

بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش چندلایه‌های متقارن

حاوی گشودگی مثلثی

بهزاد مشیری اول^۱ و محمد جعفری^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه شاهرود

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۶/۵)

چکیده

در این مقاله، برای بررسی تمرکز تنش صفحات چندلایه کامپوزیتی متقارن دارای گشودگی مثلثی از روش متغیر مختلط لخنیتسکی استفاده شده است. روش ارائه شده، توسط لخنیتسکی به حل صفحات ناهمسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل محدود می‌شود. برای استفاده از این روش در تحلیل صفحات دارای گشودگی مثلثی، با استفاده از تابع نگاشت هم‌نوا، ناحیه خارج گشودگی مثلثی به محدوده خارج دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. تأثیر زاویه چرخش گشودگی، چیدمان لایه‌ها، کشیدگی گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی و زاویه بار بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی بررسی می‌شود. در مواردی، به منظور بررسی درستی روش حل تحلیلی، نتایج حاصل از روش تحلیلی با نتایج اجزای محدود مقایسه می‌شود. نتایج ارائه شده در این تحقیق، نشان می‌دهد که روش حل حاضر برای تعیین تمرکز تنش در چندلایه‌های متقارن دارای گشودگی‌هایی با اشکال مختلف قابل ارائه است.

واژه‌های کلیدی: روش متغیر مختلط، حل تحلیلی، چندلایه متقارن، گشودگی مثلثی

A Study of the Effect of Various Parameters on the Stress Distribution in Symmetric Laminates with a Triangular Hole

B. Moshiri Aval and M. Jafari

Mechanical Engineering Department

University of Shahrood

(Received: 1/December/2014; Accepted: 27/August/2015)

ABSTRACT

In this paper, the complex variable method of Lekhnitskii has been applied for solving stress concentration problems in symmetric laminates with triangular hole. Lekhnitskii solution is limited to circular and elliptical holes in anisotropic plates. In order to use this approach to triangular hole, by means of conformal mapping, the area external to the hole can be represented by the area outside the unit circle. The effect of rotation angle of hole, stacking sequence, hole curvature and load angle on stress distribution around triangular hole are considered. The results based on analytical solution are compared with the results obtained using finite element methods. Good agreement is observed and provides confidence in the accuracy of the present results. The results presented in this paper, Indicated that the presented method can be used to determine accurately the stress concentration in symmetric laminates with special shape holes.

Keywords: Complex Variable Method, Analytical Solution, Symmetric Laminate, Triangular Hole

۱- کارشناسی ارشد: behzad.moshiri@yahoo.com

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): m_jafari821@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

در حال حاضر مواد کامپوزیتی به دلیل برتری‌هایی که نسبت به مواد همسانگرد دارند از کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف برخوردار هستند. از این مواد برای تولید برخی از قطعات اتومبیل، هواپیما و حتی سازه‌های فضایی استفاده می‌شود. در برخی از این سازه‌ها و قطعات به دلیل محدودیت‌های طراحی، وجود گشودگی‌ها امری عادی و اجتناب‌ناپذیر است. با توجه به تحقیقات موجود مشخص شده است که سازه‌های دارای گشودگی، استحکام شکست پایین‌تری نسبت به قطعات بدون گشودگی دارند و ۸۰ درصد شکست‌های انجام‌شده در سازه‌های هوایی از محل بست‌ها و اتصالات روی داده است. این امر به علت پدیده‌ای به نام تمرکز تنش می‌باشد. عمل شکست در سازه از محل بیشترین تنش اعمالی به آن اتفاق می‌افتد و از آنجایی که بیشترین تنش، معمولاً در اطراف ناپیوستگی‌های هندسی موجود در قطعات رخ می‌دهد؛ بنابراین مطالعه توزیع تنش و به دست آوردن بیشترین تنش ایجادشده اطراف این گشودگی‌ها برای طراحی سازه‌های حاوی گشودگی، امری ضروری است.

درباره تحلیل تنش صفحات دارای گشودگی، تحقیقات گسترده‌ای توسط روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی انجام شده است.

استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی اولین بار توسط موشخلیشویلی^۱ [۱] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه‌شده توسط او در مطالعات ساوین^۲ [۲] بر روی صفحات بی‌نهایت حاوی گشودگی‌های مختلف از جنس ماده همسانگرد و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای مواد ناهمسانگرد فقط برای گشودگی بیضی شکل و دایره‌ای مطالعاتی را انجام داد. توسعه کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد ناهمسانگرد توسط اشلبای^۳ [۳]، اشترو^۴ [۴] و لخنیتسکی^۵ [۵] انجام شد.

یوکادگانوکر^۶ و کاخاندکی^۷ [۶] با استفاده از حل تحلیلی ارائه‌شده توسط ساوین، توزیع تنش اطراف گشودگی‌های

نامنظم هندسی در صفحات چندلایه ارتوتروپیک تحت بارگذاری مختلف را مورد بررسی قرار دادند. یانگ^۸ و همکارانش [۷] حلی تحلیلی برای بررسی تمرکز تنش صفحات دارای گشودگی مستطیلی تحت بارگذاری دومحوره ارائه دادند. آنها همچنین تأثیر پارامتر نسبت طول به عرض گشودگی بر روی تمرکز تنش را نیز بررسی کردند. تحلیل تنش صفحات ارتوتروپیک با گشودگی مستطیلی توسط جونگ^۹ [۸] و نایک^{۱۰} [۹] انجام شد. روابط آنها براساس روش حل ارائه‌شده توسط لخنیتسکی و فرمول‌بندی اشترو و استفاده از نگاشت هم‌نوا بود. زیمرمن^{۱۱} [۱۰] استفاده از تابع نگاشت هم‌نوا، برای نگاشت صفحه نامحدود دارای گشودگی‌های با اشکال مختلف به دایره‌ای به شعاع واحد را مورد بررسی قرار داد. شارما^{۱۲}، پاتل^{۱۳} و خوشبو^{۱۴} [۱۱-۱۲] با استفاده از فرمول‌بندی ارائه‌شده توسط موشخلیشویلی، به حلی عمومی برای محاسبه تنش اطراف گشودگی مثلثی دست پیدا کردند. روش حل برای صفحات ارتوتروپیک بی‌نهایت تحت بارگذاری درون صفحه‌ای ارائه شد و همچنین، پارامترهای مختلفی همچون زاویه ناهمسانگردی، زاویه بار و انحنای گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. آنها در مقاله‌ای دیگر حلی تحلیلی برای توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای تحت فشار داخلی ارائه کردند. در آن تحقیق، صفحات ارتوتروپیک نامحدود با استفاده از روابط ارائه‌شده توسط موشخلیشویلی مطالعه شد و همچنین تأثیر زاویه الیاف بر تمرکز تنش اطراف گشودگی دایره‌ای مورد بررسی قرار گرفت. جعفری و رضایی‌پژند [۱۳] با تعریف توابع تنشی که معادلات سازگاری را ارضاء می‌کردند، حل تحلیلی صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی‌های مختلف را ارائه کردند. آنها در مطالعات خود از توسعه روش حل تحلیلی لخنیتسکی برای گشودگی‌های غیردایره‌ای از جمله گشودگی مثلثی استفاده کردند. یوکادگانوکر و رائو^{۱۵} [۱۴] توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات تحت بارگذاری کشش تک‌محوره و دومحوره را مورد مطالعه قرار دادند. آنها این حل را برای صفحات همسانگرد، ارتوتروپیک و چندلایه‌های متقارن ارائه کردند. همچنین تأثیر پارامترهای زاویه الیاف و انحنای

8-Yang

9- Jong

10- Naik

11- Zimmerman

12- Sharma

13- Patel

14- Khushbu

15- Rao

1- Muskhelishvili

2- Savin

3- Eshelby

4- Stroh

5- Lekhnitskii

6- Ukadgaonker

7- Kakhandki

چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن با گشودگی شبه‌مستطیلی پرداختند. آنها تأثیر پارامترهایی از قبیل شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، زاویه‌ی اعمال بار و چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند.

