

تحلیل تیر اویلر- برنولی در مقیاس نانو روی بستر الاستیک با در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی

فاروق بابایی^۱ و بشیر بهجت^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی سهند تبریز

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۷/۱۰)

چکیده

از آنجاکه رفتار مواد در مقیاس نانو تفاوت آشکاری با رفتار در مقیاس معمول دارد، روش‌های متنوع و جدیدی برای مطالعه رفتار مکانیکی مواد در مقیاس نانو ابداع شده‌اند؛ یکی از این روش‌ها، استفاده از مدل غیرموضعی می‌باشد. در این مقاله رفتار تیر بر روی بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک با در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی در ابعاد نانو بررسی شده است. از تئوری تیر اویلر- برنولی برای مدل‌سازی تیر استفاده شده است. معادلات حاکم بر رفتار تیر با استفاده از روش جابه‌جایی مجازی به دست آمده است و از روش تحلیلی برای حل معادلات حاکم بر مسئله استفاده شده است. مقادیر خیز بیشینه، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده به‌زای مقادیر مختلف تکیه‌گاه الاستیک و پارامتر غیرموضعی به دست آمده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که لحاظ کردن اثرات غیرموضعی موجب افزایش خیز و کاهش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین بستر الاستیک موجب کاهش خیز و افزایش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تئوری غیرموضعی، بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک، تحلیل استاتیکی، کمانشی و ارتعاشی

Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Elastic Foundation Considering Nonlocal Effects in Nano Scale

F. Babaei Birdaei and B. Behjat

Mechanical Engineering Department

Sahand University of Technology

(Received: 1/December/2014; Accepted: 2/October/2015)

ABSTRACT

Nano-beam is one of the most important nano-structures with applications in different fields such as NEMS (Nano electromechanical systems) considering their low weight, low energy consumption and high sensitivity for use in medical, computer, bio-sensors and etc. Since the behavior of material in nano scale is different from usual scales, new methods are innovated to study the mechanical behavior of material in nano scale which one of them is nonlocal model. In this paper, nonlocal elasticity theory is used to describe the behavior of beam on the nonlinear elastic foundation. The Euler-Bernoulli beam theory is used to modeling the beam. The governing equations are obtained using principle of virtual displacements and analytical solution is used to solve governing equations. Maximum deflection, critical buckling load and natural frequencies for simply supported boundary condition and different spring constant, and nonlocal parameter is presented. The obtained results show that deflection is increased and critical buckling load and natural frequencies are decreased by considering nonlocal effects. Also elastic foundation decreases deflection and increases critical buckling load and natural frequencies.

Keywords: Nonlocal Theory, Pasternak Elastic Foundation, Vibration, Buckling and Static Analysis

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد: f_babaei@sut.ac.ir

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): behjat@sut.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه نانو ساختارها با کاربرد در زمینه‌های مختلف از جمله ساخت سامانه‌های نانوالکترومکانیکال با وزن کم و حساسیت بالا برای استفاده در پزشکی، رایانه، بیوحس‌گرها و ... اهمیت زیادی پیدا کرده‌اند [۱]. به دلیل وجود نیروهای بین اتمی و بین مولکولی با کوچک شدن ابعاد سامانه‌ها و قابل مقایسه شدن این ابعاد با فواصل بین ذرات و پارامترهای شبکه بلوری، تئوری‌های مبتنی بر مکانیک کلاسیک قادر به پیش‌بینی رفتار این سامانه‌ها نیستند. دلیل اصلی این امر آن است که، تئوری‌های کلاسیک از اصل پایستگی انرژی موضعی حاصل می‌گردند، حال آن‌که وجود نیروهای بین اتمی اجازه استفاده از چنین قانونی را به ما نمی‌دهد و پایستگی انرژی بایستی نه به صورت موضعی بلکه در کل جسم مورد بررسی، نوشته شود [۲]. تئوری‌های غیرموضعی با در نظر گرفتن این موضوع توانسته‌اند بسیاری از پدیده‌های مشاهده شده در ابعاد بسیار ریز را که توسط تئوری کلاسیک قابل توجیه نیستند پیش‌بینی نمایند؛ به طوری که نتایج حاصل از آنها تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد. از زمان کشف نانولوله‌ها توسط ایچیمای^۱ [۳] در سال ۱۹۹۱، نانو ساختارها با توجه به مدول یانگ، مقاومت تسلیم، انعطاف پذیری بالا و خواص خوب رسانایی مورد توجه قرار گرفته‌اند. نانو ساختارها را می‌توان با مکانیک اتمی و یا مکانیک محیط‌های پیوسته مدل کرد. در مقایسه با مدل اتمی، با توجه به بازدهی محاسباتی و سادگی مدل‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته، این مدل‌ها به طور وسیعی برای تحلیل سازه‌های در ابعاد نانو مورد استفاده قرار گرفته‌اند و در بین این تئوری‌ها، تئوری الاستیسیته غیرموضعی که توسط ارینگن^۲ [۴] ارائه شد، بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. مدل ارینگن توسط پدیسون^۳ و همکارانش [۵] برای میکرو-نانو تیرهای مدل شده با تئوری تیر اویلر-برنولی به کار برده شد. آنها با بررسی اثرات غیرموضعی بر مقیاس مورد مطالعه به این نتیجه رسیدند که برای یک تیر یک سرگیردار در مقیاس میکرو، اثرات غیرموضعی قابل چشم‌پوشی است در حالی که در مقیاس نانو، اثرات غیرموضعی تأثیر زیادی بر رفتار سازه دارد. سوداک^۴ [۶] به مطالعه کمانش نانو لوله‌ها پرداخت و پیش‌بینی کرد که با افزایش اثرات مقیاس کوچک،

