((یادداشت مهندسی))

تاثیر عیب هندسی بر روی ارتعاشات آزاد صفحه گرافنی مدور با استفاده از روش تریفتز

سید حسام‌الدین مدنی[۱] و محمدحسین صبور[۲]
دانشکده علوم و فنون نوین
دانشگاه تهران

محمد فدایی[۳]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی قم

(تاریخ دریافت:۱۳۹۴/۳/۱۱؛ تاریخ پذیرش:۱۳۹۴/۷/۱۱۲)

چکیده

به‌دلیل پیچیدگی در پروسه تولید در ابعاد نانو، اغلب لایه‌های گرافن، دارای عیوب هندسی هستند. یکی از این نوع عیوب، ناشی از عدم وجود یک یا چند پیوند کربنی در لایه گرافن در حین پروسه تولید است. اگر این صفحه گرافنی معیوب یا ناقص در دمای کاری اتاق قرار داشته باشد، حفره یا سوراخ در آن گسترش یافته و حفره‌هایی بزرگ با ساختار بی‌شکل تشکیل می‌گردد. همچنین، قیود ساختی مانند پین یا سوراخ در فیلترها و دیافراگم‌ها و دیگر سازه‌ها در Nems و Mems می‌توانند قابلیت مکانیکی گرافن را تحت تأثیر قرار دهند. بنابراین، بررسی تاثیر چنین مواردی بر روی رفتار دینامیکی لایه گرافن از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله این حفره‌ها با یک دایره در محلی دلخواه مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با یک سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و تئوری غیرمحلی در ابعاد نانو ارائه گردیده است. اثر پارامترهای غیرمحلی و خارج از مرکزی برای این نوع صفحات بررسی شده و فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش مینیمم جداسازی مقدار تکین استخراج گردیده است.

واژه‌های کلیدی: سوراخ خارج از مرکز، فرکانس طبیعی، پارامتر غیرمحلی

((Engineering Note))

Effect of Geometrical Defect on Free Vibration of a Circular Graphenesheetusing Trefftz Method

S.H. Madani and M.H. Sabour
New Sciences & Technologies Department
University of Tehran

M. Fadaee
Mechanical Engineering Department
Qom University of Technology

(Received:1/June/2015; Accepted:4/October/2015)

ABSTRACT

Because of production process and constrains conditions, circular graphene sheet may be opposed to structural defect and pin hole, respectively. Some of the defects and pin hole on a circular graphene sheet can be considered as an eccentric hole on the sheet. Hence, analyzing behavior of circular graphene sheet with an eccentric hole is important. Free vibration of an eccentric annular graphene sheet, as the basis of any dynamical analysis, is studied. Nonlocal theory of plate is used to solve the problem and Trefftz method is used to model the free vibration of graphene with an eccentric hole. Effects of nonlocality and eccentricity are investigated on the natural frequencies. These frequencies are derived by singular value decomposition (SVD) method.

Keywords: Graphene, Eccentric Hole, Natural Frequency, Nonlocal Parameter

۱- دانشجوی دکتری: hesam_madani@ut.ac.ir
۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): sabourmh@ut.ac.ir
۳- استادیار: fadaee@qut.ac.ir

