

مدل سازی انتشار امواج جابه جایی حاصل از ضربه روی صفحات چندلایه

کامپوزیتی

داریوش کوهبر^۱ و عیسی احمدی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه زنجان

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۵/۲۱)

چکیده

در این مقاله، انتشار امواج ناشی از ضربه روی ورق های کامپوزیتی چندلایه با روش المان محدود مورد بررسی قرار گرفته است. با در نظر گرفتن یک مدل المان محدود ماتریس های جرم، سفتی و نیرو به دست آمده است. معادلات حرکت حاکم بر ورق و ضربه زننده به صورت کوپل و با استفاده از دو روش انتگرال گیری عددی نیومارک و روش نیکلسون حل شده است. برای مدل سازی نیروی برخورد، از قانون تماس اصلاح شده هرتز بهره گرفته شده؛ به طوری که مدل ایجاد شده قابلیت در نظر گرفتن دفعات متعدد بارگذاری و باربرداری در حین برخورد را دارد. در قسمت نتایج بعد از مقایسه دو روش انتگرال گیری، مقدار بهینه برای پارامترها انتخاب شده است. همگرایی نتایج عددی با افزایش تعداد المان ها مورد بررسی قرار گرفته است و اثر شرایط مرزی بر مقدار حداکثر نیروی برخورد و تعداد دفعات برخورد مورد بررسی قرار گرفته است. انتشار امواج ناشی از ضربه برای شرایط مرزی مختلف ورق مورد بررسی قرار گرفته و زمان و چگونگی انتشار امواج و برخورد آن با مرزها و نیز شکل امواج در زمان های مختلف از جمله زمان اتمام تماس و زمان رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار به دست آمده است. تحلیل نتایج مشخص می کند که، چگونگی انتشار امواج به شرایط مرزی وابستگی زیادی داشته و به نوع لایه گذاری نیز بستگی دارد و سرعت انتشار امواج در جهات مختلف برای ورق کامپوزیتی متفاوت است.

واژه های کلیدی: انتشار امواج، روش اجزاء محدود، کامپوزیت چندلایه، ضربه سرعت پایین، روش انتگرال گیری نیومارک و نیکلسون

Analysis of Displacement Wave Propagation in Laminated Plates Subjected to Impact Force

D. Koohbor and I. Ahmadi

Mechanical Engineering Department

University of Zanjan

(Received: 15/December/2014; Accepted: 12/August/2015)

ABSTRACT

In this paper, the propagation of the waves in the laminated composite plates which is subjected to low velocity impact is investigated using the finite element method. Considering a finite element model the governing equations of the problem are discretized and the mass, stiffness and force matrix are obtained. The governing equations of the plate and the projectile are solved in the time domain using the Newmark and Nicolson numerical integration method. The contact force is modeled using the modified Hertz contact law. The propagation of the waves in the plate with different sets of edge boundary conditions are studied in the numerical results. The node dependency of the results is investigated and the effects of boundary conditions of the plate on the maximum impact load are studied. Various results for the propagation of the wave in the time domain are presented and the time history of the contact force, impact time duration and second impacts are studied in the numerical results. The analysis of results indicates that the wave propagation depends on the boundary conditions of the plate and the layer stacking of the composite plate.

Keywords: Wave Propagation, Finite Element Method, Laminated Composite, Low Velocity Impact, Newmark and Nicolson Integration Methods

۱- کارشناسی ارشد: darioush.koohbor@znu.ac.ir

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): i_ahmadi@znu.ac.ir

فهرست علائم و اختصارات

a, b	طول و عرض ورق، m
D_{ij}	سختی خمشی
E_i	مدول الاستیسیته، GPa
$[F]$	ماتریس نیرو
G_{ij}	مدول مدول برشی، GPa
h	ضخامت ورق، m
I_1, I_0, I_2	ممان اینرسی جرم
$[K]$	ماتریس سختی
$[M]$	ماتریس جرم
m_i	جرم ضربه‌زننده، kg
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	ممان‌های خمشی
N_i	توابع درونیابی لاگرانژی
P	نیروی فشاری در تماس، N
P_m	ماکزیمم نیرو در بارگذاری، N
\bar{Q}_{ij}	ماتریس سختی کاهش یافته در محور مختصات انتقال یافته
t	زمان، s
u, v, w	مولفه‌های میدان جابه‌جایی، m
V	سرعت ضربه‌زننده، ms^{-1}
علائم یونانی	
α	میزان نفوذ ضربه‌زننده، m
α_m	ماکزیمم نفوذ ضربه‌زننده، m
α_{cr}	مقدار نفوذ بحرانی، m
α_0	میزان فرورفتگی دائم، m
Δ_i	بردار جابه‌جایی
θ_x, θ_y	چرخش سطح مقطع ورق، بی‌بعد
ρ	جرم واحد حجم، kgm^{-3}

۱- مقدمه

ورق‌های کامپوزیتی در بسیاری از صنایع مانند صنایع خودروسازی، صنایع دریائی، علوم هوافضا، صنایع اپتیک، صنایع هسته‌ای و مهندسی سازه به‌خاطر خصوصیات فیزیکی مناسب کاربرد فراوانی دارند. یکی از مهم‌ترین مشکلاتی که در طراحی سازه‌های مرکب وجود دارد ضعف آن‌ها در برخوردی ضربه‌ای می‌باشد. مطالعات زیادی بر روی ضربه و اثرات آن به‌صورت تجربی و تحلیلی انجام پذیرفته است.

کتاب ابریت^۱ [۱] یک مجموعه جامع برای تحلیل ضربه بر روی کامپوزیت‌های صفحه‌ای و تیرها می‌باشد، او مطالعات

وسیع و گسترده‌ای را روی پاسخ مواد و سازه‌های کامپوزیتی به بار ضربه‌ای در اثر تماس جرم خارجی و نیز بررسی آسیب و کاهش استحکام باقی‌مانده و مودهای شکست انجام داد. آمارو و بی‌ریز^۲ [۲] تاثیر شرایط مرزی در ضربه سرعت پایین در ورق‌های کامپوزیتی کربن-اپوکسی بر روی نیروی تماس را مورد بررسی قرار دادند. شنگینگ^۳ و همکاران [۳] پاسخ دینامیکی ضربه و نحوه شکست ورق‌های لایه‌ای فلزی-فیبری تحت ضربه سرعت پایین را مورد بررسی قرار دادند. لی و هیو^۴ [۴] یک مدل عددی برای شبیه‌سازی روند آسیب ضربه سرعت پایین در ورق کامپوزیتی را با استفاده از روش المان محدود ارائه دادند. آن‌ها از مدل المان ۹ گره لاگرانژی برای صفحه با توجه به تجزیه و تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ استفاده کردند. تاراپادا و دیابراتا^۵ [۵] با روش المان محدود به بررسی لایه‌لایه‌شدگی ناشی از ضربه سرعت پایین در ورق‌های کامپوزیتی هیبریدی پرداختند و نتیجه گرفتند که با وجود کم‌بودن نیروی تماس در ورق‌های کامپوزیتی کولار-اپوکسی، لایه‌لایه‌شدگی^۶ در این ورق‌ها بیشتر از ورق‌های گرافیت-اپوکسی است. آن‌ها نشان دادند که ورق‌های هیبریدی از لحاظ لایه‌لایه‌شدن مقاوم‌تر هستند. میشله^۷ و همکاران [۶] یک مدل جرم و فنر یک‌درجه و دودرجه آزادی را برای پیش‌بینی آسیب حاصل از ضربه با سرعت پایین بر روی پانل‌های ساندویچی^۸ ارائه دادند. صبوری و همکاران [۷] مقاومت سوراخ‌شوندگی پانل‌های کامپوزیتی الیاف شیشه-اپوکسی در برابر ضربه پرتابه با سرعت بالا را براساس مطالعه آزمایشگاهی و استفاده از نرم‌افزار المان محدود انسیس به‌عنوان حل عددی، بررسی نمودند. آن‌ها با قراردادن فلز آلومینیوم با ضخامت‌های متفاوت در لایه‌های مختلف کامپوزیت میزان جذب انرژی ضربه را در ورق‌ها تحقیق کردند و به نتایج قابل‌قبولی بین حل عددی و نتایج آزمایشگاهی دست یافتند. یانگ ژنگ و پیگ ژو^۹ [۸] مدل آسیب ناشی از ضربه سرعت پایین را به‌روش المان محدود در نرم‌افزار اباکوس^{۱۰} انجام دادند. نتایج عددی را برای ورق‌های چندلایه کربن-اپوکسی

2- Amaro and Reis

3 - Shengqing

4 - Li and Hu

5 - Tarapada and Debabrata

4- Delamination

7 - Michelle

5- Sandwich Panel

9 - Yan. and Ping

10- Abaqus

1- Abrate

که در رابطه فوق، سه ترم اول نشان‌دهنده کار مجازی انجام‌شده توسط نیروهای اینرسی بوده و ترم‌های باقی‌مانده در انتگرال حجمی نشان‌دهنده انرژی کرنشی مجازی ذخیره‌شده در ورق می‌باشد و انتگرال آخر که روی سطح میانی Ω^e تعریف شده است، نشان‌دهنده کار مجازی انجام‌شده توسط بار توزیع شده عرضی q می‌باشد. با توجه به روابط کرنش جابه‌جایی [۱۰]، کرنش‌های مجازی با استفاده از میدان تغییر مکان در نظر گرفته‌شده در رابطه (۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ 2\delta \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

با استفاده از رابطه (۴)، و با انتگرال‌گیری نسبت به z رابطه (۳) بر اساس ممان‌های خمشی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega^e} (I_0 \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + I_2 \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - q \delta w) dx dy = 0 \quad (۵)$$

که در آن، M_{xx} ، M_{yy} و M_{xy} ممان‌های خمشی و I_0 ، I_2 ممان‌های اینرسی جرم هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz$$

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \quad (۶)$$

با استفاده از روابط تنش-کرنش و همچنین استفاده از قوانین حساب تغییرات معادله حرکت حاکم بر ورق طبق تئوری کلاسیک ورق‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = q - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (۷)$$

در رابطه (۷)، D_{ij} سختی خمشی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \quad (۸)$$

که در رابطه (۸)، \bar{Q}_{ij} بیان‌کننده ماتریس سفتی کاهش‌یافته در محورهای مختصات انتقال یافته می‌باشد.

تحت ضربه سرعت پایین را با نتایج تجربی مقایسه کردند. سان و چن^۱ [۹] ضربه سرعت پایین را برای یک چندلایه گرافیت-اپوکسی بررسی کردند و نیروی تماس و جابه‌جایی مرکز ورق را برای تکیه‌گاه ساده به دست آوردند.