مقدار نیروی کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. پیسانو^۵ و فوسچی^۶ [۷] نیز از مدل غیرموضعی برای مطالعه کشش یک میله الاستیک استفاده کردند. ردی^۷ [۸] از تئوری غیرموضعی برای مطالعه ارتعاش جانبی آزاد، خمش و کمانش نانوتیرها استفاده کرد. او معادلات حرکت را با استفاده از روش جابه‌جایی مجازی به دست آورد و این معادلات را به صورت تحلیلی برای نشان دادن اثرات غیرموضعی حل کرد. ژانگ^۸ و همکارانش [۹] نیز از مدل یک تیر غیرموضعی دوگانه برای تحلیل خمش کمانش و ارتعاش میکرو و نانوتیرها استفاده کردند. در تئوری آنها بر خلاف مدل ارینگن از دو پارامتر غیرموضعی برای پیش‌بینی بهتر رفتار نانوتیر استفاده شده بود. فادیکار^۹ و پرادهان^{۱۰} [۱۰] روش المان محدود را برای فرمول بندی یک تیر خطی غیرموضعی به کار بردند و برای شرایط مرزی گوناگون، خمش، کمانش و ارتعاش تیر را بررسی کردند. انصاری و سهمانی [۱۱] رفتار کمانشی و خمشی نانوتیر را با در نظر گرفتن اثرات سطحی برای تئوری‌های مختلف تیر به کار بردند. اسماعیل زاده و جلالی [۱۲] ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق ویسکوالاستیک کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن را مورد بررسی قرار دادند. میکروورق مورد بررسی، یک میکروورق مربعی تحت میدان الکتروستاتیک بوده و شرایط مرزی آن در چهار لبه، تکیه‌گاه ساده، غیرقابل حرکت، در نظر گرفته شد. قنادپور و همکارانش [۱۳] روابط تحلیلی برای یافتن ماتریس سختی، ماتریس سختی کمانشی و ماتریس جرم نانوتیر را توسعه دادند و سپس با استفاده از روش ریتز، بار کمانش بحرانی، فرکانس‌های طبیعی و خیز تیر را برای شرایط مرزی مختلف به دست آوردند. جعفری و ابراهیمی [۱۴] ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج که توسط نانولوله‌های کربنی تقویت شده، را با استفاده از الاستیسیته سه بعدی مورد بررسی قرار دادند.

در سال‌های اخیر استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای تحلیل سازه‌های در ابعاد نانو توسعه زیادی یافته است. در این پژوهش و با توجه به کاربردهای این سازه‌ها (که معمولاً در میان لایه‌های کامپوزیتی قرار می‌گیرند) تیر بر روی بستر الاستیک در نظر گرفته شده و معادلات آن با این فرض به دست

