تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با بستر الاستیک و فشار خارجی

علیرضا شاطرزاده[۱] **کامران فروتن[۲]**

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۳/۰۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۲/۰۷)

چکیده

پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده، یکی از مهم‌ترین سازه‌ها در صنایع هوافضا می‌باشند. در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده که توسط محیط الاستیک احاطه‌شده و تحت فشار خارجی قرار دارد، ارائه شده است. محیط الاستیک بر حسب دو پارامتر بستر الاستیک مدل پیشنهادی وینکلر- پاسترناک فرض شده است. جنس تقویت‌کننده‌ها نیز مدرج تابعی می‌باشد. روابط کرنش-جابه‌جایی با توجه به روابط غیرخطی فن‌کارمن و تئوری کلاسیک پوسته‌ها به‌دست آمده است. برای حل دینامیکی غیرخطی مسأله از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای و روش گالرکین استفاده شده است. با در نظر گرفتن یک عبارت سه جمله‌ای برای شکل خیز، رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی به فرم ساده‌ای تبدیل می‌شود. پاسخ دینامیکی غیرخطی با روش رانگ کوتا مرتبه چهارم به دست می‌آید. رفتار کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مدرج تابعی تقویت‌شده نیز بر اساس معیار بدیانسکی- راث بررسی می‌شود. اثر پارامترهایی از جمله تقویت‌کننده‌ها، بستر الاستیک و نیروی محرکه بر منحنی ارتعاش غیر خطی فرکانس- دامنه و تأثیر میرایی و سرعت بارگذاری بر پاسخ‌های دینامیکی غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی، بررسی شده است. همچنین فرکانس‌های طبیعی، بارهای کمانش استاتیکی و دینامیکی غیرخطی نیز محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: آنالیز دینامیکی غیرخطی، پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده، کمانش، بستر الاستیک، مواد تابعی

Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened FGM Cylindrical Shells With Elastic Foundation Under Uniform External Pressure

A. Shaterzadeh **K. Foroutan**

Mechanical Engineering Department

Shahrood University of Technology

(Received: 3/June/2015; Accepted: 26/February/2016)

Abstract

The eccentrically stiffened cylindrical shells are one of the most important structures in aerospace industries. In this paper, semi-analytical method for eccentrically stiffened functionally graded (FG) cylindrical shells under external pressure and surrounded by an elastic medium is presented. The proposed model is based on Winkler and Pasternak elastic foundation parameters. According to the Von Karman nonlinear equations and the classical plate theory (CPT) of shells, strain displacement relations are obtained. The smeared stiffeners technique and Galerkin method, used for solving nonlinear dynamic problem. With considering three terms approximation for the deflection shape, the frequency-amplitude relation for non-linear vibrations obtained. The nonlinear dynamic response is obtained from fourth order Runge-Kutta method. The nonlinear dynamic buckling behavior of stiffened FGM shells is investigated based on the Budiansky-Roth criterion. The effect of parameters such as eccentrically stiffened, elastic foundation and excitation force on the frequency-amplitude curve of the nonlinear vibrations and parameters such as damping and loading speed on the nonlinear dynamic response of the FGM cylindrical shells have been investigated. The natural frequency, static and dynamic buckling load are analyzed, too.

Keywords: Nonlinear dynamic analysis, Stiffened cylindrical shell, Buckling, Elastic foundation, FGM.

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir

۲- - دانشجوی کارشناسی ارشد: Kamran.foroutan@gmail.com

۱- مقدمه

تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای، مورد علاقه‌ی بسیاری از محققان در سراسر جهان می‌باشد. در تحلیل استاتیکی، بسیاری از مطالعات بر کمانش و پس‌کمانش ناشی از بارهای حرارتی و مکانیکی متمرکز است. در عمل به منظور تقویت سازه جهت تحمل بارهای اعمالی از تقویت‌کننده‌هایی[1] با وزن کم استفاده می‌شود. مطالعه بر روی رفتار دینامیکی- استاتیکی غیرخطی این قبیل سازه‌ها از منظر عملی دارای اهمیت ویژه‌ای است. با این حال با بررسی‌های صورت گرفته می‌توان گفت مطالعات انجام‌شده بر تحلیل‌های غیرخطی استاتیکی و دینامیکی با روش‌های تحلیلی بسیار محدود است. در سال‌های اخیر به دلیل قابلیت‌های فراوان مواد مدرج تابعی[2]، استفاده از این مواد در صنایع پیشرفته بسیار گسترش یافته است. مزایای استفاده از این مواد این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب[3] لایه‌ای و یا روش‌های مرسوم برای مقاوم‌سازی ماده بسیار کاهش می‌یابد. از ورق‌های مدرج تابعی به عنوان سدهای حرارتی در محیط‌هایی با دمای بسیار بالا مانند سازه‌های فضایی، راکتور هسته‌ای، پره‌های توربین، توربین گازی پیشرفته و سیستم احتراقی استفاده شده است. اغلب این مواد از ترکیب سرامیک مهندسی و فلز یا ترکیبی از فلزات ساخته می‌شوند.

شن[4] [۱] کمانش پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدرج تابعی کامل و ناقص در محیط‌های حرارتی تحت فشار جانبی و با استفاده از تئوری کلاسیک و با استفاده از هندسه‌ی تئوری غیرخطی فن‌کارمن- دانل[5] را ارائه داده است. همچنین با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مراتب بالاتر؛ به بررسی پس‌کمانش[6] پوسته استوانه‌ای مختلط[7] مدرج تابعی در محیط‌های حرارتی تحت بار محوری پرداخته‌است. هوانگ و هان[8] [۲] به مطالعه کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده[9] تحت بار پیچشی، فشار محوری، فشار شعاعی، ترکیب فشار محوری و شعاعی بر اساس تئوری پوسته دانل و روابط غیرخطی کرنش- جابه‌جایی برای تغییر شکل‌های بزرگ پرداخته‌اند. شن [۳] کمانش پیچشی و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط‌های حرارتی را بررسی نموده است. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی جدارنازک تحت فشار داخلی توسط عظیمی[10] و همکاران [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. زوزولیا و ژانگ[11] [۵] رفتار پوسته‌های استوانه‌ای متقارن مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه بالا را مورد مطالعه قرار داده‌اند. پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک تحت بار فشار محوری داخلی توسط شن و همکاران [۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. باقری‌زاده[12] و همکاران [۷] به بررسی کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک پاسترناک[13] پرداخته‌اند. صوفیه[14] [۸] تحلیل کمانش پوسته‌های مدور مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی با بستر الاستیک از نوع پاسترناک را ارائه داده است. اخیراً، نجفی‌زاده[15] و همکاران [۹] کمانش استاتیکی خطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بار محوری با تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی را مطالعه کرده‌اند.

بیچ[16] و همکاران [۱۰] تحلیل استاتیکی و دینامیکی غیرخطی صفحات مدرج تابعی، پنل‌های استوانه‌ای و پوسته‌های کوتاه با سیستم تقویت‌کننده همگن را بررسی کرده‌اند. دانگ و هوا[17] [۱۱] به مطالعه تحلیلی کمانش استاتیکی غیرخطی و تحلیل پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده[18] تحت بار پیچشی با تقویت‌کننده‌های

1 - Stiffeners
2 - Functionally graded material
3 - Composite material
4 - Shen
5 - von Karman-Donnell
6 - Postbuckling
7 - Hybrid
8 - Huang and Han
9 - Unstiffened
10 - Azimi
11 - Zozulya and Zhang
12 - Bagherizadeh
13 - Pasternak
14 - Sofiyev
15 - Najafizadeh
16 - Bich
17 - Dung and Hoa
18 - Eccentrically stiffened Functionally graded material

مدرج تابعی پرداخته‌اند. ملک‌زاده فرد[1] و همکاران [۱۲] به بررسی پاسخ دینامیکی استوانه ضخیم، تحت بارگذاری فشار مکانیکی گذرای متحرک پرداخته‌اند. عیسوند زیبائی[2] و همکاران [۱۳] به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای نازک با رینگ تقویت شده ساخته شده از مواد هوشمندکه ترکیبی از فولاد ضدزنگ و نیکل می‌باشد، پرداخته‌اند.

دانگ و نام[3] [۱۴] حل تحلیلی دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت فشار خارجی احاطه شده توسط بستر الاستیک با تقویت کننده فلز را انجام داده‌اند. دارابی[4] و همکاران [۱۵] به تحلیل رزونانس پارامتری خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده پرداخته‌اند. دنیز[5] و صوفیه [۱۶] ارتعاشات و ناپایداری دینامیکی پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی را مورد بررسی قرار داده‌اند. هوانگ و هان [۱۷] کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی بدون تقویت‌کننده در معرض بار محوری وابسته به زمان بر اساس معیار کمانش دینامیکی بدیانسکی- راث[6] [۱۸] را ارائه داده‌اند. آن‌ها اثر پارامترهای مختلفی از جمله شاخص ناهمگنی، سرعت بارگذاری، پارامترهای ابعادی، افزایش دمای محیط و نقص اولیه را در کمانش دینامیکی غیرخطی مورد بررسی قرار داده‌اند. بررسی ارتعاشات پیچشی و پایداری پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی ارتوتروپیک[7] با بستر الاستیک توسط نجفو[8] و همکاران [۱۹] انجام شده است. داک و تانگ[9] [۲۰] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تابع تنش به همراه معادلات کامل حرکت به بررسی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته‌اند. بیچ و همکاران [۲۱] پاسخ دینامیکی غیرخطی پنل‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده تحت بارگذاری محوری را بررسی نموده‌اند. آن‌ها برای بیان خیز از عبارت یک جمله‌ای شکل کمانش خطی استفاده کرده‌اند، در حالی‌که در کار حاضر از یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای بیان خیز استفاده شده است و هم‌چنین جنس تقویت‌کننده ها مدرج تابعی، نوع بارگذاری فشار عرضی و از بستر الاستیک استفاده شده است. بیچ و همکاران [۲۲ و ۲۳] هم‌چنین به تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته‌های نازک مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته‌اند. آن‌ها دوباره برای بیان خیز از عبارت یک جمله‌ای شکل کمانش خطی استفاده کرده‌اند، نوع بارگذاری را نیز محوری و جنس تقویت‌کننده‌ها را نیز فلز در نظر گرفته‌اند.

