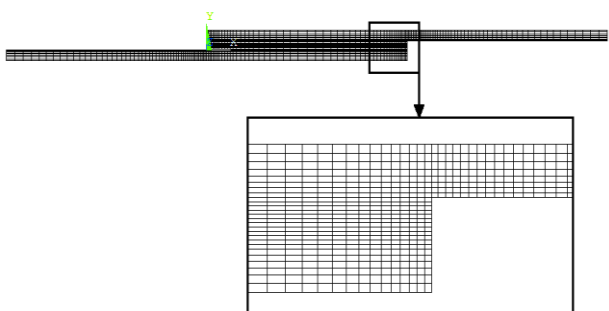
$$\begin{aligned} P_1(0) &= 1 \\ P_1(1) &= 0 \\ P_2(0) &= 0 \\ P_2(1) &= 1 \end{aligned} \quad (16)$$

برای مسئله موردنظر شرایط مرزی به صورت شکل ۶ در نظر گرفته می شود. همان گونه که در شکل مشاهده می شود برای پایداری بیشتر مسئله در انتهای دوطرف اتصال از مفاصل لغزنده استفاده شده است.



شکل (۶): اتصال تکلیه و شرایط مرزی مربوط به آن.

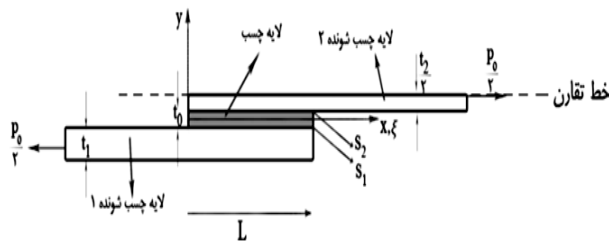
مدل موردنظر را می توان توسط دو المان SOLID186 و PLANE82 مدل سازی نمود. المان های سه بعدی SOLID186 که دارای ۲۰ گره و ۶۰ درجه آزادی هستند، نسبت به المان های PLANE82 که دارای ۸ گره و ۱۶ درجه آزادی هستند، مدت پردازش را افزایش می دهند. از آنجایی که هر دو المان یادشده یک جواب را نتیجه می دهند و مدل موردنظر نیز دوبعدی است از المان PLANE82 استفاده شده است. شبکه تولیدشده توسط این المان در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل (۷) شبکه تولیدشده برای اتصال تکلیه توسط المان PLANE82

شمای کلی کانتور توزیع تنش برشی در اتصال تکلیه در شکل ۸ نمایش داده شده است. در این مدل سازی  $L=0.01m$ ,  $t_2=0.005m$ ,  $t_1=0.005m$ ,  $t_0=0.004m$  و  $P=150Pa$  می باشد.

برای بررسی بهتر این توزیع تنش دو مسیر بر روی لایه بالایی و پایینی چسب تعریف شده (شکل ۸) است. توزیع تنش برشی بر روی این دو مسیر مطابق شکل ۹ است.



شکل (۴): نیمه پایینی اتصال جفتلیه متقارن.

بنابراین معادلات حاکم بدون بعد مربوط به این مدل به صورت معادلات (۱۹) می باشد (کمیات بدون، نیز همان کمیات بدون بعد تعریف شده برای اتصال تکلیه هستند).

$$\begin{cases} \frac{d^2 P_1}{d\xi^2} = \Omega(1 + \delta_1)P_1 + \left(1 + \frac{\delta_2}{2}\right)P_2 - \Omega(1/2 - \phi_1) \\ \frac{d^2 P_2}{d\xi^2} = \Omega\left(1 + \frac{\delta_1}{2}\right)P_1 + (1 + \delta_2)P_2 - \Omega(1/2 - \phi_2) \end{cases} \quad (19)$$

شرایط مرزی هم به صورت معادلات (۲۰) هستند:

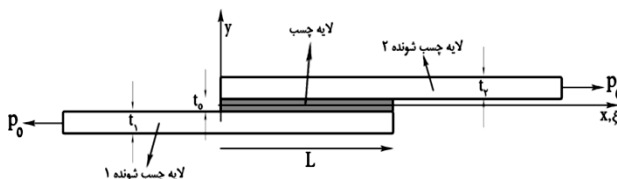
$$\begin{cases} P_1(0) = 1 \\ P_1(1) = 0 \\ P_2(0) = 0 \\ P_2(1) = 1 \end{cases} \quad (20)$$

### ۳- مدل سازی به روش اجزاء محدود

با استفاده از ماکرونویسی در محیط APDL نرم افزار اجزاء محدود ANSYS اتصال کامپوزیتی موردنظر مدل سازی و مقادیر جابه جایی و در نتیجه تنش ها محاسبه شده اند.

