تحلیل استاتیکی ورق ضخیم هدفمند پیزوالکتریک براساس تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی

مریم لری دهسراجی[۱]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه ولیعصر(عج) رفسنجان

علیرضا سعیدی[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید باهنر کرمان

(تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۶/۱)

چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیکی ورق ضخیم هدفمند پیزوالکتریک با استفاده از تئوری جدید مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی باترا و ویدولی، صورت گرفته است. مزیت این تئوری نسبت به تئوری‌های برشی این است که اثرات تغییر شکل برشی و عمودی در راستای ضخامت درنظر گرفته می‌شوند و خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نمی‌شود. برای بیان خواص مکانیکی و الکتریکی ورق، از تابع نمایی در امتداد ضخامت استفاده شده است. سه مؤلفه میدان جابجایی در امتداد ضخامت با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر بسط داده می‌شوند و با استفاده از اصل کار مجازی معادلات حاکم بر ورق به‌دست می‌آیند. در نهایت تأثیر شرایط مرزی الکتریکی متفاوت (مداربسته، مدارباز و بسته و بارگذاری الکتریکی) روی دو سطح بالا و پایین ورق بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: ورق هدفمند پیزوالکتریک، تحلیل استاتیکی، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی

Static Analysis of Thick Functionally Graded Piezoelectric Plate Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Theory

M. Lori Dehsaraji
Mechanical Engineering Department
Vali-e-Asr University of Rafsanjan

A.R. Saidi
Mechanical Engineering Department
Shahid Bahonar University of Kerman

(Received: December 11, 2015; Accepted: August 22, 2016)

ABSTRACT

In this paper static analysis of functionally graded piezoelectric thick rectangularplate is studied using the higher-order shear and normal deformable plate theory of Batra and Vidoli. Advantages of this theory compared to the shear theories is that, the effects of the both transverse shear and normal deformations are taken into account and the deflection of the plate along the thickness is not considered as a constant. Simple exponential function is used to explain mechanical and electrical properties through the thickness of the plate.Three displacement components are expanded in the thickness direction using the Legendre polynomials, and the governing equations are derived using the principle of virtual work. Finally, the effect of various electrical boundary conditions (closed circuit, open-closed circuit and electrical loading) on both surfaces of the plate is investigated.

Keywords: Functionally Graded Piezoelectric Plate, Static Analysis, Higher-Order Shear and Normal Deformable Theory

۱- کارشناسی ارشد: loridehsaraji.maryam@gmail.com
۲- استاد (نویسنده پاسخگو): saidi@uk.ac.ir

۱- مقدمه

مواد هدفمند که کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مختلف از جمله صنایع هوافضا دارند، مواد مرکبی هستند که در آن‌ها خصوصیات مواد به آرامی و به‌طور پیوسته از یک لایه‌به‌لایه دیگر تغییر می‌کند. در ورق‌های هدفمند معمولاً فرض می‌شود خواص در امتداد ضخامت به‌طور پیوسته تغییر کنند. در تئوری برشی و عمودی مرتبه بالا که توسط باترا[1] و ویدولی[2] [۱] در سال ۲۰۰۲ معرفی شد، اثر کرنش برشی و عمودی در راستای ضخامت ورق صرف‌نظر نمی‌شود. همچنین برخلاف تئوری‌های کلاسیک[۲] و تئوری‌های برشی [۴-۳]، خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نمی‌شود، لذا این تئوری برای تحلیل ورق‌های ضخیم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

باترا [۵] با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی را برای ورق‌های الاستیک خطی غیرقابل تراکم هدفمند ارائه کرد. شیخ‌الاسلامی و سعیدی، با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر برشی و عمودی به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند همسانگرد با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده پرداختند [۶].

اولین کاربردهای مواد پیزوالکتریک به کارهای تجربی بیلی[3] و هوبارد[4]، برمی‌گردد که این مواد به‌عنوان عملکرد در کنترل ارتعاشات استفاده شده است [۷]. مطالعات اولیه در زمینه رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های تک‌لایه پیزوالکتریک توسط تیرسن[5]، انجام شد [۸]. مطالعه ورق‌های هدفمند پیزوالکتریک، توسط لیو[6] و تانی[7] شروع شد، که به بررسی انتشار موج در این ورق‌ها پرداختند [۹]. دینگ[8] و همکاران، حل دقیق ارتعاشات آزاد ورق‌های دایروی پیزوالکتریک را ارائه کردند [۱۰]. وانگ[9] و یانگ[10]، مروری جامع بر تئوری‌های مرتبه بالا استفاده شده در بررسی رفتار دینامیکی ورق‌های پیزوالکتریک داشته‌اند [۱۱]. دیویس[11] و لزیوتر[12]، اثر شرایط مرزی الکتریکی را بر سختی مؤثر لایه‌های پیزوالکتریک بررسی کردند [۱۲]. لیم[13] و هی[14]، یک حل دقیق را برای کشش، خمش و پیچش یکنواخت ورق کامپوزیت لایه‌های پیزوالکتریک ارائه کردند [۱۳].

چین[15] و دینگ[16]، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک را بررسی کردند [۱۴]. جین[17] و ژانگ[18]، به‌بررسی ترک در ورق‌های هدفمند پیزوالکتریک پرداختند [۱۵]. ژانگ و شانگ[19]، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به‌بررسی خمش ورق‌های هدفمند پیزوالکتریک با شرایط مرزی الکتریکی متفاوت پرداختند [۱۶]. لو[20] و همکاران، حل دقیق خمش استوانه‌ای ورق‌های هدفمند پیزوالکتریک را ارائه کردند [۱۷]. ژانگ و یو[21]، حل دقیق ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های هدفمند پیزوالکتریک را براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی ارائه کردند [۱۸]. نجفی‌زاده و عنوانی به تحلل کمانش ورق هدفمند دایروی بالایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا پرداختند [۱۹]. بهجت و همکاران، به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداختند [۲۰]. بداغی و شاکری، ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند پیزوالکتریک براساس تئوری برشی مرتبه اول را بررسی کردند [۲۱]. نجفی‌زاده و همکاران به تحلیل خمش ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداختند [۲۲].

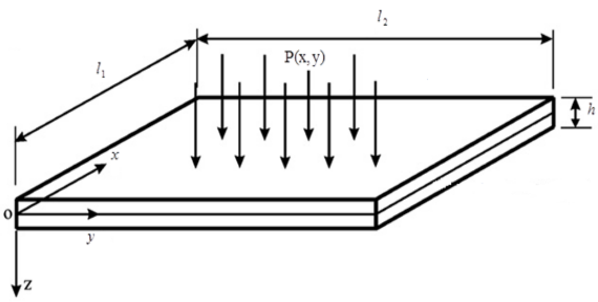
در این مقاله برای نخستین بار، تحلیل کشش و خمش ورق ضخیم هدفمند پیزوالکتریک، برای بارگذاری مکانیکی و الکتریکی براساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و قائم ارائه شده است. ورق چهارطرف تکیه‌گاه ساده است و بار یکنواخت روی سطح بالای ورق وارد می‌شود. مؤلفه‌های میدان جابجایی براساس چندجمله‌ای‌های لژاندر در امتداد ضخامت تا پنج ترم بسط داده می‌شوند. با استفاده از اصل کار مجازی معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند.