مروری بر مطالعات انجام‌شده نشان می‌دهد که مطالعات بسیار کمی بر تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته‌های تقویت‌شده مدرج تابعی احاطه‌شده توسط یک بستر الاستیک با استفاده از روش تحلیلی وجود دارد. در این مقاله، رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده با سیستم تقویت‌کننده حلقوی و طولی در پوسته تحت فشار خارجی انجام شده است. معادلات دینامیکی غیرخطی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و لحاظ کردن روابط کرنش جابه‌جایی غیرخطی تغییر شکل‌های بزرگ و به کمک روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای[10] با روش گالرکین به دست آمده است. نوآوری کار در این است که از یک عبارت سه جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته با تقویت کننده مدرج تابعی استفاده شده است و رابطه دامنه- فرکانس از ارتعاش غیرخطی به‌صورت صریح و روشن به‌دست آمده است. علاوه بر این، پاسخ دینامیکی غیرخطی با استفاده از روش رانگ کوتا[11] مرتبه چهارم و بارهای کمانش دینامیکی پوسته‌های مدرج تابعی تقویت‌شده بر اساس معیار بدیانسکی- راث بررسی شده است و جنس تقویت‌کننده‌ها نیز مدرج تابعی در نظر گرفته شده است . نتایج نشان می‌دهد که تقویت‌کننده‌ها، شاخص کسر حجمی[12] و پارامترهای هندسی به شدت بر رفتار دینامیکی پوسته‌ها تأثیرگذار است.

1 - MalekzadehFard
2 - Isvandzibaei
3 - Dung and Nam
4 - Darabi
5 - Deniz
6 - Budiansky-Roth
7 - Orthotropic
8 - Najafov
9 - Duc and Thang

10 - Smeared stiffeners technique
11 - Runge-Kutta
12 - Volume-fractions index

۲- فرمول‌بندی مسأله

روابط و فرمول‌های مورد نیاز به ترتیب ارائه شده است.

۲-۱- مشخصات قانون توانی[۱] مواد مدرج تابعی

در این مقاله مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک می‌باشد. با اعمال قانون توانی، کسر حجمی به‌صورت رابطه (۱) می‌باشد:

$$V_c = V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \qquad (۱)$$
$$V_m = V_m(z) = 1 - V_c(z)$$

که در آن، h ضخامت پوسته؛ $k \geq 0$ شاخص کسر حجمی؛ z مختصات ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می‌باشد؛ زیرنویس c و m به ترتیب سرامیک و فلز را نشان می‌دهد.

مشخصه مؤثر (Pr_{eff}) پوسته مدرج تابعی براساس قانون ترکیب خطی به‌صورت رابطه (۲) تعیین می‌شود:

$$\mathrm{Pr}_{eff} = \mathrm{Pr}_m(z)V_m(z) + \mathrm{Pr}_c(z)V_c(z) \qquad (۲)$$

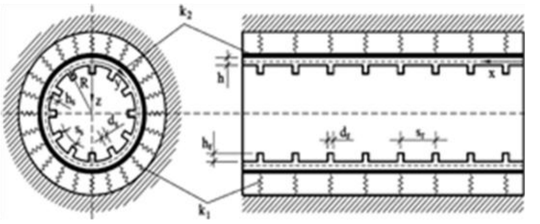
بر طبق قانون ذکرشده، مدول یانگ[۲] و دانسیته جرمی[۳] برای پوسته و تقویت‌کننده‌ها به فرم رابطه (۳) بیان می‌شود:

$$E(z) = E_m V_m + E_c V_c =$$
$$E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k, \; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$
$$E_s = E_c + (E_m - E_c)\left(\frac{2z-h}{2h_s}\right)^{k_2}$$
$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s$$
$$E_r = E_c + (E_m - E_c)\left(\frac{2z-h}{2h_r}\right)^{k_3} \qquad (۳)$$
$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_r$$
$$\rho(z) = \rho_m V_m + \rho_c V_c = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k$$
$$\rho_s = \rho_c + (\rho_m - \rho_c)\left(\frac{2z-h}{2h_s}\right)^{k_2}$$
$$\rho_r = \rho_c + (\rho_m - \rho_c)\left(\frac{2z-h}{2h_r}\right)^{k_3}$$

که E_m، ρ_m، E_c، ρ_c به ترتیب مدول یانگ و دانسیته جرمی فلز و سرامیک، $k_2 \geq 0$ و $k_3 \geq 0$ به ترتیب شاخص کسر حجمی تقویت‌کننده طولی و حلقوی می‌باشد.

۲- ۲- روابط بنیادی و معادلات حاکم

یک پوسته نازک استوانه‌ای مدرج تابعی به طول L، شعاع R که توسط بستر الاستیک احاطه‌شده را در نظر می‌گیریم. تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی مدرج تابعی می‌باشند (شکل ۱). مختصات اصلی x، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و در جهت شعاعی می‌باشد.



شکل (۱): پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده در محیط الاستیک.

کرنش‌ها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله z از سطح میانی به‌صورت رابطه (۴) می‌باشند:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z\chi_x, \; \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z\chi_y, \; \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - z\chi_{xy} \qquad (۴)$$

بر طبق روابط غیرخطی کرنش- جابه‌جایی فن‌کارمن [۲۴]، مؤلفه‌های کرنش بر روی سطح میانی پوسته‌های استوانه‌ای کامل به فرم رابطه (۵) می‌باشد:

$$\varepsilon_x^0 = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2$$
$$\varepsilon_y^0 = v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \qquad (۵)$$
$$\gamma_{xy}^0 = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}$$
$$\chi_x = w_{,xx}, \; \chi_y = w_{,yy}, \; \chi_{xy} = w_{,xy}$$

با توجه به رابطه (۵)، معادله سازگاری به‌صورت رابطه (۶) نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = -\frac{1}{R}w_{,xx} + (w_{,xy})^2 - w_{,xx}w_{,yy} \qquad (۶)$$

روابط تنش-کرنش برای پوسته‌های مدرج تابعی استوانه‌ای به‌صورت رابطه (۷) قابل بیان است:

1 - Power law
2 - Young's modulus
3 - Mass density

$$\sigma_x^{sh} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y^{sh} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \qquad (۷)$$
$$\tau_{xy}^{sh} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

که ضریب پواسون[1] (ν) ثابت فرض می‌شود، σ_x^{sh}، σ_y^{sh} تنش نرمال در مختصات x، y روی پوسته بدون تقویت‌کننده و τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت‌کننده می‌باشد.

همچنین روابط تنش-کرنش برای تقویت‌کننده‌های مدرج تابعی را می‌توان به‌صورت رابطه (۸) نوشت [۲۰]:

$$\sigma_s^{st} = E_s\varepsilon_x$$
$$\sigma_r^{st} = E_r\varepsilon_y \qquad (۸)$$

که σ_r^{st}، σ_s^{st} و E_r، E_s به ترتیب تنش نرمال و مدول یانگ برای تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی می‌باشد. در این مقاله تقویت‌کننده‌های حلقوی و طولی مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. برای لحاظ کردن اثر تقویت‌کننده‌ها بر پوسته از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای استفاده می‌کنیم. از اثرات پیچشی تقویت‌کننده‌ها به دلیل کوچکی صرف‌نظر می‌شود. با یکپارچه‌سازی معادلات تنش- کرنش و محاسبه نیروها و ممان‌های منتجه برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده روابط (۹) و (۱۰) را خواهیم داشت:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 - A_{14}\chi_x - A_{15}\chi_y$$
$$N_y = A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 - A_{15}\chi_x - A_{25}\chi_y \qquad (۹)$$
$$N_{xy} = A_{33}\gamma_{xy}^0 - 2A_{36}\chi_{xy}$$

$$M_x = A_{14}\varepsilon_x^0 + A_{15}\varepsilon_y^0 - A_{44}\chi_x - A_{45}\chi_y$$
$$M_y = A_{15}\varepsilon_x^0 + A_{25}\varepsilon_y^0 - A_{45}\chi_x - A_{55}\chi_y \qquad (۱۰)$$
$$M_{xy} = A_{36}\gamma_{xy}^0 - 2A_{66}\chi_{xy}$$

A_{ij} مؤلفه‌های سفتی کششی، خمشی و کوپل‌شده پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده می‌باشد که مقدار آن‌ها در رابطه (۱۱) آورده شده است. N_x، N_y و N_{xy} به ترتیب نیروهای نرمال و نیروهای برشی در صفحه می‌باشند. M_x، M_y و M_{xy} نیز به ترتیب گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند.

$$A_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1s}d_s}{S_s},\ A_{12} = \frac{E_1\nu}{1-\nu^2},\ A_{14} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{2s}d_s}{S_s}$$
$$A_{15} = \frac{E_2\nu}{1-\nu^2},\ A_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} + \frac{E_{1r}d_r}{S_r},\ A_{25} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + \frac{E_{2r}d_r}{S_r} \qquad (۱۱)$$
$$A_{33} = \frac{E_1}{2(1+\nu)},\ A_{36} = \frac{E_2}{2(1+\nu)},\ A_{44} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3s}d_s}{S_s}$$
$$A_{45} = \frac{E_3\nu}{1-\nu^2},\ A_{55} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + \frac{E_{3r}d_r}{S_r},\ A_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)}$$

در روابط (۱۲-۱۴) مدول‌های یانگ محاسبه شده است:

$$E_1 = \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh}(z)dz = \left(E_{ou} + \frac{E_{in} - E_{ou}}{k+1}\right)h$$
$$E_2 = \int_{-h/2}^{h/2} zE_{sh}(z)dz = \frac{(E_{in} - E_{ou})kh^2}{2(k+1)(k+2)} \qquad (۱۲)$$
$$E_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2E_{sh}(z)dz =$$
$$\left[\frac{E_{ou}}{12} + (E_{in} - E_{ou})\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4}\right)\right]h^3$$

$$E_{1s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_s} E_s(z)dz = \left(E_{in} + \frac{E_{ou} - E_{in}}{k_2+1}\right)h_s$$
$$E_{2s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_s} zE_s(z)dz = \frac{E_{in}}{2}hh_s\left(\frac{h_s}{h} + 1\right)$$
$$+(E_{ou} - E_{in})hh_s\left(\frac{1}{k_2+2}\frac{h_s}{h} + \frac{1}{2k_2+2}\right) \qquad (۱۳)$$
$$E_{3s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_s} z^2E_s(z)dz = \frac{E_{in}}{3}h_s^3\left(\frac{3}{4}\frac{h^2}{h_s^2} + \frac{3}{2}\frac{h_s}{h} + 1\right)$$
$$+(E_{ou} - E_{in})h_s^3\left(\frac{1}{k_2+3} + \frac{1}{k_2+2}\frac{h}{h_s} + \frac{1}{4(k_2+1)}\frac{h^2}{h_s^2}\right)$$

$$E_{1r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} E_r(z)dz = \left(E_{in} + \frac{E_{ou} - E_{in}}{k_3+1}\right)h_r$$
$$E_{2r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} zE_r(z)dz = \frac{E_{in}}{2}hh_r\left(\frac{h_r}{h} + 1\right)$$
$$+(E_{ou} - E_{in})hh_r\left(\frac{1}{k_3+2}\frac{h_r}{h} + \frac{1}{2k_3+2}\right) \qquad (۱۴)$$
$$E_{3r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_r} z^2E_r(z)dz = \frac{E_{in}}{3}h_r^3\left(\frac{3}{4}\frac{h^2}{h_r^2} + \frac{3}{2}\frac{h_r}{h} + 1\right)$$
$$+(E_{ou} - E_{in})h_r^3\left(\frac{1}{k_3+3} + \frac{1}{k_3+2}\frac{h}{h_r} + \frac{1}{4(k_3+1)}\frac{h^2}{h_r^2}\right)$$

S_s، d_s، h_s و S_r، d_r، h_r به ترتیب فاصله، عرض و ضخامت تقویت‌کننده طولی و حلقوی می‌باشد.