### ۳-۱- اتصال تکلیه

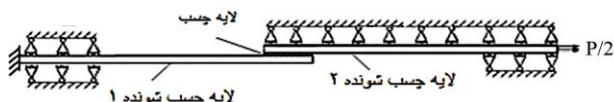
پارامترهای هندسی مربوط به اتصال تکلیه در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل (۵): مدل دوبعدی اتصال تکلیه همراه با پارامترهای هندسی.

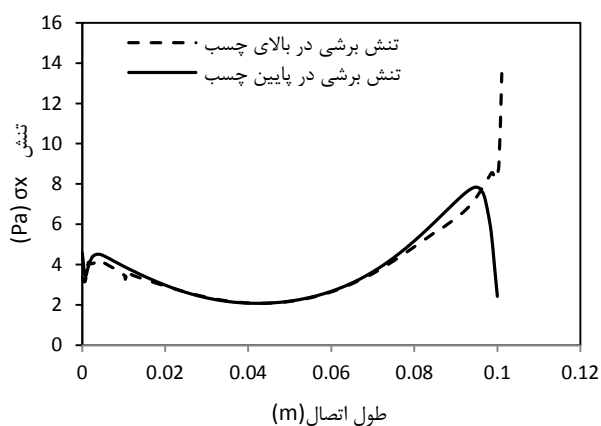
همان گونه که در شکل مشاهده می شود، طول ضخامت لایه چسب،  $t_1$  ضخامت لایه چسب شونده ۱ و  $t_2$  ضخامت لایه چسب شونده ۲ و  $L$  طول ناحیه چسب شده می باشد.

همان‌گونه که در شکل ۴ نشان داده شد با توجه به متقارن بودن اتصال جفت‌لبه متقارن می‌توان نیمی از مدل را در نظر گرفت و شرایط مرزی تقارن را مطابق شکل ۱۰ بر آن اعمال نمود.



شکل (۱۰): شرایط مرزی در اتصال جفت‌لبه.

برای اتصال جفت‌لبه نیز در بالا و پایین لایه چسب تنش برشی مطابق شکل ۱۱ است.

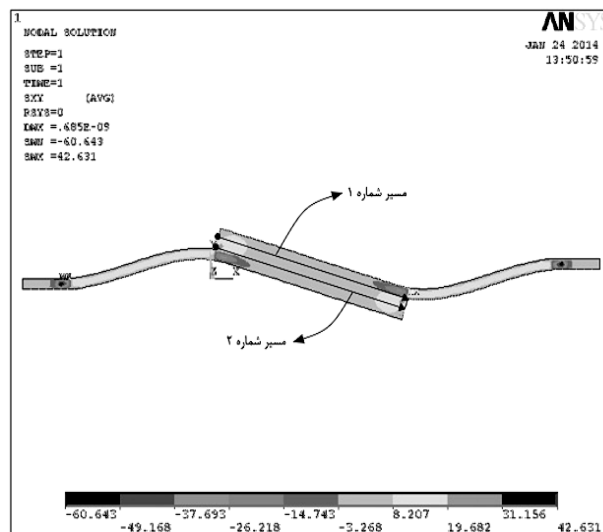


شکل (۱۱): تنش برشی بر روی لایه بالایی و پایینی در اتصال جفت‌لبه.

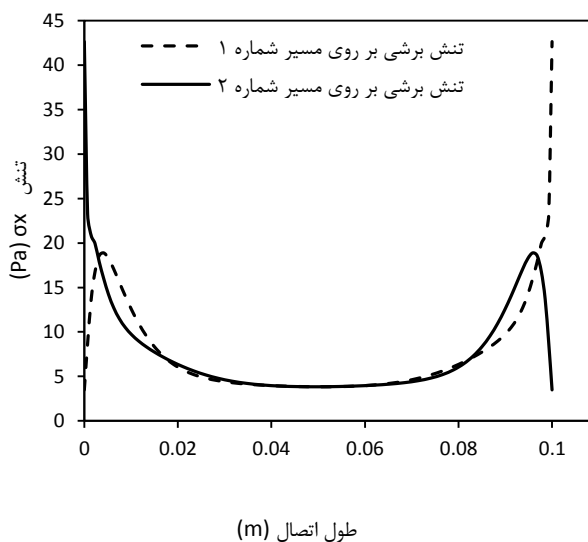
همان‌گونه که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود تنش برشی ماکزیمم در لبه‌های اتصال جفت‌لبه اتفاق می‌افتد. ماکزیمم مطلق تنش برشی در بالای چسب و در لبه سمت راست اتصال اتفاق می‌افتد. این نتیجه از آنجایی که تنش ماکزیمم نیز در این نقطه اتفاق می‌افتد، قابل توجیه است.