باتوجه به این که در تحقیقات انجام‌گرفته بیش‌تر نیروی تماس و جابه‌جایی به دست آورده‌شده و انتشار امواج در اثر ضربه بسیار کم مطالعه شده و یا به دقت مورد بررسی قرار نگرفته است در این مقاله سعی شده تا چگونگی انتشار امواج در زمان‌های مختلف بارگذاری و باربرداری و لحظاتی پس از برخورد و نیز در زمان‌های دلخواه دیگر برای شرایط مرزی مختلف به صورت کامل مورد بررسی قرار گیرد، علاوه بر این، لحظه رسیدن موج به هرکدام از مرزها به صورت جداگانه استخراج گردیده و مورد تحلیل قرار گرفته است و نیز تصاویر دوبعدی و سه‌بعدی از این انتشار امواج آورده شده است.

۲- معادلات حرکت ورق کامپوزیتی

بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها میدان تغییر مکان در یک ورق به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (۱)$$

که در رابطه (۱)، u ، v و w نشان‌دهنده جابه‌جایی یک نقطه در ورق در جهات x ، y ، z بوده و u_0 ، v_0 ، w_0 جابه‌جایی یک نقطه روی صفحه میانی ورق در جهات x ، y ، z می‌باشد [۱۰]. برای به دست آوردن معادلات حاکم برای ورق از تئوری همیلتون طبق معادله (۲) استفاده شده است.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K - (\delta U + \delta V) dt = 0 \quad (۲)$$

که در رابطه (۲)، δK انرژی جنبشی مجازی، δU انرژی کرنشی مجازی و δV کار مجازی انجام‌شده به وسیله نیروهای خارجی می‌باشد. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از اصل اساسی حساب تغییرات رابطه (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\int_{V^e} (\rho z^2 \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho z^2 \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + 2\delta \varepsilon_{xy} \sigma_{xy}) dV - \int_{\Omega^e} q \delta w dx dy = 0 \quad (۳)$$

۳- مدل المان محدود

برای منفصل کردن معادله (۷) مدل المان محدود زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \Delta_i(t) \quad (9)$$

که در آن، توابع درونیابی لاگرانژی (توابع شکل) بوده و Δ_i نشان‌دهنده مقادیر جابه‌جایی نودها و چرخش آن‌ها می‌باشد که در این مطالعه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \dots \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}]^T \quad (10)$$

که در آن، w ، θ_x و θ_y به ترتیب بیان‌کننده جابه‌جایی در راستای z و چرخش حول محورهای x و y می‌باشند. المان را از نوع مستطیلی و چهارگره‌ای با ۳ درجه آزادی w ، θ_x و θ_y در هر گره در نظر می‌گیریم، المان مربوطه در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به مدل المان محدود در نظر گرفته شده در رابطه (۹) می‌توان θ_x و θ_y را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11)$$

حال با در نظر گرفتن $w(x, y)$ به صورت یک چندجمله‌ای از x و y به صورت رابطه (۱۲) داریم:

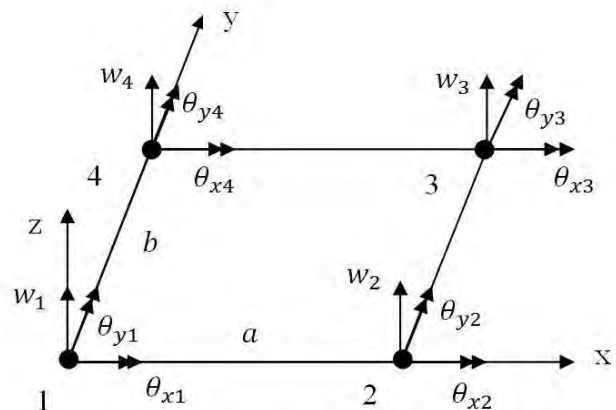
$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (12)$$

که با به دست آوردن ضرایب a_i (ها $i=1,2,3,\dots,12$) با توجه به مشخصات گره‌ها به صورت نشان داده شده در شکل ۱، N_i ها (ها $i=1,2,\dots,12$) نیز با مرتب کردن تابع در نظر گرفته شده بر اساس w ، θ_x و θ_y مشابه رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$N_1 = \frac{(a-b)(b-y)(a^2b^2 + a^2by - 2a^2y^2 + ab^2x - 2b^2x^2)}{a^3b^3}$$

$$\vdots$$

$$N_{12} = \frac{xy(a-x)^2}{a^2b} \quad (13)$$



شکل (۱): المان چهارگره‌ای با ۱۲ درجه آزادی.

حال با استفاده از مدل المان محدود رابطه (۹) و نیز رابطه (۱۱) معادله (۷) را با روش گلرکین منفصل کرده و معادله ارتعاشی ورق کامپوزیتی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$[M^e]\{\ddot{\Delta}^e\} + [K^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (14)$$

که در رابطه فوق، $[M^e]$ ماتریس جرم، $[K^e]$ ماتریس سفتی و $\{F^e\}$ ماتریس نیروی المان می‌باشند و به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$[M_{ij}^e] = \int_{\Omega^e} [I_0 N_i N_j + I_2 (\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y})] dx dy \quad (15)$$

$$[K_{ij}^e] = \int_{\Omega^e} [D_{11} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + D_{12} (\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}) + D_{22} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y}] dx dy \quad (16)$$

$$\{F\} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ F_c \ \dots \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، F_c نیروی تماس می‌باشد که به نقطه برخورد ورق و ضربه‌زننده وارد می‌شود. همچنین، اگر ω_i را جابه‌جایی گلوله در نظر بگیریم، برای معادله حرکت گلوله صلب خواهیم داشت:

$$m_i \ddot{\omega}_i = -F_c \quad (18)$$

که در رابطه (۱۸) m_i جرم ضربه‌زننده می‌باشد.

۴- مدل سازی برخورد

برای مدل کردن برخورد از مدل اصلاح شده هرترز استفاده شده است [۱]. اگر α مقدار نفوذ ضربه‌زننده در ورق و p مقدار نیروی فشاری باشد آنگاه طبق قانون هرترز داریم:

$$P = k\alpha^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

که در رابطه فوق، k سختی تماس بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$k = \frac{4}{3} ER \frac{1}{R^2} \quad (20)$$

که در آن، R شعاع معادل برای برخورد و E مدول الاستیسیته معادل برخورد است که از رابطه زیر به دست می‌آیند [۱]:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (21)$$

در رابطه فوق، R_1 و R_2 شعاع‌های انحنای ضربه‌زننده و سطح تحت ضربه می‌باشد که برای ورق مقدار R_2 برابر با بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود. مدول‌های یانگ و ضرایب پواسون دو جسم ضربه‌زننده و ورق نیز به ترتیب برابر با ν_1 ، E_1 و ν_2 ، E_2 می‌باشند. زیرنویس ۱ نشانگر خواص جسم ضربه‌زننده و زیرنویس ۲ نمایشگر خواص جسم ضربه‌خورنده می‌باشد، لازم

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{x}\}_t - \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{x}\}_t \right] \quad (28)$$

که در آن، ضرایب α و β پارامترهایی هستند که دقت و پایداری روش عددی را مشخص می‌کنند. برای مقادیر $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{1}{4}$ روش بالا روش میانگین شتاب نامیده می‌شود، و حتماً پایدار است [۱۲]. همچنین علاوه بر روش عددی نیومارک از روش عددی نیکلسون [۱۳] نیز برای حل معادله (۱۴) و معادله (۱۸) به صورت کوپل با یکدیگر استفاده شده است.

۵- نتایج عددی

بعد از صحت‌سنجی مدل المان محدود و انتخاب بهینه تعداد المان، نتایج حاصل از ضربه بررسی می‌گردد.

۵-۱- صحنه‌گذاری بر مدل المان محدود

باتوجه به بررسی‌نشدن امواج حاصل از ضربه بر روی ورق کامپوزیتی توسط محققان دیگر برای صحنه‌گذاری بر مدل المان محدود فرکانس‌های طبیعی ناشی از ارتعاش آزاد ورق کامپوزیتی دارای شرایط مرزی ساده از نوع گرافیت-اپوکسی به صورت ۱۰ لایه، با لایه‌گذاری $[0/90/0/90/0]_s$ و با مشخصات بیان‌شده در جدول ۱ برای ۱۰ مد ارتعاش اول حاصل از روش المان محدود در این مطالعه و حل دقیق که توسط درویزه و همکاران [۱۴] انجام شده بود؛ مورد مقایسه قرار گرفته که نتایج حاصل از آن در جدول ۲ آورده شده است.

جدول (۱): مشخصات مکانیکی ورق و ضربه زننده.

مشخصات	جنس ورق / ضربه زننده
$E_1 = 120 \text{ Gpa}, E_2 = E_3 = 7.9 \text{ Gpa}$ $v_{12} = v_{23} = 0.3$ $a = b = 200 \text{ mm}, h = 2.69 \text{ mm}$ $\alpha_{cr} = 0.0803 \text{ mm}$ $\rho = 1580 \text{ kgm}^{-3}, G_{12} = G_{23} = 5.5 \text{ Gpa}$	ورق: گرافیت/ اپوکسی T 300/934
$E = 200 \text{ Gpa}, v_i = 0.3, \rho = 7960 \text{ kgm}^{-3}$ $m_i = 8.537 \text{ gr}, D = 12.7 \text{ mm}, V = 3 \text{ ms}^{-1}$	ضربه زننده: فولاد

همان‌طور که از جدول ۲ ملاحظه می‌شود جواب‌های حاصل از مدل‌سازی المان محدود مطابقت بسیار خوبی با نتایج حل تحلیلی دارد و خطای بسیار ناچیزی حاصل شده است و این

به‌ذکر است که E_2 در ورق‌های کامپوزیتی، بیان‌کننده مدول الاستیسیته در جهت عرضی لایه‌ها می‌باشد. معادله (۱۹) تشریح‌کننده قانون تماس در حین مرحله بارگذاری فرورفتگی است، با این وجود فرورفتگی دائمی حتی می‌تواند در بارگذاری‌های نسبتاً پایین نیز رخ داده و لذا، مرحله باربرداری‌ها به‌نحو قابل توجهی متفاوت با مرحله بارگذاری می‌شود [۱۱]. در حین باربرداری نیرو به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P = P_m \left[\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right]^{2.5} \quad (22)$$

که در آن، P_m حداکثر نیرو پیش از شروع مرحله باربرداری، α_m حداکثر میزان فرورفتگی و α_0 میزان فرورفتگی دائم می‌باشد. در صورتی که میزان فرورفتگی از یک مقدار بحرانی α_{cr} کم‌تر باشد، α_0 برابر صفر خواهد بود و هنگامی که $\alpha_m > \alpha_{cr}$:

$$\alpha_0 = \alpha_m \left[1 - \left(\frac{\alpha_{cr}}{\alpha_m} \right)^{\frac{2}{5}} \right] \quad (23)$$