برای طراحی دقیق اتصالات و یا تقویت گشودگی‌ها با روش‌های مختلف و با توجه به پیشرفت سریع تکنولوژی و افزایش استفاده از مواد کامپوزیت، نیاز به اطلاعات دقیقی در مورد توزیع تنش اطراف گشودگی است. اگرچه تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است ولی مطالعه صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی مثلثی، با در نظر گرفتن تمامی پارامترهای مهم از قبیل جنس و نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه بار، زاویه چرخش گشودگی، کشیدگی گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی در کنار یک‌دیگر صورت نگرفته و انجام مطالعه‌ای در این زمینه لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله سعی می‌شود؛ تأثیر این پارامترها برای صفحات چندلایه کامپوزیتی متقارن حاوی گشودگی مثلثی مورد بررسی قرار گیرد.

۲- تعریف مسأله

مسأله مورد بررسی در این مقاله صفحه‌ای است حاوی گشودگی مثلثی که به علت بزرگ بودن ابعاد آن نسبت به ابعاد گشودگی، صفحه به صورت نامحدود فرض می‌شود. این صفحه مطابق شکل ۱ تحت بارگذاری کششی با زاویه (α) نسبت به محور X قرار دارد. در این شکل زاویه چرخش گشودگی که بیانگر نحوه قرارگیری آن نسبت به افق است، با β نمایش داده شده است. در این مسأله، صفحه دارای رفتار الاستیک خطی بوده و همچنین با اعمال شرایط مرزی $(\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0)$ تنها تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی σ_θ است. بقیه تنش‌ها در مقابل این تنش قابل صرف نظر می‌باشند. ماده مورد بررسی در این مقاله دارای خواص مکانیکی مطابق جدول ۱ می‌باشد. [۱۵].

جدول (۱): خواص مکانیکی ماده مورد مطالعه.

V_{21}	V_{12}	$G_{12} (Gpa)$	$E_2 (Gpa)$	$E_1 (Gpa)$	
۰/۲	۰/۲۸	۷/۱۷	۱۰/۳	۱۸۱	graphite/epoxy

گشودگی را نیز بررسی کردند. رائو و همکارانش [۱۵] در مقاله‌ای دیگر توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مربعی و مستطیلی برای چندلایه‌های متقارن را نیز مورد مطالعه قرار دادند. هافنباخ^۱ [۱۶] و همکارانش با ارائه یک حل تحلیلی، میدان تنش و جابه‌جایی اطراف گشودگی بیضی‌شکل را در یک صفحه ناهمسانگرد به دست آوردند. آنها نتایج خود را برای زوایای مختلف الیاف و بار ارائه دادند و از نتایج اجزای محدود و تجربی برای بررسی درستی روش حل تحلیلی استفاده کردند. همچنین جعفری و رضایی‌پژند [۱۷] به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مربعی در صفحات ناهمسانگرد پرداختند. تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل زاویه بار، زاویه الیاف و زاویه چرخش گشودگی در آن تحقیق مورد مطالعه قرار گرفت. ریبکی^۲ [۱۸] و همکارانش با استفاده از روش اجزای محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای را در چندلایه‌ها به دست آوردند. صفحه مورد تحلیل آنها تحت بار تک‌محوره قرار داشت. آنها از روش تجربی برای تایید روش اجزاء محدود خود استفاده کردند. در مقاله‌ای توسط ولایچامی^۳ [۱۹] و همکارانش به طراحی بهین صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی‌شکل پرداخته شد. متغیرهای طراحی در تحقیق آنها نسبت قطرهای بیضی و زاویه چرخش گشودگی بودند. تابع هدف دسترسی به کمترین تنش ممکن در اطراف گشودگی بود. در مقاله‌ای توسط هافنباخ [۲۰] و همکارانش با در نظر گرفتن تابع جابه‌جایی بر حسب متغیر مختلط و استفاده از نگاشت هم‌نوا مسأله تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی محدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل مورد مطالعه قرار گرفت. ایشان در مقاله‌ای دیگر [۲۱]، با استفاده از روش تحلیلی بر پایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و استفاده از توابع پتانسیلی به شکل متغیر مختلط، میدان تنش و کرنش در اطراف گشودگی را تعیین کردند. برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی بیضی‌شکل به دایره‌ای به شعاع واحد از تابع نگاشت هم‌نوا استفاده شد. همچنین ترکیب روش حداقل مربعات و روش هم‌مکانی^۴ برای مدل‌سازی مرز خارجی صفحه به کار گرفته شد. در مورد چندلایه‌های نامتقارن هم تحقیقاتی انجام شده است که غالب آنها برای گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی‌شکل می‌باشد [۲۲-۲۴]. جعفری و مشیری‌اول [۲۵] به بررسی تنش در

1- Hufenbach
2- Rybicki
3- Vellaichamy
4- Collocation Method

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left[\zeta^n + \frac{1}{\zeta^n} \right]$$

$$\sin(n\theta) = -\frac{i}{2} \left[\zeta^n - \frac{1}{\zeta^n} \right] \quad (۶)$$

برای نگاشت صفحه نامحدود دارای گشودگی مثلثی به دایره‌ای به شعاع واحد می‌توان از تابع انتقال $w(\zeta)$ مطابق رابطه (۱) استفاده کرد:

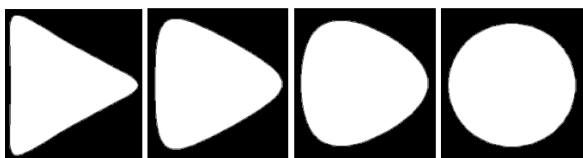
$$z = w(\zeta) = x + sy \quad (۷)$$

تابع نگاشت $w(\zeta)$ برحسب متغیر تبدیل یافته ζ به صورت زیر خواهد بود:

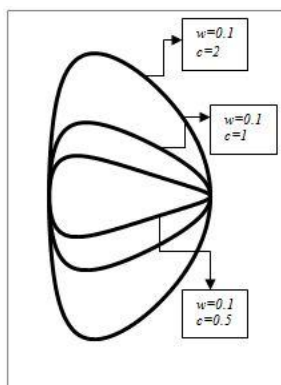
$$z = w(\zeta) = \frac{1+c}{\zeta} + (1-c)\zeta + 2w\zeta^n \quad (۸)$$

در تابع نگاشت فوق، پارامتر W برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر W نشان‌دهنده انحنا یا گوشه‌های گشودگی می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با تغییر W از مقدار 0.3 تا صفر از انحنا یا گشودگی مثلثی کاسته شده تا در نهایت به شکل دایره تبدیل شود.