۱- مقدمه

حفره‌ها در مقایسه با دیگر عیب‌های سازه‌ای اثر بیش‌تری بر روی کاهش خواص مکانیکی صفحات دایروی گرافن دارند [۱]. نانوصفحه‌ها در نانوسنسورها و نانوکامپوزیت‌ها کاربرد فراوانی دارند. مشخصات ارتعاشی نانوصفحه‌های گرافنی که در نانوکامپوزیت‌ها پراکنده هستند از لحاظ کارایی سازه‌ای بسیار حائز اهمیت می‌باشد [۲]. باتوجه به پیشرفت مهندسی در حوزه نانوتکنولوژی، وجود ساختارهای گرافنی با یک یا چند عیب و وجود سوراخ برای پین یا غیره در اتصالات صفحات گرافن و در تجهیزات نمز[1]، بررسی مدل‌های ارتعاشی و استخراج فرکانس‌های طبیعی ضروری به‌نظر می‌رسد [۳]. سه رویکرد حل برای تحلیل ارتعاشی و به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدل پیشنهادی وجود دارد. روش‌های اتمی، روش‌های اتمی- پوسته، روش‌های پیوسته که با ملاحظه عدم پیوستگی ساختارهای مقیاس نانو، مسئله را مورد بررسی قرار می‌دهد. این روش از دقت کم‌تری نسبت به دو روش دیگر برخوردار بوده اما در دسترس، کم‌هزینه و با محاسبات کم‌تر و در عین حال سرعت بیش‌تر می‌باشد. بیش‌تر مقالات در حوزه نانو مربوط به این رویکرد و روش می‌باشد [۴]. روش‌های تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات و پوسته‌ها در اشکال مختلف دایروی و مستطیلی و غیره در حوزه ماکرو به‌صورت عددی و تحلیلی در بسیاری از مقالات بررسی شده است. لارا[2] و همکاران [۵] با روش عددی ریلی ریتز فرکانس‌های طبیعی یک صفحه دایروی آزاد با یک سوراخ خارج از مرکز را بررسی و مطالعه کردند. لین[3] [۶] مدل ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی یک صفحه دایروی با یک سوراخ خارج از مرکز را با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه و براساس تبدیل توابع موج استوانه‌ای بررسی کرد. وی لینگ و جنگ[4] [۷] در سال ۲۰۰۹ ارتعاشات آزاد یک صفحه دایروی با چند سوراخ خارج از مرکز را مطالعه کردند. آن‌ها با استفاده از نظریه جمع‌پذیری[5] و با روش عددی تریفتز[6] مدل تحلیلی را ارائه داده و درنهایت با روش جداسازی مقدار تکین فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند. لی[7] و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۷ یک روش نیمه‌تحلیلی در تحلیل ارتعاشات آزاد یک صفحه دایروی با چند سوراخ ارائه دادند. هاشمی‌نژاد و قاهری [۹] یک حل تحلیلی دقیق برای ارتعاشات عرضی یک صفحه بیضی‌گون با یک سوراخ خارج از مرکز براساس روش جداسازی متغیرها در مختصات بیضی‌گون ارائه دادند. اما در حوزه نانو در سال ۱۹۸۳ ارینگن[8] تئوری غیرمحلی[9] الاستیسیته را که یکی از مشهورترین روش‌های پیوسته می‌باشد در حوزه تنش غیرمحلی ارائه داد و در سال ۲۰۰۲ کتاب Nonlocal Continuum Field Theories منتشر شد [۱۰]. بسیاری از محققان با این روش و روش‌های دیگر یک مسئله خاص را برای نانولوله‌های کربنی و ورق‌های مستطیلی گرافن مورد بررسی قرار داده‌اند. پردهن[10] [۱۱] در سال ۲۰۰۹ تئوری‌های کلاسیک صفحه[11] و تغییرشکل برشی مرتبه اول[12]را با استفاده از روابط تشکیل‌دهنده دیفرانسیلی غیرمحلی بازفرموله کرد. او با استفاده از رویکرد نویر[13] حل معادلات حاکم برای نانوصفحات مستطیلی را ارائه داد. ردی[14]و آقابابایی [۱۲] با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی غیرمحلی ارینگن، تئوری تغییرشکل برشی صفحه مرتبه سوم را بازفرموله کرده و با استفاده از روش نویر فرکانس‌های طبیعی یک نانوصفحه مستطیلی را به‌دست آوردند. آرش و وانگ[15] [۱۳] و رفیعی و مقدم [۱۴] مقالاتی را در کاربردهای روش‌های پیوسته از قبیل تئوری غیرمحلی الاستیسیته در تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد، کمانش، خمش و دیگر مسائل مربوطه به صفحات گرافن و نانولوله‌های کربنی ارائه داده‌اند. محمدی و همکاران [۱۵] ارتعاشات آزاد یک صفحه گرافن دایروی و حلقوی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی معادلات حاکم بر صفحات گرافن تک‌لایه را استخراج کردند و با استفاده از روش عددی تربیع تفاضلی[16] فرکانس‌های طبیعی را به‌دست آوردند. در این مقاله، این حفره‌ها با یک دایره مدل شده و درنتیجه ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با یک سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و تئوری غیرمحلی در ابعاد نانو ارائه گردیده است. اثرات پارامترهای مختلف از جمله پارامترهای غیرمحلی و خارج

1 -Nems
2- Laura
3- Lin
4- Wei-ling, Jeng
5- Addition Theorem
6- Trefftz
7- Lee
8-Eringen
9- Nonlocal

10- Pradhan
11- CLPT
12- FSDT
13- Navier
14- Reddy
15- Arash,Wnag
16- DQM

از مرکزی برای این نوع صفحات بررسی شده است.

۲- تحلیل ارتعاشات آزاد یک نانوصفحه دایروی با استفاده از تئوری غیرمحلی

در تئوری الاستیسیته غیرمحلی اثرات مقیاس- خرد با استفاده از این فرض که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در همه نقاط بازه می‌باشد نه فقط کرنش خود نقطه، بررسی و مطالعه می‌شود. تئوری غیرمحلی اثر متقابل بین اتمی محدوده بزرگ را درنظر گرفته و منجر به نتایج مستقلی برحسب اندازه بدنه می‌گردد. براساس تئوری غیرمحلی معادلات اساسی برای یک بدنه الاستیک غیرمحلی همگن ایزوتروپیک که از نیروی بدنه صرف‌نظر می‌کند عبارتند از [۱۵]:

$$\sigma_{ij,j}=0 \quad (۱)$$

$$\sigma_{ij}(x)=\int_V \varphi\left(\left|x-x'\right|,\alpha\right)t_{ij}\,dV\left(x'\right),\ \forall x\in V \quad (۲)$$

$$t_{ij}=H_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (۳)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (۴)$$

عبارت‌های σ_{ij}، t_{ij}، ε_{kl} و H_{ijkl} به‌ترتیب تانسورهای تنش غیرمحلی، تنش کلاسیک، کرنش کلاسیک و الاستیسیته مرتبه چهارم هستند. حجم فضای جاروب‌شده به‌وسیله بدنه V می‌باشد. معادله بالا تنش به‌سبب الاستیسیته غیرمحلی و تنش به‌سبب الاستیسیته کلاسیک را با یک‌دیگر جفت می‌کند.

تابع کرنل $\varphi(|x-\acute{x}|,\alpha)$ مدول غیرمحلی است. مدول غیرمحلی به‌عنوان یک تابع تضعیف متناسب با معادلات تشکیل‌دهنده اثرات غیرمحلی تولیدشده در نقطه مبدا (مرجع) x به‌واسطه کرنش محلی در نقطه منشاء $\acute{x}$ می‌باشد. عبارت $|x-\acute{x}|$ فاصله در شکل اقلیدسی و α ثابت ماده را که بستگی به بازه (به‌عنوان مثال پارامتر شبکه، اندازه دانه‌ای، فاصله بین پیوندهای c-c یا کوولانسی) و طول‌های مشخصه خارجی (به‌عنوان مثال طول ترک، طول موج) دارد نشان می‌دهد. ثابت ماده α به‌عنوان $\alpha=e_0a/l$ که در اینجا e_0 ثابتی برای تنظیم‌کردن مدل با نتایج آزمایشگاهی و دیگر مدل‌های قطعی می‌باشد. عبارت‌های a و l (به‌عنوان مثال پارامتر شبکه، اندازه دانه‌ای، فاصله بین پیوندهای c-c یا کوولانسی) و طول‌های مشخصه خارجی (به‌عنوان مثال طول ترک، طول موج) نانوسازه‌ها هستند.