در بارگذاری مجدد، منحنی بارگذاری با منحنی باربرداری متفاوت بوده اما همواره به محلی باز می‌گردد که باربرداری از آنجا آغاز شده است، منحنی بارگذاری مجدد به‌صورت زیر مدل شده است:

$$P = P_m \left[\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right]^{1.5} \quad (24)$$

با این حال معادله (۲۴) بیانگر آن است که اگر $\alpha = \alpha_0$ باشد، $P = 0$ خواهد شد [۱۱]. برای حل دو معادله (۱۴) و معادله (۱۸) آن‌ها را به‌صورت کوپل با یکدیگر در نظر گرفته و از دو روش عددی نیومارک^۱ [۱۲] و روش نیکلسون^۲ [۱۳] استفاده می‌کنیم. در روش نیومارک به این صورت عمل می‌شود که با فرض مشخص‌بودن جواب برای زمان t ، جابه‌جایی، سرعت و شتاب را در زمان $t + \Delta t$ به‌دست می‌آوریم.

$$[\hat{K}]\{x\}_{t+\Delta t} = \{\hat{F}\} \quad (25)$$

که در معادله بالا:

$$[\hat{K}] = \left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} [M] + [K] \right)$$

$$\{\hat{F}\} = \{F\}_{t+\Delta t} + \{s\}$$

$$\{s\} = [M] \left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \{x\}_t + \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{x}\}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{x}\}_t \right) \quad (26)$$

و همچنین:

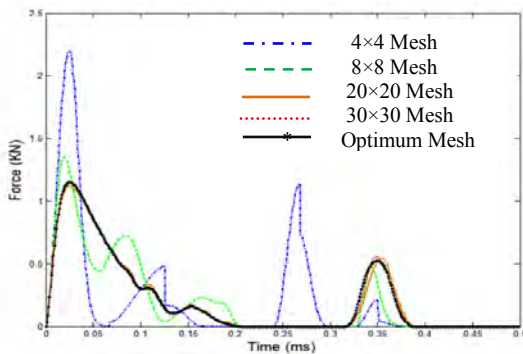
$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + [(1 - \alpha)\{\ddot{x}\}_t + \alpha\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (27)$$

1 - Newmark
2 - Nicolson

همان‌طور که در شکل ۲ نیز مشاهده می‌شود، انطباق مناسبی بین نتایج حاصل از روش المان محدود ارائه شده در مقاله حاضر با نیروی تماس محققان دیگر [۹، ۱۵، ۱۶، ۱۷] وجود دارد که نشان‌دهنده صحت و دقت مدل‌سازی انجام گرفته می‌باشد.

۵-۲- انتخاب بهینه تعداد المان‌ها

برای یافتن تعداد المان‌های مناسب برای تحلیل ضربه سرعت پایین روی ورق‌ها، یک ورق کامپوزیتی ۱۰ لایه از نوع گرافیت- اپوکسی و ضربه‌زننده با مشخصات بیان شده در جدول ۱ برای سرعت ضربه‌زننده $V = 10 \frac{m}{s}$ مورد بررسی قرار گرفت و نمودار نیروی تماس با تغییرات تعداد المان‌ها برای شرایط مرزی هر چهار طرف ساده مورد مطالعه قرار گرفت



شکل (۳): تغییرات نیروی تماس با تعداد المان‌ها.

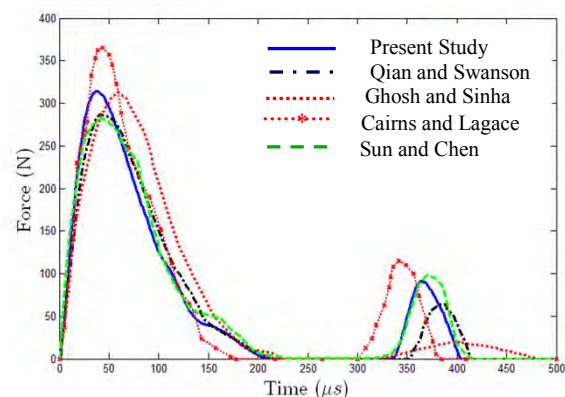
همان‌طور که در شکل ۳ نیز مشاهده می‌شود، با انتخاب ۱۶ المان مقدار نوسان نیرو زیاد می‌باشد و از جواب واقعی فاصله می‌گیرد به طوری که در شکل نیز مشخص است. در این حالت، چهار ضربه اتفاق افتاده است و در ضربه اول ماکزیمم نیرو برابر 2.206 KN می‌باشد ضمن این‌که ضربه دوم در این نوع المان خیلی زودتر رخ داده است. هنگامی که تعداد المان‌ها ۶۴ انتخاب می‌شود جواب‌ها به جواب واقعی نزدیک می‌شوند و تعداد ضربه به ۲ کاهش یافته که در این نوع المان ماکزیمم نیروی به دست آمده در ضربه اول برابر 1.351 KN می‌باشد و تعداد نوسانات نیرو یا به عبارت دیگر بارگذاری و باربرداری زیاد می‌باشد. تعداد المان‌ها را به ۴۰۰، ۹۰۰ و ۱۶۰۰ المان و بالاتر افزایش می‌دهیم و ماکزیمم مقدار نیروی تماس در این المان‌ها به ترتیب برابر 1.125 KN، 1.141 KN و 1.145 KN می‌گردد و همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود زمانی که تعداد المان‌ها ۴۰۰ و بالاتر انتخاب می‌گردد نیروی تماس و نیز زمان شروع

خود تصدیقی بر صحت نتایج به دست آورده شده در این مطالعه می‌باشد.

جدول (۲): مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از ارتعاشات آزاد ورق.

شماره مود	روش حل دقیق (درویزه و همکاران) $\left(\frac{Rad}{Sec}\right)$	روش المان محدود (مطالعه اخیر) $\left(\frac{Rad}{Sec}\right)$	خطا (درصد)
۱	۱۹۰۱/۷۷	۱۸۹۹/۳	۰/۱۲
۲	۴۶۹۱/۵۱	۴۶۹۴/۵	۰/۰۶
۳	۵۷۸۳/۲۳	۵۸۰۱/۲	۰/۳۱
۴	۷۵۷۶/۷۲	۷۵۸۳/۷	۰/۰۹
۵	۹۷۹۷/۸۵	۹۸۴۳/۱	۰/۴۶
۶	۱۱۸۵۵/۰۰	۱۱۸۸۴	۰/۲۴
۷	۱۲۴۷۹/۹۰	۱۲۶۰۱	۰/۹۷
۸	۱۳۷۳۹/۷	۱۳۸۳۵	۰/۶۹
۹	۱۶۹۳۵/۷	۱۷۰۱۳	۰/۴۶
۱۰	۱۶۹۸۴/۹	۱۷۱۵۱	۰/۹۸

علاوه بر این مقایسه دیگری نیز جهت اعتبار بخشیدن بیش‌تر به مدل‌سازی انجام شده در این مقاله صورت گرفته است که نتیجه این مقایسه در شکل ۲ آورده شده است، بدین صورت که نیروی تماس حاصل از ضربه سرعت پایین بر روی چندلایه کامپوزیتی از نوع ۱۰ لایه با شرایط مرزی ساده و ترتیب چینش به صورت $[0/90/0/90/0]_s$ و نیز سایر مشخصات بیان شده در جدول ۱ برای ورق تحت ضربه و ضربه‌زننده را با نتایج عددی سان و چن [۹]، قیان و سوانسون [۱۵]، گوش و شینها [۱۶] و کارینز و لاگیس [۱۷] مقایسه شده است.

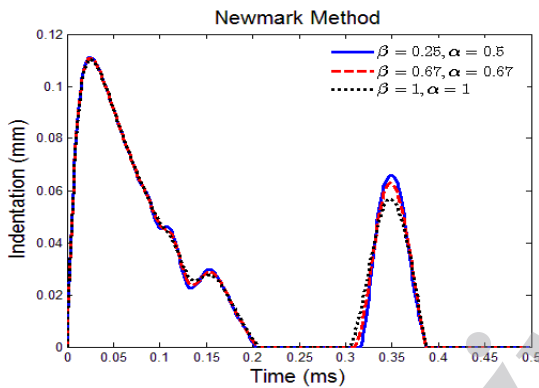


شکل (۲): مقایسه نیروی تماس با نتایج دیگر محققان روی چندلایه کامپوزیتی برای سرعت ضربه‌زننده 3 m/s.

- 1- Sun and Chen
- 2- Qian and Swanson
- 3- Ghosh and Sinha
- 4- Cairns and Lagace

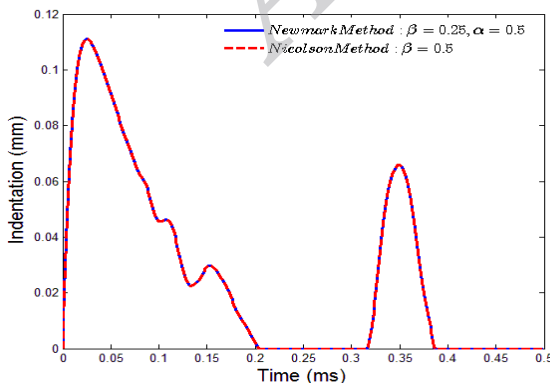
ضمن این‌که در $\beta=0.25$ و کم‌تر از این مقدار روش نیکلسون دارای جواب‌های ناپایدار می‌باشد. حال همان ورق را این‌بار با استفاده از روش انتگرال زمانی نیومارک مورد بررسی قرار می‌دهیم، نتایج حاصل از تغییر پارامترهای α و β در شکل ۵ نشان داده شده است.

همان‌طورکه در شکل ۵ ملاحظه می‌شود میزان نفوذ ضربه‌زننده در ورق برای سه مقدار $\alpha=1$ ، $\beta=1$ و $\alpha=0.5$ ، $\beta=0.25$ و نیز $\alpha=0.67$ ، $\beta=0.67$ ترسیم شده است و باتوجه به شکل‌ها ملاحظه می‌شود که به‌ازای $\alpha=1$ ، $\beta=1$ کم‌ترین مقدار نفوذ ضربه‌زننده در ورق و به‌ازای مقادیر $\alpha=0.5$ ، $\beta=0.25$ بیش‌ترین مقدار نفوذ ضربه‌زننده در ورق را خواهیم داشت. همچنین، برای $\alpha=0.25$ ، $\beta=0.5$ و $\alpha=0.25$ ، $\beta=0.25$ نیومارک نیز دارای جواب‌های ناپایدار می‌باشد.