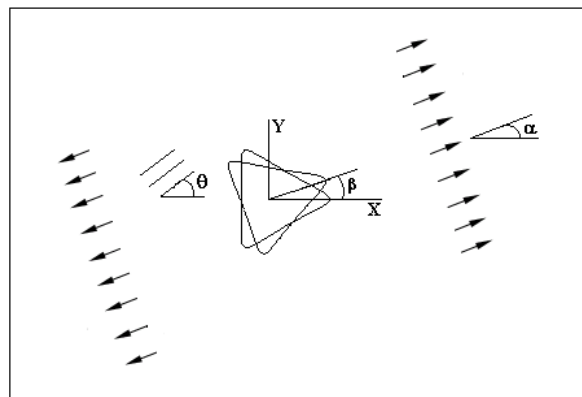
انحنای گشودگی (W) یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی است که در این مقاله تأثیر این پارامتر بررسی می‌شود. در مطالعات قبلی تأثیر این پارامتر توسط محققین کمتر مورد توجه قرار گرفته است.



شکل (۲): تأثیر روند تغییرات w بر انحنا یا گشودگی.



شکل (۳): تأثیر روند تغییرات C بر کشیدگی گشودگی.



شکل (۱): صفحه نامحدود تحت کشش با گشودگی مثلثی.

۳- روش حل

حلّ تحلیلی ارائه شده توسط لخنیتسکی [۵]، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل را مورد بررسی قرار می‌داد. از این روش برای بسط روش حلّ مذکور به سایر گشودگی‌ها نیاز است که با استفاده از تابع نگاشتی به صورت معادله (۱) نقاط روی مرز گشودگی مورد نظر با هندسه خاص را به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کرد:

$$z = x + sy \quad (۱)$$

که در آن، S ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به چندلایه‌های متقارن بوده که بعداً به آن اشاره خواهد شد و X و Y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = (\cos \theta + w \cos(2\theta))$$

$$y = -(\sin \theta - w \sin(2\theta)) \quad (۲)$$

رابطه فوق، تنها نقاط روی مرز گشودگی را مدل می‌کند برای به دست آوردن نقاط خارج گشودگی از متغیر ζ استفاده می‌شود. که به وسیله پارامترهای ρ و θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (۳)$$

با یادآوری رابطه اوپلر به صورت زیر:

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) \quad (۴)$$

و با جایگذاری $\rho = 1$ در رابطه (۳) می‌توان دایره‌ای به شعاع واحد را به صورت زیر مدل کرد:

$$\zeta = e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (۵)$$

با توجه به روابط (۴) و (۵) روابط زیر قابل دستیابی است:

اکنون می‌توان با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در معادله سازگاری، رابطه زیر را به‌دست آورد:

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (14)$$

حل عمومی معادله فوق بستگی به ریشه‌های معادله مشخصه زیر دارد:

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (15)$$

لخنیسکی [۵] نشان داد که ریشه‌های معادله مشخصه فوق دوبه‌دو مزدوج هستند: $s_1 = \bar{s}_3$ و $s_2 = \bar{s}_4$.

بنابراین حل معادله (۱۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$U(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} \quad (16)$$

که در آن، $z_i = x + s_i y$ ($i=1, 2$) است. برای کاهش مرتبه مشتق در تابع تنش ارائه‌شده، توابع φ و ψ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dz_1} &= \varphi(z_1) & \frac{dF_2}{dz_2} &= \psi(z_2) \\ \frac{d\overline{F_1}}{d\bar{z}_1} &= \overline{\varphi(z_1)} & \frac{d\overline{F_2}}{d\bar{z}_2} &= \overline{\psi(z_2)} \end{aligned} \quad (17)$$

در نتیجه، می‌توان تنش σ_x در معادله (۱۲) را به‌صورت تابعی از دو تابع تنش $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) = \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{dF_1}{dz_1} \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{dF_2}{dz_2} \frac{\partial z_2}{\partial y} + \frac{d\overline{F_1}}{d\bar{z}_1} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial y} + \frac{d\overline{F_2}}{d\bar{z}_2} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial y} \right] = \\ & \frac{\partial}{\partial y} [s_1 \varphi(z_1) + s_2 \psi(z_2) + \overline{s_1 \varphi(z_1)} + \overline{s_2 \psi(z_2)}] \end{aligned} \quad (18)$$

حاصل $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ به این‌صورت محاسبه می‌شود که اگر فرض کنیم

$$s_1 = \alpha + i\beta \quad \text{آنگاه } z_1 = x + (\alpha + i\beta)y \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \alpha + i\beta \quad \text{است. پس } \overline{s_1} = \alpha - i\beta \quad \text{به همین}$$

$$\text{ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که } \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial y} = \overline{s_1} = \alpha - i\beta \quad \text{بنابراین مقدار تنش}$$

σ_x به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x = [s_1^2 \varphi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2) + \overline{s_1^2 \varphi'(z_1)} + \overline{s_2^2 \psi'(z_2)}] \quad (19)$$

با توجه به رابطه $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}[z]$ می‌توان نوشت:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \varphi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \quad (20)$$

به همین ترتیب بقیه تنش‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش چندلایه‌های متقارن حاوی ...

همچنین در تابع نگاشت فوق، C مقدار کشیدگی گشودگی را مطابق شکل ۳ نشان می‌دهد. $C=1$ نشان‌دهنده مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۳-۱- حل تحلیلی

حل تحلیلی حاضر بر پایه تئوری الاستیسیته مواد ناهمسانگرد ارائه شده توسط لخنیتسکی [۵] استوار می‌باشد. در این تئوری ابتدا تابع تنش به‌صورت عبارتی تحلیلی برحسب متغیر مختلط نوشته می‌شود. سپس با ارائه معادله سازگاری برحسب تابع تنش و حل آن از روش معادله مشخصه و اعمال شرایط مرزی، می‌توان مؤلفه‌های تنش را به‌دست آورد.

با استفاده از قانون هوک تعمیم‌یافته در حالت سه‌بعدی می‌توان هر مؤلفه تنش را به تمام مؤلفه‌های تغییرشکل نسبی و هر مؤلفه تغییرشکل نسبی را به تمام مؤلفه‌های تنش مربوط ساخت:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= C_{ij} \varepsilon_j \\ \varepsilon_i &= S_{ij} \sigma_j \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن، $[C]$ و $[S]$ به‌ترتیب ماتریس‌های نرمی و سفتی ماده هستند همان‌طور که می‌دانیم:

$$[C] = [S]^{-1} \quad (10)$$

رابطه تنش و کرنش متوسط طبق قانون هوک به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن، a_{ij} اعضای ماتریس نرمی کاهش‌یافته چندلایه‌های متقارن می‌باشند.

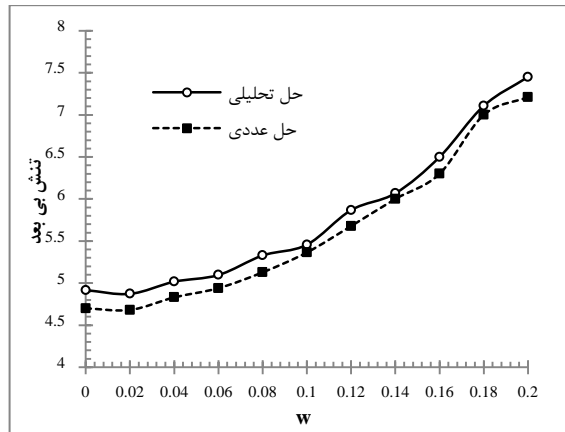
رابطه بین ضرایب سفتی مؤثر و اعضای ماتریس سفتی کاهش‌یافته توسط راتو [۱۵] بیان شد.