1- Batra
2- Vidoli
3- Bailey
4- Hubbard
5- Tiersen
6- Liu
7- Tani
8 - Ding
9- Wang
10- Yang
11 Davis
12- Lesieutre
13- Lim
14- He
15- Chen
16- Ding
17- Jin
18- Zhong
19- Shang
20 - Lu
21- Yu

۲- میدان جابه‌جایی و تنش

ورق با ضخامت h و طول اضلاع l_1 و l_2 که در راستای z مدرج شده‌است. درنظر بگیرید، بار بر واحد سطح $P(x,y)$ روی سطح بالای ورق ($z=-h/2$) اعمال می‌شود (شکل **۱**). فرض بر این است که، ضریب پواسون ورق در راستای ضخامت ثابت فرض می‌شود و بقیه خواص مکانیکی و الکتریکی ورق، در راستای z به‌طور پیوسته براساس تابع نمایی رابطه (۱)، تغییر می‌کند:

$$\Gamma(z)=\Gamma_0 e^{\left(N\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)\right)} \tag{۱}$$



شکل (۱): مدل هندسی ورق.

که، Γ بیانگر خواص مکانیکی یا الکتریکی ورق، پارامتر N نشان‌دهنده توان ماده هدفمند، Γ^0 خواص ماده در سطح زیرین ورق می‌باشد، میدان جابجایی به‌صورت (۲) درنظر گرفته می‌شود:

$$v_i(x,y,z)=v_\alpha(x,y,z)\delta_{i\alpha} + w(x,y,z)\delta_{i3} \tag{۲}$$

که در آن، v_i معرف مؤلفه‌های میدان جابجایی کلی ورق بوده، v_α و w به‌ترتیب مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای و خارج از صفحه ورق می‌باشند. زیرنویس α نشان‌دهنده راستاهای x وy بوده و δ بیانگر تابع دلتای کرونکر[1] می‌باشد. مؤلفه‌های میدان جابجایی در راستای z به‌صورت بسط چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر نوشته می‌شوند، این چندجمله‌ای‌ها به‌صورت روابطه (۳) تعریف می‌شوند [۶]:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a(z)L_b(z)dz=\delta_{ab} \qquad a,b=0,1,2,...,K\\
&L_{n-1}(z)=\sqrt{\frac{(2n-1)}{h}}P_{n-1}(z) \qquad n\ge 1\\
&P_0(z)=1,\\
&P_1(z)=\frac{2z}{h},\\
&P_{n+1}(z)=\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\left(\frac{2z}{h}\right)P_n(z)-\left(\frac{n}{n+1}\right)P_{n-1}(z)
\end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن، K مرتبه تئوری مورد استفاده می‌باشد. با استفاده از چندجمله‌ای‌های فوق می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را به‌صورت ر ابطه (۴) درنظر گرفت:

$$\begin{aligned}
&v_\alpha(x,y,z)=L_a(z)v_\alpha^a(x,y)\\
&w(x,y,z)=L_a(z)w^a(x,y) \qquad a=0,1,2,...,K
\end{aligned} \tag{۴}$$

می‌توان مشتق چندجمله‌ای‌های لژاندر را در قالب ترکیب خطی از خود چندجمله‌ای‌ها به‌صورت رابطه (۵) نوشت:

$$L'_a(z)=D_{ab}L_b(z) \tag{۵}$$

که در معادله (۵)، D ماتریس ضرائب مشتق است. برای نمونه، برای تئوری مرتبه پنجم درایه‌های این ماتریس به‌صورت زیر می‌باشند:

$$[D]=\frac{2}{h}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0\\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{55} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \tag{۶}$$

تانسورکرنش بی‌نهایت کوچک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{۷}$$

روابط بین تنش-کرنش برای ماده پیزوالکتریک به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & e_{33}\\ 0 & e_{15} & 0\\ e_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix} \tag{۸}$$

1- Kronecker's Delta Function

که در این روابط، $[C]$ ماتریس سختی پیزوالکتریک[1]، $[\lambda]$ ماتریس نفوذپذیری دی‌الکتریک مطلق[2] و $[e]$، ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک[3]، می‌باشند.
مؤلفه‌های میدان جابجایی الکتریکی ماده پیزوالکتریک به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (۹)$$

رابطه میان میدان الکتریکی (E) و تابع پتانسیل الکتریکی (Φ)، به‌صورت زیر بیان می‌گردد [۱۶]:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (۱۰)$$

واحد میدان الکتریکی ولت بر متر $\left(V/m\right)$، می‌باشد.

۳- معادلات حاکم بر ورق

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر ورق مستطیلی هدفمند پیزوالکتریک از معادلات تعادل در غیاب نیروهای حجمی در دستگاه دکارتی به‌صورت رابطه (۱۱)، استفاده می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (۱۱)$$

که در آن، σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش می‌باشد، به‌منظور دست‌یابی به‌معادلات حاکمه، از اصل کار مجازی استفاده می‌شود. با درنظرگرفتن میدان جابجایی مجازی $\delta\eta_i$ و ضرب داخلی آن در معادله (۱۱)، با فرض این‌که تابعیت میدان جابجایی مجازی $\delta\eta_i$ از z را بتوان به‌صورت چندجمله‌ای‌های لژاندر نوشت همچنین با انتگرال‌گیری روی حجم ورق، و استفاده از روابط (۲) و (۴) و با معرفی پارامترهای زیر:

$$M^{a}_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} L_a dz, T^{a}_{i} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} L_a dz,$$
$$B^{a}_{i} = L_a(\tfrac{h}{2})\sigma_{i3}(x,y,\tfrac{h}{2}) - L_a(-\tfrac{h}{2})\sigma_{i3}(x,y,-\tfrac{h}{2}) \quad (۱۲)$$

خواهیم داشت:

$$\int_A \delta\eta^{a}_{\alpha} M^{a}_{\alpha\beta,\beta} dA + \int_A \delta\eta^{a}_{3} T^{a}_{\alpha,\alpha} dA + \int_A \delta\eta^{a}_{i}\left(B^{a}_{i} - D_{ab} T^{b}_{i}\right) dA = 0 \quad (۱۳)$$