با مرتب‌سازی رابطه (۹) بر حسب کرنش‌ها رابطه (۱۵) حاصل می‌شود:

1 - Poisson’s ratio

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= A_{22}^* N_x - A_{12}^* N_y + A_{14}^* \chi_x + A_{15}^* \chi_y \\
\varepsilon_y^0 &= A_{11}^* N_y - A_{12}^* N_x + A_{24}^* \chi_x + A_{25}^* \chi_y \\
\gamma_{xy}^0 &= A_{33}^* + 2A_{36}^* \chi_{xy}
\end{aligned} \qquad (۱۵)
$$

مقدار ضرایب A_{ij}^* مربوط به رابطه (۱۵) در رابطه (۱۶) آورده شده است:

$$
\begin{aligned}
& A_{11}^* = \frac{1}{\Delta} A_{11},\; A_{22}^* = \frac{1}{\Delta} A_{22} \\
& A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta},\; A_{33}^* = \frac{1}{A_{33}} \\
& \Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \\
& A_{14}^* = A_{22}^* A_{14} - A_{12}^* A_{15} \\
& A_{25}^* = A_{11}^* A_{25} - A_{12}^* A_{15} \\
& A_{15}^* = A_{22}^* A_{15} - A_{12}^* A_{25} \\
& A_{24}^* = A_{11}^* A_{15} - A_{12}^* A_{14} \\
& A_{36}^* = \frac{A_{36}}{A_{33}}
\end{aligned} \qquad (۱۶)
$$

با جایگزینی معادلات (۱۵) در معـادلات (۱۰)، رابطـه (۱۷) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
M_x &= A_{14}^* N_x + A_{24}^* N_y - A_{44}^* \chi_x - A_{45}^* \chi_y \\
M_y &= A_{15}^* N_x + A_{25}^* N_y - A_{54}^* \chi_x - A_{55}^* \chi_y \\
M_{xy} &= A_{36}^* N_{xy} - 2A_{66}^* \chi_{xy}
\end{aligned} \qquad (۱۷)
$$

که مقدار ضرایب A_{ij}^* مربوط بـه رابطـه (۱۷) در رابطـه (۱۸) آورده شده است:

$$
\begin{aligned}
A_{44}^* &= A_{44} - A_{14}A_{14}^* - A_{15}A_{24}^* \\
A_{55}^* &= A_{55} - A_{25}A_{25}^* - A_{15}A_{15}^* \\
A_{45}^* &= A_{45} - A_{14}A_{15}^* - A_{15}A_{25}^* \\
A_{54}^* &= A_{45} - A_{25}A_{24}^* - A_{15}A_{14}^* \\
A_{66}^* &= A_{66} - A_{36}A_{36}^*
\end{aligned} \qquad (۱۸)
$$

معادلات غیرخطی حرکت پوسته استوانه‌ای مـدور نـازک بـر اساس تئوری کلاسیک پوسته و با فـرض $u \ll w$ و $v \ll w$ و $\rho_1 \partial^2 u / \partial t^2 \to 0$ و $\rho_1 \partial^2 v / \partial t^2 \to 0$ در رابطه (۱۹) آورده شده است [۱۵، ۲۵ و ۲۶]:

$$
\begin{aligned}
& N_{X,X} + N_{xy,y} = 0 \\
& N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \\
& M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} \\
& +2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + \frac{1}{R} N_y + q_0 \\
& -k_w w + k_s \left(w_{,xx} + w_{,yy} \right) = \rho_1 w_{,tt} + 2\rho_1 \varepsilon w_{,t}
\end{aligned} \qquad (۱۹)
$$

در رابطه (۱۹) k_w مدول بسترالاستیک وینکلر[1] و k_s سفتی لایه برشی بر اساس مـدل پاسـترناک، q_0 فشـار خـارجی، t زمان و ε ضریب میرایی می‌باشد.

رابطه (۲۰) مقدار ρ_1 را نشان می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
& \rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(Z) dZ + \int_{-h/2}^{h/2+h_s} \rho(z) \frac{d_s}{S_s} + \int_{-h/2}^{h/2+h_r} \rho(z) \frac{d_r}{S_r} = \\
& \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h + \left(\rho_c + \frac{\rho_c - \rho_m}{k_2 + 1} \right) \frac{A_s}{S_s} \\
& + \left(\rho_c + \frac{\rho_c - \rho_m}{k_3 + 1} \right) \frac{A_r}{S_r}
\end{aligned} \qquad (۲۰)
$$

با توجه به دو رابطه اول معادلات (۱۹) تابع تنش φ به‌صورت رابطه (۲۱) تعریف می‌شود:

$$
N_x = \varphi_{,yy},\; N_y = \varphi_{,xx},\; N_{xy} = -\varphi_{,xy} \qquad (۲۱)
$$

با جایگزینی معـادلات (۱۵) در رابطـه (۶) و معـادلات (۱۷) در سومین معادله (۱۹) و بـا توجـه بـه معـادلات (۴) و (۲۱)، روابط (۲۲) و (۲۳) را داریم:

$$
\begin{aligned}
& A_{11}^* \varphi_{,xxxx} + \left(A_{33}^* - 2A_{12}^* \right) \varphi_{,xxyy} + A_{22}^* \varphi_{,yyyy} + A_{24}^* w_{,xxxx} \\
& + \left(A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^* \right) w_{,xxyy} + A_{15}^* w_{,yyyy} + \frac{1}{R} w_{,xx} \\
& - \left[\left(w_{,xy} \right)^2 - w_{,xx} w_{,yy} \right] = 0
\end{aligned} \qquad (۲۲)
$$

$$
\begin{aligned}
& \rho_1 w_{,tt} + 2\rho_1 \varepsilon w_{,t} + A_{44}^* w_{,xxxx} \\
& + \left(A_{45}^* + A_{54}^* + 4A_{66}^* \right) w_{,xxyy} + A_{55}^* w_{,yyyy} \\
& - A_{24}^* \varphi_{,xxxx} - \left(A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^* \right) \varphi_{,xxyy} \\
& - A_{15}^* \varphi_{,yyyy} - \frac{1}{R} \varphi_{,xx} - \varphi_{,yy} w_{,xx} + 2\varphi_{,xy} w_{,xy} \\
& - \varphi_{,xx} w_{,yy} - q_0 + k_w w - k_s \left(w_{,xx} + w_{,yy} \right) = 0
\end{aligned} \qquad (۲۳)
$$

معادلات (۲۲) و (۲۳) سیستم معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجهول w و φ می‌باشد. آن‌ها به منظور بررسی

1 - Winkler

ویژگی‌های دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳- رهیافت دینامیکی روش گالرکین

شرایط تکیه‌گاهی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده، ساده می‌باشد و پوسته در معرض توزیع فشار یکنواخت q_0 بر روی یک بستر الاستیک قراردارد.

خیز پوسته‌های استوانه‌ای را به‌صورت یک عبارت سه جمله‌ای مشابه رابطه (۲۴) در نظر می‌گیریم:

$$w = f_0 + f_1 \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + f_2 \sin^2\frac{m\pi x}{L} \qquad (۲۴)$$

که $f_0 = f_0(t)$ دامنه مجهول کمانش یکنواخت وابسته به زمان، $f_1 = f_1(t)$ دامنه مجهول کمانش خطی وابسته به زمان، $f_2 = f_2(t)$ دامنه مجهول کمانش غیرخطی وابسته به زمان، می‌باشد. $\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}$، $\sin^2\frac{m\pi x}{L}$، m و n به ترتیب بیانگر شکل کمانش خطی، شکل کمانش غیرخطی، تعداد نیم موج و تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی می‌باشد.

با جایگزینی معادله (۲۴) در معادله (۲۲) و حل آن، معادله‌ای برای تابع مجهول φ به دست می‌آید که به‌صورت رابطه (۲۵) می‌باشد:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1\cos\frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2\cos\frac{2ny}{R} - \varphi_3\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}\\ &+\varphi_4\sin\frac{3m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} - \sigma_{0y}h\frac{x^2}{2}\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که در آن، σ_{0y} تنش محیطی متوسط می‌باشد و ضرایب φ_i به صورت روابط (۲۶) می‌باشد:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{n^2\lambda^2}{32A_{11}^*m^2\pi^2}f_1^2 - \frac{\left(4\lambda L - 16A_{24}^*m^2\pi^2\right)}{32A_{11}^*m^2\pi^2}f_2\\ \varphi_2 &= \frac{m^2\pi^2}{32A_{22}^*n^2\lambda^2}f_1^2\\ \varphi_3 &= \frac{B}{A}f_1 + \frac{m^2n^2\pi^2\lambda^2}{A}f_1f_2\\ \varphi_4 &= \frac{m^2n^2\pi^2\lambda^2}{G}f_1f_2\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که مقدار ضرایب در رابطه (۲۷) آورده شده است:

$$\begin{aligned}A &= A_{11}^*m^4\pi^4 + \left(A_{33}^* - 2A_{12}^*\right)m^2n^2\pi^2\lambda^2 + A_{22}^*n^4\lambda^4\\ B &= A_{24}^*m^4\pi^4 + \left(A_{14}^* + A_{25}^* - 2A_{36}^*\right)m^2n^2\pi^2\lambda^2\\ &+A_{15}^*n^4\lambda^4 - \frac{L^2}{R}m^2n^2\\ D &= A_{44}^*m^4\pi^4 + \left(A_{45}^* + A_{54}^* + 4A_{66}^*\right)m^2n^2\pi^2\lambda^2\\ &+A_{55}^*n^4\lambda^4\\ G &= 81A_{11}^*m^4\pi^4 + 9\left(A_{33}^* - 2A_{12}^*\right)m^2n^2\pi^2\lambda^2\\ &+A_{22}^*n^4\lambda^4\\ \lambda &= \frac{L}{R}\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با جایگزینی معادلات (۲۴) و (۲۵) در معادله (۲۳) و با اعمال روش گالرکین در بازه $0 \le x \le L$ و $0 \le y \le 2\pi R$ روابط (۲۸-۳۰) را داریم :