مؤلفه‌های تنش برحسب تابع تنش $U(x, y)$ مطابق روابط زیر است:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

از طرفی رابطه سازگاری در حالت دوبعدی نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (13)$$



شکل (۵): بررسی تغییرات تنش بی بعدی بر حسب W از دو روش حل تحلیلی و اجزاء محدود (C=1).

۵- نتایج

در این مقاله سعی می شود تا تأثیر پارامترهایی همچون زاویه بار (α)، زاویه چرخش گشودگی (β)، کشیدگی گشودگی (C)، انحنای گوشه های گشودگی (W) و همچنین تأثیر چیدمان لایه ها بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی مورد بررسی قرار گیرد.

۵-۱- تأثیر انحنای گشودگی (W)

انحنای گوشه گشودگی یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار در توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی است. مطابق آنچه که در شکل های ۸-۶ نشان داده شده است؛ برای هر سه نوع چیدمان کمترین تمرکز تنش اطراف گشودگی مثلثی، زمانی حاصل می شود که W کمترین مقدار خود را داشته باشد. نتایج این قسمت برای C = 1 می باشد. با توجه به این اشکال، کمترین مقدار تنش بی بعدی نیز وقتی حاصل می شود که W = 0 باشد. که در این حالت مطابق شکل ۲، گشودگی مثلثی به دایره تبدیل می شود. بنابراین برای هر سه حالت چیدمان لایه ها زمانی که انحنای گشودگی (W) کمترین مقدار را دارا باشد، تمرکز تنش به حداقل مقدار خود خواهد رسید. زاویه چرخش در تمامی نتایج ارائه شده صفر در نظر گرفته شده است.

۵-۲- تأثیر کشیدگی گشودگی (C)

همان طور که در شکل ۹ مشخص است، تغییر مقدار تنش بی بعدی با تغییرات C رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا

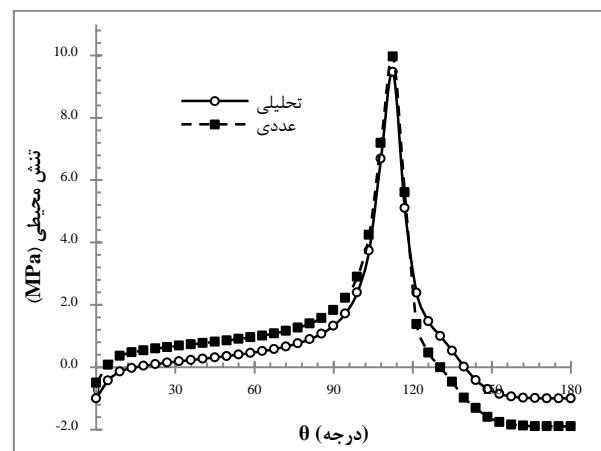
$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \phi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [s_1 \phi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \quad (21)$$

توابع تحلیلی $\phi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ با توجه به شرایط مرزی اطراف گشودگی و شرایط بارگذاری در بی نهایت، قابل محاسبه خواهند بود.

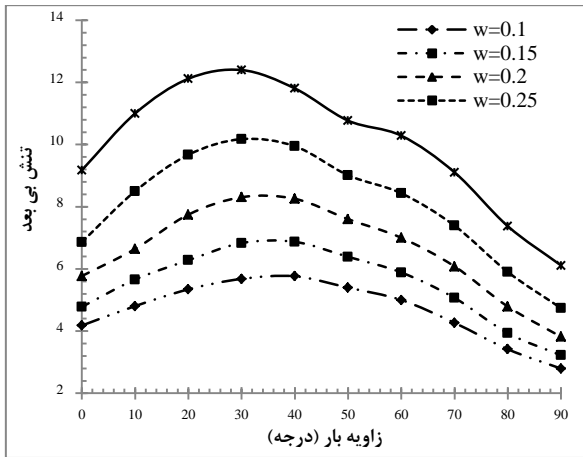
۴- بررسی درستی حل

در این مقاله از روش اجزای محدود (نرم افزار آباکوس) برای بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی استفاده شده است. در اینجا برای ماده گرافیت/اپوکسی با چیدمان لایه ای $s [0 / 90]$ و زاویه بار و چرخش صفر درجه، مدلی از مسأله چندلایه حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری کششی در نرم افزار آباکوس ایجاد و سپس نتایج حاصل با نتایج حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق مقایسه شده است.

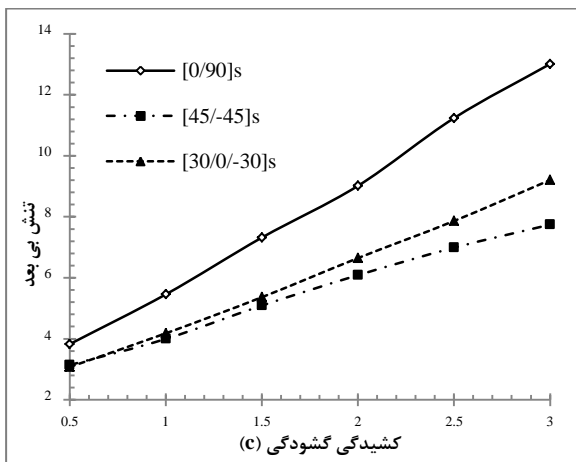
در بررسی مدل اجزای محدود با بررسی تعداد المان های مختلف، سعی شده است از تعداد المان بهینه استفاده شود. شکل های ۴-۵ نشان دهنده تطابق مناسبی بین حل عددی و حل تحلیلی در این مسأله می باشند. نتایج ارائه شده در شکل ۴، توزیع تنش محیطی اطراف گشودگی را در اثر اعمال بار تک محوری کششی ۱ MPa در جهت افق نشان می دهد؛ این نتایج مربوط به گشودگی مثلثی با C = 1 و W = 0/25 می باشد. منظور از تنش بی بعدی در این مقاله نسبت بیشترین تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی در بی نهایت است.



شکل (۴): توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی از دو روش حل تحلیلی و اجزاء محدود.



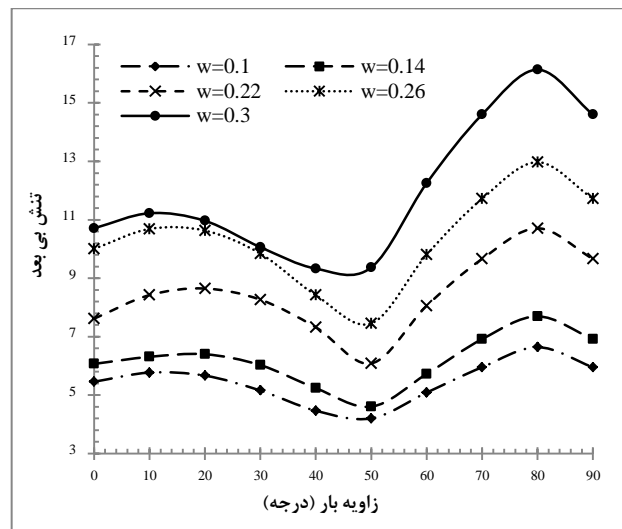
شکل (۸): تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[30 / 0 / -30]_s$ برحسب زاویه اعمال بار در w های مختلف.