از آنجاکه باید معادله (۱۳) برای تمامی مقادیر $\delta\eta^{a}$ برقرار باشد، بنابراین، معادله (۱۳) به‌فرم (۱۴- الف) حاصل می‌شود:

$$M^{a}_{\alpha\beta,\beta} + B^{a}_{\alpha} - D_{ab} T^{b}_{\alpha} = 0 \quad (\text{۱۴- الف})$$
$$T^{a}_{\alpha,\alpha} + B^{a}_{3} - D_{ab} T^{b}_{3} = 0 \qquad \alpha,\beta = 1,2$$

علاوه‌بر این ورق به‌دلیل خاصیت الکتریکی، باید معادله ماکسول را نیز ارضا کند [۲۴]:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{\nabla}.\vec{D} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z}) dz = 0 \quad (\text{۱۴- ب})$$

معادلات (۱۴) معادلات حاکم بر ورق در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی می‌باشند. در این معادلات، $M^{0}_{\alpha\beta}$ نیروهای درون صفحه‌ای و $M^{a}_{\alpha\beta}$ ممان‌های برون صفحه‌ای از مرتبه a است، T^{0}_{i} برآیند نیروهای جانبی، T^{a}_{i} ممان نیروهای جانبی از مرتبه a می‌باشد، B^{a}_{i} ممان مرتبه a بردارهای تنش سطحی وارده بر سطوح بالا و پایین ورق می‌باشد. با درنظرگرفتن شرایط مرزی به‌صورت رابطه (۱۵):

$$\sigma_z\left(z = -h/2\right) = -P\left(x,y\right)$$
$$\sigma_z\left(z = +h/2\right) = 0$$
$$\tau_{xz}\left(z = \pm h/2\right) = 0 \quad (۱۵)$$
$$\tau_{yz}\left(z = \pm h/2\right) = 0$$

بنابراین در روابط (۱۴) داریم:

$$b^{a}_{1} = b^{a}_{2} = b^{a}_{3} = 0$$
$$B^{a}_{1} = 0$$
$$B^{a}_{2} = 0 \quad (۱۶)$$
$$B^{a}_{3} = L_a(-\frac{h}{2})\, P(x,y)$$

به‌عنوان فرض کلی، تابع پتانسیل الکتریکی ایجادشده در ورق، به‌فرم (۱۷) درنظر گرفته می‌شود:

1- Piezoelectric Stiffness Matrix
2- Absolute Dielectric Permittivity Matrix
3- Piezoelectric Charge Constants Matrix

$$\Phi(x,y,z)=A(x,y)z+B(x,y)+\phi(x,y)\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^{2}\right] \qquad (۱۷)$$

توابع مجهول $A(x,y)$ و $B(x,y)$ از شرایط مرزی الکتریکی ورق حاصل می‌شوند. با بازکردن معادلات (۱۴- الف)، برای $\alpha,\beta=1,2$، جایگزین‌کردن روابط (۸) در (۱۴)، جایگذاری کرنش‌ها برحسب مؤلفه‌های جابجایی با استفاده از رابطه (۸)، جایگذاری (۱۷) در (۱۰)، سپس با جایگذاری در (۹) و نهایتاً در (۱۴)، فرم کلی معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند. توابع مجهول $A(x,y)$ و $B(x,y)$ برای شرایط مرزی الکتریکی متفاوت به‌صورت زیر می‌باشند:

مدار بسته: فرض می‌شود دو طرف ورق اتصال کوتاه شود، یا به ولتاژ یکسان وصل شوند، بنابراین شرایط مرزی الکتریکی بر دو سطح الکترود را می‌توان چنین نوشت:

$$\Phi\left(z=\pm\frac{h}{2}\right)=0 \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری شرایط مرزی (۱۸)، در رابطه (۱۷)، توابع مجهول $A(x,y)$ و $B(x,y)$ صفر می‌شوند، بنابراین، تابع پتانسیل الکتریکی به‌فرم (۱۹) به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x,y,z)=\phi(x,y)\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^{2}\right] \qquad (۱۹)$$

مدار باز و بسته: فرض می‌شود یک سطح ورق ولتاژ صفر اعمال شود و سطح دیگر عایق (در تماس با جریان هوا)، درنظر گرفته شود، بنابراین شرایط مرزی الکتریکی بر دو سطح الکترود چنین بیان می‌شوند:

$$\Phi\left(z=-\frac{h}{2}\right)=0,\ D_z\left(z=+\frac{h}{2}\right)=0 \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری شرایط مرزی (۲۰) در رابطه (۱۷) توابع مجهول $A(x,y)$ و $B(x,y)$ به‌فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\lambda_{33}\left(\frac{h}{2}\right)}\left[e_{31}\left(\frac{h}{2}\right)L_c\left(\frac{h}{2}\right)\left[v^{c}_{1,1}+v^{c}_{2,2}\right]\right.\\&\left.+e_{33}\left(\frac{h}{2}\right)L_c\left(\frac{h}{2}\right)\left[D_{dc}w^{d}\right]+\frac{4}{h}\phi\right]\\B&=\frac{Ah}{2}\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

بارگذاری الکتریکی: در این حالت فرض می‌شود هیچ نیروی عرضی به ورق وارد نمی‌شود پس $\sigma_z(z=-h/2)=0$ و فقط روی سطح بالای ورق ولتاژ سینوسی اعمال می‌شود و سطح پایین ورق عایق الکتریکی است. لذا شرایط مرزی الکتریکی ورق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\Phi\left(z=-\frac{h}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right),\\&D_z\left(z=+\frac{h}{2}\right)=0\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری شرایط مرزی (۲۲) در رابطه (۱۶) توابع مجهول $A(x,y)$ و $B(x,y)$ به‌فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\lambda_{33}\left(\frac{h}{2}\right)}\left[e_{31}\left(\frac{h}{2}\right)L_c\left(\frac{h}{2}\right)\left[v^{c}_{1,1}+v^{c}_{2,2}\right]\right.\\&\left.+e_{33}\left(\frac{h}{2}\right)L_c\left(\frac{h}{2}\right)\left[D_{dc}w^{d}\right]+\frac{4}{h}\phi\right]\\B&=\frac{Ah}{2}+\sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

۴- حل ناویر

فرض می‌شود ورق مستطیلی چهار طرف تکیه‌گاه ساده که روی سطح بالای آن بار یکنواخت P_0 اعمال می‌شود. شرایط مرزی روی چهار لبه ورق به‌صورت (۲۴) می‌باشند:

$$\begin{aligned}&W^{a}=0,M^{a}_{11}=0,M^{a}_{12}=0 \qquad on\ x=0,l_1\\&W^{a}=0,M^{a}_{22}=0,M^{a}_{12}=0 \qquad on\ y=0,l_2\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