5 - Pisano
6 - Fuschi
7 - Reddy
8 - Zhang
9 - Phadikar
10 - Pradhan

1 - Iijima
2 - Eringen
3 - Peddieson
4 - Sudak

که در آن، C تانسور مرتبه چهار می باشد. با ادغام روابط (۱) و (۲) فرم مؤلفه‌ای آنها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

$$\mu = (e_0 a)^2$$

در صورتی که اثر ابعاد کوچک قابل صرف نظر کردن باشد، ($\mu \rightarrow 0$) معادله فوق به معادله ساختاری کلاسیک $\sigma = C : \varepsilon$ میل می کند. برای تیر می توان از رفتار غیر موضعی در راستای ضخامت صرف نظر کرد. بنابراین معادلات اساسی غیر موضعی برای یک تیر یک بعدی به صورت زیر نوشته می شوند [۴]:

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (4)$$

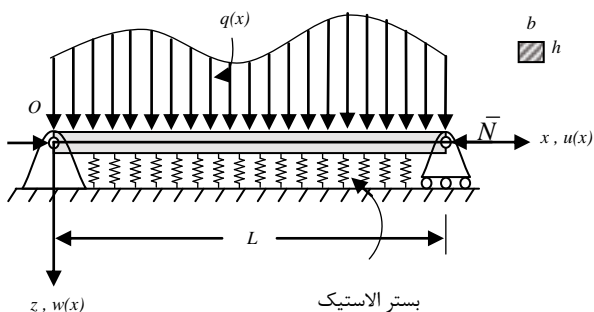
که در معادله فوق، E مدول الاستیسیته موضعی است.

۳- معادلات حاکم

برای به دست آوردن معادلات حاکم، یک تیر به طول L در نظر گرفته می شود که در راستای x بر روی یک تکیه گاه الاستیک قرار گرفته و تغییر شکل جانبی در راستای z دارد (شکل ۱). نیروی ناشی از تکیه گاه الاستیک بر روی تیر به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۱۵]:

$$p = K_w w - K_s \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (5)$$

که در آن، p عکس العمل تکیه گاه در واحد سطح، w تغییر شکل جانبی تیر و K_w و K_s به ترتیب ثابت فنری وینکلر^۱ و ثابت الاستیک لایه برشی هستند. در رابطه (۵) اگر $K_s = 0$ شود تکیه گاه به نوع وینکلر تبدیل می شود.



شکل (۱): تیر با دو تکیه گاه ساده روی بستر الاستیک تحت بار محوری و جانبی.

آمده است که در پژوهش های قبلی معمولاً از این اثرات صرف نظر گردیده است. همچنین، از روش تحلیلی برای حل معادلات حاکم بر مسئله استفاده شده است. در نهایت تأثیر ثوابت بستر الاستیک روی پارامترهای مختلف نانوتیر از قبیل خیز بیشینه، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی برای شرط مرزی تکیه گاه ساده به دست آمده است. نتایج به دست آمده نشان می دهد که لحاظ کردن ثوابت بستر الاستیک موجب کاهش خیز و افزایش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی نانوتیر می شود.

در این مقاله ابتدا با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی و اصل جابه جایی مجازی، معادلات حرکت سامانه به دست آمده و برای حل آن از روش تحلیلی استفاده خواهد شد. مزیت این روش این است که می توان اثر پارامترهای مختلف را بر روی پاسخ سامانه با دقت بسیار خوبی به دست آورد. در نهایت تأثیر پارامتر غیر موضعی روی خیز، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی تیر روی بستر الاستیک بر پایه تئوری تیر اویلر- برنولی نشان داده خواهد شد. نتایج به دست آمده به صورت جداول و نمودارهای مناسب نشان داده شده اند.

۲- تئوری الاستیسیته غیر موضعی

تئوری الاستیسیته غیر موضعی اولین بار توسط ارینگن [۴] مطرح شد. در تئوری کلاسیک (موضعی) با دانستن حالت کرنش در یک نقطه می توان حالت تنش را در آن نقطه با استفاده از روابط ساختاری به دست آورد. اما در تئوری غیر موضعی، برای به دست آوردن حالت تنش در یک نقطه، باید حالت کرنش در تمامی نقاط دامنه معلوم باشد. بر اساس این تئوری میدان تنش در یک نقطه x در یک ماده الاستیک، نه تنها به میدان کرنش در آن نقطه، بلکه به کرنش در تمامی نقاط دیگر ماده نیز وابسته است. این مدل را می توان به صورت رابطه زیر نشان داد [۴]:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma = t \quad (1)$$