معادله بالا در شکل انتگرالی جزئی است و به‌طور کلی حل کردن آن به‌صورت تحلیلی دشوار است. بنابراین از یک شکل دیفرانسیلی معادله الاستیسیته غیرمحلی اغلب استفاده می‌گردد. براساس ارینگن [۱۰] اصطلاح مدول غیرمحلی می‌تواند به‌صورت زیر ارائه شود:

$$\varphi\left(\left|x\right|,\alpha\right)=\left(2\pi l^2\alpha^2\right)^{-1}K_0(\sqrt{x.x}/l\alpha) \quad (۵)$$

که در اینجا، K_0 تابع بسل بهینه‌شده می‌باشد.

معادله حرکت در عبارت‌های الاستیسیته غیرمحلی می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i \quad (۶)$$

جایی‌که f_i,ρ به‌ترتیب مولفه‌های چگالی و بردار جابه‌جایی هستند. حروف i,j علامت x,y را می‌گیرند.

با فرض تابع کرنل φ به‌عنوان تابع گرین ارینگن یک شکل دیفرانسیلی رابطه تشکیل‌دهنده غیرمحلی را به‌صورت زیر پیشنهاد داد:

$$\sigma_{ij,j}+\mathrm{L}\left(f_i-\rho\ddot{u}_i\right)=0 \quad (۷)$$

$$\mathrm{L}=[1-\left(e_0a\right)^2\nabla^2]$$

در معادله بالا ∇^2 عملگر لاپلاس و در مختصات قطبی برابر $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ است. با استفاده از معادله بالا رابطه تنش- کرنش تشکیل‌دهنده غیرمحلی می‌تواند به‌صورت زیر ساده شود:

$$\left(1-\mu^2\nabla^2\right)\sigma_{ij}=C:\varepsilon \quad (۸)$$

که در معادله بالا، $\mu=e_0a$ بوده و پارامتر غیرمحلی نامیده می‌شود. تنها تفاوت بین روابط تنش- کرنش در ابعاد نانو و ماکرو در وجود همین عبارت می‌باشد که بایستی معادلات باتوجه به همین تفاوت استخراج گردد.

برای تحلیل ارتعاشات عرضی باتوجه به تئوری صفحه نازک کلاسیک داریم:

$$u\left(r,\theta,z\right)=-\frac{Z\,\partial w\left(r,\theta\right)}{\partial r} \quad (۹)$$

$$v\left(r,\theta,z\right)=-\frac{z}{r}\frac{\partial w\left(r,\theta\right)}{\partial\theta}$$

$$w\left(r,\theta,z\right)=w\left(r,\theta\right)$$

برای روابط کرنش- جابه‌جایی نیز داریم:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix}-(\mu)^2\nabla^2\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \varepsilon_{r\theta}\end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

در معادله بالا اگر پارامتر غیرمحلی صفر قرار داده شود معادلات تنش- کرنش برای صفحه نازک کلاسیک به‌دست می‌آید.

با به‌کارگیری رابطه‌های (۱۰-۹) در رابطه (۸)، معادله دیفرانسیلی خیز عرضی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D\nabla^4 w(r,\theta,t)-q+\rho h\ddot{w}(r,\theta,t)-\rho h\mu^2\nabla^2\ddot{w}(r,\theta,t)=0 \quad (۱۱)$$

که در اینجا، $\nabla^4=\nabla^2(\nabla^2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}+\frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{1}{\mathbf{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}\right)^2$ و w خیز عرضی صفحه را نمایش می‌دهد. عبارت $\boldsymbol{D}=\frac{\boldsymbol{Eh}^3}{12(1-\boldsymbol{\nu}^2)}$ صلبیت خمشی صفحه غیرمحلی را نشان داده و عبارت q بار عرضی توزیع‌شده روی صفحه غیرمحلی استکه در تحلیل ارتعاشات آزاد صفر درنظر گرفته می‌شود.

برای حل تحلیلی معادله (۱۱) به‌صورت زیر عمل می‌شود:

$$w=w(r,\theta)e^{i\omega t} \quad (۱۲)$$

با تنظیم‌کردن و عملیات ریاضی معادله (۱۱) داریم:

$$\nabla^4 w(r,\theta)+\frac{\rho h\mu^2\omega^2}{D}\nabla^2 w(r,\theta)-\frac{\rho h\omega^2}{D}w(r,\theta)=$$
$$\left(\nabla^2 w(r,\theta)+\frac{\gamma^2-\sqrt{4\alpha^4+\gamma^4}}{2}w(r,\theta)\right)\times$$
$$\left(\nabla^2 w(r,\theta)+\frac{\gamma^2+\sqrt{4\alpha^4+\gamma^4}}{2}w(r,\theta)\right)=0$$

مقادیر κ و λ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\kappa=\sqrt{\frac{\sqrt{4\alpha^4+\gamma^4}+\gamma^2}{2}},\lambda=\sqrt{\frac{\sqrt{4\alpha^4+\gamma^4}-\gamma^2}{2}}$$
$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{\rho h\omega^2}{D}},\gamma=\sqrt{\frac{\rho h\mu^2\omega^2}{D}}$$

برای حل معادله (۱۳) می‌توان با استفاده از جداسازی متغیرها $w(r,\theta)=R(r).e^{im\theta}$ را درنظر گرفت. درنتیجه برای خیز داریم:

$$w(r,\theta)=\sum_{i=-m}^{m}(A_{1n}J_n(\kappa r)+A_{2n}Y_n(\kappa r)+A_{3n}I_n(\lambda r)+A_{4n}K_n(\lambda r))e^{im\theta} \quad (۱۴)$$

که در معادله بالا، J_n و Y_n توابع بسل عادی و I_n و K_n توابع بسل اصلاح‌شده می‌باشد. ضرایب Ain نیز ضرایب شکل مودها هستند که باتوجه به شرایط مرزی استخراج می‌گردد.