$$\begin{aligned}\sigma_{0y} &= Rq_0 - \frac{1}{2}Rk_w\left(f_2 + 2f_0\right) - R\rho_1\frac{d^2f_0}{dt^2}\\ &-R\frac{\rho_1}{2}\frac{d^2f_2}{dt^2} - 2R\rho_1\varepsilon\frac{df_0}{dt} - R\rho_1\varepsilon\frac{df_2}{dt}\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

$$\begin{aligned}&L^4\rho_1\frac{d^2f_1}{dt^2} + 2L^4\rho_1\varepsilon\frac{df_1}{dt} + \left(D + \frac{B^2}{A}\right)f_1\\ &+\left[\frac{m^2n^2\pi^2\lambda^2}{A} + \frac{B}{A}m^2n^2\pi^2\lambda^2\right.\\ &\left.-\frac{n^2\lambda^2\left(\lambda L - 4A_{24}^*m^2\pi^2\right)}{4A_{11}^*m^2\pi^2}\right]f_1f_2 + \left(\frac{m^4\pi^4}{16A_{22}^*} + \frac{n^4\lambda^4}{16A_{11}^*}\right)f_1^3\\ &+\left(\frac{m^2n^2\pi^2\lambda^2}{A} + \frac{m^2n^2\pi^2\lambda^2}{G}\right)f_1f_2^2 - \sigma_{0y}hn^2L^2\lambda^2f_1\\ &+L^4k_wf_1 + L^2k_sf_1\left[(\lambda n)^2 + (m\pi)^2\right] = 0\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

$$\begin{aligned}&\rho_1\frac{\partial^2f_0}{\partial t^2} + \rho_1\frac{3}{4}\frac{\partial^2f_2}{\partial t^2} + 2\rho_1\varepsilon\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{3}{2}\rho_1\varepsilon\frac{\partial f_2}{\partial t}\\ &+\left\{\left[4A_{24}^*\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 - \frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right]\frac{n^2\lambda^2}{32A_{11}^*m^2\pi^2}\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\frac{B}{A}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2\right\}f_1^2 + \frac{\sigma_{0y}h}{R} - q_0\\ &+\frac{1}{2}m^2n^2\pi^2\lambda^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{G}\right)f_1^2f_2\\ &+\left\{-\left[4A_{24}^*\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 - \frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right]\frac{\left(\lambda L - 4A_{24}^*m^2\pi^2\right)}{4A_{11}^*m^2\pi^2}\right.\\ &\left.4A_{44}^*\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4\right\}f_2 + k_w\left(\frac{3}{4}f_2 + f_0\right) + k_sf_2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 = 0\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

علاوه بر این، پوسته استوانه‌ای باید شرایط بسته محیطی را ارضا کند [۱۷ و ۲۵] بنابراین رابطه (۳۱) را به‌صورت زیرخواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi R}\int_0^L \frac{\partial v}{\partial y}dxdy = \int_0^{2\pi R}\int_0^L\left[\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = 0 \qquad (۳۱)$$

با استفاده از معادلات (۱۵)، (۲۱)، (۲۴) و (۲۵)، رابطه (۳۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$-2A_{11}^{*}\sigma_{0y}h+\frac{1}{R}\left(f_{2}+2f_{0}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{n}{R}\right)^{2}f_{1}^{2}=0 \tag{۳۲}$$

با حذف σ_{0y} از معادلات (۲۸-۳۰) و استفاده از رابطه (۳۲)، روابط (۳۳-۳۵) داریم:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^{2}f_{0}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{0}}{dt}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{2}}{dt}\right)\\&+a_{11}\left(f_{2}+2f_{0}\right)-a_{12}f_{1}^{2}-a_{13}q_{0}+a_{14}k_{w}\left(f_{2}+2f_{0}\right)=0\end{aligned} \tag{۳۳}$$

$$\begin{aligned}&a_{21}f_{1}\left(\frac{d^{2}f_{0}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{0}}{dt}\right)+\left(\frac{d^{2}f_{1}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{1}}{dt}\right)\\&+\frac{a_{21}}{2}f_{1}\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{2}}{dt}\right)+a_{22}f_{1}+a_{23}f_{1}f_{2}+a_{24}f_{1}^{3}\\&+a_{25}f_{1}f_{2}^{2}-a_{26}q_{0}f_{1}+a_{27}k_{w}f_{1}+a_{28}k_{s}f_{1}=0\end{aligned} \tag{۳۴}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{2}}{dt}\right)+a_{31}f_{1}^{2}+a_{32}f_{1}^{2}f_{2}+a_{33}f_{2}\\&+a_{34}k_{w}\left(\frac{3}{4}f_{2}+f_{0}\right)+a_{35}k_{s}f_{2}=0\end{aligned} \tag{۳۵}$$

که مقدار ضرایب a_{ij} در روابط (۳۶-۳۸) آورده شده است:

$$\begin{aligned}&a_{11}=\frac{1}{2A_{11}^{*}R^{2}\rho_{1}},\ a_{12}=\frac{n^{2}}{8A_{11}^{*}R^{3}\rho_{1}}\\&a_{13}=\frac{1}{\rho_{1}},\ a_{14}=\frac{1}{2\rho_{1}}\end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}&a_{21}=\frac{Rn^{2}\lambda^{2}}{L^{2}},\ a_{22}=\frac{1}{L^{4}\rho_{1}}\left(D+\frac{B^{2}}{A}\right)\\&a_{23}=\frac{1}{L^{4}\rho_{1}}\left[\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{A}+\frac{B}{A}m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}\right.\\&\left.-\frac{n^{2}\lambda^{2}\left(\lambda L-4A_{24}^{*}m^{2}\pi^{2}\right)}{4A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}}\right]\\&a_{24}=\frac{1}{L^{4}\rho_{1}}\left(\frac{m^{4}\pi^{4}}{16A_{22}^{*}}+\frac{n^{4}\lambda^{4}}{16A_{11}^{*}}\right)\\&a_{25}=\frac{1}{L^{4}\rho_{1}}\left(\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{A}+\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{G}\right)\\&a_{26}=\frac{Rn^{2}\lambda^{2}}{L^{2}\rho_{1}},\ a_{27}=\frac{1}{\rho_{1}},\\&a_{28}=\frac{1}{L^{2}\rho_{1}}\left[\left(\lambda n\right)^{2}+\left(m\pi\right)^{2}\right]\end{aligned} \tag{۳۷}$$

$$\begin{aligned}&a_{31}=\frac{1}{\rho_{1}}\left\{\left[4A_{24}^{*}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4}-\frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\right]\frac{n^{2}\lambda^{2}}{4A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}}\right.\\&\left.+2\frac{B}{A}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\left(\frac{n}{R}\right)^{2}\right\}\\&a_{32}=\frac{2}{\rho_{1}}m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\left(\frac{n}{R}\right)^{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{G}\right)\\&a_{33}=\frac{1}{\rho_{1}}\left\{-\left[4A_{24}^{*}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\right]\frac{\left(\lambda L-4A_{24}^{*}m^{2}\pi^{2}\right)}{A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}}+16A_{44}^{*}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4}\right\}\\&a_{34}=\frac{4}{\rho_{1}},\ a_{35}=\frac{4}{\rho_{1}}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\end{aligned} \tag{۳۸}$$

با ساده‌سازی معادلات (۳۳-۳۵)، معادلات (۳۹-۴۱) را داریم:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^{2}f_{0}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{0}}{dt}\right)+b_{11}f_{0}-b_{12}f_{1}^{2}-b_{13}f_{1}^{2}f_{2}+b_{14}f_{2}\\&-a_{13}q_{0}+b_{15}k_{w}f_{0}+b_{16}k_{w}f_{2}-b_{17}k_{s}f_{2}=0\end{aligned} \tag{۳۹}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^{2}f_{1}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{1}}{dt}\right)+a_{22}f_{1}+b_{21}f_{1}f_{0}+b_{22}f_{1}f_{2}\\&+a_{25}f_{1}f_{2}^{2}+b_{23}f_{1}^{3}-b_{24}k_{w}f_{1}f_{0}-b_{25}k_{w}f_{1}f_{2}\\&+b_{26}k_{s}f_{1}f_{2}+a_{27}k_{w}f_{1}+a_{28}k_{s}f_{1}=0\end{aligned} \tag{۴۰}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}}+2\varepsilon\frac{df_{2}}{dt}\right)+a_{31}f_{1}^{2}+a_{32}f_{1}^{2}f_{2}+a_{33}f_{2}\\&+a_{34}k_{w}\left(\frac{3}{4}f_{2}+f_{0}\right)+a_{35}k_{s}f_{2}=0\end{aligned} \tag{۴۱}$$

که مقدار ضرایب b_{ij} در روابط (۴۲) و (۴۳) آورده شده است:

$$\begin{aligned}&b_{11}=2a_{11},\ b_{12}=\left(\frac{1}{2}a_{31}+a_{12}\right),\ b_{13}=\frac{1}{2}a_{32}\\&b_{14}=\left(a_{11}-\frac{1}{2}a_{33}\right),\ b_{15}=\left(2a_{14}-\frac{1}{2}a_{34}\right)\\&b_{16}=\left(a_{14}-\frac{3}{8}a_{34}\right),\ b_{17}=\frac{1}{2}a_{35}\end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$b_{21}=-b_{11}a_{21},\ b_{22}=-b_{14}a_{21}-a_{33}\frac{a_{21}}{2}+a_{23}$$
$$b_{23}=-b_{12}a_{21}-a_{31}\frac{a_{21}}{2}+a_{24}$$
$$b_{24}=\left(a_{21}b_{15}+\frac{a_{21}}{2}a_{34}\right),\ b_{25}=\left(a_{21}b_{16}+\frac{3}{8}a_{21}a_{34}\right) \quad (۴۳)$$
$$b_{26}=\left(a_{21}b_{17}-\frac{a_{21}}{2}a_{35}\right)$$

اگر $f=w_{\max}$ باشد، پس با توجه به معادله (۲۴)، با مقداردهی $x=iL/2m$ و $y=j\pi/2n$ ماکزیمم خیز پوسته به‌صورت رابطه (۴۴) خواهد شد:

$$f=f_0+f_1+f_2 \quad (۴۴)$$

که i و j عدد صحیح فرد می‌باشند.