بنابراین، باتوجه به شرط مرزی بالا میدان جابه‌جایی، بار عرضی و تابع پتانسیل را به‌صورت روابط (۲۵) می‌توان بسط داد:

$$\begin{aligned}&v^{a}_{1}=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}v^{amn}_{1}\cos\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)\\&v^{a}_{2}=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}v^{amn}_{1}\sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)\\&w^{a}=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}w^{amn}\sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)\\&P_0=\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{16P_0}{mn\pi^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)\\&\Phi(x,y,z)=A(x,y)z+B(x,y)+\phi(x,y)\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^{2}\right],\\&\phi(x,y)=\bar{\phi}^{mn}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که در آن، ضرائب $\tilde{V}_1^{amn}, \tilde{V}_2^{amn}, \tilde{W}^{amn}, \tilde{\varphi}$ به‌ترتیب، مؤلفه‌های ثابت جابجایی در راستاهای x، y، z و تابع پتانسیل می‌باشند. در این سری‌ها، m و n تعداد جملات موجود در سری می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲۵) در (۱۴)، (۱۹)، (۲۱) و (۲۳) و با درنظرگرفتن $A(x,y)=\tilde{A}^{mn}\sin(\frac{m\pi x}{l_1})\sin(\frac{n\pi y}{l_2})$ و $B(x,y)=\tilde{B}^{mn}\sin(\frac{m\pi x}{l_1})\sin(\frac{n\pi y}{l_2})$ و مرتب‌سازی، معادلات حاکم بر ورق حاصل می‌شوند، که در پیوست آورده شده‌اند. بنابراین، برای هر تئوری از مرتبه k تعداد معادلات $3k+4$ می‌باشد.

۵- بحث و نتایج عددی

در این قسمت نتایج عددی برای ورق هدفمند پیزوالکتریک، که سطح زیرین آن $pzt-4$ می‌باشد و بار یکنواخت P_0 روی سطح بالای ورق اعمال می‌شود، ارائه شده است. خواص $pzt-4$ به‌صورت مقادیر رابطه (۲۶) است [۲۱]:

$$
\begin{aligned}
&C_{11}=139\ Gpa,\ C_{12}=77.8\ Gpa,\ C_{13}=74.3\ Gpa,\\
&C_{33}=115\ Gpa,\ C_{55}=25.6\ Gpa,\\
&e_{15}=12.7\left(c.m^{-2}\right),\ e_{31}=-5.2\left(c.m^{-2}\right),\ e_{33}=15.1\left(c.m^{-2}\right)\\
&\lambda_{11}=6.46*10^{-9}(F.m^{-2}),\lambda_{33}=5.62*10^{-9}(F.m^{-2})
\end{aligned}
\qquad (۲۶)
$$

در ابتدا جهت بررسی صحت نتایج مقایسه‌ای در جدول **۱**، با مرجع [۱۶]، براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی صورت گرفته است. در این مقایسه بار سینوسی روی سطح بالای ورق اعمال می‌شود، همان‌طورکه مشاهده می‌شود نتایج بسیار به هم نزدیک بوده و قابل قبول هستند.

جابجایی‌ها و تنش‌ها به‌صورت روابط (۲۷) بی‌بعد شده‌اند:

$$
\begin{aligned}
&\bar{w}=w\left(\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2},z\right)\frac{(c_{11PZT-4})h^3}{P_0 l_1^4}*10\\
&\bar{\sigma}_x=\sigma_x\left(\frac{l_1}{2},\frac{l_2}{2},z\right)\frac{h}{P_0 l_1}\\
&\bar{\tau}_{xy}=\tau_{xy}\left(0,0,z\right)\frac{h}{P_0 l_1}\\
&\bar{v}_1=v_1\left(0,\frac{l_2}{2},z\right)\frac{(c_{11PZT-4})h^3}{P_0 l_1^4}*100
\end{aligned}
\qquad (۲۷)
$$

در جدول **۲**، همگرایی مقادیر خیز بی‌بعد مرکز ورق مربعی برای نسبت‌های ضخامت به طول متفاوت و توان‌های مختلف با استفاده از تئوری مرتبه اول تا پنجم، برای حالت مداربسته ارائه شده است، همان‌طورکه مشاهده می‌شود، برای ورق خیلی نازک جواب‌ها از تئوری مرتبه دوم به بعد کاملاً یکسان می‌شوند، بنابراین جواب دقیق حاصل می‌شود و استفاده از تئوری‌های بالاتر نیاز نیست. برای ورق نازک و ضخیم جواب‌ها با اختلاف بسیار کم، از تئوری مرتبه سوم به بعد همگرا می‌شوند، و حاصل به جواب دقیق نزدیک‌تر می‌شود، بنابراین می‌توان گفت تئوری مرتبه پنجم جواب‌های بسیار مناسبی را برای ورق‌های ضخیم ارائه می‌کند.

جدول (۱): مقایسه جابجایی و تنش‌ها برای ورق مربعی با مرجع [۱۶]، مداربسته $(h/l_1=0.1)$.

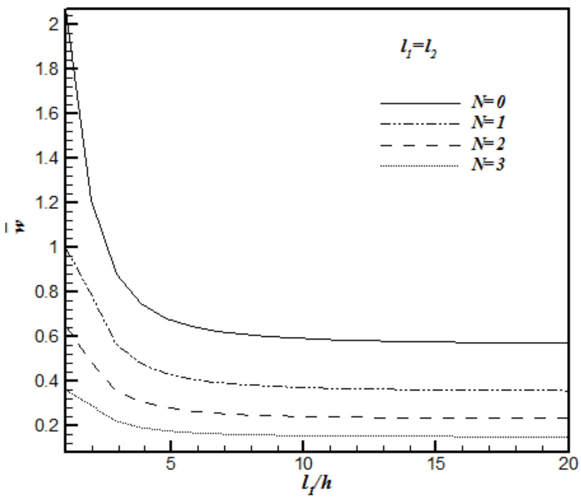
$\sigma_x(pa)$		$V_1*10^{-11}(m)$		$W*10^{-10}(m)$		N
مقدارمحاسبه شده	حل دقیق	مقدار محاسبه شده	حل دقیق	مقدارمحاسبه شده	حل دقیق	
۱۵/۳۸۲۱	۱۵/۳۳۲۳	-۳/۰۸۶۰	-۳/۰۳۷۷	۲/۵۱۰۰	۲/۵۱۰۰	-۱
۱۳/۰۲۹۳	۱۲/۹۹۹۱	-۲/۶۳۷۹	-۲/۶۱۹۲	۱/۹۲۹۸	۱/۹۲۵۰	-۰/۵
۱۰/۹۴۹۱	۱۰/۹۹۹۲	-۲/۲۶۰۴	-۲/۲۰۰۸	۱/۴۹۴۷	۱/۴۸۲۵	۰
۹/۲۱۴۰	۹/۱۶۶۰	-۱/۹۴۱۶	-۱/۸۶۶۱	۱/۱۷۰۵	۱/۱۶۰۰	۰/۵
۷/۶۸۳۲	۷/۶۶۶۱	-۱/۶۶۳۷	-۱/۶۱۵۱	۰/۹۲۳۹	۰/۹۱۲۵	۱