که در رابطه فوق، a یک طول مشخصه داخلی سازه بوده و e_0 یک پارامتر مادی است که برای هر ماده مقداری ثابت است. تنش ماکروسکوپی (کلاسیک) در یک نقطه x از یک ماده الاستیک، به کرنش ε از طریق قانون هوک تعمیم یافته به صورت زیر مربوط است:

$$t(x) = C(x) \varepsilon(x) \quad (2)$$

که در آن، V نیروی برشی معادل است. با استفاده از معادلات (۴) و (۷) معادلات نیرو- جابه‌جایی و ممان- جابه‌جایی برای تیر با در نظر گیری اثرات غیرموضعی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۹) و قرار دادن آن در معادله (۱۲) می‌توان به معادله زیر برای نیروی محوری رسید:

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left(m_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (14)$$

با جایگذاری N از معادله فوق در معادله (۹)، معادله حرکت برای جابه‌جایی در راستای محوری تیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \quad (15)$$

همچنین، با جایگذاری M از معادله (۱۰) در معادله (۱۳):

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q + K_w w - K_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right] \quad (16)$$

و با جایگذاری M از معادله فوق در معادله (۱۰)، معادله حرکت تیر با در نظر گیری اثرات غیرموضعی بر روی بستر الاستیک به صورت معادله (۱۷) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q - K_w w + K_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q + K_w w - K_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (17)$$

که با قراردادن $\mu = 0$ در معادلات (۱۵) و (۱۷)، معادله حرکت برای تیر اوپلر- برنولی در حالت کلاسیک به دست می‌آید.

۴- حل معادلات حاکم

برای حل معادلات به دست آمده، عبارتی برای جابه‌جایی حدس زده می‌شود که شرایط مرزی را نیز ارضا کند [۱۷]:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{i\omega_n t} \quad (18)$$

در تئوری تیر اوپلر- برنولی میدان جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w(x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

همچنین کرنش‌های خطی و غیرصفر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_{xx}^0 + z \kappa \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن، ε_{xx}^0 کرنش کششی و κ کرنش خمشی می‌باشد. برای تیر روی تکیه‌گاه الاستیک منطبق بر فرضیات اوپلر- برنولی، اصل جابه‌جایی مجازی به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۶]:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \int_0^t [m_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) + m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} - N \delta \varepsilon_{xx}^0 - M \delta \kappa + f \delta u + q \delta w + \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \left(K_w w - K_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w] dx dt \end{aligned} \quad (8)$$

که، $f(x, t)$ و $q(x, t)$ به ترتیب بارهای محوری و جانبی گسترده، \bar{N} نیروی فشاری محوری و همچنین $m_0 = \rho A$ و $m_2 = \rho I$ هستند. اگر از شکل ضعیف معادله (۸) ضرایب δu و δw برابر صفر قرار داده شوند، آن‌گاه:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q - K_w w + K_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (10)$$

شرایط مرزی شامل مشخص کردن یکی از دو جمله برای هر سه جفت معادله زیر در نقاط $x = L$ و $x = 0$ می‌باشد:

$$\begin{aligned} u & \text{ و یا } N \\ w & \text{ و یا } \frac{\partial M}{\partial x} - \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} + m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = V \\ -\frac{\partial w}{\partial x} & \text{ و یا } M \end{aligned} \quad (11)$$

$$M_n = m_0 + m_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (29)$$

$$K_n = K_w + K_s \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (30)$$

۵- نتایج عددی

در این قسمت نتایج عددی به دست آمده و صحت گذاری آنها در دو بخش ارائه می شود.

۵-۱- صحت سنجی

در این قسمت به منظور صحت سنجی و مقایسه با نتایج موجود مقادیر زیر برای نانوتیر در نظر گرفته شده است:

$$E = 30 \times 10^6 \quad L = 10 \quad K_s, K_w = 0 \quad (31)$$

مقادیر بی بعد به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\bar{w} = -w \times 10^2 \frac{EI}{q_0 L^4}$$

$$\bar{N}_{cr}^0 = \bar{N} \frac{L^2}{EI} \quad \bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{m_0}{EI}} \quad (32)$$

نتایج خیز بیشینه، نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی مقاله حاضر با نتایج به دست آمده توسط ردی در جدول ۱ مقایسه شده است. مشاهده می گردد که جواب های به دست آمده مطابقت بسیار خوبی با نتایج مرجع [۸] دارد.