اعمال شرایط مرزی در تحلیل ارتعاشات صفحات به‌صورت زیر می‌باشد.

- گیردار که در آن، $w=w_r=0$
- ساده که در آن، $w=M_r=0$
- آزاد که در آن، $V_r=M_r=0$

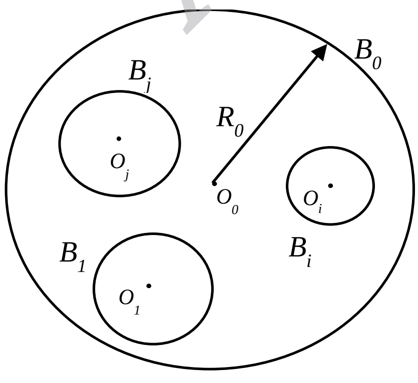
که در معادلات بالا، M_rوV_r به‌ترتیب ممان خمشی و نیروی برشی درجهت شعاعی می‌باشد.

باتوجه به تئوری غیرمحلی در مختصات قطبی برای ممان خمشی و نیروی برشی داریم:

$$(1-\mu^2\nabla^2)M_r=-D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}$$
$$(1-\mu^2\nabla^2)M_{r\theta}=-D(1-\nu)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right\}$$
$$(1-\mu^2\nabla^2)M_{r\theta}=-D(1-\nu)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right\}$$
$$(1-\mu^2\nabla^2)V_r=Q_r+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}$$

۳- روش تریفتز و اعمال شرایط مرزی خارج مرکزی

در شکل **۱** یک صفحه دایروی با H سوراخ خارج از مرکز (مراکز دایره‌های خارج از مرکز O_i بوده که i از ۱ تا H می‌باشد) مشاهده می‌شود [۷].



شکل (۱): یک صفحه دایروی با چند سوراخ خارج از مرکز.

این مسئله را می‌توان باتوجه به H+1 شرایط مرزی B_i به‌صورت زیر نشان داد:

$$B = \bigcup_{0}^{H} B_k \tag{۱۵}$$

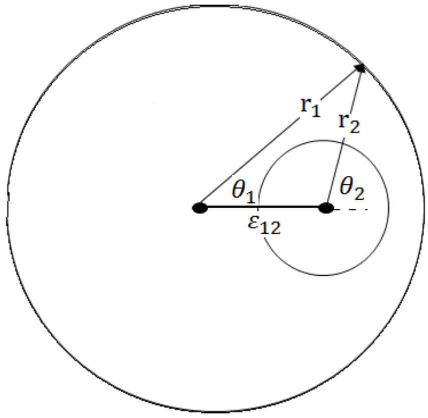
درنتیجه، باتوجه به تئوری تریفتز برای خیز صفحه تک‌سوراخ می‌توان خیز صفحه را از ترکیب خیز دو دایره داخلی و خارجی به‌صورت زیر نوشت:

$$w\left(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_1} \begin{Bmatrix} A_{1m}J_m\left(kr_1\right)+A_{2m}Y_m\left(kr_1\right)+ \\ A_{3m}I_m\left(\lambda r_1\right)+A_{4m}K_m\left(\lambda r_1\right) \end{Bmatrix} + e^{im\theta_2} \begin{Bmatrix} B_{1m}J_m\left(kr_2\right)+B_{2m}Y_m\left(kr_2\right)+ \\ B_{3m}I_m\left(\lambda r_2\right)+B_{4m}K_m\left(\lambda r_2\right) \end{Bmatrix} \tag{۱۶}$$

در معادله (۱۷)، A_{im} و B_{im} ضرایب شکل مودها هستند که باتوجه به اعمال شرایط مرزی تعیین می‌گردند. باتوجه به این‌که برای دایره بزرگ درحالت کلی بایستی در $r_1 = 0$ مقدار خیز معلوم داشته باشد؛ ضرایب توابع بسل Y و K صفر می‌گردد. برای دایره توخالی نیز در حالت کلی هنگامی‌که r_2 بزرگ می‌شود مقدار تابع بسل بهینه شده I بسیار بزرگ شده که درنتیجه ضریب این تابع بسل صفر شده و می‌توان مجموع ضرایب توابع بسل J و Y را به‌صورت تابع هنکل نوع اول $H^{(1)} = J + i.Y$ نمایش داد. درنتیجه برای خیز یک صفحه تک‌سوراخ با استفاده از تئوری تریفتز و شرایط مرزی کلی داریم:

$$w\left(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_1}\left\{a_m J_m\left(kr_1\right)+b_m I_m\left(\lambda r_1\right)\right\} + e^{im\theta_2}\left\{c_m H_m^{(1)}\left(kr_2\right)+d_m K_m\left(\lambda r_2\right)\right\} \tag{۱۷}$$

همان‌طورکه در شکل **۲** نیز مشخص می‌باشد $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ به‌ترتیب زوایا و شعاع‌های قطبی نسبت به دو مرکز دایره داخلی و خارجی می‌باشد.



شکل (۲): هندسه برای توابع تبدیل بسل.