شکل‌های **۲** تا **۷**، نتایج را برای حالت مداربسته نشان می‌دهند. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، با افزایش توان ماده هدفمند ورق سخت‌تر می‌شود و خیز آن کاهش می‌یابد. در ورق‌های خیلی نازک و نازک، خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت می‌ماند ولی در ورق‌های ضخیم تغییر می‌کند. برای ورق نازک تغییرات جابه‌جایی درون صفحه‌ای، خطی ولی برای ورق ضخیم غیرخطی می‌باشد. باتوجه به نمودارها مشاهده می‌شود مقدار تنش‌های عمودی درون‌صفحه‌ای $\overline{\sigma_x}$ و همچنین تنش برشی درون‌صفحه‌ای $\overline{\tau_{xy}}$ در این ورق هدفمند با هر نسبت ضخامت و با توان ماده هدفمند $(N=2)$ در صفحه

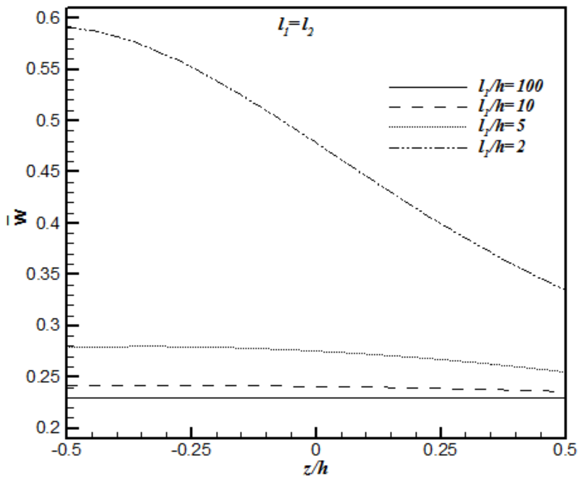
$(z \approx -0.15h)$ نزدیک صفر هستند، و همچنین در حالت کلی مقدار تنش‌های برون‌صفحه‌ای در مقابل سه مؤلفه دیگر تنش کوچک هستند، پس می‌توان صفحه $(z \approx -0.15h)$ را به‌عنوان رویه خنثی ورق دانست.

جدول (۲): همگرایی مقادیر خیز بی‌بعد مرکز ورق مربعی برای نسبت‌های ضخامت به طول متفاوت و توان‌های مختلف با استفاده از تئوری مرتبه اول تا پنجم، مداربسته.

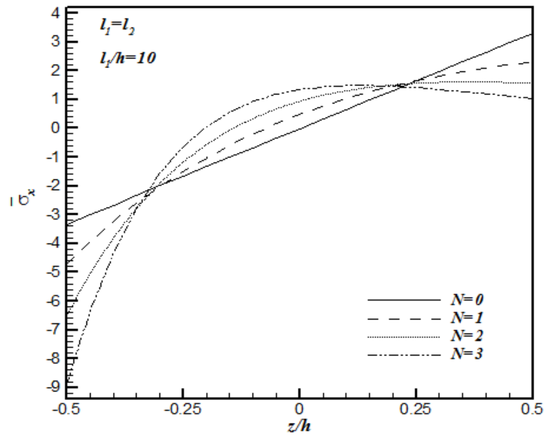
h/l_1	N	K=۱	K=۲	K=۳	K=۴	K=۵
۰/۰۱	-۳	۲/۳۰۸۶	۲/۹۸۴۹	۲/۹۸۴۸	۲/۹۸۴۸	۲/۹۸۴۸
	-۲	۱/۳۵۰۷	۱/۶۹۴۰	۱/۶۹۴۰	۱/۶۹۴۰	۱/۶۹۴۰
	۰	۰/۴۷۱۵	۰/۵۶۳۰	۰/۵۶۳۰	۰/۵۶۳۰	۰/۵۶۳۰
	۲	۰/۱۸۲۹	۰/۲۲۹۳	۰/۲۲۹۳	۰/۲۲۹۳	۰/۲۲۹۳
۰/۱	-۳	۲/۳۹۴۴	۳/۰۳۲۵	۳/۰۳۱۲	۳/۰۰۹۹	۳/۰۳۲۹
	-۲	۱/۴۱۹۲	۱/۷۳۸۵	۱/۷۴۳۹	۱/۷۲۸۶	۱/۷۴۳۳
	۰	۰/۵۰۵۱	۰/۵۸۷۷	۰/۵۹۲۴	۰/۵۹۱۰	۰/۵۹۱۰
	۲	۰/۱۹۵۴	۰/۲۴۰۲	۰/۲۴۱۱	۰/۲۴۰۰	۰/۲۴۱۰
۰/۲	-۳	۲/۶۶۱۲	۳/۱۷۳۰	۳/۱۶۸۹	۳/۰۷۱۷	۳/۱۷۵۰
	-۲	۱/۶۲۵۷	۱/۸۶۹۸	۱/۸۹۲۱	۱/۸۲۳۰	۱/۸۸۹۰
	۰	۰/۶۰۴۲	۰/۶۶۱۴	۰/۶۷۴۱	۰/۶۷۴۰	۰/۶۸۰۲
	۲	۰/۲۳۲۱	۰/۲۷۷۲	۰/۲۷۶۱	۰/۲۷۱۴	۰/۲۷۵۴
۰/۵	-۳	۴/۴۵۷۷	۴/۱۲۶۸	۴/۱۱۱۹	۳/۹۶۲۸	۴/۰۹۷۱
	-۲	۲/۹۳۹۴	۲/۶۹۳۰	۲/۸۵۹۸	۲/۰۵۰۱	۲/۷۷۷۸
	۰	۱/۲۰۲۶	۱/۱۲۹۹	۱/۲۴۵۳	۱/۱۸۴۴	۱/۱۸۵۰
	۲	۰/۴۵۱۵	۰/۴۷۰۲	۰/۴۸۷۷	۰/۴۷۹۱	۰/۴۷۸۲



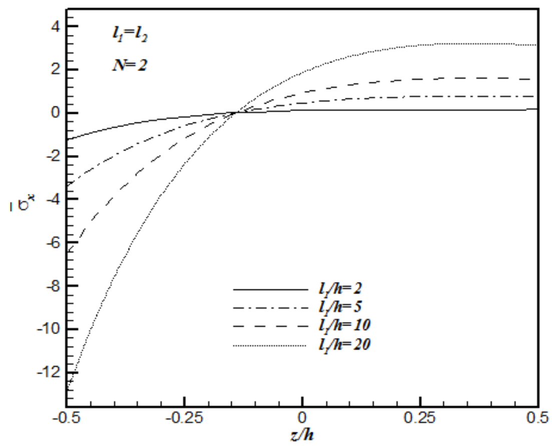
شکل (۲): تغییرات خیز بی‌بعد مرکز ورق با نسبت طول به ضخامت ورق برای توان‌های متفاوت.