معادلات (۳۹-۴۱) و (۴۴) برای بررسی تأثیر پارامترهای ورودی بر رفتار منحنی خیز-ماکزیمم بار پوسته‌های مدرج تابعی با تقویت‌کننده استفاده می‌شود.

۳-۱- آنالیز ارتعاش غیرخطی

برای بررسی ارتعاشات غیر خطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده فرض می‌کنیم فشار خارجی با شدت $q_0=Q\sin\Omega t$ اعمال گردد. بنابراین معادلات (۳۹-۴۱) به‌صورت معادلات (۴۵-۴۷) خواهد شد:

$$\left(\frac{d^2f_0}{dt^2}+2\varepsilon\frac{df_0}{dt}\right)+b_{11}f_0-b_{12}f_1^2-b_{13}f_1^2f_2+b_{14}f_2 -a_{13}Q\sin(\Omega t)+b_{15}k_wf_0+b_{16}k_wf_2-b_{17}k_sf_2=0 \quad (۴۵)$$

$$\left(\frac{d^2f_1}{dt^2}+2\varepsilon\frac{df_1}{dt}\right)+a_{22}f_1+b_{21}f_1f_0+b_{22}f_1f_2 +a_{25}f_1f_2^2+b_{23}f_1^3-b_{24}k_wf_1f_0-b_{25}k_wf_1f_2 +b_{26}k_sf_1f_2+a_{27}k_wf_1+a_{28}k_sf_1=0 \quad (۴۶)$$

$$\left(\frac{d^2f_2}{dt^2}+2\varepsilon\frac{df_2}{dt}\right)+a_{31}f_1^2+a_{32}f_1^2f_2+a_{33}f_2 +a_{34}k_w\left(\frac{3}{4}f_2+f_0\right)+a_{35}k_sf_2=0 \quad (۴۷)$$

که Q دامنه نیروی تحریک و Ω فرکانس تحریک می‌باشد.

با استفاده از معادلات (۴۵-۴۷)، می‌توان فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد و پاسخ غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده را محاسبه کرد. برای یافتن پاسخ دینامیکی غیرخطی از روش رانگ کوتا مرتبه چهار استفاده شده است.

با نادیده گرفتن جملات مربوط به کمانش یکنواخت و کمانش غیرخطی، معادله (۳۴) به‌صورت رابطه (۴۸) کاهش می‌یابد:

$$\left(\frac{d^2f_1}{dt^2}+2\varepsilon\frac{df_1}{dt}\right)+\left(a_{22}+a_{27}k_w+a_{28}k_s\right)f_1+a_{24}f_1^3 -a_{26}f_1Q\sin(\Omega t)=0 \quad (۴۸)$$

با فرض ارتعاش آزاد بدون میرایی خطی و صرف‌نظر از جملات مرتبه بالا، معادله (۴۸) به‌صورت رابطه (۴۹) درمی‌آید:

$$\frac{d^2f_1}{dt^2}+\left(a_{22}+a_{27}k_w+a_{28}k_s\right)f_1=0 \quad (۴۹)$$

بنابراین فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده به‌صورت رابطه (۵۰) محاسبه می‌گردد:

$$\omega_{mn}=\sqrt{a_{22}+k_wa_{27}+k_sa_{28}} \quad (۵۰)$$

که ω_{mn} فرکانس طبیعی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده - می‌باشد.

با در نظر گرفتن $f_1(t)=\eta\sin\Omega t$ و اعمال روش گالرکین، بر معادله (۴۸) رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی به‌صورت رابطه (۵۱) را داریم:

$$\Omega^2-\frac{4}{\pi}\varepsilon\Omega=\left(a_{22}+k_wa_{27}+k_sa_{28}\right) +\frac{3}{4}a_{24}\eta^2-\frac{8}{3\pi}a_{26}Q \quad (۵۱)$$

که η دامنه ارتعاش غیرخطی $f_1(t)$ است.

با معرفی پارامتر بی بعد فرکانس به‌صورت $\xi=\Omega/\omega_{mn}$ معادله (۵۱) به‌صورت رابطه (۵۲) درمی‌آید:

$$\xi^2-\frac{4\varepsilon}{\pi\omega_{mn}}\xi=1+\frac{3}{4}\frac{a_{24}}{\omega_{mn}^2}\eta^2-\frac{8a_{26}}{3\pi\omega_{mn}^2}Q \quad (۵۲)$$

اگر $Q=0$ باشد، رابطه دامنه- فرکانس ارتعاش آزاد غیرخطی به‌صورت رابطه (۵۳) به‌دست می‌آید:

$$\xi^2-\frac{4\varepsilon}{\pi\omega_{mn}}\xi=1+\frac{3}{4}\frac{a_{24}}{\omega_{mn}^2}\eta^2 \quad (۵۳)$$

۳-۲- آنالیز کمانش

۳-۲-۱- آنالیز کمانش استاتیکی خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده

با حذف شکل کمانش یکنواخت و کمانش غیرخطی و قرار دادن $\dot{f}_1 = 0$، $\ddot{f}_1 = 0$ و این‌که $f_1 \neq 0$ معادله (۳۴) به‌صورت رابطه (۵۴) درمی‌آید:

$$a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28} + a_{24} f_1^{\,2} - a_{26} q_0 = 0 \qquad (۵۴)$$

با نادیده گرفتن جمله مرتبه دو f_1 در معادله (۵۴)، رابطه (۵۵) را داریم:

$$q_0^{sbu} = \frac{a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28}}{a_{26}} \qquad (۵۵)$$

که q_0^{sbu} بار کمانش استاتیکی خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده می‌باشد.

بار بحرانی کمانش استاتیکی خطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده به‌صورت رابطه (۵۶) می‌باشد:

$$q_{scr} = \min(q_0^{sbu}) \qquad (۵۶)$$

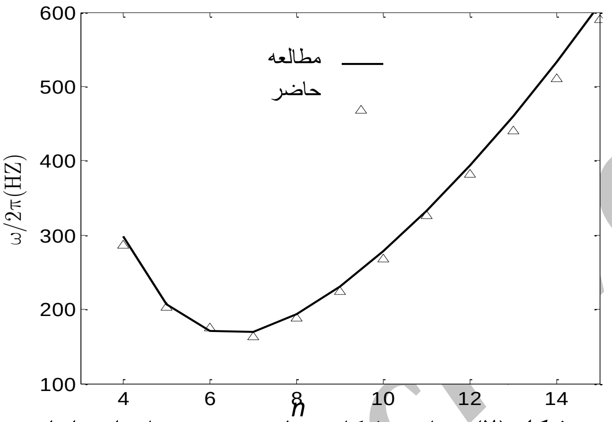
۳-۲-۲- تحلیل کمانش دینامیکی غیرخطی استوانه مدرج تابعی با تقویت‌کننده

بر اساس معادلات (۴۲- ۴۰)، تحلیل کمانش بحرانی دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده تحت فشار جانبی مختلف وابسته به زمان خطی مشابه $q_0 = ct$ در نظر گرفته می‌شود که c سرعت بارگذاری $(\mathrm{N/m^2s})$ می‌باشد.

معادلات (۴۲- ۴۰) یک دستگاه سه معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم غیر خطی هستند. بنابراین، حل تحلیلی آن‌ها به راحتی مقدور نیست. در این مقاله، این دستگاه معادلات به روش رانگ کوتا مرتبه چهارم حل شده است. زمان بحرانی دینامیکی (t_{cr}) را می‌توان بر اساس معیار بدیانسکی-راث [۱۸] به دست آورد. بر اساس این معیار، برای مقادیر بزرگ سرعت بارگذاری، در منحنی دامنه-زمان جابه‌جایی‌ها سریعاً برحسب زمان افزایش می‌یابند و منحنی با عبور از ناحیه شیبدار متناظر با $t = t_{cr}$ که افت پایداری رخ می‌دهد، به ماکزیمم خود می‌رسد. بار متناظر با زمان بحرانی دینامیکی، بار کمانش بحرانی دینامیکی نامیده می‌شود.

۴- نتایج عددی

به منظور راستی آزمایی فرمول‌بندی حاضر، فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت‌شده کامل بدون بستر الاستیک در شکل **۲** آورده شده است که با تحلیل سیوال و نومن [۲۷] مقایسه شده است. همچنین کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت‌شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی که در جدول **۱** آورده شده است با مطالعات باروچ و سینگر [۲۸]، ردی و استارنس [۲۵] و شن [۲۹] مقایسه شده است و فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک در جدول **۲** آورده شده است که با نتایج صوفیه و همکاران [۳۰] و پالیوال و همکاران [۳۱] مقایسه شده است. از بررسی نتایج فوق می‌توان دریافت که نتایج حاصل با سایر مراجع هم‌خوانی مناسبی دارد.



شکل (۲): مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده

جدول (۱): مقایسه بار کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده داخلی تحت فشار خارجی (m=1)

نوع تقویت‌کننده	مطالعه حاضر	باروچ و سینگر	ردی و استارنس	شن
بدون تقویت‌کننده	۱۰۳/۳۲۷ (۴)*	۱۰۲	۹۳/۵	۱۰۰/۷
تقویت‌کننده طولی	۱۰۴/۴۹۴ (۴)	۱۰۳	۹۴/۷	۱۰۲/۲
تقویت‌کننده حلقوی	۳۷۹/۶۹۴ (۳)	۳۷۰	۳۵۷/۵	۳۶۸/۳
هر دو تقویت‌کننده	۳۸۷/۱۹۲ (۳)	۳۷۷	۳۶۵	۳۷۴/۱

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

۴-۱- پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده

در این قسمت، پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک و شعاع ۰/۵ (R) متر، طول ۰/۷۵ (L) متر بررسی شده است. ترکیب مواد شامل آلومینیوم[1] با مدول یانگ (E_m) ۷×۱۰^{۱۰} نیوتن بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_m) ۲۷۰۲ کیلوگرم بر متر مکعب و آلومینا[2] با مدول یانگ (E_c) ۳۸×۱۰^{۱۰} نیوتن بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_c) ۳۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب می‌باشد. نسبت پواسون (υ) برای سادگی ۰/۳ فرض می‌شود. ارتفاع تقویت‌کننده‌ها معادل ۰/۰۱متر، پهنای آن‌ها ۰/۰۰۲۵ متر در نظر گرفته می‌شود. سیستم تقویت‌کننده شامل ۱۵ تقویت‌کننده حلقوی و ۶۳ تقویت‌کننده طولی می‌باشد.