حالا باید شرایط مرزی دایره خارجی یا اصلی و دایره داخلی یا سوراخ خارج از مرکز را اعمال کرد. همان‌طورکه مشخص می‌باشد اعمال هرکدام از این شرایط در معادله (۱۸) میسر نیست زیرا این معادله برحسب مختصات قطبی هر دو دایره می‌باشد. برای اعمال شرایط مرزی برحسب یک مختصات قطبی (مختصات داخلی یا خارجی) می‌توان با استفاده از قضیه جمع‌پذیری توابع بسل دو دایره داخلی و خارجی را برحسب مختصات دیگری نوشت. در اینجا داریم:

$$J_m\left(kr_1\right)e^{im\theta_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\theta_{1,2}} J_n\left(kr_2\right)e^{in\theta_2}$$

$$H_m^1\left(kr_1\right)e^{im\theta_1} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\theta_{1,2}} j_n\left(kr_2\right)e^{in\theta_2}, r_2 < \varepsilon_{1,0} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{m-n}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\theta_{1,2}} H_n^{(1)}\left(kr_2\right)e^{in\theta_2},\ r_2 > \varepsilon_{1,0} \end{cases}$$

$$I_m\left(\lambda r_1\right)e^{im\theta_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{m-n}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\theta_{1,2}} I_n\left(\lambda r_2\right)e^{in\theta_2}$$

$$K_m\left(\lambda r_1\right)e^{im\theta_1} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n K_{m-n}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\theta_{1,2}} I_n\left(\lambda r_2\right)e^{in\theta_2},\ r_2 < \varepsilon_{1,2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} I_{m-n}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\theta_{1,2}} \left(\lambda r_0\right)e^{in\theta_2},\ r_2 > \varepsilon_{1,2} \end{cases} \tag{۱۸}$$

در معادله (۱۸) $\varepsilon_{1,2}$ و $\theta_{1,2}$ به‌ترتیب فاصله بین دو مرکز دایره و زاویه دایره ۲ نسبت به دایره ۱ است. زوایا در حالت تک‌سوراخ در هر دو تبدیل یک‌بار صفر رادیان و یک‌بار π رادیان می‌باشد. در هر دو حالت تبدیل مختصات توابع بسل از دایره داخلی به خارجی و خارجی به داخلی معادله خیز برحسب یک مختصات قطبی خواهد بود و در نتیجه اعمال شرایط مرزی به‌راحتی امکان‌پذیر خواهد شد.

برای اعمال شرایط مرزی داخلی و خارجی طبق معادله‌های (۱۹-۱۸) داریم:

$$w\left(r_1,\theta_1\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(e^{im\theta_1}\left\{a_m J_m\left(kr_1\right)+b_m I_m\left(\lambda r_1\right)\right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m j_{m-n}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(m-n)\pi} H_n^{(1)}\left(kr_2\right)e^{in\theta_1} + d_m(-1)^{m-n} e^{i(m-n)\pi} I_{m-n}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)K_n\left(\lambda r_1\right)e^{in\theta_1}\Big)$$

$$w\left(r_2,\theta_2\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(e^{im\theta_2}\left\{c_m H_m^{(1)}\left(kr_2\right)+d_m K_m\left(\lambda r_2\right)\right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m J_{m-n}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)J_n\left(kr_2\right)e^{in\theta_2} + b_m I_{m-n}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)I_n\left(\lambda r_2\right)e^{in\theta_2}\Big) \tag{۱۹}$$

در قسمت‌های دوم هر دو معادله بالا باتوجه به جابه‌جایی نمایه‌های m و n خواهیم داشت:

$$w\left(r_1,\theta_1\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\theta_1}\Big(\left\{a_mJ_m\left(kr_1\right)+b_mI_m\left(\lambda r_1\right)\right\}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,j_{n-m}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)e^{i(n-m)\pi}H_m^{(1)}\left(kr_2\right)+d_n\left(-1\right)^{n-m}e^{i(n-m)\pi}I_{n-m}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)K_m\left(\lambda r_1\right)\Big)$$

$$w\left(r_2,\theta_2\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\theta_2}\Big(\left\{c_mH_m^{(1)}\left(kr_2\right)+d_mK_m\left(\lambda r_2\right)\right\}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nJ_{n-m}\left(\mathrm{k}\varepsilon_{1,2}\right)J_m\left(kr_2\right)+b_nI_{n-m}\left(\lambda\varepsilon_{1,2}\right)I_m\left(\lambda r_2\right)\Big)$$

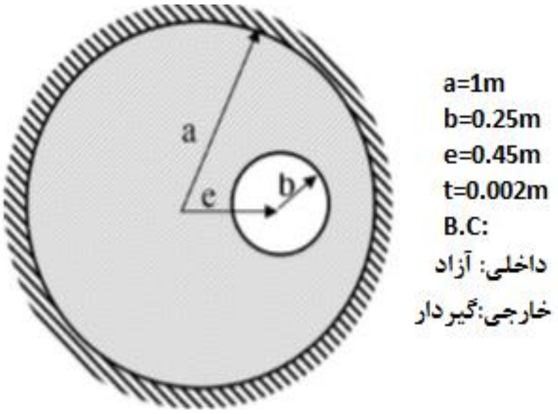
(۲۰)

حال می‌توان معادلات شرایط مرزی داخلی و خارجی را با استفاده از معادله (۲۱) اعمال نمود. بعد ازاعمال شرایط مرزی بسته به نوع آزاد، ساده و گیردار در یک شعاع و کل زوایا در آن شعاع (عدم وابستگی به θ) برای هر دایره، دو معادله ایجاد می‌شود. با استفاده از ضرب $e^{ip\theta_1}$ برای دو معادله دایره خارجی و $e^{ip\theta_2}$ برای دو معادله دایره داخلی و خاصیت تعامد برای هر $m=-\infty..\infty$ یک معادله تشکیل می‌گردد. N نیز در هرکدام از معادلات از m− تا m تغییر خواهد نمود. درنتیجه با کاهش مقدار m تا همگرایی مطلوب تعداد $2\times2\times(2m+1)$ معادله خواهیم داشت. 8m+4 نیز مجهول داریم که درنتیجه یک دستگاه معادلات به‌صورت $A_{8m+4\times8m+4}X_{8m+4}=0$ خواهیم داشت. در این معادله X ضرایب شکل مودهای a_m، b_m، c_m و d_m می‌باشد. برای این‌که این معادله جواب غیرصفر داشته باشد باید دترمینان ضرایب صفر باشد. برای استخراج فرکانس‌هایی که دترمینان ضرایب را صفر می‌کند از روش مینیمم جداسازی مقدار تکین (SVD) استفاده می‌شود.