۵-۲- بحث و بررسی نتایج

برای بررسی تیرهای مورد بحث در مقیاس نانو از مقادیر زیر برای به دست آوردن نتایج استفاده می شود.

$$L = 10000 \text{ nm} \quad h = 100 \text{ nm} \quad b = 1000 \text{ nm} \quad (31)$$

نتایج خیز بیشینه و بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بی بعد تحت بار گسترده برای تیر اویلر- برنولی روی بستر الاستیک با تکیه گاه ساده در جدول های ۴-۲ نمایش داده شده است. در این جداول می توان نتایج را برای حالت بدون بستر الاستیک و حالات شامل بستر الاستیک با هم مقایسه نمود. همچنین می توان مقادیر به دست آمده را برای حالت موضعی و حالات مختلف غیرموضعی (تغییرات μ) با هم مقایسه نمود. لازم به ذکر است که جواب ها با استفاده از صد جمله برای تابع مورد نظر به دست آمده اند.

در جدول ۲ مشاهده می شود که لحاظ کردن پارامتر غیرموضعی موجب افزایش خیز شده و تأثیر بستر الاستیک

شرایط مرزی برای تیر با تکیه گاه ساده به صورت زیر است:

$$w = 0 \quad x = 0, L \quad (19)$$

$$M = 0 \quad x = 0, L$$

و بار گسترده q به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (20)$$

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (21)$$

که اگر q به صورت بار یکنواخت به شدت q_0 باشد Q_n به صورت زیر به دست می آید:

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (22)$$

با جایگذاری w و q از معادلات (۱۹) و (۲۰) در معادله (۱۷) رابطه زیر به دست می آید:

$$\{ EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + [(K_s - \bar{N}) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + K_w - \omega^2 \left(m_0 + m_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)] \lambda_n W_n - Q_n \lambda_n = 0 \quad (23)$$

که برای هر n مقدار λ_n به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\lambda_n = 1 + \mu \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (24)$$

و تغییر شکل استاتیکی تیر با قراردادن $\omega_n, \bar{N} = 0$ به صورت زیر به دست می آید:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n \lambda_n}{EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \left[K_s \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + K_w \right] \lambda_n} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (25)$$

برای بررسی کمانش نیز، q و ω_n در معادله (۲۳) برابر صفر قرار داده می شود.

$$EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \left[(K_s - \bar{N}) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + K_w \right] \lambda_n = 0 \quad (26)$$

که در حالت خاص با قراردادن $n = 1$ بار بحرانی کمانش به صورت زیر به دست می آید:

$$\bar{N} = \frac{EI}{\lambda_1} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + K_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 + K_s \quad (27)$$

برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی تیر مقادیر q و \bar{N} در معادله (۲۳) صفر در نظر گرفته می شود:

$$\omega_n^2 = \left[\frac{EI}{\lambda_n} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + K_n \right] \frac{1}{M_n} \quad (28)$$

که در آن، M_n و K_n به صورت زیر تعریف می شوند:

توجه به نتایج به دست آمده می توان نتیجه گرفت که برای پیش بینی رفتار تیر در مقیاس نانو به صورت دقیق، نمی توان از تئوری کلاسیک (موضعی) بهره برد، چرا که اختلاف قابل ملاحظه ای با مقادیر به دست آمده برای تیر با در نظر گیری اثرات غیر موضعی دارد. به عنوان مثال این اختلاف برای تغییرات μ از صفر تا ۴ برای خیز بیشینه حدود ۴۱ درصد، برای نیروی کمانش بحرانی ۲۸ درصد و برای فرکانس طبیعی حدود ۱۵ درصد می باشد.

جدول (۲): خیز بدون بعد بیشینه برای تیر با تکیه گاه ساده تحت اثر نیروی گسترده جانبی.

μ	(K_w, K_s)		
	(۰ و ۰)	(۱ و ۰)	(۰ و ۱)
۰	۱/۳۱۳۰	۰/۶۵۴۶	۱/۱۹۱۳
۱	۱/۴۴۸۷	۰/۶۹۰۱	۱/۳۰۳۱
۲	۱/۵۸۴۴	۰/۷۲۲۱	۱/۴۱۳۰
۳	۱/۷۲۰۱	۰/۷۵۱۰	۱/۵۲۱۰
۴	۱/۸۵۵۸	۰/۷۷۷۴	۱/۶۲۷۳

جدول (۳): بار کمانش بحرانی بی بعد برای تیر با تکیه گاه ساده.

μ	(K_w, K_s)		
	(۰ و ۰)	(۱ و ۰)	(۰ و ۱)
۰	۹/۸۶۹۶	۱۹/۸۶۹۶	۱۰/۸۸۲۸
۱	۸۰/۹۸۳	۱۸/۹۸۳۰	۹/۹۹۶۲
۲	۸/۲۴۲۶	۱۸/۲۴۲۶	۹/۲۵۵۸
۳	۷/۶۱۴۹	۱۷/۶۱۴۹	۸/۶۲۸۱
۴	۷/۰۷۶۱	۱۷/۰۷۶۱	۸/۰۸۹۳

جدول (۴): فرکانس طبیعی بی بعد برای تیر با تکیه گاه ساده.