شکل (۵): نفوذ ضربه‌زننده در ورق برای مقادیر مختلف β و α .

بنابراین برای این‌که به جواب دقیق و قابل‌قبولی در حل ضربه دست یابیم، این دو روش را باهم مقایسه می‌کنیم که نتایج این مقایسه در شکل ۶ آورده شده است.

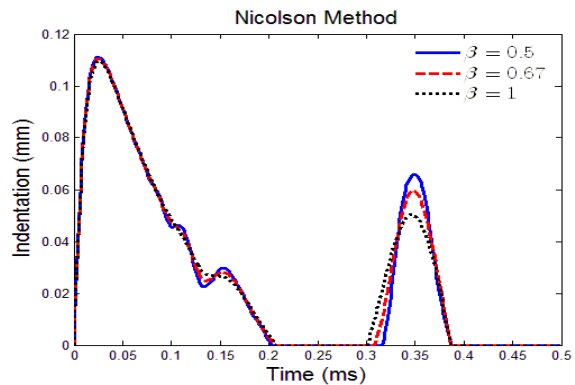


شکل (۶): نفوذ ضربه‌زننده در ورق با استفاده از روش نیکلسون و نیومارک.

ضربه مجدد و پایان ضربه یکسان می‌گردد و به‌ازای تعداد ۹۰۰ المان و بالاتر نمودار نیروی تماس تغییر نکرده و همچنین در کلیه مراحل بارگذاری و باربرداری نمودارها بر هم منطبق می‌شوند. در این مطالعه تعداد المان‌ها برابر ۱۶۰۰ در نظر گرفته شده که این تعداد المان دارای ۱۶۸۱ گره می‌باشد.

۵-۳- بررسی نتایج عددی

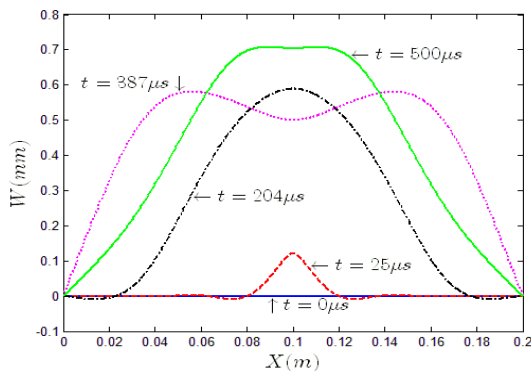
پارامتر β در روش نیکلسون ابتدا نتیجه تغییر پارامترهای α و β در روش نیومارک و بر روی نتایجی چون نفوذ ضربه‌زننده در ورق کامپوزیتی، سرعت محل ضربه، نیروی تماس متبادل بین ورق کامپوزیتی و ضربه‌زننده و بسیاری از موارد دیگر مورد مطالعه قرار گرفته و سپس مقایسه‌ای بین روش عددی نیومارک و نیکلسون انجام شده است. بدین منظور مشخصات ورق را مشابه جدول ۱ از نوع گرافیت- اپوکسی به‌صورت $[0/90/0/90/0]_s$ لایه‌چینی با لایه‌چینی $[0/90/0/90/0]_s$ و دارای شرایط مرزی ساده در هر چهار طرف و مشخصات ضربه‌زننده نیز مشابه جدول ۱ و با سرعت $V = 10 \frac{m}{s}$ در نظر گرفته شده است. لازم به‌ذکر است برای حل مقدار Δt برای دستیابی به جواب‌های دقیق در هر دو روش برابر $0.1 \mu s$ در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از تغییر پارامتر β بر روی میزان نفوذ ضربه‌زننده در ورق طبق روش حل نیکلسون در شکل ۳ نشان داده شده است.



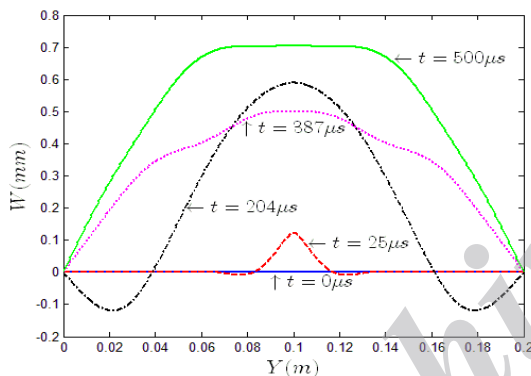
شکل (۴): نفوذ ضربه‌زننده در ورق برای مقادیر مختلف β .

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود در شکل ۴ نمودار میزان نفوذ ضربه‌زننده در ورق برای سه مقدار $\beta=0.5$ ، $\beta=0.6667$ ، $\beta=1$ ترسیم شده است و باتوجه به نمودارها ملاحظه می‌شود که به‌ازای $\beta=0.6667$ مقدار میانگین جواب، به‌ازای مقدار $\beta=0.5$ بیش‌ترین مقدار نفوذ و به‌ازای مقدار $\beta=1$ کم‌ترین مقدار نفوذ در ضربه مجدد را نسبت به دو مقدار دیگر خواهیم داشت،

می‌افتد و اندازه این نیرو نیز برای کلیه شرایط مرزی‌های در نظر گرفته شده یکسان بوده و برابر 1.1524 KN می‌باشد، که نتیجه می‌شود در این لحظه شرایط مرزی هیچ‌گونه تاثیری در نتایج از جمله انتشار امواج نداشته‌اند علت آن نیز این می‌باشد که امواج در این لحظه هنوز به مرزها نرسیده‌اند.



شکل (۷): انتشار امواج در راستای طولی برای شرایط مرزی نوع اول.



شکل (۸): انتشار امواج در راستای عرضی برای شرایط مرزی نوع اول.

شکل‌های ۸-۷ انتشار امواج در راستای طولی و عرضی را در لحظات مختلف برای شرایط مرزی ساده (نوع اول) نشان می‌دهد، دامنه موج انتشار یافته در لحظه اتمام تماس برخورد اول یعنی $t = 204 \mu\text{s}$ در نزدیکی مرزهای $x = a$ و $x = 0$ بسیار کم‌تر از دامنه موج در نزدیکی مرزهای $y = b$ و $y = 0$ می‌باشد. همچنین، در لحظه اتمام تماس ضربه دوم یعنی $t = 387 \mu\text{s}$ دامنه موج‌های طولی در نقطه ضربه کم‌تر از اطراف ضربه می‌باشد و این در حالی است که در جهت عرضی این‌گونه نیست و دامنه موج در نقطه ضربه بیش‌تر از اطراف آن می‌باشد. و در لحظه $t = 500 \mu\text{s}$ پس از شروع ضربه موج‌ها در هر دو راستای طولی و عرضی دارای ماکزیمم خیز یکسان ولی شکل موج‌های متفاوت می‌باشند.

همان‌طور که در شکل ۶ نیز مشاهده می‌شود درحالتی که در روش نیومارک $\alpha=0.5$ ، $\beta=0.25$ در نظر گرفته می‌شود حاصل کلیه نتایج نظیر میزان نفوذ و تغییرات سرعت با نتایج روش نیکلسون برای حالتی که $\beta=0.5$ است یکسان می‌باشد و اختلاف خیلی ناچیزی میان آن‌ها وجود دارد. در جدول ۳ مقدار نیروی تماس و نفوذ ضربه‌زنده در ورق کامپوزیتی در زمان رسیدن نیرو به ماکزیمم مقدار خود در ضربه مجدد ($t=350 \mu\text{s}$) با استفاده از هر دو روش برای حالتی که $\beta=0.25$ ، $\alpha=0.5$ در روش نیومارک و $\beta=0.5$ در روش نیکلسون در نظر گرفته شده باهم مقایسه شده است.

جدول (۳): مقایسه نتایج حاصل از روش نیکلسون و نیومارک.

روش عددی	زمان (μs)	نیرو (KN)	نفوذ (mm)
نیومارک	۳۵۰	۵/۲۶۹۸۴۱۶۶۲۰۸	۶/۵۹۰۸۷۱۳۱۴۱۳۳×۱۰ ^{-۲}
نیکلسون	۳۵۰	۵/۲۶۹۸۴۱۶۶۱۹۲	۶/۵۹۰۸۷۱۳۱۴۰۰۲×۱۰ ^{-۲}

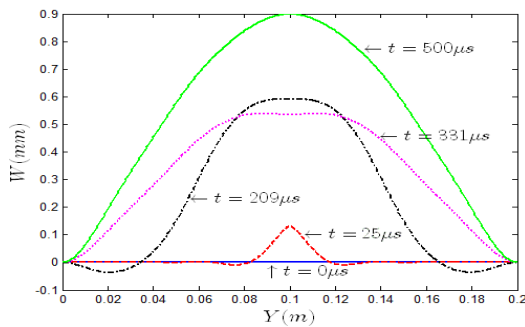
جهت بررسی انتشار امواج حاصل از ضربه شش نوع شرط مرزی مختلف شامل مرزی‌های نوع اول (هر چهار لبه ساده)، نوع دوم (هر چهار لبه گیردار)، نوع سوم (لبه‌های ورق در $y=0$ و $y=b$ گیردار و در $x=0$ و $x=a$ ساده)، نوع چهارم (لبه $y=0$ گیردار و بقیه لبه‌ها آزاد)، نوع پنجم (لبه $y=0$ و $y=b$ گیردار و دو لبه دیگر آزاد می‌باشد) و نوع ششم (نیمه راست ورق در لبه‌ها گیردار و نیمه چپ ورق در لبه‌ها ساده) می‌باشد.

در جدول ۴ زمان و مقدار ماکزیمم نیروها به ازای شرایط مرزی مختلف آورده شده است و همان‌طور که مشاهده می‌گردد در کلیه شرایط مرزی‌ها ماکزیمم نیرو در زمان ۲۵ میکروثانیه اتفاق افتاده است و مقدار آن برابر 1.1524 KN می‌باشد ولی زمان انجام ضربه مجدد برای شرایط مرزی‌های مختلف متفاوت می‌باشد و قابل توجه است که در شرایط مرزی نوع دوم (هر چهار طرف گیردار) چهار ضربه اتفاق می‌افتد که زمان انجام ضربه‌های مجدد و مقدار نیروی ماکزیمم بعد از هر ضربه مجدد در جدول ۴ آورده شده است.