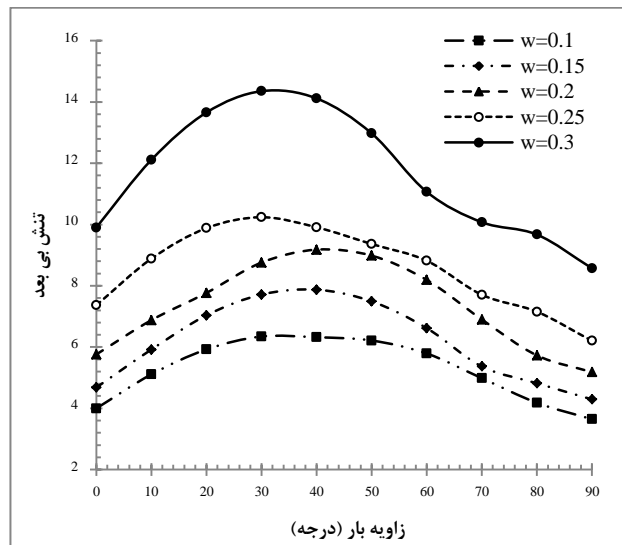
شکل (۹): تغییرات تنش بی‌بعد برحسب C برای سه چیدمان ماده گرافیت/اپوکسی برای $w=0.1$.

در شکل‌های ۱۰-۱۲ به بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای انواع چیدمان‌های ماده گرافیت/ اپوکسی برحسب زاویه اعمال بار در C های مختلف پرداخته شده است. همان‌طورکه از این اشکال مشخص است؛ برای تمامی چیدمان‌ها و در C های مختلف، در زاویه بار خاصی تنش بی‌بعد کمترین مقدار است. کمترین تنش بی‌بعد برای چیدمان‌های مختلف، با تغییر C ، تغییر می‌کند. همان‌طورکه قبلاً نیز اشاره شد؛ کاهش مقدار تنش بی‌بعد با کاهش مقدار C ، در چیدمان‌های مختلف، بستگی به زاویه بار هم دارد. به عبارتی در زوایای بار خاصی با کاهش C ، مقدار تنش بی‌بعد کاهش می‌یابد و برای بعضی دیگر از زوایای بار، عکس این رفتار اتفاق می‌افتد. این نتیجه در اشکال مذکور

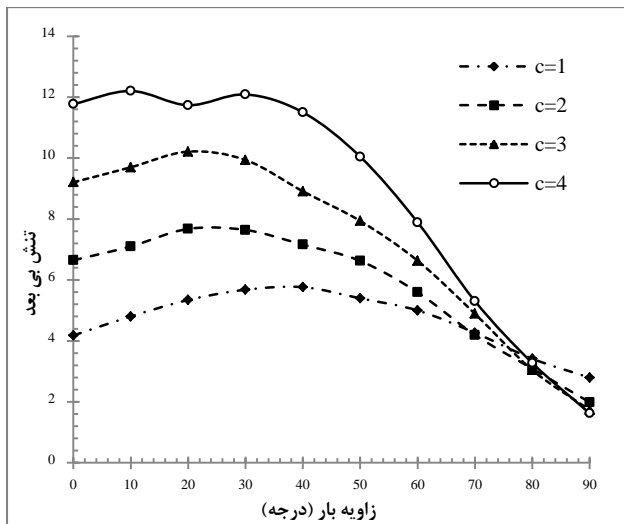
کاهش این پارامتر به ترتیب موجب افزایش و یا کاهش تنش بی‌بعد خواهد شد. روند افزایش تنش بی‌بعد با افزایش مقدار C برای وقتی است که زاویه اعمال بار صفر باشد یا به عبارت دیگر زاویه بار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد. برای وقتی که بارگذاری در جهت Y است ($\theta=90^\circ$) با افزایش C تنش بی‌بعد کاهش می‌یابد. نتایج این قسمت همگی برای $w=0.1$ می‌باشد. در این حالت نیز زاویه چرخش گشودگی صفر در نظر گرفته شده است.



شکل (۶): تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[0 / 90]_s$ برحسب زاویه اعمال بار در w های مختلف.

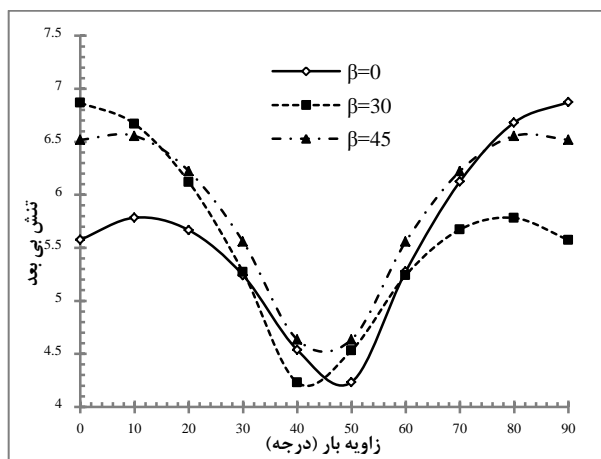


شکل (۷): تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[45 / -45]_s$ برحسب زاویه اعمال بار در w های مختلف.



شکل (۱۲): تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان s [۳۰ / ۰ / -۳۰] برحسب زاویه اعمال بار در c های مختلف.

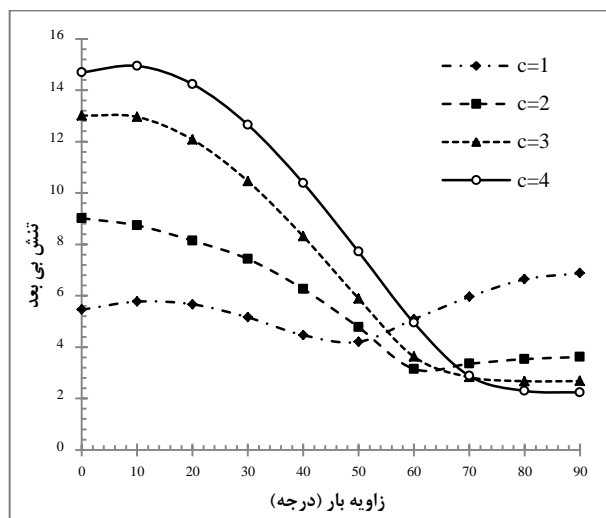
۵-۳- تأثیر زاویه بار (α) و زاویه چرخش گشودگی (β)
 نتایج مورد بحث در این قسمت برای انحنای خاصی از شکل گشودگی ($W=0/1$) آورده شده است. شکل های ۱۳-۱۵ تأثیر زاویه بار بر تنش بی بعد در زوایای چرخش مختلف را نشان می دهد.



شکل (۱۳): تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان s [۰ / ۹۰] برحسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف.

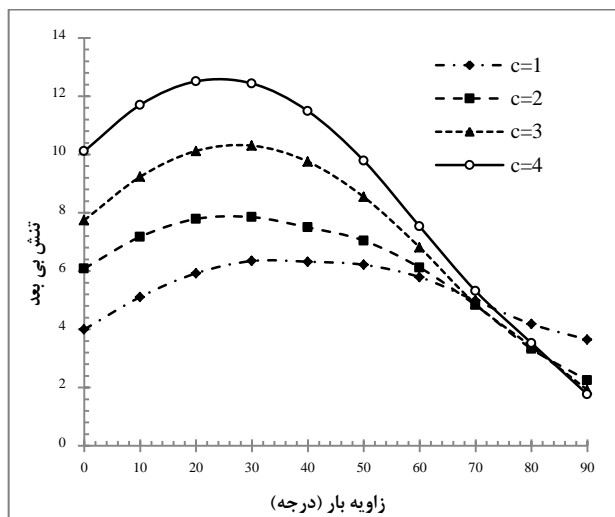
با توجه به شکل ۱۳، مشخص است، مقدار کمترین تنش بی بعد منحنی مربوط به چرخش گشودگی ۴۵ درجه، در زاویه بار ۴۵ درجه اتفاق می افتد که مقدار این تنش برابر ۴/۶۵ است. این درحالی است که، برای زوایای چرخش صفر و ۳۰ درجه

کاملاً مشهود است. برای همه چیدمان ها در زاویه بار صفر درجه، این تنش با کاهش c ، کاهش می یابد.