μ	(K_w, K_s)		
	(۰ و ۰)	(۱ و ۰)	(۰ و ۱)
۰	۹/۸۶۹۲	۱۴/۰۰۳۲	۱۰/۳۶۳۴
۱	۹/۴۱۵۵	۱۳/۶۸۷۲	۹/۹۳۲۳
۲	۹/۰۱۹۱	۱۳/۴۱۷۶	۹/۵۵۷۴
۳	۸/۶۶۸۹	۱۳/۱۸۴۸	۹/۲۲۷۶
۴	۸/۳۵۶۶	۱۲/۹۸۱۵	۸/۹۳۴۸

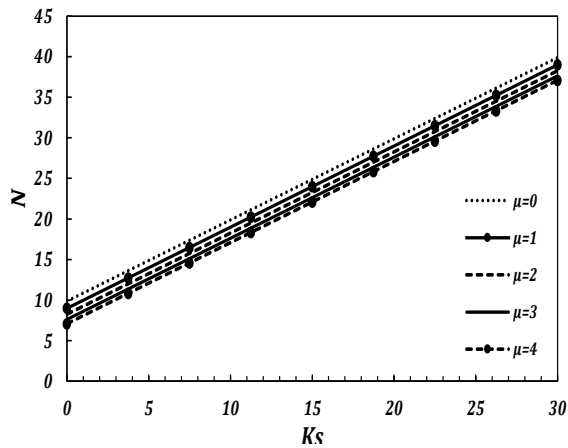
برای μ های مختلف به صورت کاهش خیز خواهد بود. در جدول های ۴-۳ دیده می شود که به طور کلی اثر پارامتر غیر موضعی در جهت کاهش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی است. همچنین، تأثیر بستر الاستیک برای μ های مختلف به صورت افزایش مقدار فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی خواهد بود.

جدول (۱): مقادیر بدون بعد خیز بیشینه، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی برای تیر اوپلر- برنولی با تکیه گاه ساده.

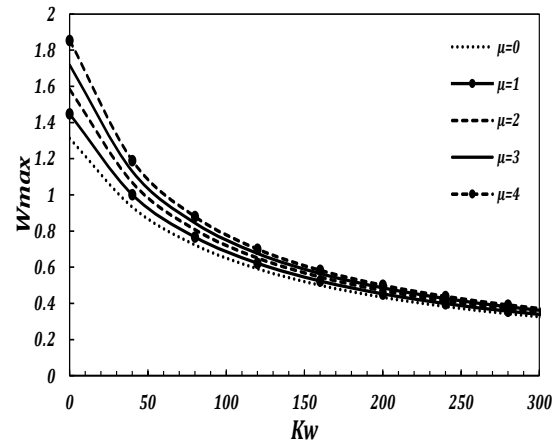
μ	۰	۲	۴
w_{max}	مرجع [۶]	۱/۵۸۴۴	۱/۸۵۵۸
	مقاله حاضر	۱/۵۸۴۴	۱/۸۵۵۸
\bar{N}_{cr}^0	مرجع [۶]	۹/۸۶۹۶	۷/۰۷۶۱
	مقاله حاضر	۹/۸۶۹۶	۷/۰۷۶۱
ω_n	مرجع [۶]	۹/۰۱۹۵	۸/۳۵۶۹
	مقاله حاضر	۹/۰۱۹۱	۸/۳۵۶۶

میزان تأثیر ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی بستر الاستیک بر روی خیز تیر اوپلر- برنولی با شرایط مرزی دو سر تکیه گاه ساده به ترتیب در شکل های ۳-۲ نشان داده شده است. در این شکل ها مشاهده می شود که با افزایش ثوابت بستر الاستیک مقدار خیز بیشینه کاهش می یابد. همچنین تغییرات خیز برای حالات بدون در نظر گیری پارامتر غیر موضعی ($\mu = 0$) و حالت شامل این پارامتر قابل مشاهده می باشد. به ازای مقادیر بزرگتر پارامتر μ مقدار خیز تیر بیشتر می شود. در واقع می توان این گونه تفسیر کرد که لحاظ کردن اثرات غیر موضعی باعث انعطاف پذیری بیشتر تیر می شود. شکل های ۵-۴ نیز تأثیر ثوابت وینکلر و برشی سطح را بر روی نیروی کمانش بحرانی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیر موضعی نشان می دهند.