در شکل‌های ۱۸-۷ انتشار امواج در راستای طولی و عرضی در لحظات شروع برخورد، زمان رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار خود، لحظه اتمام برخورد اول، لحظه اتمام برخورد مجدد و نیز در لحظه $t = 500 \mu\text{s}$ پس از شروع ضربه نشان داده شده است. لحظه رسیدن نیرو به ماکزیمم مقدار در همه شرایط مرزی‌ها یکسان بوده و در زمان $t = 25 \mu\text{s}$ اتفاق

جدول (۴): زمان و مقدار ماکزیمم نیروها به‌ازای شرایط مرزی مختلف.

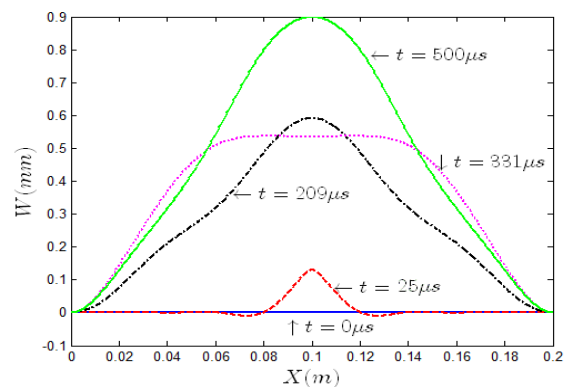
شرایط مرزی	ضربه اول (μs)	ماکزیمم نیروی ضربه اول (kN)	ضربه دوم (μs)	ماکزیمم نیروی ضربه دوم (kN)	ضربه سوم (μs)	ماکزیمم نیروی ضربه سوم (kN)	ضربه چهارم (μs)	ماکزیمم نیروی ضربه چهارم (kN)
نوع اول	۲۵	۱/۱۵۲۴	۳۴۹	۰/۵۲۷۰	-	-	-	-
نوع دوم	۲۵	۱/۱۵۲۴	۳۰۹	۰/۲۸۷۸	۱۰۲۱	۰/۴۷۱	۱۰۶۶	۰/۱۹۲
نوع سوم	۲۵	۱/۱۵۲۴	۳۲۷	۰/۵۱۹۸	-	-	-	-
نوع چهارم	۲۵	۱/۱۵۲۴	۳۰۳	۰/۲۱۸۳	-	-	-	-
نوع پنجم	۲۵	۱/۱۵۲۴	۳۰۶	۰/۲۵۷۱	-	-	-	-
نوع ششم	۲۵	۱/۱۵۲۴	۳۲۸	۰/۲۵۷۶	-	-	-	-



شکل (۱۰): انتشار امواج در راستای عرضی برای شرایط مرزی نوع دوم.

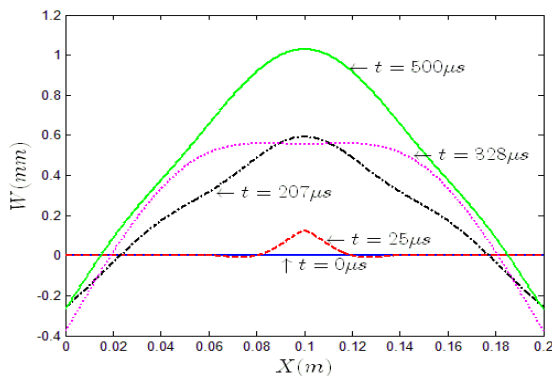
در شکل‌های ۱۱-۱۲ انتشار امواج در راستای طولی و عرضی در زمانی که نیروی تماس به حداکثر مقدار خود می‌رسد و نیز لحظات اتمام ضربه اول یعنی $t = 203 \mu\text{s}$ ، اتمام ضربه دوم در $t = 359 \mu\text{s}$ برای شرایط مرزی نوع سوم نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود در لحظه $t = 25 \mu\text{s}$ که زمان رسیدن نیرو به ماکزیمم مقدار است، هنوز موج‌ها در راستای طولی و عرضی به مرزها نرسیده است و شکل امواج مشابه دو حالت قبل می‌باشد ولی در دو لحظه $t = 203 \mu\text{s}$ و $t = 359 \mu\text{s}$ شکل امواج در دو حالتی که شرایط مرزی ساده و گیردار بود متفاوت بوده و برای این شرایط مرزی در لحظه اتمام ضربه مجدد دامنه موج ایجاد شده در راستای طولی در نقطه ضربه کمتر از اطراف آن می‌باشد ولی در راستای عرضی دامنه موج در نقطه ضربه و اطراف آن تقریباً یکسان می‌باشد. در زمان $t = 500 \mu\text{s}$ ماکزیمم دامنه موج ایجاد شده مابین ماکزیمم دامنه ایجاد شده در شرایط مرزی ساده و شرایط مرزی گیردار قرار دارد از طرف دیگر امواج در این لحظه در راستای عرضی دارای قله تیزتر نسبت به حالت طولی می‌باشد که علت این امر قرار گرفتن شرایط مرزی گیردار در دو مرز $y = 0$ و $y = b$ و شرایط مرزی ساده در مرزهای $x = 0$ و $x = a$ می‌باشد.

شکل‌های ۹-۱۰ انتشار امواج در راستای طولی و عرضی را در لحظات اتمام ضربه‌های متعدد انجام گرفته و نیز زمانی که نیروی تماس به حداکثر مقدار خود می‌رسد برای شرایط مرزی نوع دوم نشان می‌دهد و ملاحظه می‌گردد در لحظه $t = 25 \mu\text{s}$ که زمان رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار است هنوز موج‌ها در راستای طولی و عرضی به مرزها نرسیده است. همچنین، زمان اتمام برخورد اول یعنی $t = 209 \mu\text{s}$ که در مقایسه با حالت اول یعنی زمانی که شرایط مرزی ساده بود $5 \mu\text{s}$ تاخیر داشته و در اتمام ضربه دوم نیز که در زمان $t = 331 \mu\text{s}$ اتفاق افتاده، $56 \mu\text{s}$ تاخیر به وجود آمده است که این تاخیر به وجود آمده حاکی تاثیر شرایط مرزی بر انتشار امواج می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل موج‌ها به کلی تغییر کرده است و متفاوت با شکل امواج در حالت اول می‌باشد همچنین طبق شکل‌های ۹ و ۱۰ امواج در $t = 500 \mu\text{s}$ موج‌ها در راستای طولی و عرضی دارای ماکزیمم مقدار یکسان ولی شکل‌های متفاوت می‌باشند علاوه بر این در این زمان امواج دارای قله تیزتری هم در راستای عرضی و هم در راستای طولی نسبت به حالت اول می‌باشند. لازم به ذکر است که در این نوع شرایط مرزی چهار ضربه اتفاق می‌افتد.

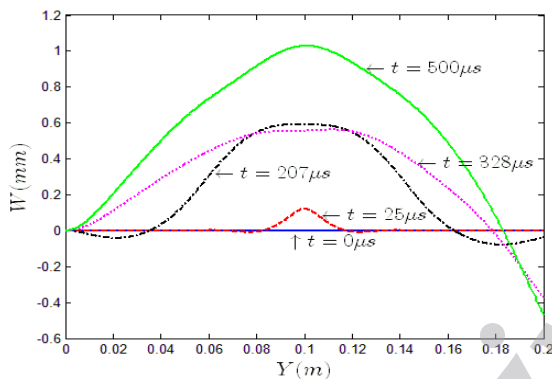


شکل (۹): انتشار امواج در راستای طولی برای شرایط مرزی نوع دوم.

شرایط مرزی نوع سوم موج انتشار یافته در لحظه $t = 500 \mu s$ در هر دو راستای طولی و عرضی دارای قله تیزی می‌باشد.

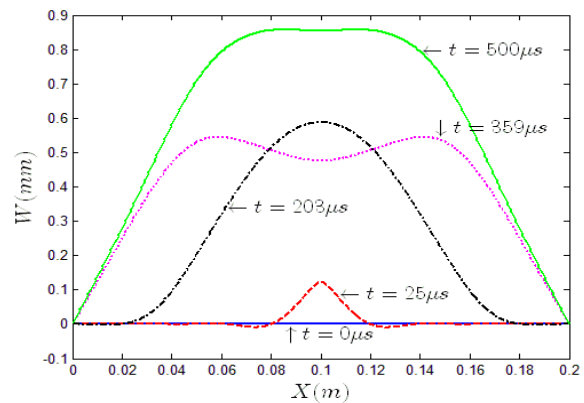


شکل (۱۳): انتشار امواج در راستای طولی برای شرایط مرزی نوع چهارم.

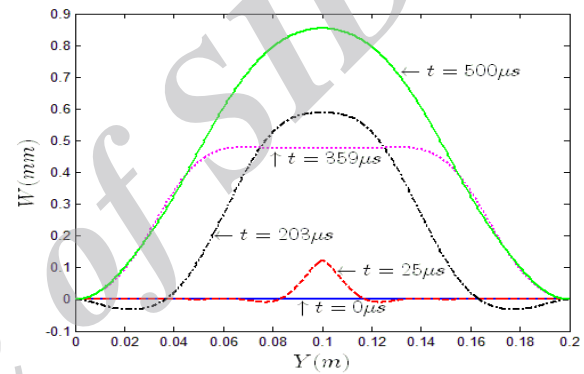


شکل (۱۴): انتشار امواج در راستای عرضی برای شرایط مرزی نوع چهارم.

شکل‌های ۱۵-۱۶ انتشار امواج را در راستای طولی و عرضی در لحظات مختلف برای شرایط مرزی نوع پنجم نشان می‌دهد و ملاحظه می‌گردد که زمان رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار خود یعنی در زمان $t = 25 \mu s$ امواج انتشار یافته در راستای طولی و عرضی مشابه حالت‌های قبل بوده و در این لحظه هنوز موج به هیچ‌کدام از مرزها نرسیده است. امواج در لحظات اتمام برخورد اول یعنی $t = 209 \mu s$ و نیز برخورد دوم در زمان $t = 329 \mu s$ به صورت متقارن در هر کدام از راستاها توزیع شده است ضمن این‌که امواج انتشار یافته در راستای طولی و عرضی در لبه‌ها تفاوت‌های خیلی زیادی دارند. در لحظه $t = 500 \mu s$ دامنه امواج در نقطه ضربه در مقایسه با شرایط مرزی نوع اول یا نوع دوم بیش‌تر است.



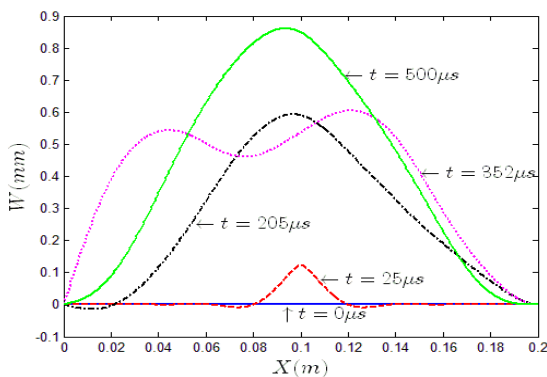
شکل (۱۱): انتشار امواج در راستای طولی برای شرایط مرزی نوع سوم.