شکل (۱۰): بررسی تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان s [۰ / ۹۰] برحسب زاویه اعمال بار در c های مختلف.

در مورد چیدمان s [۰ / ۹۰] می توان گفت بیشترین تنش بی بعد برای تمامی c ها، تقریباً در زاویه بار صفر درجه رخ می دهد درحالی که برای چیدمان s [۴۵ / -۴۵] برای c های مختلف، تقریباً در زاویه بار ۲۰° اتفاق می افتد. اما برای چیدمان s [۳۰ / ۰ / -۳۰] زاویه مشخصی را نمی توان گزارش کرد.



شکل (۱۱): تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان s [۴۵ / -۴۵] برحسب زاویه اعمال بار در c های مختلف.

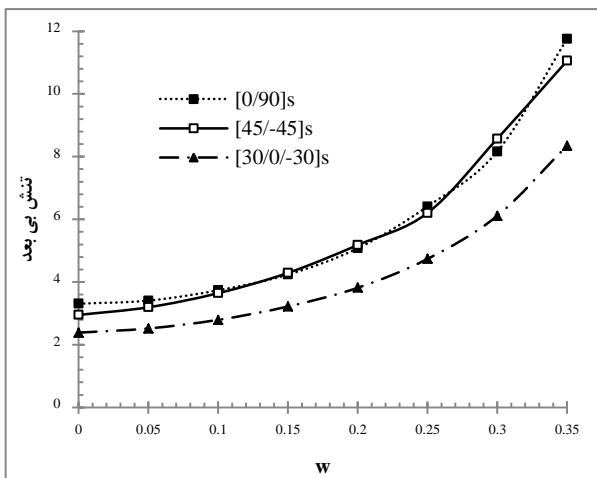
بررسی تغییرات توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برحسب زاویه بار (α) برای هر یک از زوایای چرخش گشودگی (β) ارائه شده در اشکال مذکور، نشان می‌دهد که کمترین تنش بی‌بعد برای هر یک از چیدمان‌ها، زمانی حاصل می‌شود که زوایای بار و چرخش گشودگی در حالت بهینه، مطابق جدول ۲ ارائه شده باشند.

جدول (۲): مقادیر بهینه پارامترهای مورد بررسی برای

چیدمان‌های مختلف با $W=0/1$.

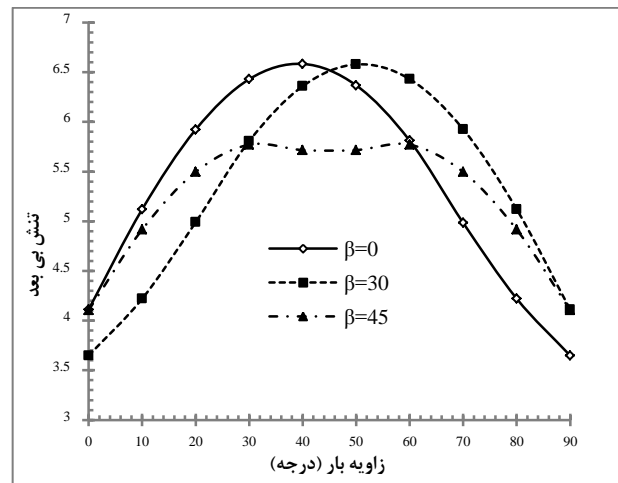
مقدار تنش	زاویه چرخش گشودگی (درجه)	زاویه بار (درجه)	نوع چیدمان
۳/۷۳	۱۰ و ۸۰	۵۰ و ۴۰	$[0/90]_s$
۳/۶۴	۳۰ و ۹۰ و ۰ و ۶۰	۰ و ۹۰	$[45/-45]_s$
۲/۷۹	۰ و ۶۰	۹۰ و ۹۰	$[30/0/-30]_s$

برای تعمیم نتایج جدول ۲ به سایر W ها، شکل ۱۶ نشان‌دهنده مقدار کمترین تنش بی‌بعد ممکن با توجه به در نظر گرفتن تمامی پارامترهای بهینه مؤثر برحسب W است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد و با استناد به این شکل، واضح است که انحنای گشودگی عامل بسیار مهمی بر تمرکز تنش اطراف گشودگی مثلثی می‌باشد و با کاهش مقدار آن می‌توان از شدت تنش کاست. در این حالت برای تمامی چیدمان‌ها، $W=0$ که معادل گشودگی دایره‌ای است؛ منتهی به کمترین تنش بی‌بعد می‌شود. در این شکل افزایش تعداد لایه‌ها نیز تأثیر زیادی بر کاهش تنش بی‌بعد دارد.

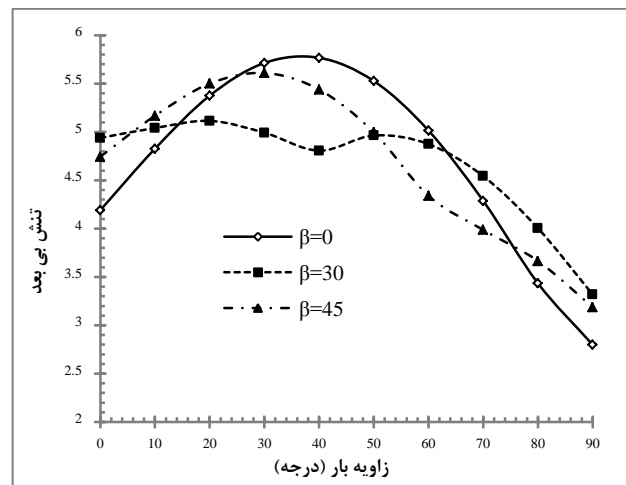


شکل (۱۶): تأثیر پارامتر انحنا گشودگی بر تنش بی‌بعد در چیدمان‌های مختلف.

این زاویه به ترتیب ۵۰ و ۴۰ درجه می‌باشد که مقدار این تنش برای هر دو منحنی مساوی ۴/۲۱ است.



شکل (۱۴): تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[45/-45]_s$ برحسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف.



شکل (۱۵): تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[30/0/-30]_s$ برحسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف.

شکل‌های ۱۴-۱۵ تغییرات تنش بی‌بعد برحسب زاویه بار در زوایای چرخش مختلف را برای ماده گرافیت/اپوکسی با چیدمان‌های $[45/-45]_s$ و $[30/0/-30]_s$ نشان می‌دهند. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است برای تمامی زوایای چرخش مورد بررسی، کمترین تنش بی‌بعد قابل دستیابی در زاویه بار ۹۰ درجه اتفاق می‌افتد. ولی مقدار این تنش بسته به زاویه چرخش متفاوت است.

توجه به نتایج حاصل از این جدول می‌توان نتیجه گرفت فارغ از نحوه قرارگیری گشودگی در صفحه، هرچه زاویه الیاف لایه اول به 90° نزدیک‌تر شوند مقدار تنش مطلوب عدد کمتری خواهد داشت و می‌توان عدد زاویه الیاف لایه دوم را با توجه به مقدار γ مشخص شده در جدول به دست آورد.