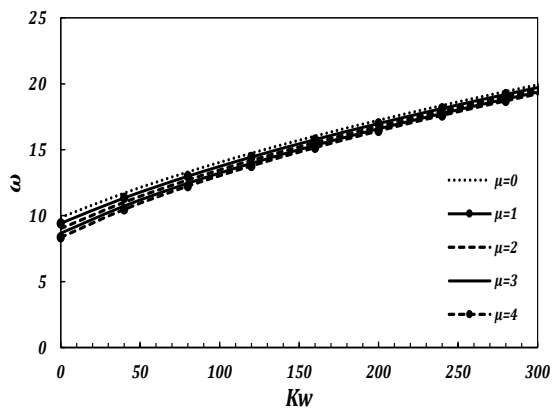
مشاهده می گردد با افزایش این ثوابت، نیروی کمانش بحرانی به صورت خطی افزایش می یابد، در حالی که افزایش پارامتر غیر موضعی نیروی کمانش بحرانی را کاهش می دهد. در شکل های ۷-۶ نیز تأثیر ثوابت وینکلر و برشی سطح بر روی فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیر موضعی نشان داده شده است که مشاهده می شود افزایش این ثوابت موجب افزایش فرکانس طبیعی می شود، در حالی که افزایش پارامتر غیر موضعی موجب کاهش فرکانس طبیعی می شود. با



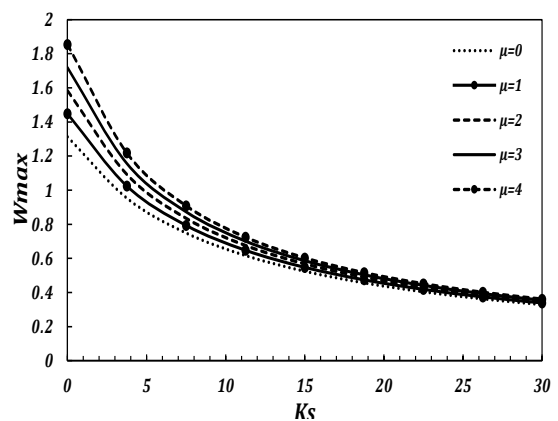
شکل (۵): تأثیر ثابت برشی سطح روی بار کمانشی بحرانی بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.



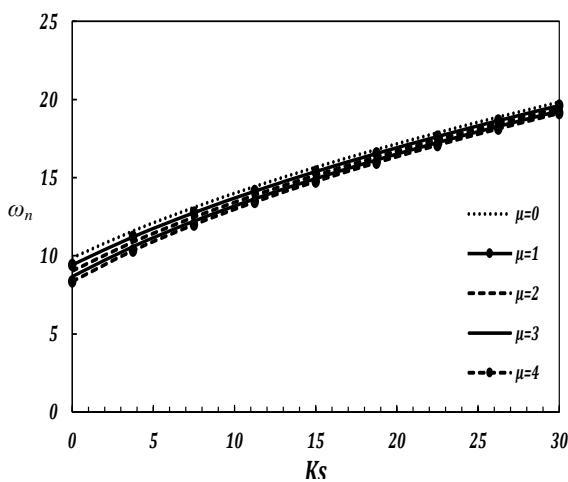
شکل (۲): تأثیر ثابت فنری وینکلر روی خیز بیشینه بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.



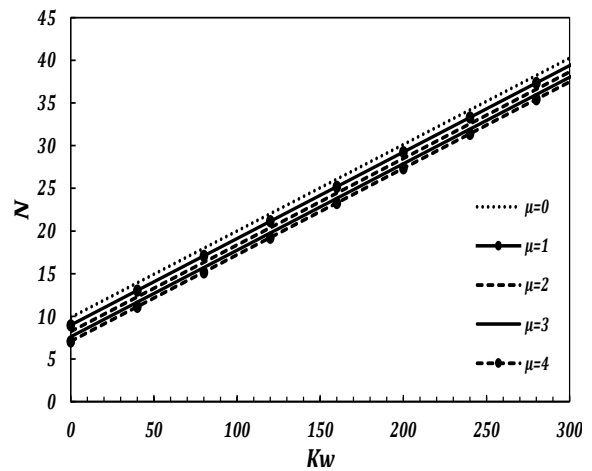
شکل (۶): تأثیر ثابت فنری وینکلر روی فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.