#### ۴- نتایج

بنابر معادلات به‌دست‌آمده، توزیع تنش‌های برشی میان لایه‌ای به ۵ پارامتر بدون‌بعد که در برگزیده خواص مکانیکی، هندسی، گرمایی و نم‌گرمایی لایه چسب و لایه‌های چسب‌شونده هستند، بستگی دارد. در شکل‌های ۱۲-۱۳ نمودار تنش برشی بین لایه چسب و لایه‌های چسب‌شونده، با روش‌های حل مختلف برای اتصال تک‌لبه ارائه شده است. جنس لایه‌های چسب‌شونده، ازگرافیت اپوکسی و جنس چسب از اپوکسی می‌باشد. مشخصات



شکل (۸): کانتور تنش برشی در اتصال تک‌لبه همراه با دو مسیر تعریف‌شده.



شکل (۹): تنش برشی در اتصال تک‌لبه بر روی مسیرهای شماره ۱ و ۲.

در شکل ۹ مشاهده می‌شود که نمودار تنش برشی در لایه بالایی و پایینی در لبه‌های اتصال دچار افزایش تنش می‌شوند که با توجه به تمرکز تنش در لبه‌ها قابل توجیه است. همچنین تنش برشی در لایه بالایی و پایینی به‌صورت ضربدری رفتار مشابه دارند.

#### ۳-۲- اتصال جفت‌لبه متقارن

مشابه مراحل انجام شده برای اتصال تک‌لبه برای اتصال جفت‌لبه صورت می‌پذیرد و تنها تفاوت آنها در شرایط مرزی است.

همچنین در این شکل‌ها به‌وضوح دیده می‌شود که اثر منظورکردن تغییرات تنش برشی در جهت ضخامت چسب (حل اصلی) نسبت به حالتی که تنش برشی در جهت ضخامت چسب ثابت در نظر گرفته شده باشد، بزرگ‌تر شدن تخمین تنش‌های برشی ماکزیمم است.

تنش‌های برشی بیشینه در نزدیکی دو انتها اتفاق خواهند افتاد و با شیب بسیار تندی به سمت صفر میل می‌کنند. در واقع وقتی تفاوت زیاد است که جنس لایه‌های چسب‌شونده نرم باشد. توزیع  $S1$  و  $S2$  مانند هم‌دیگر است.

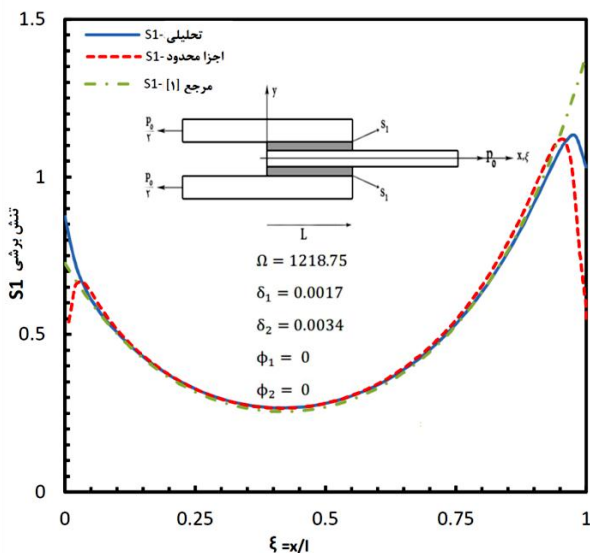
با این تفاوت که تنش برشی ماکزیمم  $S1$  به دلیل تمرکز تنش بیشتر در ابتدا و برای  $S2$  در انتهای ناحیه چسبی اتفاق می‌افتد.

در شکل ۱۴-۱۵ این مقایسه برای اتصال جفت‌لایه نشان داده شده است.