۴- نتایج و بحث

برای صحه‌سنجی و اعتبارسنجی نتایج دو نمونه اول و دوم به‌ترتیب در ابعاد ماکرو و نانو ارائه شده است.

نمونه اول در ابعاد ماکرو: دایره‌ای به شعاع خارجی $R_1=1m$، حفره‌ای به شعاع $R_2=0/25m$ ، خارج از مرکزی $\varepsilon=0/45m$، ضخامت 2mm و ضریب پواسون $\nu=0/33$ و با شرایط مرزی داخلی آزاد و خارجی گیردار که در شکل **۳** مشخص می‌باشد.



شکل (۳): صفحه دایروی مدور با سوراخ خارج از مرکز در ابعاد ماکرو [۱۶].

در جدول **۱**، مقادیر ۵ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد با مقادیر مرجع و روش المان محدود در نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شده است.

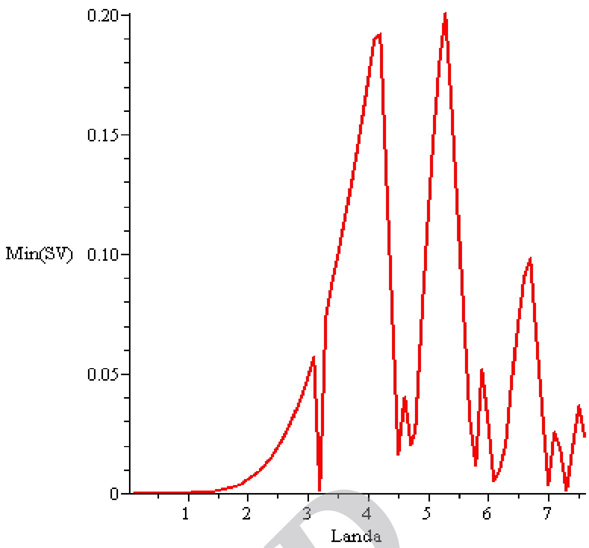
جدول (۱): مقادیر ۵ فرکانس طبیعی بی‌بعد ($\alpha=\sqrt[4]{\frac{\rho h\omega^2}{D}}$).

روش حل	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم	فرکانس چهارم	فرکانس پنجم
مرجع [۱۶]	۳/۲۰۱	۴/۵۲۸	۴/۷۴۳	۵/۷۷۳	۶/۰۸۶
المان محدود	۳/۲۰۱	۴/۵۲۷	۴/۷۴۴	۵/۷۷۲	۶/۰۸۴
روش حاضر	۳/۲۰۱	۴/۵۱۰	۴/۷۲۳	۵/۷۶۵	۶/۰۷۹

همان‌طورکه از جدول **۱** ملاحظه می‌شود، نتایج روش حاضر با دقت بسیارخوبی با روش المان محدود و مراجع منتشر مطابقت دارد که نشان می‌دهد این روش در ابعاد ماکرو نتایج بسیارخوبی را ارائه می‌نماید که می‌توان به آن اطمینان کرد و با استفاده از تئوری غیرمحلی آن را در ابعاد نانو به‌کار گرفت و اثرات این پارامتر و خارج از مرکزی سوراخ را بر روی آن بررسی کرد.

مقادیر فرکانس‌های بی‌بعد محاسبه‌شده با روش حاضر از M=3 یعنی تعداد 2M+1=7 ضریب همگرا می‌گردد.

در شکل **۴** مقادیر مینیمم SVD برای M=4 یعنی تعداد ضرایب ۹ نمایش داده شده است. در این شکل مقادیر مینیممی که به‌صورت پرش و در جهت محور x مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد می‌باشد.



شکل (۴): مقادیر مینیمم مقادیر تکین برحسب فرکانس‌های بی‌بعد.

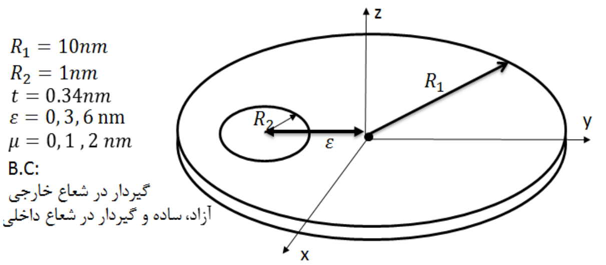
نمونـه دوم در ابعـاد نـانو: صـــفحه گرافنی مدور به شـــعاع $R_1 = 5nm$، ضــخامت 0/34mm و ضــریب پواســون $\nu = 0/3$ برای شرایط مرزی ساده و پارامترهای غیرمحلی مختلف بررسی قرار گرفته است که نتایج در جدول **۲** ارائه شده است.

جدول (۲): مقایسه اولین پارامتر فرکانسی بی‌بعد نانوصفحه دایروی.