جدول (۴): تاثیر زاویه الیاف هر لایه و زاویه چرخش گشودگی بر تنش بی‌بعد (پارامترهای β ، λ و γ بر حسب درجه می‌باشند).

	$\beta=0$	$\beta=10$	$\beta=20$	$\beta=30$	$\beta=40$	$\beta=50$	$\beta=60$	$\beta=70$	$\beta=80$	$\beta=90$
$\lambda=0$	۴/۹۵ $\gamma=۴۶$	۵/۲۸ $\gamma=۳۸$	۵/۷۴ $\gamma=۴۴$	۵/۸۲ $\gamma=۵۰$	۵/۷۰ $\gamma=۴۵$	۵/۴۷ $\gamma=۴۳$	۴/۹۲ $\gamma=۵۲$	۵/۳۲ $\gamma=۴۲$	۵/۶۲ $\gamma=۴۶$	۵/۸۱ $\gamma=۴۱$
$\lambda=10$	۵/۴ $\gamma=۵۱$	۵/۲۱ $\gamma=۴۵$	۵/۷۹ $\gamma=۵۰$	۵/۹۷ $\gamma=۵۴$	۶/۰۱ $\gamma=۴۸$	۵/۸۸ $\gamma=۵۰$	۵/۴۰ $\gamma=۵۷$	۵/۲۶ $\gamma=۴۷$	۵/۶۸ $\gamma=۵۱$	۶/۰۴ $\gamma=۴۶$
$\lambda=20$	۵/۶۲ $\gamma=۵۷$	۵/۰۱ $\gamma=۶۴$	۵/۵۶ $\gamma=۵۵$	۵/۸۶ $\gamma=۵۸$	۶/۰۸ $\gamma=۵۳$	۶/۰۲ $\gamma=۵۷$	۵/۶۲ $\gamma=۶۲$	۴/۹۶ $\gamma=۵۸$	۵/۴۸ $\gamma=۵۸$	۵/۹۶ $\gamma=۵۳$
$\lambda=30$	۵/۵۹ $\gamma=۶۳$	۵/۰۶ $\gamma=۶۸$	۵/۰۶ $\gamma=۵۹$	۵/۴۹ $\gamma=۶۲$	۵/۸۳ $\gamma=۶۰$	۵/۸۷ $\gamma=۶۴$	۵/۵۵ $\gamma=۶۸$	۴/۹۷ $\gamma=۶۴$	۵/۰۳ $\gamma=۶۲$	۵/۵۶ $\gamma=۵۹$
$\lambda=40$	۵/۰۰ $\gamma=۰$	۴/۸۳ $\gamma=۷۳$	۴/۳۹ $\gamma=۶۳$	۴/۸۹ $\gamma=۶۴$	۵/۳۰ $\gamma=۶۶$	۵/۴۱ $\gamma=۷۰$	۵/۰۶ $\gamma=۰$	۴/۷۹ $\gamma=۶۶$	۴/۳۷ $\gamma=۶۵$	۴/۹۳ $\gamma=۶۴$
$\lambda=50$	۴/۷۰ $\gamma=۷۵$	۴/۳۶ $\gamma=۷۵$	۳/۹۴ $\gamma=۷۲$	۴/۱۷ $\gamma=۶۷$	۴/۵۷ $\gamma=۷۱$	۴/۷۳ $\gamma=۷۵$	۴/۶۵ $\gamma=۷۱$	۴/۴۲ $\gamma=۷۲$	۳/۹۷ $\gamma=۷۴$	۴/۱۷ $\gamma=۶۸$
$\lambda=60$	۳/۱۹۹ $\gamma=۷۵$	۳/۱۸۳ $\gamma=۷۶$	۳/۱۴۸ $\gamma=۷۸$	۳/۴۶ $\gamma=۷۱$	۳/۷۸ $\gamma=۷۱$	۳/۹۹ $\gamma=۷۴$	۴/۰۳ $\gamma=۷۶$	۳/۱۵۵ $\gamma=۷۸$	۳/۴۵ $\gamma=۸۰$	۳/۴۶ $\gamma=۷۱$
$\lambda=70$	۳/۳۲ $\gamma=۸۲$	۳/۱۸ $\gamma=۸۳$	۲/۹۱ $\gamma=۸۱$	۳/۰ $\gamma=۹۰$	۳/۲۰ $\gamma=۷۹$	۳/۳۱ $\gamma=۸۰$	۳/۳۳ $\gamma=۸۰$	۳/۲۰ $\gamma=۸۱$	۲/۹۳ $\gamma=۸۲$	۳/۰۱ $\gamma=۹۰$
$\lambda=80$	۲/۸۴ $\gamma=۹۰$	۲/۷۸ $\gamma=۹۰$	۲/۸۹ $\gamma=۹۰$	۲/۹۵ $\gamma=۹۰$	۲/۹۶ $\gamma=۹۰$	۲/۹۳ $\gamma=۹۰$	۲/۸۴ $\gamma=۹۰$	۲/۷۹ $\gamma=۹۰$	۲/۸۹ $\gamma=۹۰$	۲/۹۵ $\gamma=۹۰$
$\lambda=90$	۲/۷۴ $\gamma=۹۰$	۲/۷۶ $\gamma=۷۹$	۲/۷۷ $\gamma=۷۴$	۲/۹۰ $\gamma=۷۵$	۲/۹۶ $\gamma=۷۹$	۲/۹۱ $\gamma=۸۷$	۲/۷۴ $\gamma=۹۰$	۲/۷۶ $\gamma=۷۹$	۲/۷۷ $\gamma=۷۴$	۲/۹۱ $\gamma=۷۶$

۶- نتیجه‌گیری

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، یکی از معضلات طراحان در طراحی سازه‌های حاوی گشودگی، تمرکز تنش اطراف این ناپیوستگی‌هاست. زیرا با افزایش تنش، قطعه از محل این گشودگی‌ها با شکست مواجه می‌شود. از این رو، در این مقاله با استفاده از روش متغیر مختلط و نگاشت هم‌نوا، سعی شد پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی بررسی شود. این تحقیق نشان داد که نرم‌ترشدن گوشه‌های گشودگی تنها راه کاهش تمرکز تنش نیست؛ بلکه با انتخاب زاویه چرخش گشودگی و چیدمان لایه‌ها نیز می‌توان به تنش کمتری دست یافت. همچنین مثالی از چینش پارامترهای مورد بحث جهت دستیابی به کمترین میزان تنش بی‌بعد ارائه شد. با مطالعه پارامترهای مختلف، حالت $W=0$ (گشودگی دایره‌ای) بهترین شکل گشودگی جهت دستیابی به کمترین تنش بی‌بعد معرفی شد.

همان‌طور که قبلاً عنوان شد، برای گشودگی مثلثی، هرچه انحنای گوشه گشودگی (W) به صفر نزدیک‌تر باشد از مقدار تنش بی‌بعد کاسته می‌شود. تا جایی که در $W=0$ مثلث به دایره تبدیل می‌شود در این حالت تنش بی‌بعد، کمترین مقدار خود را خواهد داشت. بنابراین با توجه به جدول ۳ مشخص است که برای چیدمان‌های لایه‌ای s [۰ / ۹۰] و s [۴۵ / -۴۵] تنش تا مقدار ۲/۹۵ می‌تواند کاهش یابد. همچنین برای چیدمان s [۳۰ / ۰ / -۳۰] این مقدار برابر ۲/۳۸ می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت برای هر سه چیدمان s [۰ / ۹۰] و s [۴۵ / -۴۵] و s [۳۰ / ۰ / -۳۰] به ترتیب ۲۰/۹، ۱۸/۹ و ۱۴/۶ درصد از مقدار تنش مربوط به حالت بهینه $W=0/1$ (جدول ۲) کاسته شده است.