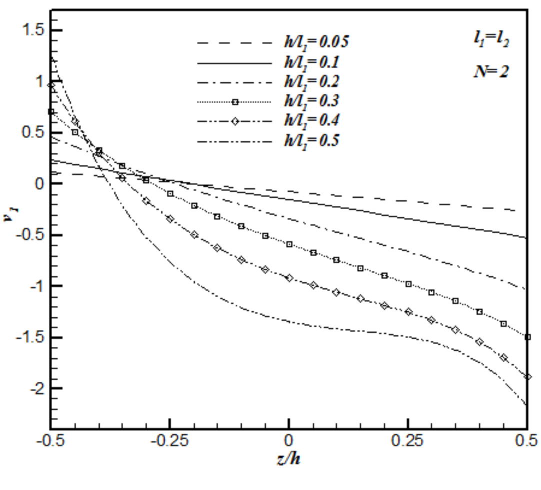
شکل (۳): تغییرات خیز بی‌بعد مرکز ورق در امتداد ضخامت برای نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت.



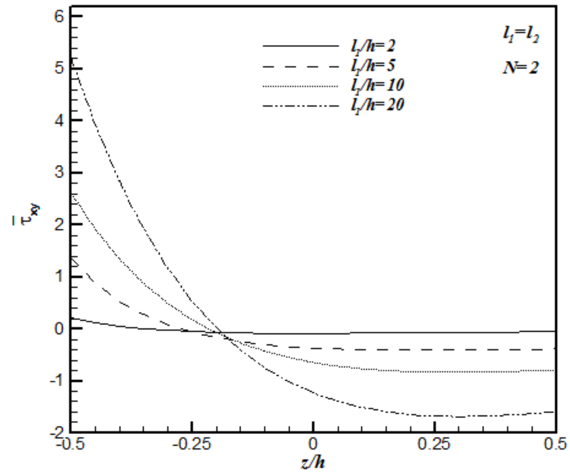
شکل (۴): تغییرات $\overline{\sigma_x}(l_1/2, l_2/2\,, z)$ در امتداد ضخامت ورق برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت.



شکل (۵): تغییرات $\overline{\sigma_x}(l_1/2, l_2/2\,, z)$ در امتداد ضخامت ورق برای توان‌های متفاوت.

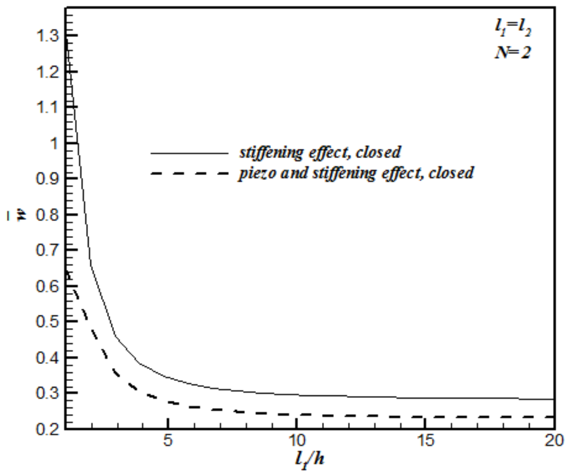


شکل (۶): تغییرات $\overline{\tau_{xy}}(0,0,z)$ در امتداد ضخامت ورق برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت.



شکل (۷): تغییرات $\overline{v_1}(0, l_2/2\,, z)$ در امتداد ضخامت ورق برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

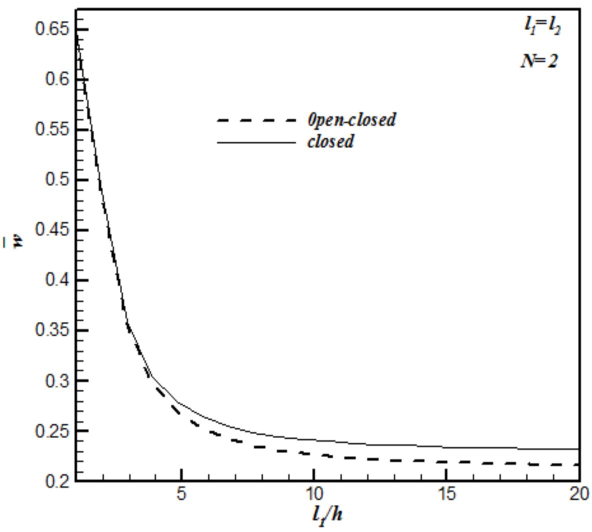
شکل۸، خیز بی‌بعد مرکز ورق را برای دو حالت مدارباز و بسته و مداربسته مقایسه کرده است، همان‌طورکه مشاهده می‌شود برای ورق نازک خیز ورق در حالت مداربسته بیش‌تر است، ولی برای ورق ضخیم نتایج تقریباً یکسان‌اند.



شکل (۸): مقایسه تغییرات خیز بی‌بعد مرکز ورق با نسبت طول به ضخامت، برای دو حالت مدارباز و بسته و مداربسته.

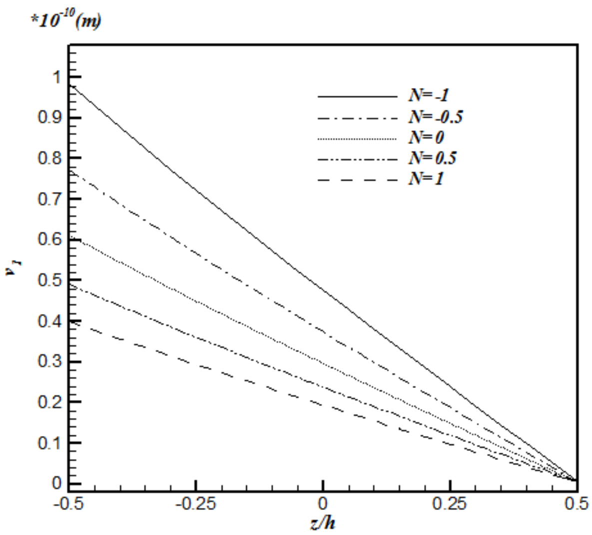
همچنین، جهت بررسی اثر پیزو روی خیز مرکز ورق، با صفر قراردادن ماتریس ثوابت شارژ ماده پیزوالکتریک $[e]$، در معادلات حاکمه ورق، شکل **۹** ترسیم شده است. با درنظرنگرفتن اثر الکتریکی ورق، توزیع تابع پتانسیل در امتداد ضخامت ورق، کم‌اهمیت می‌شود، بنابراین خیز ورق با شرایط مرزی متفاوت یکسان می‌شود. همان‌طورکه مشاهده می‌شود،

اثر الکتریکی پیزو، خیزورق را کاهش می‌دهد، مخصوصاً برای ورق‌های ضخیم این کاهش محسوس‌تر است.