روش	$\mu = e_0a(nm)$				
	۰	۰/۴	۰/۸	۱/۴	۲
مرجع 1515	۲	۱/۹۶۹	۱/۸۸۴	۱/۶۹۸	۱/۴۹۶
روش حاضر	۲	۱/۹۶۹	۱/۸۸۴	۱/۶۹۷	۱/۴۹۶

همان‌طورکه از جدول **۲** مشـاهده می‌شـود نتایج با دقت بسـیار بالایی با روش حاضر مطابقت دارد و نشان می‌دهد که این روش در ابعاد نانو قابل اعتماد می‌باشد.

نمونه سوم در ابعاد نانو: صفحه گرافنی مدور به شعاع خارجی $R_1 = 10nm$ ، حفره‌ای بـه شـــعـاع $R_2 = 1nm$، ضـــخامت 0/34mm و ضریب پواسون $\nu = 0/3$ برای شرایط مرزی‌های مختلف، پارامترهای غیرمحلی مختلف و خروج از مراکز مختلف سـوراخ یا عیب مورد بررسـی قرار گرفته اسـت که در شـکل **۵** نشان داده شده است.



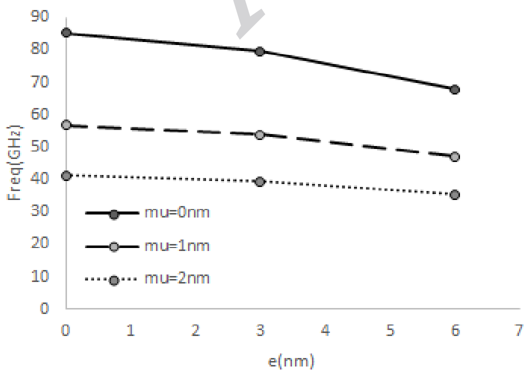
شکل (۵): صفحه گرافنی مدور با سوراخ خارج از مرکز.

در جدول **۳** مقادیر فرکانس‌های طبیعی شکل **۵** در شرایط مرزی، پارامتر غیرمحلی و فاصله خارج از مرکزی مختلف سوراخ ارائه گردیده است. در این جدول، C، SS و F به‌ترتیب اشاره به شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد دارد.

همان‌طورکه از جدول **۳** دیده می‌شود هرچه شرایط مرزی داخلی سفت‌تر شود یعنی از شرایط آزاد به ساده و از ساده به گیردار تغییر ایجاد می‌گردد و مقادیر فرکانس‌های طبیعی بیش‌تر می‌شود. در شرایط مرزی مختلف با ورود عبارت خروج مرکزی سوراخ مقادیر فرکانسی کاهش می‌یابد و این نشانگر آن است که وجود عیب‌های حفره‌ای و تبدیل آن به سوراخ تا چه اندازه می‌تواند فرکانس و خواص ارتعاشی گرافن را تحت تاثیر قرار دهد. در شرایط مرزی ساده، آزاد و گیردار با افزایش خروج از مرکزی سوراخ فرکانس‌ها کاهش می‌یابد. اثر پارامتر غیرمحلی که تنش و کرنش را در ابعاد نانو تغییر می‌دهد نقش کاهشی داشته و با رشد آن فرکانس را کاهش می‌دهد. در شرایط مرزی آزاد تغییر خروج از مرکزی تاثیر کم‌تری بر روی فرکانس داشته و فرکانس با شیب بسیارکمی افزایش یا کاهش می‌یابد.

در شکل **۶** تاثیر پارامتر غیرمحلی نمایش داده شده است.

همان‌طورکه در شکل **۶** مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانس طبیعی در شرایط مرزی گیردار به‌ازای افزایش مقادیر خروج از مرکزی و عبارت غیرمحلی کاهش پیدا می‌کند.



شکل (۶): فرکانس طبیعی اول برای شرایط گیردار سوراخ به‌ازای مقادیر مختلف خروج از مرکزی و پارامتر غیرمحلی.

جدول (۳): مقادیر۳ فرکانس طبیعی اول برای نمونه دوم (GHz).

B.Cs	$\varepsilon(nm)$	$\mu(nm)$	f_1	f_2	f_3
C-C	۰	۰	۸۵,۱۸۷	۹۰,۲۹۳	۱۱۴,۳۴
		۱	۷۹,۷۰۵	۸۳,۰۳۳	۱۰۰,۵۱
		۲	۶۷,۹۰۸	۶۸,۵۷۶	۷۷,۴۲۱
	۳	۰	۵۶,۷۵۳	۷۸,۷۱۳	۱۰۲,۸۱۰
		۱	۵۳,۸۱۷	۷۲,۳۵۰	۹۲,۰۵۷
		۲	۴۷,۰۹۳	۵۹,۶۴۸	۷۲,۷۷۵
	۶	۰	۴۱,۱۶۱	۶۹,۵۲۴	۸۹,۲۹۳
		۱	۳۹,۵۰۳	۶۴,۱۹۵	۸۰,۸۵۵
		۲	۳۵,۴۹۵	۵۳,۳۹۳	۶۵,۰۴۸
C-SS	۰	۰	۷۰,۸۸۸	۷۸,۹۴۲	۱۱۰,۵۵۷
		۱	۶۶,۷۷۳	۷۲,۸۱۰	۹۷,۱۶۲
		۲	۵۷,۶۸۲	۶۰,۴۵۸	۷۴,۸۰۳
	۳	۰	۵۰,۳۵۳	۷۳,۳۲۲	۹۵,۹۰۰
		۱	۴۷,۹۲۳	۶۷,۲۰۱	۸۶,۳۷۴
		۲	۴۲,۲۹۴	۵۶,۶	۶۸,۸۸۲
	۶	۰	۳۸,۰۲۹	۶۷,۰	۸۳,۲۱۵
		۱	۳۶,۵۶۸	۶۲,۷	۷۵,۶۱۱
		۲	۳۲,۹۶۱	۵۲,۳۱۲	۶۱,۳۱۴
C-F	۰	۰	۳۱,۷۲۴	۶۶,۱۸۳	۱۰۷,۸۴
		۱	۳۰,۷۸۷	۶۱,۲۶۹	۹۴,۷۳۱
		۲	۲۸,۴۰۴	۵۱,۲۱۱	۷۲,۸۷۳
	۳	۰	۳۱,۷۲۹	۶۵,۹۸۵	۱۰۷,۶۵
		۱	۳۰,۷۹۵	۶۱,۲۵۵	۹۴,۶۹۰
		۲	۲۸,۳۹۹	۵۱,۱۵۹	۷۲,۸۱۲
	۶	۰	۳۱,۷۴۰	۶۵,۹۶۵	۱۰۷,۴۵
		۱	۳۰,۷۹۷	۶۱,۲۲۱	۹۴,۶۶۲
		۲	۲۸,۳۹۸	۵۱,۰۸۰	۷۲,۷۸۹