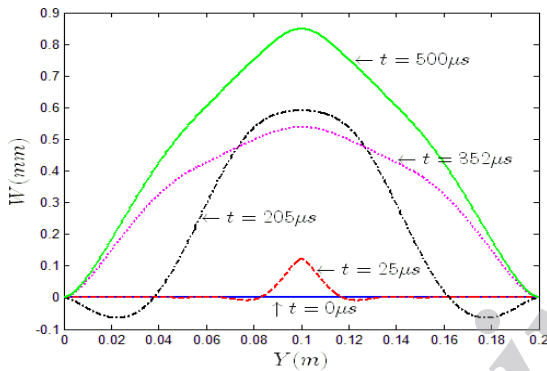
شکل (۱۲): انتشار امواج در راستای عرضی برای شرایط مرزی نوع سوم.

شکل‌های ۱۴-۱۳ انتشار امواج در راستای طولی و عرضی را در لحظات مختلف یعنی زمان‌های رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار خود در $t = 25 \mu s$ ، اتمام برخورد اول $t = 207 \mu s$ و برخورد دوم $t = 328 \mu s$ و نیز در زمان $t = 500 \mu s$ بعد از اولین برخورد برای شرایط مرزی نوع چهارم نشان می‌دهد که به ترتیب دارای زمان $3 \mu s$ و $59 \mu s$ تاخیر در اتمام ضربه‌های اول و دوم در مقایسه با شرایط مرزی ساده می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در $t = 25 \mu s$ شکل موج در هر دو راستا مشابه حالت قبل بوده و به هیچ‌کدام از مرزها نرسیده است و نیز با توجه به شکل موج در لحظات $t = 207 \mu s$ و $328 \mu s$ مشاهده می‌شود که موج‌ها در راستای طولی به صورت متقارن بوده ولی در راستای عرضی دیگر متقارن نمی‌باشند و ماکزیمم دامنه موج در لحظه $t = 500 \mu s$ نسبت به حالت‌های قبلی، بیش‌ترین مقدار را دارد و برخلاف

گیردار) در راستای طولی و عرضی مشابه نمی باشد که علت آن کامپوزیت بودن ورق و چینش متفاوت لایه ها می باشد.



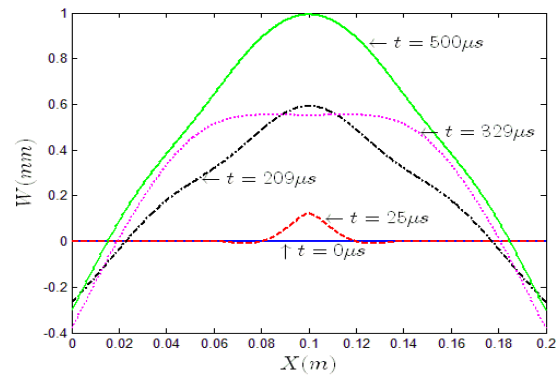
شکل (۱۷): انتشار امواج در راستای طولی برای شرایط مرزی نوع ششم.



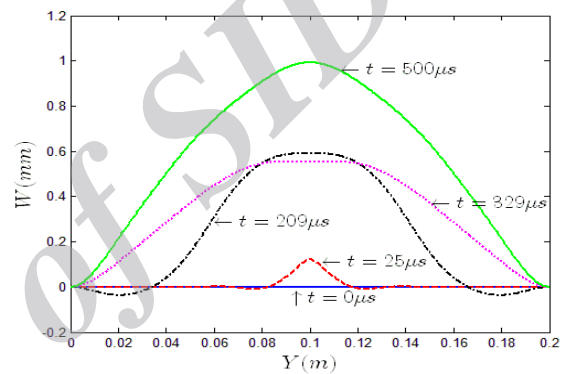
شکل (۱۸): انتشار امواج در راستای عرضی برای شرایط مرزی نوع ششم.

تصاویر سه بعدی از انتشار امواج برای شرایط مرزی مختلف در لحظه $t = 25 \mu s$ و $t = 204 \mu s$ به دست آورده شده است که زمان $t = 25 \mu s$ لحظه رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار (1.1524 KN) برای کلیه شرایط مرزی ها می باشد و زمان $t = 204 \mu s$ زمان اتمام ضربه اول در چندلایه کامپوزیتی برای شرایط مرزی ساده می باشد.

شکل ۱۹ یک تصویر سه بعدی از انتشار امواج در ورق را بعد از گذر زمان $t = 25 \mu s$ از شروع ضربه برای کلیه شرایط مرزی ها نشان می دهد و مشخص است که امواج انتشار یافته هنوز به هیچ کدام از مرزها نرسیده است و این نکته را می توان استنباط کرد که شرایط مرزی هیچ گونه تاثیری در لحظه رسیدن نیروی تماس به ماکزیمم مقدار خود و نیز امواج منتشر شده تا این لحظه در نمونه مورد بررسی نداشته است.



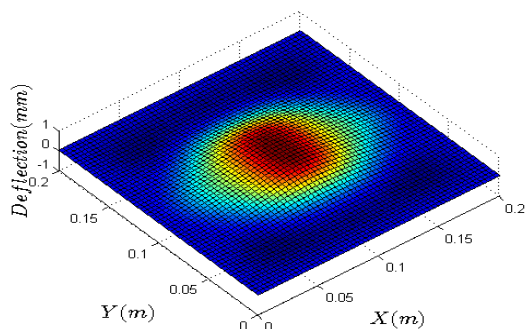
شکل (۱۵): انتشار امواج در راستای طولی برای شرایط مرزی نوع پنجم.



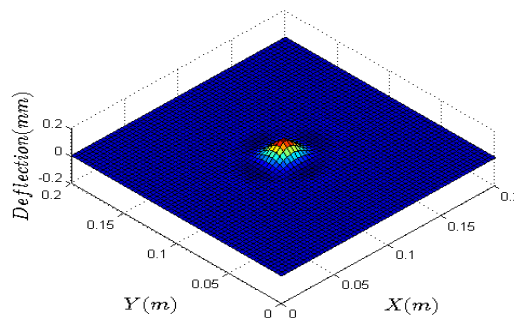
شکل (۱۶): انتشار امواج در راستای عرضی برای شرایط مرزی نوع پنجم.

شکل های ۱۷-۱۸ انتشار امواج را در راستای طولی و عرضی در لحظات مختلف برای شرایط مرزی نوع ششم نشان می دهد و ملاحظه می شود که در زمان $t = 25 \mu s$ موج انتشار یافته مشابه حالت های قبل می باشد. در زمان های اتمام تماس اول و دوم که به ترتیب $t = 205 \mu s$ و $t = 352 \mu s$ می باشد دیگر امواج در راستای طولی متقارن نبوده و امواج به سمت مرز $x = 0$ متمایل شده اند ولی در راستای عرضی متقارن هستند که علت، قرار گرفتن شرایط مرزی ترکیبی ساده و گیردار در مرزهای $x = a$ و $x = 0$ می باشد. در لحظه $t = 500 \mu s$ موج دارای قله بسیار تیزتری نسبت به کلیه حالت های بررسی شده می باشد.

باتوجه به شکل های ۱۸-۱۷ ملاحظه می شود با وجود این که طول و عرض ورق مورد بررسی یکسان می باشد ولی امواج انتشار یافته حتی در مواردی که شرایط مرزی در هر چهار طرف یکسان هستند. (مثل هر چهار لبه ساده یا هر چهار لبه

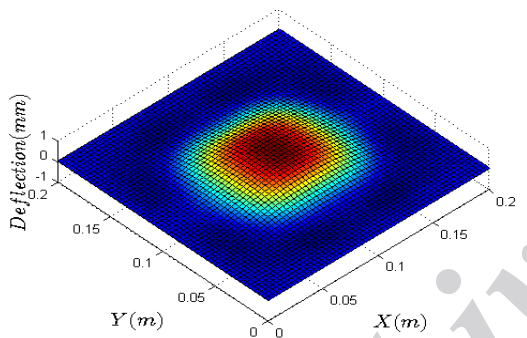


شکل (۲۱): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در شرایط مرزی نوع دوم. برای $t = 204 \mu s$

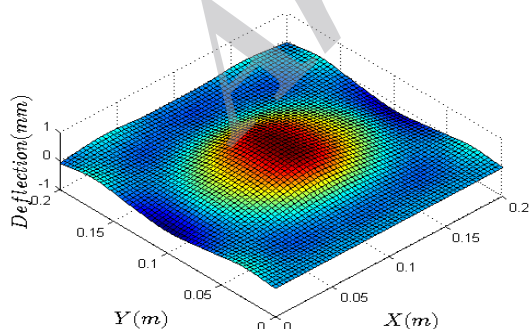


شکل (۱۹): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در شرایط مرزی نوع اول. برای $t = 25 \mu s$

در شکل ۲۳ که تصاویر امواج را برای چندلایه کامپوزیتی با شرایط مرزی نوع چهارم نشان می‌دهد، گسترش امواج در ناحیه میانی ورق بیش‌تر بوده و دامنه امواج در اطراف سه مرز آزاد و نیز دو گوشه ورق که هیچ تکیه‌گاهی را ندارد؛ بیش‌تر می‌باشد.