**جدول (۱): مشخصات لایه‌ها (همه کمیات بر حسب SI**

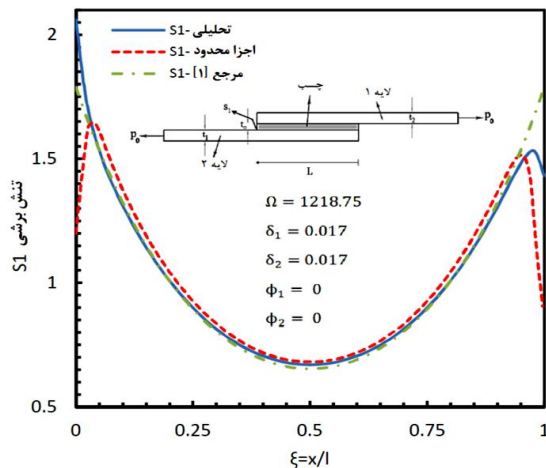
می‌باشد.)

ماده	مدول الاستیسیته	ضریب پواسون	ضریب انبساط حرارتی	ضخامت لایه
گرافیت اپوکسی	۱/۷۲۷E۱۱	۰/۳	۲E-۵	۰/۰۵
اپوکسی	۵/۱۷۱E۹	۰/۳۵	۲E-۵	۰/۰۴

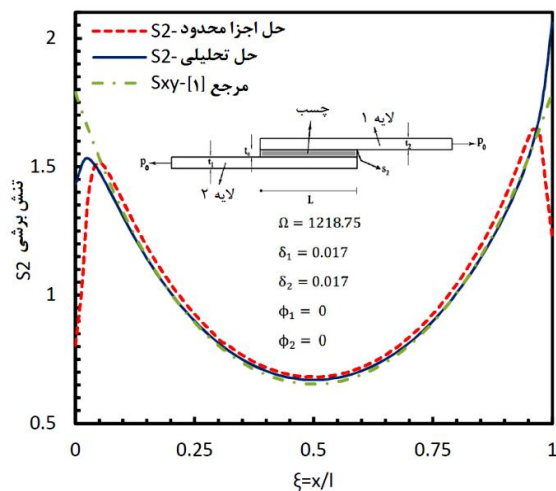


شکل (۱۴): توزیع تنش برشی  $S1$  در امتداد ناحیه چسبی برای اتصال جفت‌لایه.

مربوط به این مواد در جدول ۱ آورده شده است. برای آن که از صحت حل اطمینان یافته شود، حل مربوط به مدل تک‌لایه ساده با حل تحلیلی [۱] و نتایج مربوط به حل المان محدود مقایسه شده است.



شکل (۱۲): توزیع تنش برشی  $S1$  در امتداد ناحیه چسبی برای اتصال تک‌لایه.



شکل (۱۳): توزیع تنش برشی  $S2$  در امتداد ناحیه چسبی برای اتصال تک‌لایه.

همان‌گونه که از نمودارها مشخص است، نتایج به‌دست‌آمده، تطابق بسیار خوبی با هم دارند. به‌خصوص در نواحی وسط اتصال (که تنش کمینه است) نمودارها کاملاً بر هم منطبق هستند. همان‌طور که از این دو شکل هم مشخص است، در تحلیل‌هایی که در آنها شرایط مرزی ارضا نمی‌شود، تنش برشی بیشینه از مقدار واقعی بیشتر است [۱۲].

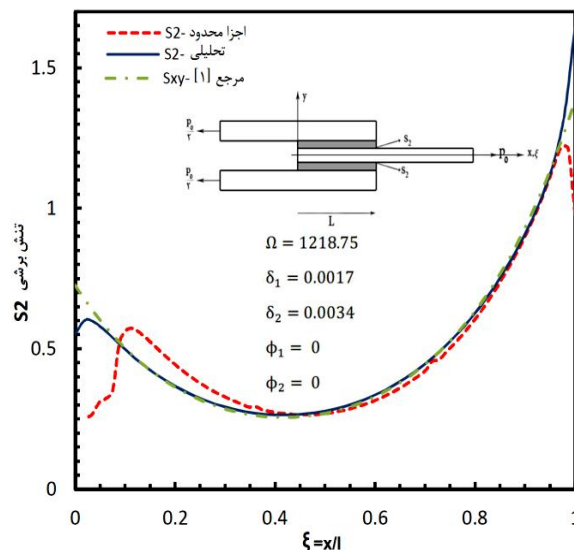


## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن حل‌های تحلیلی گذشته [۱ و ۲]، حل تحلیلی کامل‌تری برای اتصالات لبه‌ای چسبی ارائه شده است. حل تحلیلی انجام‌شده به وسیله روش اجزاء محدود در نرم‌افزار ANSYS و حل انجام‌شده در مرجع [۱] صحت‌سنجی شد. نتایج به دست‌آمده تطابق خوبی با نتایج اجزاء محدود و مرجع [۱] داشت. نتایج نشان دادند تنش برشی بیشینه در اتصال جفت‌لبه تقریباً نصف اتصال تک‌لبه است. بنابراین توصیه می‌شود بنا به کاربرد از نوع اتصال جفت‌لبه استفاده شود.