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله تاثیر عیوب فقدان اتمی که منجر به تشکیل سوراخ‌هایی بی‌شکل می‌گردد، بر ارتعاشات صفحات گرافنی تک‌لایه مدور بررسی گردیده و نشان داده شد که وجود سوراخ در گرافن موجب کاهش دامنه فرکانس‌های طبیعی و خواص ارتعاشی گرافن می‌گردد. اثر پارامتر غیرمحلی که تنش و کرنش را در ابعاد نانو تغییر می‌دهد نقش کاهشی داشته و با رشد آن فرکانس را کاهش می‌دهد.

البته هرچه ابعاد گرافن بزرگ‌تر گردد این نقش کاهشی در فرکانس تاثیر کم‌تری خواهد گذاشت.

در این مقاله، حفره یا سوراخ (عیوب هندسی سازه‌ای در گرافن) با یک دایره مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با یک سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و تئوری غیرمحلی در ابعاد نانو مطالعه و بررسی گردید. اثر طول و پارامتر خارج از مرکزی برای این نوع صفحات بررسی شده و فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش مینیمم جداسازی مقدار تکین استخراج گردیده است.

۷- مراجع

1. Dewapriya, N. and Arachchige, M. “Molecular Dynamics Study of Effects of Geometric Defects on the Mechanical Properties of Graphene”, Nuwan Dewapriya Mallika Arachchige, 2012
2. Behfar, K. and Naghdabadi, R. “Nanoscale Vibrational Analysis of a Multi-Layered Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium”, Compos Sci Technol, Vol. 65, pp. 1159–1164, 2005.
3. Mohammadi, M., Goodarzi, M., Ghayour, M. and Farajpour, A. “Influence of In-Plane Pre-Load on the Vibration Frequency of Circular Graphene Sheet Via Nonlocal Continuum Theory”, Composites Part B: Engineering. Vol. 51, pp. 121-129, 2013.
4. Ravari, M.K. and Shahidi, A. “Axisymmetric Buckling of the Circular Annular Nanoplates using Finite Difference Method,Meccanica., Vol. 48, No. 1, pp. 135-144, 2013.
5. Laura, P.A.A., Masia, U. and Avalos, D.R. “Small Amplitude, Transverse Vibrations of Circular Plates Elastically Restrained Against Rotation with an Eccentric Circular Perforation with a free edge”, Sound and Vibration, Vol. 292, pp. 1004–1010, 2006.
6. Lin, W. “Free Transverse Vibrations of Uniform Circular Plates and Membranes with Eccentric Holes”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 81, No. 3, pp. 425-435,1982.
7. Wei-Ming, L. and Jeng-Tzong, Ch. “Free Vibration Analysis of a Circular Plate with Multiple Circular Holes by Using the MultipoleTrifftz Method”, CMES, Vol. 1403, No. 1, pp. 1-19, 2009.
8. Lee., W.M., Chen, J.T. and Lee, Y.T. “Free Vibration Analysis of Circular Plates with Multiple Circular Holes using Indirect BIEMs”, Sound and Vibration , Vol. 304, pp. 811-830,2007.
9. Hasheminejad, S.M. and ghaheri, A. “Exact Solution for free Vibration Analysis of an Eccentric Elliptical Plate”, Arch. Applied Mech, Vol. 84, pp. 543–552, 2014.
10. Eringen, AC., Nonlocal continuum field theories: Springer, 2002.
11. Pradhan, S.C. and Phadikar, J.K. “Nonlocal Elasticity Theory for Vibration of Nanoplates, Sound and Vibration”, Vol. 325, pp. 206–223, 2009.
12. Aghababaei, R. and Reddy, J.N. “Nonlocal Third-Order Shear Deformation Plate Theory with Application to Bending and Vibration of Plates”, Sound and Vibration Vol. 326, pp. 277–289, 2009.
13. Arash, B. and Wang, Q. “A review on the Application of Nonlocal Elastic Models in Modeling

of Carbon Nanotubes and Graphenes". Computational Materials Science,Vol. 51, No. 1, pp. 303-313, 2012.

14. Rafiee, R. and Moghadam, R.M. "On the Modeling of Carbon Nanotubes, A Critical Review". Composites Part B: Engineering. Vol. 56, pp. 435-449, 2014.
15. Mohammadi, M., Ghayour, M. and Farajpour, A. "Free Transverse Vibration Analysis of Circular and Annular Graphene Sheets with Various Boundary Conditions using the Nonlocal Continuum Plate Model. Composites: Part B", Vol. 45, pp. 32–42, 2013.
16. Lee, W.M., Chen, J.T. and Lee, Y.T. "Free Vibration Analysis of Circular Plates with Multiple Circular Holes using Indirect BIEM and Addition Theorem", Journal of Applied Mechanics, Vol. 78, pp. 1-10, 2011.