شکل (۳): تأثیر ثابت برشی سطح روی خیز بیشینه بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.



شکل (۷): تأثیر ثابت برشی سطح روی فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.



شکل (۴): تأثیر ثابت فنری وینکلر روی بار کمانشی بحرانی بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.

9. Zhang, Y., Wang, C. and Challamel, N. "Bending, Buckling, and Vibration Of Micro/Nanobeams by Hybrid Nonlocal Beam Model", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136, No. 5, pp. 562-574, 2009.
10. Phadikar, J. and Pradhan, S. "Variational Formulation and Finite Element Analysis for Nonlocal Elastic Nanobeams and Nanoplates", *Computational Materials Science*, Vol. 49, No. 3, pp. 492-499, 2010.
11. Ansari, R. and Sahmani, S. "Bending Behavior And Buckling of Nanobeams Including Surface Stress Effects Corresponding to Different Beam Theories", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 11, pp. 1244-1255, 2011.
12. Esmaeilzadeh-Khadem, S. and Jalali A. "Nonlinear Vibration and Dynamic Stability Analysis of a Nanocomposite Viscoelastic Microplate under an Electrostatic Actuation", *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 8, No. 3, pp. 51-68, 2012 (in Persian).
13. Ghannadpour, S., Mohammadi, B. and Fazilati, J. "Bending, Buckling and Vibration Problems of Nonlocal Euler Beams Using Ritz Method", *Composite Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 584-589, 2013.
14. Jafari-Mehrabadi, S. and Ebrahimi, Sh. "Free Vibration Analysis of FGM Plate Reinforced with Single Wall Carbon Nanotubes Using 3-D Elasticity Theory", *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 11, No. 4, pp. 1-14, 2015 (in Persian).
15. Yas, M. and Samadi, N. "Free Vibrations and Buckling Analysis Of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Timoshenko Beams on Elastic Foundation", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, No. 14, pp. 119-128, 2012.
16. Reddy, J. "Nonlocal Nonlinear Formulations for Bending of Classical and Shear Deformation Theories of Beams and Plates", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No 11, pp. 1507-1518, 2010.
17. Reddy, J. "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells", CRC Press, New York, 2006.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، خیز و بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی تیر اویلر- برنولی بر روی بستر الاستیک با در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. معادلات حرکت با استفاده از جابه‌جایی مجازی به دست آمد و برای محاسبه خیز، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی تحت اثر پارامتر غیرموضعی و بستر الاستیک به کار گرفته شد. نتایج به دست آمده نشان داد که پارامتر غیرموضعی موجب افزایش خیز و کاهش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین مشاهده گردید افزایش ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی سطح موجب کاهش خیز و افزایش نیروی کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی می‌شود. از طرفی مشاهده شد که رابطه نیروی کمانش بحرانی و ثوابت وینکلر و برشی سطح برای تیر با وجود در نظر گیری اثرات غیرموضعی، رابطه‌ای خطی است.

۷- مراجع

1. Liu, W.K. و Karpov, E.G. and Park, H.S. "Nano Mechanics and Materials Theory, Multiscale Methods and Applications", John Wiley & Sons, New York, 2006.
2. Pasharavesh, A. "Dynamic and Vibration Analysis of Micro and Nanobeam in Electrical Field using Nonlocal Theory", PhD Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Sharif University, Tehran, Iran. 2012 (in Persian).
3. Iijima, S. "Helical Microtubules of Graphitic Carbon", *Nature*, Vol. 354, No. 6348, pp. 56-58, 1991.
4. Eringen, C. "Linear Theory of Nonlocal Elasticity and Dispersion of Plane Waves". *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 5, pp. 425-435, 1972.
5. Peddieson, J., Buchanan, G.R. and McNitt, R.P. "Application of Nonlocal Continuum Models to Nanotechnology", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 3, pp. 305-312, 2003.
6. Sudak, L. "Column Buckling of Multiwalled Carbon Nanotubes Using Nonlocal Continuum Mechanics", *Journal of Applied Physics*, Vol. 94, No. 11, pp. 7281-7287, 2003.
7. Pisano, A. and Fuschi, P. "Closed Form Solution For a Nonlocal Elastic Bar in Tension", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 1, pp. 13-23, 2003.
8. Reddy, J. "Nonlocal Theories For Bending, Buckling And Vibration Of Beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.