شکل (۲۲): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در شرایط مرزی نوع سوم. برای $t = 204 \mu s$

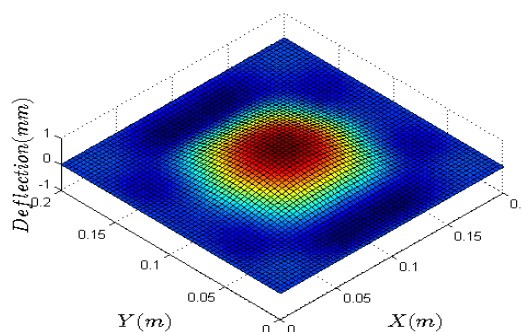


شکل (۲۳): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در شرایط مرزی نوع چهارم. برای $t = 204 \mu s$

در شکل ۲۴، تصاویر امواج انتشار یافته برای شرایط مرزی ترکیبی نوع ششم (نیمه راست ورق گیردار و نیمه چپ ورق

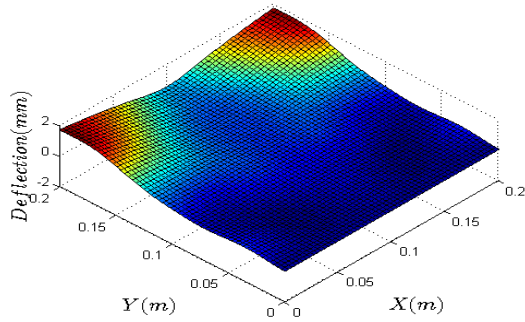
شکل ۲۰ تصویر انتشار امواج در لحظه اتمام تماس ضربه‌زننده با چندلایه کامپوزیتی را برای شرایط مرزی هر چهار طرف ساده نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود در این لحظه ($t = 204 \mu s$) در جهت عرضی دامنه موج‌ها در نزدیکی مرز بزرگ‌تر از دامنه موج‌ها در جهت طولی و در نزدیکی مرزها می‌باشد. شکل ۲۱ انتشار امواج را برای شرایط مرزی نوع دوم در لحظه $t = 204 \mu s$ نشان می‌دهد و ملاحظه می‌گردد که در این لحظه موج‌ها با دامنه بزرگ‌تر مشابه قبل در جهت عرضی انتشار یافته‌اند و هنوز در جهت طولی دامنه موج‌ها در نزدیکی مرزها کم می‌باشد و ملاحظه می‌شود که امواج با دامنه بزرگ‌تر به سمت گوشه‌های ورق گسترش یافته‌اند ضمن این‌که پیشروی بیش‌تری از سمت ناحیه مرکز ورق به مرزهای $x = a$ و $x = 0$ نسبت به حالت اول انجام شده است.

باتوجه به شکل ۲۲ که تصاویر سه‌بعدی از انتشار امواج را در لحظه مذکور برای شرایط مرزی نوع سوم نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود که امواج در حال رسیدن به هم در راستای محیطی در نزدیکی مرزها می‌باشند و در منطقه میانی ورق شکل امواج مشابه حالت اول می‌باشد.

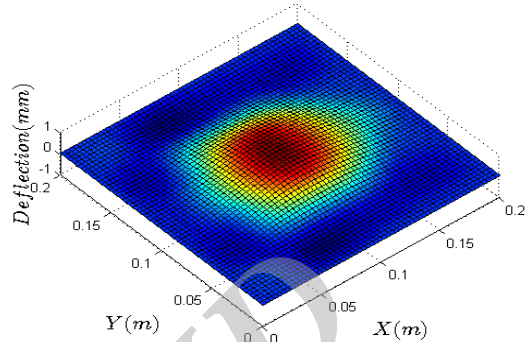


شکل (۲۰): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در $t = 204 \mu s$ برای شرایط مرزی نوع اول.

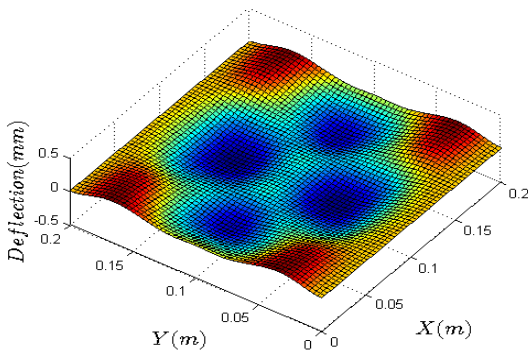
ساده) نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود که امواج در ناحیه میانی متمایل به مرز $x = a$ بوده و در نیمه چپ ورق امواج در نزدیکی مرزهای $y = b$ و $y = 0$ دارای طول موج‌های بزرگ‌تری نسبت به نیمه راست می‌باشند.



شکل (۲۶): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در $t = 1500 \mu s$ برای شرایط مرزی نوع چهارم.

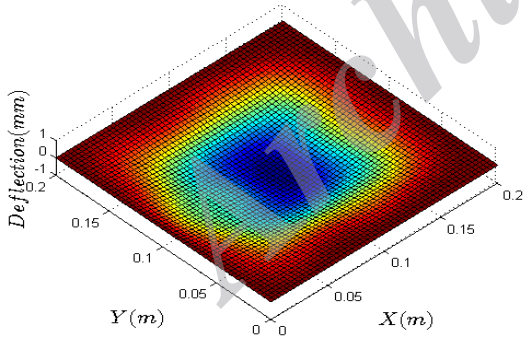


شکل (۲۴): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در $t = 204 \mu s$ برای شرایط مرزی نوع ششم.

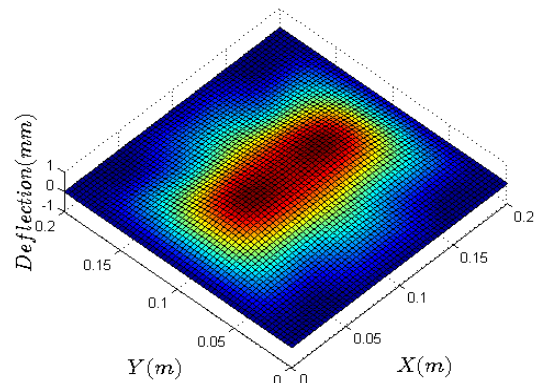


شکل (۲۷): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در $t = 1500 \mu s$ برای شرایط مرزی نوع پنجم.

همچنین، چگونگی انتشار امواج حاصل از ضربه پس از طی زمان $t = 1500 \mu s$ پس از شروع ضربه در شکل‌های ۲۵-۲۸ برای شرایط مرزی مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که از تصاویر سه‌بعدی انتشار امواج نیز دیده می‌شود با گذشت $t = 1500 \mu s$ از شروع ضربه شکل موج‌ها برای شرایط مرزی مختلف به کلی با یکدیگر اختلاف پیدا می‌کنند که این نشان‌دهنده تاثیر شرایط مرزی بر روی انتشار امواج می‌باشد و همچنین با گذشت زمان بیشتر، میزان تاثیر شرایط مرزی بر شکل امواج نیز افزایش پیدا می‌کند.

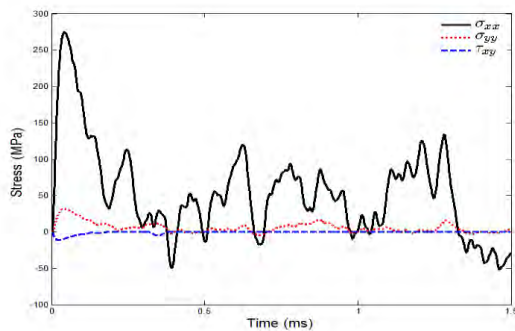


شکل (۲۸): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در $t = 1500 \mu s$ برای شرایط مرزی نوع ششم.

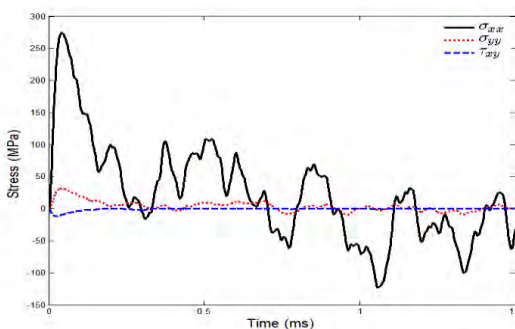


شکل (۲۵): انتشار امواج در چندلایه کامپوزیتی در $t = 1500 \mu s$ برای شرایط مرزی نوع اول.

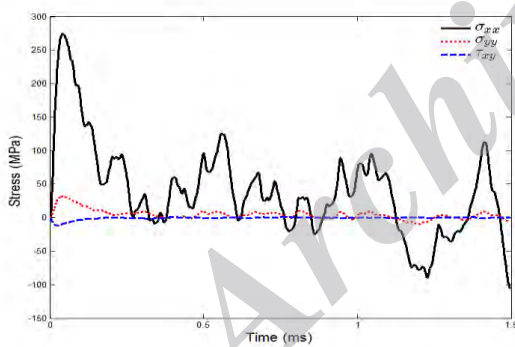
در جدول ۵ زمان رسیدن امواج انتشار یافته در اثر ضربه سرعت پایین با دامنه بزرگ‌تر از 10^{-3} میلی‌متر به مرزهای ورق کامپوزیتی چندلایه گرافیت-اپوکسی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است.



شکل (۲۹): تنش‌های نرمال و برشی در جهت X و Y شرایط مرزی نوع اول.



شکل (۳۰): تنش‌های نرمال و برشی در جهت X و Y شرایط مرزی نوع چهارم.



شکل (۳۱): تنش‌های نرمال و برشی در جهت X و Y شرایط مرزی نوع ششم.

در شکل‌های ۳۲-۳۳ تاثیر تغییرات ضخامت بر روی نمودار جابه‌جایی و تنش برای شرایط مرزی نوع اول در ورق مذکور مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۳۲ نمودار جابه‌جایی مرکز ورق را تا زمان 1500 μs پس از شروع برخورد برای سه ضخامت $h=2.69\text{ mm}$ ، $2h=5.38\text{ mm}$ و $3h=8.07\text{ mm}$ نشان می‌دهد و همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود با افزایش ضخامت ورق نمودار جابه‌جایی کاهش یافته است.

جدول (۵): لحظه رسیدن موج به مرزهای ورق.

شرایط مرزی	لبه $x=0$ (μs)	لبه $x=a$ (μs)	لبه $y=0$ (μs)	لبه $y=b$ (μs)
نوع اول	۴۳	۴۳	۵۲	۵۲
نوع دوم	۵۰	۵۰	۵۲	۵۲
نوع سوم	۴۳	۴۳	۵۲	۵۲
نوع چهارم	۵۷	۵۷	۵۲	۷۱
نوع پنجم	۵۷	۵۷	۵۲	۵۲
نوع ششم	۴۳	۵۰	۵۲	۵۲

همان‌طور که در جدول ۵ ملاحظه می‌شود هنگامی که شرایط مرزی از نوع ساده (نوع اول) می‌باشد امواج در لحظه $t = 43\ \mu\text{s}$ به مرزهای $x=0$ و $x=a$ رسیده است و پس از زمان $9\ \mu\text{s}$ بعد یعنی در $t = 52\ \mu\text{s}$ به مرزهای $y=0$ و $y=b$ می‌رسد و در زمانی که شرایط مرزی از نوع گیردار (نوع دوم) می‌باشد موج حاصل از ضربه $2\ \mu\text{s}$ بعد از رسیدن به مرزهای $x=0$ و $x=a$ به مرزهای $y=0$ و $y=b$ می‌رسد که این مقدار در مقایسه با شرایط مرزی ساده $7\ \mu\text{s}$ زودتر اتفاق افتاده است علت آن تاثیر شرایط مرزی و نوع لایه‌چینی ورق کامپوزیتی می‌باشد. زمان‌های رسیدن موج به لبه‌های ورق برای سایر شرایط مرزی نیز در جدول ۵ آورده شده است.