جدول **۳** فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده دارای ارتعاش آزاد با پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) ۵×۱۰^{۵} نیوتن بر متر مکعب و $۲/۵\times۱۰^{۴}$ نیوتن بر متر می‌باشد. ارتفاع تقویت‌کننده‌ها ($h_s = h_r$) برابر ۰/۰۱ متر، عرض تقویت‌کننده‌ها ($d_s = d_r$) برابر ۰/۰۰۲۵ متر می‌باشد. همچنین شاخص کسر حجمی پوسته و تقویت‌کننده‌ها (k، k_2، k_3) با هم برابر است. به وضوح مشخص است که فرکانس طبیعی پوسته‌های تقویت‌شده بالاتر از پوسته‌های بدون تقویت‌کننده می‌باشد. زمانی که نسبت لز افزایش می‌یابد، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند. جدول **۳** نشان می‌دهد که با کاهش نسبت R/h، فرکانس طبیعی پوسته افزایش می‌یابد.

اثر نیروی محرکه q_0 بر روی منحنی ارتعاش غیرخطی فرکانس-دامنه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده داخلی در شکل **۳** نشان داده‌شده است. دو ضریب بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب ۵×۱۰^{۵} نیوتن بر متر مکعب و $۲/۵\times۱۰^{۴}$ نیوتن بر متر و دو مقدار Q برابر $۱۰^{۵}$ و ۲×۱۰^{۴} نیوتن بر متر مربع در نظرگرفته می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که با کاهش نیروی محرکه منحنی ارتعاش اجباری به منحنی ارتعاشات آزاد نزدیک‌تر می‌شود.

1 - Aluminum
2 - Alumina

جدول (۲): مقایسه فرکانس پوسته استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک

n	مطالعه حاضر	صوفیه و همکاران	پالیوال و همکاران
۱	۰/۶۷۴۸۰	۰/۶۷۹۲۱	۰/۶۷۸۸۲
۲	۰/۳۶۴۶۳	۰/۳۶۴۶۳	۰/۳۶۳۹۴
۳	۰/۲۰۶۷۰	۰/۲۰۸۰۴	۰/۲۰۵۲۶
۴	۰/۱۳۸۲۴	۰/۲۰۸۰۴	۰/۱۲۷۴۵

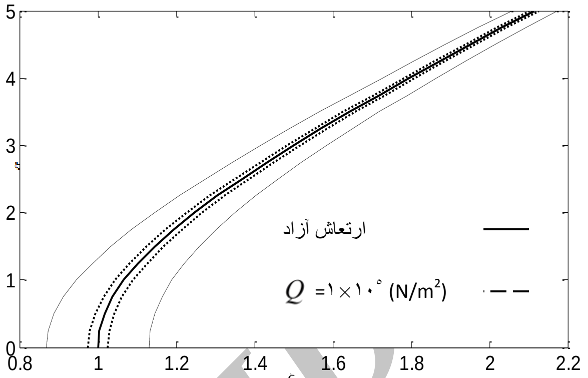
جدول (۳): تأثیر R/h و ضریب کسر حجمی k بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با بستر الاستیک

R/h	k	بدون تقویت‌کننده	با تقویت‌کننده
۱۰۰	۰/۲	۲۱۸۷/۶(۶)*	۳۵۷۹/۵(۵)
۱۰۰	۱	۲۶۵۰/۶(۶)	۳۰۵۰/۸(۵)
۱۰۰	۵	۳۰۲۳/۷(۶)	۲۶۳۵/۴(۵)
۱۰۰	۱۰	۳۱۳۲/۴(۶)	۲۵۲۳/۹(۴)
۱۵۰	۰/۲	۱۸۸۸/۰(۷)	۳۱۹۶/۰(۶)
۱۵۰	۱	۲۲۶۰/۸(۷)	۲۸۹۸/۳(۵)
۱۵۰	۵	۲۲۵۲/۳(۷)	۲۵۸۷/۵(۵)
۱۵۰	۱۰	۲۶۴۳/۱(۷)	۲۴۷۴/۷(۴)
۲۰۰	۰/۲	۱۷۴۱/۳(۷)	۳۰۴۷/۳(۶)
۲۰۰	۱	۲۰۲۶/۸(۷)	۲۸۴۵/۸(۵)
۲۰۰	۵	۲۲۶۰/۶(۷)	۲۵۹۶/۰(۵)
۲۰۰	۱۰	۲۳۲۷/۶(۷)	۲۴۵۲/۲(۴)
۲۵۰	۰/۲	۱۶۸۶/۵(۷)	۲۹۸۶/۷(۶)
۲۵۰	۱	۱۹۳۳/۹(۷)	۲۸۱۹/۸(۵)
۲۵۰	۵	۲۱۳۲/۳(۷)	۲۶۰۳/۸(۴)
۲۵۰	۱۰	۲۱۸۵/۶(۷)	۲۴۳۴/۸(۴)

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

جدول **۴** تأثیر بستر الاستیک و تقویت‌کننده بر روی فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای را نشان می‌دهد که شاخص کسر حجمی پوسته و تقویت‌کننده‌ها (k، k_2، k_3) برابر با ۱، نسبت R/h برابر ۲۵۰، ارتفاع تقویت‌کننده‌ها ($h_s = h_r$) برابر ۰/۰۱ متر، عرض تقویت‌کننده‌ها ($d_s = d_r$) برابر ۰/۰۰۲۵ متر می‌باشد. همان‌طور که می‌توان دید پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به شدت بر روی

فرکانس طبیعی پوسته‌ها تأثیر می‌گذارد. همچنین در صورت وجود هر دو پارامتر بستر الاستیک، فرکانس طبیعی بزرگ‌تر می‌شود.



شکل (۳): منحنی فرکانس- دامنه ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

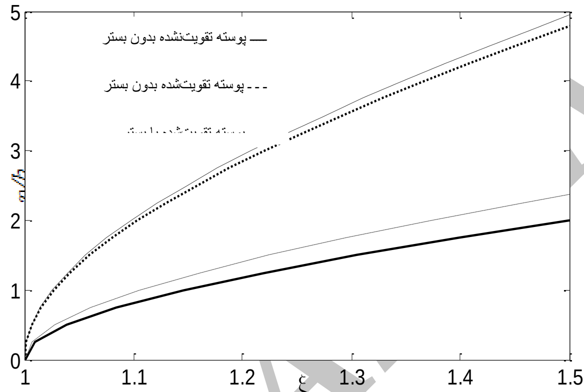
جدول (۴): تأثیر پارامترهای بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی

k_w	k_s	بدون تقویت‌کننده	با تقویت‌کننده
۰	۰	۱۶۵۴/۱(۸)*	۲۷۵۶/۶(۵)
۰	$۱۰^{۴}$	۱۷۷۶/۷(۸)	۲۷۷۸/۴(۵)
۰	۲/۵×$۱۰^{۴}$	۱۹۱۴/۰(۷)	۲۸۱۰/۷(۵)
۰	۵×$۱۰^{۴}$	۲۱۱۷/۶(۷)	۲۸۶۳/۸(۵)
$۱۰^{۵}$	۰	۱۶۵۸/۷(۸)	۲۷۵۸/۵(۵)
$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۴}$	۱۷۸۱/۰(۸)	۲۷۸۰/۲(۵)
$۱۰^{۵}$	۲/۵×$۱۰^{۴}$	۱۹۱۸/۰(۷)	۲۸۱۲/۵(۵)
$۱۰^{۵}$	۵×$۱۰^{۴}$	۲۱۲۱/۲(۷)	۲۸۶۵/۶(۵)
۵×$۱۰^{۵}$	۰	۱۶۷۷/۱(۸)	۲۷۶۵/۹(۵)
۵×$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۴}$	۱۷۹۸/۲(۸)	۲۷۸۷/۶(۵)
۵×$۱۰^{۵}$	۲/۵×$۱۰^{۴}$	۱۹۳۳/۹(۷)	۲۸۱۹/۸(۵)
۵×$۱۰^{۵}$	۵×$۱۰^{۴}$	۲۱۳۵/۷(۷)	۲۸۷۲/۷(۵)
$۱۰^{۶}$	۰	۱۶۹۹/۹(۸)	۲۷۷۵/۱(۵)
$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۴}$	۱۸۱۹/۵(۸)	۲۷۹۶/۸(۵)
$۱۰^{۶}$	۲/۵×$۱۰^{۴}$	۱۹۵۳/۷(۷)	۲۸۲۸/۹(۵)
$۱۰^{۶}$	۵×$۱۰^{۴}$	۲۱۵۳/۶(۷)	۲۸۸۱/۶(۵)

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

شکل **۴** تأثیر هر دو تقویت‌کننده و بستر الاستیک را بر روی منحنی فرکانس- دامنه ارتعاش آزاد غیرخطی برای پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب ۵×$۱۰^{۵}$ نیوتن بر متر مکعب و ۲/۵×$۱۰^{۴}$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر ۲۵۰، (k، k_2، k_3) برابر ۱ و مدهای (m و n) به ترتیب برابر (۱ و ۸) نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که منحنی فرکانس-دامنه پوسته بدون تقویت‌کننده از پوسته تقویت‌شده و بدون بستر الاستیک پایین‌تر است.

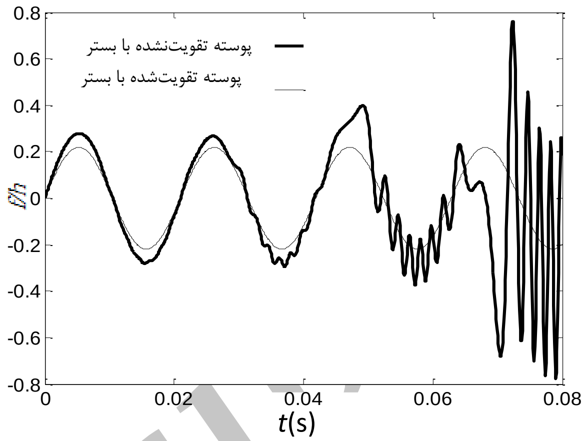
پاسخ‌های غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده در شکل **۵** نشان داده‌شده است. که پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب ۵×$۱۰^{۵}$ نیوتن بر متر مکعب و ۲/۵×$۱۰^{۴}$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر ۲۵۰، (k، k_2، k_3) برابر ۱ و مدهای (m و n) به ترتیب برابر (۱ و ۵) می‌باشد. فرکانس‌های تحریک مربوط به ($q_0 = 10^6 \sin(300t)$) از فرکانس طبیعی بسیار کوچک‌تر است. این نتایج نشان می‌دهد که تقویت‌کننده‌ها، به شدت دامنه ارتعاشی پوسته را زمانی که فرکانس‌های تحریک از فرکانس‌های طبیعی دورتر است، کاهش می‌دهد.