## ۶- مراجع

- Her, Ch. and Stress, S. "Analysis of Adhesively-Bonded Single-lap Joints", Journal of Composite Structure, Vol. 47, PP. 673-678, 1999.
- Volkersen, O. "Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschnitten", Luftfahrtforschung, Vol. 15, pp. 41-68, 1938.
- Ojalvo, U. and Eidinoff H.L. "Bond Thickness Effects Upon Stresses in Single-lap Adhesive Joints", AIAA Journal, Vol. 16, pp. 204-211, 1978.
- Goland M. and Reissner, E., "The Stresses in Cemented Joints", J. Appl. Mech., Trans. ASME., Vol. 66, pp. 17-27, 1944.
- Renton, W.J. and Vinson, J.R. "The Efficient Design of Adhesive Bonded Joints", Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 7, pp. 175-193, 1975.
- Srinivas S. "Analysis of Bonded Joints", NASA TN D-7855, 1975.
- Allman, D.J. "A Theory for the Elastic Stresses in Adhesive Bonded Lap Joints", Q.J. Mech. Appl. Math., Vol. 30, pp. 415-436, 1977.
- Cheng, S., Chen, D. and Shi, Y. "Analysis of Adhesive-Bonded Joints with Nonidentical Adherends", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 3, pp. 605-623, 1991.
- Shahin, K. and Taheri, F. "Deformations in Adhesively Bonded Joints on Elastic Foundations", Journal of Composite Structure, Vol. 90, pp. 130-140, 2009.
- Lou, Q. and Tong, L. "Analytical Solutions for Adhesive Composite Joints Considering Large Deflection and Transverse Shear Deformation in Adherends", International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, pp. 5914-35, 2008.
- Sawa, T., Liu, J., Nakano, K. and Tanaka, J. "A Two-Dimensional Stress Analysis of Single-lap Adhesive Joints of Dissimilar Adherends Subjected to Tensile loads", Journal of Adhesion Science and Technology, Vol. 14, pp. 43-66, 2000.
- Hart-Smith, L.J. "Adhesive Bonded Double-lap Joints", NASA Langley Contract Report, NASA-CR-112236, 1973.



شکل (۱۵) توزیع تنش برشی S2 در امتداد ناحیه چسبی برای اتصال جفت‌لبه.

از این شکل‌ها مشخص است که مقدار تنش در این اتصالات تقریباً نصف تنش‌های متناظر در اتصالات تک‌لبه است. بنابراین از نقطه‌نظر طراحی بر مبنای تنش برشی بیشینه، اتصالات جفت‌لبه نسبت به اتصالات تک‌لبه به مراتب از قابلیت تحمل بار بیشتری برخوردار هستند.

علاوه بر این موضوع در اتصالات جفت لبه به دلیل تقارن بیشتر نسبت به اتصالات تک‌لبه، خمش کمتری ایجاد می‌شود. بنابراین از این منظر هم نسبت به اتصالات تک‌لبه برتری دارند. طبق شکل ۱۴ و شکل ۱۵ تنش برشی بیشینه S1 و S2 هر دو در انتهای سمت راست اتصال اتفاق می‌افتند.

برای صحت‌سنجی این روش، نتایج به دست‌آمده با نتایج به دست‌آمده از روش تحلیلی [۱] و حل اجزاء محدود مقایسه شده است و همان‌گونه که در شکل‌های ۱۴-۱۵ مشاهده می‌شود، در نواحی وسط از تطابق بسیار خوبی برخوردار هستند. ولی در این روش‌های تحلیلی مانند آنچه که برای اتصالات تک‌لبه داشتیم، شرایط مرزی تنش برابر صفر در دو انتهای آزاد، ارضاء نمی‌شوند. در تحلیل‌هایی که در آنها شرایط مرزی ارضاء نمی‌شوند، تنش برشی بیشینه تخمینی از مقدار واقعی بیشتر است [۱۲]. همچنین در این شکل‌ها به وضوح دیده می‌شود که اثر منظور کردن تغییرات تنش برشی در جهت ضخامت چسب (حل اصلی) نسبت به حالتی که تنش برشی در جهت ضخامت چسب ثابت در نظر گرفته شده باشد، بزرگ‌تر شدن تنش‌های برشی ماکزیمم است.