جدول (۳): مقادیر بهینه پارامترهای مورد بررسی برای

چیدمان‌های مختلف با $W=0$.

مقدار تنش	زاویه بار (درجه)	نوع چیدمان
۲/۹۵	۴۵	s [۰ / ۹۰]
۲/۹۵	۰	s [۴۵ / -۴۵]
۲/۳۸	۹۰	s [۳۰ / ۰ / -۳۰]

جدول ۴ بیان‌گر مقادیری از زوایای الیاف در هر لایه از چهار لایه متقارن کامپوزیتی است که در زاویه خاصی از چرخش گشودگی، کمترین تنش بی‌بعد متناظر با آن را در حالت بهینه معرفی می‌کند. لازم به یادآوری است با توجه به تقارن چندلایه، فقط به معرفی زوایای الیاف در دو لایه بسنده شده است. به عبارتی با انتخاب این مقادیر برای پارامترهای مذکور، تنش بی‌بعد مقدار کمینه خود را دارا خواهد بود. نتایج این جدول برای گرافیت/ اپوکسی، زاویه بار صفر و گشودگی مثلثی با مشخصات $W=0/1$ و $C=1$ به دست آمده‌اند.

در جدول ۴، زاویه الیاف لایه اول (فوقانی) با λ و زاویه الیاف لایه دوم با γ نمایش داده شده است. در این جدول برای هر β و λ معرفی شده در جدول، کمترین مقادیر ممکن برای تنش بی‌بعد و زاویه لایه دوم γ نظیر آن ارائه شده است. به عنوان مثال برای زاویه چرخش گشودگی $\beta=50^\circ$ و زاویه الیاف لایه اول $\lambda=30^\circ$ مقدار تنش مطلوب در $\gamma=64^\circ$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر ۵/۷۶ می‌باشد. با

۷- مراجع

- Elliptical Cutout and a Finite Outer Boundary and its Numerical Verification", Arch. Appl. Mech., Vol. 83, pp. 125-135, 2013.
17. Rezaeepazhand, J. and Jafari, M. "Stress Analysis of Composite Plates with Quasi-Square Cut out Subjected to Uniaxial Tension", J. Reinf. Plast. and Comp., Vol. 29, pp. 2015-2026, 2010.
 18. Rybicki, E.F. and Schmueser, D. "Effect of Stacking Sequence and Lay-Up Angle on Free Edge Stresses Around a Hole in a Laminated Plate Under Tension", J. Compos Mat., Vol. 12, pp. 300-313, 1978.
 19. Vellaichamy, S., Prakash B. and Brun, G. "Optimum Design of Cutouts in Laminated Composite Structures", Comp. and Struct., Vol. 31, pp. 241-246, 1990.
 20. Hufenbach, W., Grüber, B., Gottwald R., Lepper, M. and Zhou, B. "Analytical and Experimental Analysis of Stress Concentration in Notched Multilayered Composite with Finite Outer Boundaries", Mech. Comp. Mater., Vol. 46, pp. 531-538, 2010.
 21. Hufenbach, W., Grüber, B., Lepper, M., Gottwald, R. and Zhou, B. "An Analytical Method for the Determination of Stress and Strain Concentrations in Textile-Reinforced GF/PP Composites with Elliptical Cutout and a Finite Outer Boundary and its Numerical Verification", Arch. Appl. Mech, Vol. 83, pp. 125-135, 2013.
 22. Becker, W., Shafen, F. "Complex Method for the Elliptical Hole in an Unsymmetric Laminate", Arch. Appl. Mech, Vol. 63, pp. 159-169, 1993.
 23. Ukadgaonker, V.G. and Rao, D.K.N. "A General Solution for Stress Resultants and Moments Around Holes in Unsymmetric Laminates", Comp. Struct., Vol. 49, pp. 27-39, 2000.
 24. Chen, P. and Shen, Z. "Stress Resultants and Moments Around Holes in Unsymmetrical Composite Laminates Subjected to Remote Uniform Loading", Mech. Res. Commun., Vol. 30, pp. 79-86, 2003.
 25. Jafari, M. and Moshiri-Aval, B. "Stress Analysis of Symmetric Composite Laminates with Quasi-Rectangular Hole Subjected to In-plane Loading", Modares Mech. Eng., Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2015 (in Persian).
 1. Muskhelishvili, N.I. "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", the Netherlands, P. Noordhooff Ltd., 1962.
 2. Savin, G. N. "Stress concentration around holes", New York, Pergamon Press, 1961.
 3. Eshelby, J.D., Read, W.T. and Shockley, W. "Anisotropic Elasticity with Applications to Dislocation Theory", Acta Metallurgica, Vol. 1, pp. 251-259, 1953.
 4. Stroh, A.N. "Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity", Philosophical Magazine, Vol 7, pp. 625-646, 1958.
 5. Lekhnitskii, S.G. "Anisotropic plates", 2nd ed New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
 6. Ukadgaonker, V.G. and Kakhandki, V. "Stress Analysis for an Orthotropic Plate with an Irregular Shaped Hole for Different In-Plane Loading Conditions-Part 1", Comp. Struct., Vol. 70, No. 3, pp. 255-274, 2004.
 7. Yang, Y., Liu, J. and Cai, C. "Analytical Solution to Stress Concentration Problem in Plates Containing Rectangular Hole Under Biaxial Tensions", Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 21, No. 5, pp. 411-419, 2008.
 8. Jong, T.D. "Stresses Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates", J. Comp. Mat, Vol. 15, pp. 311-328, 1981.
 9. Rajaiah, K. and Naik, N.K. "Optimum Quasi-Rectangular Holes in Infinite Orthotropic Plates Under In-Plane Loadings", J. Appl. Mech, Vol. 50, pp. 891-896, 1983.
 10. Zimmerman, R.W. "Compressibility of Two-Dimensional Cavities of Various Shapes", J. Appl. Mech, Vol. 53, pp. 500-504, 1986.
 11. Sharma, D.S., Nirav P. and Khushbu, C.P. "Stress Distribution Around Triangular Hole in Orthotropic Plate", Nirma University J. of Eng. Technol., Vol. 1, No. 2, pp. 59-63, 2010.
 12. Sharma, D.S., Khushbu, P. and Nirav, P. "A General Solution for the Stresses Around Internally Pressurized Circular Hole in Symmetric Lamintes", Institute of Technology, Nirma University, Vol. 8, pp. 1-5, 2011.
 13. Rezaeepazhand, J. and Jafari, M. "Stress Analysis of Composite Plates with Noncircular Cut-out", Key Eng. Mat., Vols. 385-387, pp. 365-368, 2008.
 14. Ukadgaonker, V.G. and Rao, D.K.N. "Stress Disterbution Around Triangular Holes in Anisotropic Plates", Comp. Struct., Vol. 45, pp. 171-183, 1999.
 15. Rao, D.K.N., Ramesh Babu, M., Reddy K.R.N. and Sunil, D., "Stress Around Square and Rectangular Cutouts in Symmetric Laminates", Comp. Struct., Vol. 92, No. 12, pp. 2845-2859, 2010.
 16. Hufenbach, W., Grüber, B., Lepper, M., Gottwald, R. and Zhou, B. "An Analytical Method for the Determination of Stress and Strain Concentrations in Textile-Reinforced GF/PP Composites with