در شکل‌های ۲۹-۳۱ نمودارهای امواج تنش برحسب زمان برای مرکز ورق نشان داده شده است. شکل ۲۹ تغییرات تنش‌های نرمال و برشی در جهت X و Y را برای شرایط مرزی نوع اول نشان می‌دهند که σ_{xx} دارای بیش‌ترین مقدار نسبت به سایر تنش‌ها می‌باشد، که ماکزیمم مقدار σ_{xx} برابر 274.6 MPa می‌باشد. این درحالی‌که مقدار ماکزیمم برای σ_{yy} برابر 31.55 MPa و τ_{xy} برابر 11.50 MPa می‌باشد. همچنین، ماکزیمم مقدار تنش σ_{zz} برابر 14.89 MPa و مقادیر τ_{xz} و τ_{yz} برابر صفر می‌باشند.

شکل‌های ۳۰-۳۱ نیز تغییرات تنش‌های نرمال و برشی در جهت X و Y را در مرکز ورق به‌ترتیب برای شرایط مرزی نوع چهارم و نوع ششم نشان می‌دهند.

همان‌طور که در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود برای نمونه ورق مورد بررسی، در تمام نمودارها ماکزیمم مقدار تنش‌ها در زمان یکسان اتفاق افتاده است و مقادیر در کلیه حالات مشابه شرایط مرزی نوع اول است ولی با گذشت زمان امواج مربوط به تنش‌ها نیز تغییر کرده که این تغییرات ناشی از تاثیر شرایط مرزی در برگشت امواج می‌باشد.

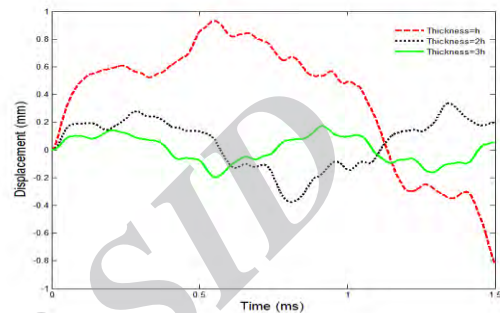
برهم منطبق می‌باشند و بهترین جواب را به دست می‌دهند. از نظر زمان محاسباتی روش حل نیکلسون زمان کمتری را در مقایسه با روش نیومارک نتیجه می‌دهد.

همچنین نتایج عددی پدیده‌های جالب توجهی همچون بارگذاری و باربرداری متعدد را نشان می‌دهد. به طوری که برای ورق و ضربه‌زننده با مشخصات فیزیکی و هندسی یکسان در شرایط مرزی مختلف تعداد و زمان بارگذاری‌ها و باربرداری‌ها متفاوت بوده است و در شرایط مرزی گیردار (نوع دوم) بیش‌ترین تعداد بارگذاری و باربرداری اتفاق افتاده و چهار ضربه مجدد صورت گرفته است. با توجه به مطالعه‌ای که در رابطه با انتشار امواج در زمان‌های مختلف از جمله در زمان‌های اتمام ضربه انجام شده است، مشاهده می‌شود که نحوه انتشار امواج برای شرایط مرزی مختلف تا زمانی که امواج به مرزها نرسیده‌اند با هم تفاوتی ندارند، ولی پس از گذشت زمان که این امواج به مرزها می‌رسند با هم اختلاف پیدا می‌کنند، لذا بیان‌کننده این موضوع است که چگونگی انتشار امواج به شرایط مرزی وابسته است، نتیجه دیگری که حاصل شد این است که زمان و چگونگی رسیدن امواج به مرزها برای شرایط مرزی مختلف با یکدیگر تفاوت دارند به طوری که در زمانی که شرایط مرزی از نوع ساده (نوع اول) می‌باشند امواج خیلی سریع‌تر از حالات دیگر به مرزها می‌رسند که نشان از متفاوت بودن سرعت انتشار امواج به‌ازای شرایط مرزی مختلف می‌باشد و این که انتشار امواج علاوه بر شرایط مرزی به نوع لایه‌گذاری‌ها نیز بستگی دارند زیرا در زمانی که ورق کامپوزیتی دارای هر چهار لبه با شرایط مرزی یکسان می‌باشد (اعم از گیردار یا ساده) زمان رسیدن امواج به مرزهای $x = a$ و $x = 0$ با مرزهای $y = b$ و $y = 0$ متفاوت می‌باشند و امواج در راستای عرضی دیرتر از راستای طولی به مرزها رسیده بودند. با بررسی امواج تنش ایجاد شده برای شرایط مرزی مختلف در اثر ضربه ملاحظه شد که در ابتدا میزان نوسان تنش‌ها برای شرایط مرزی مختلف یکسان می‌باشند ولی بعد از گذشت زمان امواج تنش برای شرایط مرزی مختلف با هم متفاوت می‌شوند و دچار تغییرات زیادی می‌شوند که این امر نیز نشان از تاثیر شرایط مرزی بر امواج تنش می‌باشد.

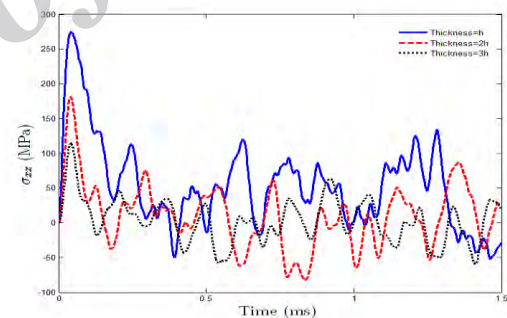
۸- مراجع

1. Abrate, S. "Impact On Composite Structures", Cambridge University Press, New York, 1998.
2. Amaro, A.M., Reis, P.N. and Magalhaes, A.G. "The Influence of the Boundary Conditions on Low-

در شکل ۳۳ نمودار تغییرات تنش‌های نرمال در جهت X (σ_{xx}) با تغییرات ضخامت نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود با افزایش ضخامت ورق مقدار تنش‌ها کاهش یافته است. هنگامی که ضخامت چندلایه برابر 2.69 mm می‌باشد، ماکزیمم مقدار تنش برابر با 274.6 MPa و زمانی که ضخامت چندلایه کامپوزیتی دو برابر (2h) می‌شود ماکزیمم مقدار تنش برابر 181.6 MPa می‌شود و با سه‌برابر شدن ضخامت ورق (3h) این مقدار به 114.4 MPa می‌رسد.



شکل (۳۲): تغییرات جابه‌جایی مرکز ورق با تغییرات ضخامت در شرایط مرزی نوع اول.



شکل (۳۳): تغییرات تنش‌های نرمال در جهت x با تغییرات ضخامت در شرایط مرزی نوع اول.

۶- نتیجه‌گیری

مساله ضربه سرعت پایین ضربه‌زننده صلب با چندلایه کامپوزیتی در حوزه زمان بررسی شده است و از قانون تماس هرتز برای مدل کردن برخورد استفاده شده است. پدیده نفوذ پلاستیک در مدل منظور شده است. دو روش عددی نیکلسون و نیومارک برای حل معادلات حرکت به کار گرفته شده و نتایج تغییر ثابت‌های هر دو روش عددی مورد مطالعه قرار گرفته است و سپس نتایج دو روش حل با هم مقایسه گردید و ملاحظه شد درحالتی که در روش نیکلسون $\beta=0.5$ و در روش نیومارک $\alpha=0.5$ و $\beta=0.25$ انتخاب می‌شود نتایج هر دو روش

10. Reddy, J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition", CRC Press, 2003.
11. Crook, A.W. "A Study of Some Impacts between Metal Bodies by a Piezoelectric Method", Proc. Royal Soc, London, Series A, Vol. 212, No. 1110, pp. 377-390, 1952.
12. Newmark, N.M. "A Method of Computation for Structural Dynamic", ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, pp. 67-84, 1959.
13. Hughes, T.J.R. "Unconditionally Stable Algorithm for Non-linear Heat Conduction", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 10, No. 2, pp.135-139, 1977.
14. Drvizeh, M., Drvizeh, A. Kazemi Moghadam, A. "Low-velocity impact response of composite plates by the exact solution", The 9th Annual Conference and the 5th International Conference on Mechanical Engineering, Rasht, Iran, 71-76, 2002.
15. Qian, Y. and Swanson, S.R. "A Comparison of Solution Techniques for Impact Response of Composite Plates", Composite Structures, Vol. 14, No. 3, pp. 177-192, 1990.
16. Ghosh, A. and Sinha, P.K. "Dynamic and Impact Response of Damaged Laminated Composite Plates", Aircr Eng Aerosp Technol, Vol. 76, No. 11, pp.29-37, 2004.
17. Douglas, S.C. and Paul A.L. "Transient Response of Graphite/Epoxy and Kevlar/Epoxy Laminates Subjected to Impact", AIAA Journal, Vol. 27, No. 11, pp. 1590-1598, 1989.
- Velocity Impact Composite Damage", International Journal for Experimental Mechanics, Vol. 47, No. 1, pp. 220-226, 2011.
3. Shengqing, Z. and Gin, B.C. "Low-Velocity Impact Response of Fibre-Metal Laminates – Experimental and Finite Element Analysis", Composites Science and Technology, Vol. 72, No. 15, pp. 1793-1802, 2012.
4. Li, C.F., Hu, N. and Yin, Y.J. "Low-Velocity Impact-Induced Damage of Continuous Fiber-Reinforced Composite Laminates. Part II. An FEM Numerical Model", Applied Science and Manufacturing, Vol. 33, No. 8, pp. 1055-1062, 2002.
5. Tarapada, R. and Debabrata C. "Delamination in Hybrid FRP Laminates under Low Velocity Impact", Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 25, No. 18, pp. 1939-1956, 2006.
6. Michelle, S., Fatt, H. and Park, K.S. "Dynamic Models for Low-Velocity Impact Damage of Composite Sandwich Panel-Part B: Damage Initiation", Journal of Composite Structures, Vol. 52, No. 3, pp. 353-364, 2001.
7. Sabouri, H., Ahmadi, H. and Liaghat, G.H. "Ballistic Impact Perforation Into Glare Target: Experiment, Numerical Modeling and Investigation of Aluminium Stacking Sequence", International Journal Vehicle Structures & Systems, Vol. 3, No. 3, pp. 178-183, 2011.
8. Yan, Z., Ping, Z. and Xinmin, L. "Finite Element Analysis of Low-Velocity Impact Damage in Composite Laminated Plate", Materials and Design, Vol. 27, No. 6, pp. 513-519, 2006.
9. Sun, C.T. and Chen, J.K. "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", Journal of Composite Materials, Vol. 19, No. 6, pp. 490-504, 1985.

Archive