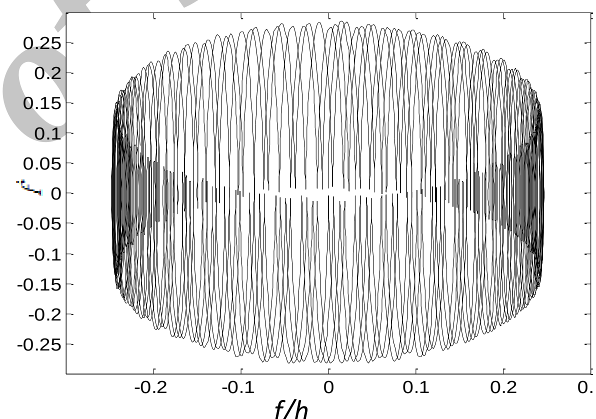
شکل (۴): منحنی فرکانس-دامنه ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده

در شکل **۶** پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده با پارامترهای بستر الاستیک (k_s و k_w) به ترتیب ۵×$۱۰^{۵}$ نیوتن بر متر مکعب و ۲/۵×$۱۰^{۴}$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر ۲۵۰، (k، k_2، k_3) برابر ۱ و مدهای (m و n) به ترتیب برابر (۱ و ۵) و فرکانس تحریک (Ω) برابر با ۳۰۰ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود زمانی که نیروی محرکه کوچک است، رابطه خیز- سرعت به‌صورت یک منحنی بسته است. زمانی که نیروی محرکه (Q) افزایش

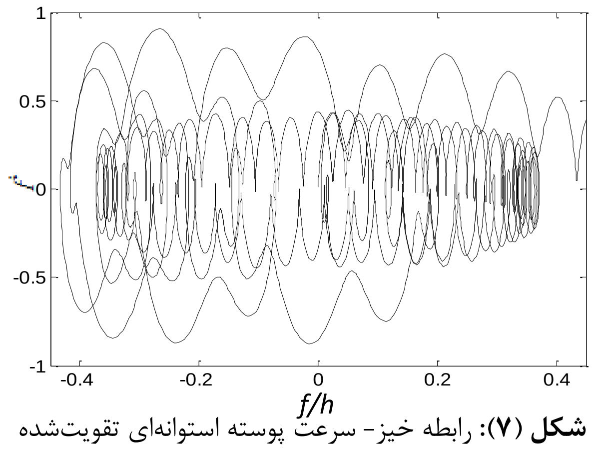
می‌یابد یعنی برابر با $۱/۵\times۱۰^{۶}$ نیوتن بر متـر مربـع، منحنـی خیز-سرعت بی‌نظم‌تر می‌شود که در شکل **۷** مشاهده می‌شود.



شکل (۵): پاسخ‌های غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده

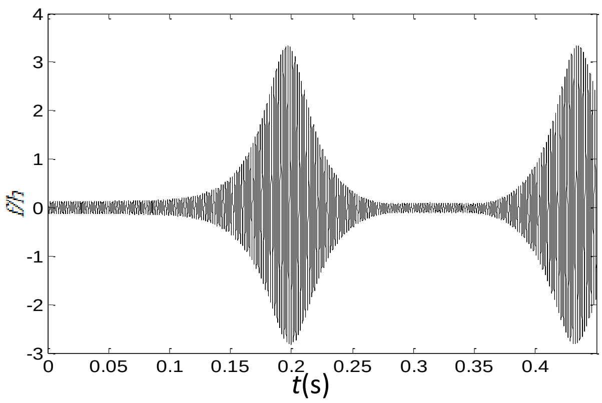


شکل (۶): رابطه خیز- سرعت پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده تحت نیروی محرکه (Q) برابر با $۱۰^{۶}$ نیوتن بر متر مربع



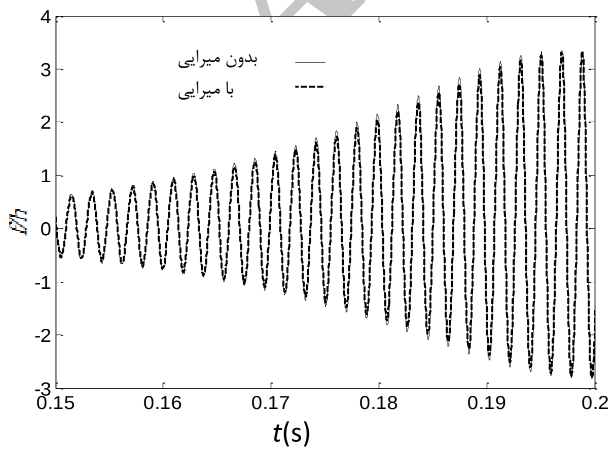
شکل (۷): رابطه خیز- سرعت پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده تحت نیروی محرکه (Q) برابر با $۱/۵\times۱۰^{۶}$ نیوتن بر متر مربع

در شکل **۸** مشاهده می‌شود زمانی که فرکانس‌های تحریک به فرکانس‌های طبیعی نزدیک هستند، پدیده‌ای جالب مشابه پدیده هارمونیک ضربان ارتعاش خطی مشاهده می‌شود. فرکانس تحریک (Ω) برابر با ۲۸۰۰ رادیان بر ثانیه است که به فرکانس طبیعی (ω_{mn}) ۲۸۱۹/۸ رادیان بر ثانیه برای پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده داخلی، نزدیک می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه ضربه، زمانی که فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی نزدیک می‌شود، در حال افزایش است.

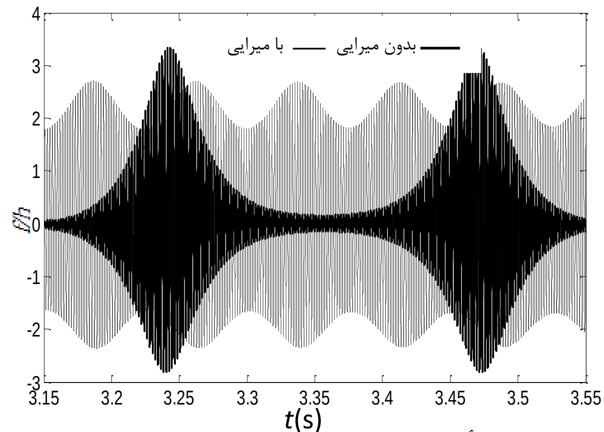


شکل (۸): پاسخ غیرخطی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده

در شکل **۹** و **۱۰** تأثیر میرایی بر پاسخ‌های غیرخطی مشاهده می‌شود، که ضریب میرایی خطی برابر۰/۳ در نظر گرفته شده است. تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی در دوره‌های اول ارتعاش خیلی کوچک است (شکل **۹**) درحالی‌که در دوره‌های بعدی دامنه را به شدت کاهش می‌دهد (شکل **۱۰**).



شکل (۹): تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده در دوره‌های اولیه

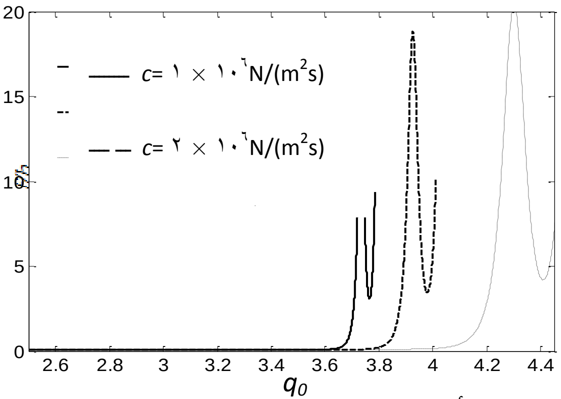


شکل (۱۰): تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده در دوره‌های ثانویه

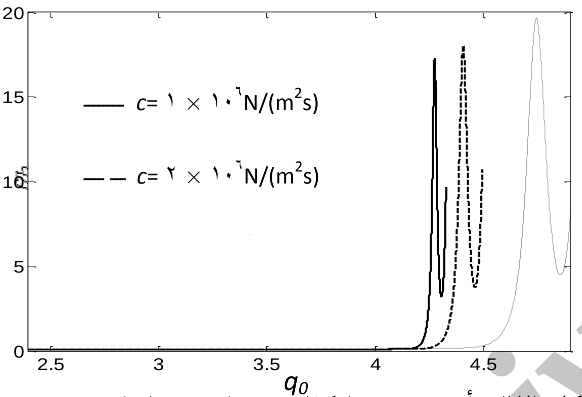
۴-۲- کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت‌کننده

به منظور تحلیل کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده، پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده و بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک با شعاع (R) ۰/۵ متر، طول (L) ۰/۷۵ متر در نظر گرفته می‌شود. ترکیب مواد مانند بخش قبلی می‌باشد. ارتفاع تقویت‌کننده ۰/۰۰۵متر و عرض آن ۰/۰۰۲متر می‌باشد. سیستم تقویت‌کننده شامل ۱۵ تقویت‌کننده حلقوی و ۶۳ تقویت‌کننده طولی می‌باشد.

شکل **۱۲-۱۱** پاسخ‌های دینامیکی پوسته‌های تقویت‌شده با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک تحت بار مکانیکی را نشان می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهد که نقطه مشخصی مانند تحلیل استاتیکی وجود ندارد. در عوض، ناحیه ناپایداری جایی است که منحنی شیب f نسبت به t به شدت افزایش پیدا می‌کند. بر طبق معیار بدیانسکی- راث [۸]، زمان بحرانی t_{cr} را می‌توان در میانه این ناحیه در نظر گرفت. بنابراین، می‌توان نقطه عطف منحنی یعنی $\left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_{t=t_{cr}}=0$ را انتخاب کرد [۷]. تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخ‌های دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای در شکل **۱۱** و **۱۲** نشان داده شده است. سه مقدار سرعت بارگذاری (c) برابر با $۱۰^۶$، ۲×۱۰^۶ و ۵×۱۰^۶ نیوتن بر متر مربع ثانیه، انتخاب می‌شود. به وضوح مشخص است که بارهای کمانش دینامیکی بحرانی و پاسخ ماکزیمم دامنه با افزایش سرعت بار افزایش می‌یابد.