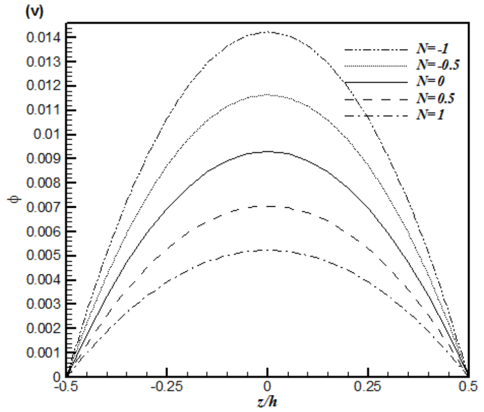
شکل (۹): بررسی اثر الکتریکی مواد پیزوالکتریک روی خیز بی‌بعد مرکز ورق.

شکل‌های **۱۰** و **۱۱**، به‌ترتیب تغییرات خیز و جابجایی درون صفحه‌ای ورق در امتداد ضخامت را برای حالت بارگذاری الکتریکی نشان می‌دهند، همان‌طورکه مشاهده می‌شود، خیز مرکز ورق نازک $(h/l_1 = 0.1)$ برای شرایط بارگذاری الکتریکی در امتداد ضخامت تغییر می‌کند، درحالی‌که برای بارگذاری مکانیکی، ثابت باقی می‌ماند.

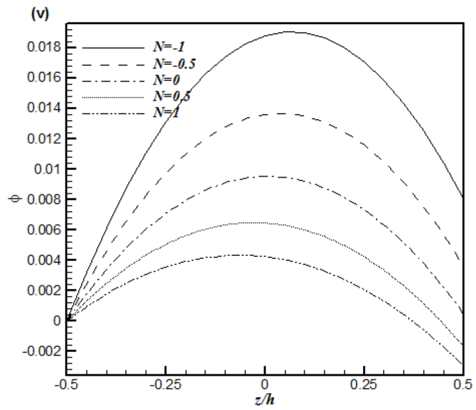


شکل (۱۰) : تغییرات جابه‌جایی‌عرضی ورق مربعی در امتداد ضخامت برای توان‌های متفاوت ماده هدفمند $(h/l_1 = 0.1)$، بارگذاری الکتریکی.

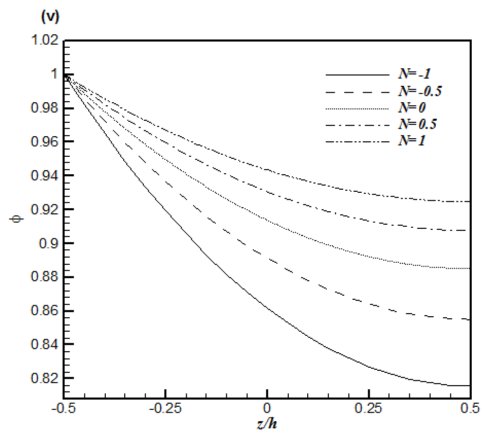
شکل **۱۱– الف، ب و ج**، توزیع تابع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت را به‌ترتیب برای سه حالت مداربسته، مدارباز و بسته و بارگذاری الکتریکی نشان می‌دهند.



شکل (۱۱– الف): توزیع تابع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت، مداربسته.



شکل (۱۱– ب): توزیع تابع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت، مدارباز و بسته.



شکل (۱۱– ج): توزیع تابع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت، بارگذاری الکتریکی.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله تئوری برشی و عمودی مرتبه بالا برای تحلیل استاتیکی ورق هدفمند پیزوالکتریک چهار طرف تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی استفاده شد. مزیت این تئوری آن است که از هیچ یک از مؤلفه‌های تنش و کرنش صرف‌نظر نمی‌کند. همچنین در این تئوری، خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت فرض نمی‌شود. لذا این تئوری برای ورق‌های ضخیم نیز جواب‌های مناسبی را ارائه می‌کند. همچنین در مقایسه با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، دست‌یابی و حل معادلات حاکمه ورق با استفاده از این تئوری آسان است، از آنجاکه در ورق نازک برای بارگذاری مکانیکی خیز ورق در امتداد ضخامت ثابت باقی می‌ماند، ولی برای بارگذاری الکتریکی ثابت باقی نمی‌ماند، این تئوری برای بارگذاری الکتریکی بسیار مناسب می‌باشد. نتیجه مهم دیگری که در این مقاله گرفته شد، این است که خاصیت الکتریکی ورق باعث کاهش خیز آن می‌گردد.

۷- مراجع

1. Batra, R.C. and Vidoli, S. "Higher Order Piezoelectric Plate Theory Derived From a Three-Dimensional Variational Principle", AIAA Journal, Vol. 40, No. 1, pp. 91–104, 2002.
2. Reissner, E. "On The Theory of Bending of Elastic Plates", Journal of Mathematics and Physics, Vol. 23, No. 2, pp. 184-191, 1944.
3. Mindlin, R.D., Schaknow, A., and Deresiewicz, H. "Flexural Vibration of Rectangular Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, No. 2, pp. 430-436, 1956.
4. Reddy, J.N. "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, No. 4, pp. 745–752, 1984.
5. Batra, R.C. "Higher Order Shear and Normal Deformable Theory for Functionally Graded Incompressible Linear Elastic Plates", Journal of Thin-Walled Structures, Vol. 45, No. 12, pp. 974–982, 2007.
6. Sheikholeslami, S.A. and Saidi, A.R. "Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Resting on Elastic Foundation Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory", Composite Structures Journal, Vol. 106, pp. 350-361, 2013.
7. Bailey, T. and Hubbard, J.E. "Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam", Journal of Guid. Control Dynamic, Vol. 8, No. 5, pp. 605–611, 1985.
8. Tiersten, H.F. "Linear Piezoelectric Plate Vibrations", New York, Plenum. 1969.
9. Liu, G.R. and Tani, J. "Surface waves in Functionally Gradient Piezoelectric Plates". Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 116, No. 4, pp. 440–448, 1994.
10. Ding, H.J., Xu, R.Q., Chi, Y.W., and Chen, W.Q. "Free Axisymmetric Vibration of Transversely Isotropic Piezoelectric Circular Plates". International Journal of Solids Structure. Vol. 36, No. 6, pp. 4629–4652, 1999.
11. Wang, J. and Yang, J. "Higher-Order Theories of Piezoelectric Plates and Applications", Applied Mechanics Reviews, Vol. 53, No. 4, pp. 83-99, 2000.
12. Davis, C.L. and Lesieutre, G.A. "An Actively Tuned Solid-State Vibration Absorber Using Capacitive Shunting of Piezoelectric Stiffness". Journal of Sound and vibration, Vol. 232, No.3, pp. 601-617, 2000.
13. Lim, C.W. and He, L.H. "Exact Solution of a Compositionally Graded Piezoelectric Layer under Uniform Stretch, Bending and Twisting", International. Journal of. Mechanic. Vol. 43, No. 5, pp. 2479–2492, 2001.
14. Chen, W.Q. and Ding, H.J. "On Free Vibration of a Functionally Graded Piezoelectric Rectangular Plate". Journal of Acta Mechanica. Vol. 153, No. 3, pp. 207–216, 2002.
15. Jin, B. and Zhong, Z. "A Moving Mode-III Crack In Functionally Graded Piezoelectric Material Permeable Problem". Journal of Mechanics Research Communications. Vol. 29, No. 11, pp. 217–224, 2002.
16. Zhong, Z. and Shang, E.T. "Three-Dimensional Exact Analysis of A Simply Supported Functionally Gradient Piezoelectric Plate", International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, No. 8, pp. 5335–5352, 2003.
17. Lu, P., Lee, H.P., and Lu, C. "An Exact Solution for Functionally Graded Piezoelectric Laminates in Cylindrical Bending", International Journal of. Mechanic, Vol. 47, No. 7, pp. 437–458, 2005.
18. Zhong, Z. and Yu, T. "Vibration of Simply Supported Functionally Graded Piezoelectric Rectangular Plate", Journal of Smart Materials and Structures, Vol. 15, No. 10, pp. 1404–1412, 2006.
19. Najafizadeh, M.M. and Onvani, A. "Mechanical Buckling Analysis of a FGM Circular Plate with