شکل (۱۱): تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخ دینامیکی پوسته تقویت‌شده تحت فشار خارجی بدون بستر الاستیک و مدهای (m و n) به ترتیب برابر ۱ و ۸



شکل (۱۲): تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخ دینامیکی پوسته تقویت‌شده تحت فشار خارجی با بستر الاستیک (k_w و k_s) به ترتیب ۵×۱۰^۵ نیوتن بر متر مکعب و $۲/۵\times۱۰^۴$ نیوتن بر متر و مدهای (m و n) به ترتیب برابر ۱ و ۸

تأثیر بستر الاستیک و تقویت‌کننده بر بارهای کمانش بحرانی غیرخطی در جدول **۵** آورده شده است. در محاسبات پارامترهای بستر الاستیک (k_w و k_s) به ترتیب ۵×۱۰^۵ نیوتن بر متر مکعب و $۲/۵\times۱۰^۴$ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر ۲۵۰، (k، k_2، k_3) برابر ۱ و مقدار سرعت بارگذاری (c) برابر با $۱۰^۶$ نیوتن بر متر مربع ثانیه، فرض شده است. به وضوح مشخص است که بستر الاستیک باعث افزایش قابل توجه بار بحرانی کمانش می‌شود. به نظر می‌رسد تقویت‌کننده‌های طولی و تقویت‌کننده‌های حلقوی به شدت بر بار بحرانی کمانش پوسته‌ها تأثیر می‌گذارد. جدول ۵ همچنین نشان می‌دهد بارهای بحرانی کمانش دینامیکی از بارهای بحرانی کمانش استاتیکی بیشتر است.

جدول (۵): تأثیر بستر الاستیک و تقویت‌کننده بر بار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی ($\times 10^5$)

نوع تقویت‌کننده	بدون بستر الاستیک (استاتیکی)	بدون بستر الاستیک (دینامیکی)	با بستر الاستیک (استاتیکی)	با بستر الاستیک (دینامیکی)
بدون تقویت‌کننده	۱/۲۹۲(۹)*	۱/۵۶۴(۹)	۱/۸۵۰(۹)	۲/۱۲۰(۹)
تقویت‌کننده طولی	۳/۳۴۵(۸)	۳/۷۳۲(۸)	۴/۰۲۲(۸)	۴/۳۰۴(۸)
تقویت‌کننده حلقوی	۱/۳۰۰(۹)	۱/۶۸۹(۹)	۱/۸۵۸(۹)	۲/۳۰۴(۹)
هر دو تقویت‌کننده	۳/۴۶۵(۸)	۳۷۴۴/(۸)	۴/۰۳۸(۸)	۴/۲۷۱(۸)

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل پوسته‌های نازک استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده در معرض فشار خارجی وابسته به زمان که توسط بستر الاستیک احاطه‌شده، پیشنهاد شده است. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای با جمله‌های غیرخطی فن‌کارمن، معادلات حاکم به دست آمده است. یک عبارت سه‌جمله‌ای شامل شکل پیش‌کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته با تقویت کننده مدرج تابعی استفاده شده است. با استفاده از روش گالرکین، معادلات دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدور مدرج تابعی با تقویت‌کننده به دست آورده شده است و رابطه فرکانس- دامنه ارتعاش غیرخطی به فرم ساده نوشته شده است. پاسخ دینامیکی غیرخطی و بار کمانش دینامیکی بحرانی با استفاده از روش رانگ کوتا و معیار بدیانسکی- راث تحلیل شده است.

بعضی از نتایج به دست آمده از این مطالعه عبارت است:

الف) تقویت‌کننده‌ها و بستر الاستیک تأثیر زیادی بر افزایش فرکانس طبیعی پوسته‌ها دارد.

ب) زمانی که فرکانس‌های تحریک به فرکانس‌های طبیعی نزدیک هستند، پدیده‌ای جالب مثل پدیده هارمونیک ضربان ارتعاش خطی مشاهده می‌شود.

ج) تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی در اولین دوره ارتعاش ناچیز است، اگرچه دامنه را در دوره‌های بعد به شدت کاهش می‌دهد.

د) تقویت‌کننده‌ها و بستر الاستیک، پایداری دینامیکی و ظرفیت تحمل بار پوسته‌های مدرج تابعی را بالا می‌برند.

ه) بیش‌ترین فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد مربوط به پوسته شامل بستر الاستیک با حضور هر دو پارامتر (k_w و k_s) می‌باشد.

و) نسبت شعاع به ضخامت، بستر الاستیک و موقعیت تقویت‌کننده‌ها تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای دارد.

ز) تقویت‌کننده‌های طولی تأثیر ناچیز و تقویت‌کننده‌های حلقوی تأثیر قابل توجهی بر بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی دارند.

۶- مراجع

1. Shen, H.S. “Postbuckling Analysis of Pressure-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments”, Eng. Struct., Vol. 25, No. 4, pp. 487-497, 2003.
2. Huang, H. and Han, Q. “Nonlinear Elastic Buckling and Postbuckling of Axially Compressed Functionally Graded Cylindrical Shells”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 51, No. 7, pp. 500-507, 2009.
3. Shen, H.S. “Torsional Buckling and Postbuckling of FGM Cylindrical Shells in Thermal Environments”, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 44, No. 6, pp. 644-657, 2009.
4. Azimi, P., Mehrabani, M.M., and Jafari, A.A. “Effect of Internal Pressure on Free Vibration of a FGM Cylindrical Shell”, Aerospace Mech. J., Vol. 7, No. 1, pp. 81-90, 2011. (In Persian)
5. Zozulya, V.V. and Zhang, and Ch. “A High Order Theory for Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 60, No. 1, pp. 12-22, 2012.
6. Shen, H.S. “Postbuckling of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 51, No. 5, pp. 372-383, 2009.
7. Bagherizadeh, E., Kiani, Y., and Eslami, M.R. “Mechanical Buckling of Functionally Graded Material Cylindrical Shells Surrounded by Pasternak Elastic Foundation”, Compos. Struct., Vol. 93, No. 11, pp. 3063-3071, 2011.
8. Sofiyev, A.H. “Buckling Analysis of FGM Circular Shells Under Combined Loads and Resting on the

Foundations", Meccanica, Vol. 48, No. 4, pp. 829-840, 2013.

20. Duc, N.D. and Thang, P.T. "Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations", j.ast, Vol. 40, pp. 115–127, 2015.
21. Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H., "Nonlinear Dynamical Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Cylindrical Panels", Compos. Struct., Vol. 94, No. 8, pp. 2465-2473, 2012.
22. Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H., "Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells", Compos. Struct., Vol. 96, pp. 384-395, 2013.
23. Bich D.H., Duc N.D., and Quan T.Q. "Nonlinear Vibration of Imperfect Eccentrically Stiffened Functionally Graded Double Curved Shallow Shells Resting on Elastic Foundation Using the First Order Shear Deformation Theory" Mechanical Sciences, Vol. 80, pp. 16-28, 2013.
24. Brush, D.O. and Almroth, B. O. "Buckling of Bars, Plates and Shells", Mc Graw-Hill, New York, 1975.
25. Reddy, J.N. and Starnes, J.H. "General Buckling of Stiffened Circular Cylindrical Shells According to a Layerwise Theory", Comput. Struct., Vol. 49, No. 4, pp. 605-616, 1993.
26. Volmir, A.S. "Non-linear Dynamics of Plates and Shells", Science Edition M, USSR, 1972. (in Russian).
27. Sewall, J.L. and Naumann, E.C. "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Cylindrical Shells with and Without Longitudinal Stiffeners", NASA technical, note D-4705, pp. 1-54, 1968.
28. Baruch, M. and Singer, J. "Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Hydro-static Pressure", J. Mech. Eng. Sci. Vol. 5, No. 1, pp. 23-27, 1963.
29. Shen, H.S. "Post-buckling Analysis of Imperfect Stiffened Laminated Cylindrical Shells Under Combined External Pressure and Thermal Loading", Int. J. Mech., Vol. 40, No. 4, pp. 339-355, 1998.
30. Sofiyev, A.H. "The Non-linear Vibration of FGM Truncated Conical Shells", Compos. Struct., Vol. 94, No. 7, pp. 2237-2245, 2012.
31. Paliwal, D.N., Pandey, R. K., and Nath, T. "Free Vibration of Circular Cylindrical Shell on Winkler and Pasternak Foundation", Int. J. Pres. Ves. Pip., Vol. 69, No. 1, pp. 79-89, 1996.

Pasternak Type Elastic Foundation", Mech. Res. Commun., Vol. 37, No. 6, pp. 539-544, 2010.

9. Najafizadeh, M.M., Hasani, A., and Khazaeinejad, P. "Mechanical Stability of Functionally Graded Stiffened Cylindrical Shells", Appl. Math., Vol. 54, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.
10. Bich, D.H., Nam, V.H., and Phuong, N.T. "Nonlinear Postbuckling of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Plates and Shallow Shells", Vietnam J. Mech., Vol. 33, No. 3, pp. 132-147, 2011.
11. Dung, D.V. and Hoa, L.K. "Nonlinear Buckling and Post-buckling Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Under External Pressure", Thin-Walled Struct., Vol. 63, pp. 117-124, 2013.
12. MalekzadehFard K., ZamaniSani, S.M., and Tajdari, M., Satouri, S. "Dynamic Analysis of the Long Thick Cylindrical Shell Subjected to Mechanical Transient Moving Pressure", Aerospace Mech. J., Vol. 10, No. 3, pp. 43-52, 2014. (In Persian)
13. Isvandzibaei, M.R., Setareh, M., and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", Aerospace Mech. J., Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2010. (In Persian)
14. Dung, D.V. and Nam, V.H. "Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Thin Shells Under External Pressure and Surrounded by an Elastic Medium", European J., Vol. 46, pp. 42-53, 2014.
15. Darabi, M., Darvizeh, M., and Darvizeh, A. "Non-linear Analysis of Dynamic Stability for Functionally Graded Cylindrical Shells Under Periodic Axial Loading", Compos. Struct., Vol. 83, No. 2, pp. 201-211, 2008.
16. Sofiyev, A.H. "The Vibration and Stability Behavior of Freely Supported FGM Conical Shells Subjected to External Pressure", Compos. Struct. Vol. 89, No. 3, pp. 356-366, 2009.
17. Huang, H. and Han, Q. "Nonlinear Dynamic Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to a Time-dependent Axial Load", Compos. Struct., Vol. 92, No. 2, pp. 593-598, 2010.
18. Budiansky, B. and Roth, R.S. "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", NASA technical, note D_1510, pp. 597-606, 1962.
19. Najafov, A.M., Sofiyev, A.H., and Kuruoglu, N., "Torsional Vibration and Stability of Functionally Graded Orthotropic Cylindrical Shells on Elastic