Actuator-Actuator Piezoelectric Layers, Based on Neutral-Axis' Position and using Higher-Order Shear Deformation Plate Theory". Aerospace Mechanics Journal. Vol. 6, No. 4, pp. 43-54, 2010, (In Persian).

20. Behjat B, Salehi, M., Armina, A., Sadighi, M., and Abbasi, M. "A Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Plates under Mechanical and Electrical Loading", Scientia Iranica Journal, Vol. 184, No. 13, pp. 986–994, 2011.

21. Bodaghi, M. and Shakeri, M. "An Analytical Approach for free Vibration and Transient Response of Functionally Graded Piezoelectric Cylindrical Panels Subjected To Impulsive Loads", Composite Structures Journal, Vol. 94, No. 15, pp. 1721–1735, 2012.

22. Najafizade, M.M., Azari, Sh., and Salmani, F. "Bending Analysis of Rectangular Composite Plates with Piezoelectric Layers, Based on the First Order Shear Deformation Theory, Using The Extended Kantorovich Method", Aerospace Mechanics Journal, Vol. 6, No. 4, PP. 57-69, 2010, (In Persian).

پیوست

معادلات حاکم بر تحلیل خمش ورق:

$$Eq\ 1:\quad \tilde{V}_1^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz\right.$$

$$\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+\frac{1}{2}(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]+\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]$$

$$\left.-D_{ab}D_{cd}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz\right\}+$$

$$\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\right]-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right\}+$$

$$\tilde{W}^{dmn}\left\{D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]-\right.$$

$$\left.D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]\right\}+$$

$$\tilde{\varphi}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31}\left[\frac{8z}{h^2}\right]dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]-\right.$$

$$\left.D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]\right\}+$$

$$\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31} dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]-$$

$$\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} z dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]$$

$$-\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} dz\left[\tilde{B}^{mn}\right]=0$$

$$Eq\ 2:\ \tilde{V}_1^{cmn}\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right\}+$$

$$\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{11} dz\left[\frac{1}{2}(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{12} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2\right]$$

$$\left.-D_{ab}D_{cd}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz\right\}+$$

$$\tilde{W}^{dmn}\left\{D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_c C_{13} dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]-\right.$$

$$\left.D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55} dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right\}+$$

$$\tilde{\varphi}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31}\left[\frac{8z}{h^2}\right]dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]-\right.$$

$$\left.D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right\}$$

$$+\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{31} dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]-$$

$$\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} z dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]$$

$$-\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{15} dz\left[\tilde{B}^{mn}\right]=0$$

$$Eq3: \tilde{V}_1^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz\left[D_{cd}(\frac{m\pi}{l_1})\right]\right.$$

$$\left.+D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]\right\}+$$

$$\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55}dz\left[D_{cd}(\frac{n\pi}{b})\right]\right.$$

$$\left.+D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_c C_{13}dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right\}+$$

$$\tilde{W}^{dmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a L_d C_{55} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]-\right.$$

$$\left.D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]-D_{ab}D_{cd}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b L_d C_{55}dz\right\}$$

$$+\tilde{\varphi}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{15}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]dz\right.$$

$$\left.\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_1})^2\right]+D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{33}\left[\frac{8z}{h^2}\right]dz\right\}$$

$$+\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_1})^2\right]\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{15} z dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]+$$

$$\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_1})^2\right]\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_a e_{15} dz \left[\tilde{B}^{mn}\right]$$

$$-D_{ab}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_b e_{33} dz \left[\tilde{A}^{mn}\right] + P(x,y) L_a(\frac{-h}{2}) = 0$$

$$Eq\,4: \tilde{V}_1^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} dz \left[D_{cd}(\frac{m\pi}{l_1})\right]\right.$$

$$\left.-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c \frac{\partial e_{31}}{\partial z} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]\right\}+$$

$$\tilde{V}_2^{cmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} dz\left[D_{cd}(\frac{n\pi}{l_1})\right]\right.$$

$$\left.-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{31} dz\left[D_{cd}(\frac{n\pi}{l_2})\right]-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c\frac{\partial e_{31}}{\partial z}dz\left[(\frac{n\pi}{l_2})\right]\right\}$$

$$+\tilde{W}^{dmn}\left\{-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_d e_{15} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]+\right.$$

$$\left.D_{bc}D_{db}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c e_{33} dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})\right]+D_{dc}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} L_c\frac{\partial e_{33}}{\partial z}dz\right\}$$

$$+\tilde{\varphi}\left\{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{11}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]dz\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]\right.$$

$$\left.+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\lambda_{33}dz\left[\frac{8}{h^2}\right]+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial\lambda_{33}}{\partial z}dz\left[\frac{8z}{h^2}\right]\right\}-$$

$$\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\lambda_{11} z\, dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]$$

$$-\left[(\frac{m\pi}{l_1})^2+(\frac{n\pi}{l_2})^2\right]\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{11} dz\left[\tilde{B}^{mn}\right]-$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial\lambda_{33}}{\partial z}dz\left[\tilde{A}^{mn}\right]=0$$