علىرضا شاطرزاده

تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته استوانهای مدرج تابعی تقویتشده با بستر الاستیک و فشار خارجی

کامران فروتن^۲

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود (تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۳/۰۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۲/۰۷)

چکیدہ

پوستههای استوانهای تقویتشده، یکی از مهم ترین سازهها در صنایع هوافضا می باشند. در این مقاله یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل پوستههای استوانهای مدرج تابعی تقویتشده که توسط محیط الاستیک احاطه شده و تحت فشار خارجی قرار دارد، ارائه شده است. محیط الاستیک بر حسب دو پارامتر بستر الاستیک مدل پیشنهادی وینکلر- پاسترناک فرض شده است. جنس تقویت کننده ها نیز مدرج تابعی می باشد. روابط کرنش-جابه جایی با توجه به روابط غیر خطی فن کارمن و تئوری کلاسیک پوسته ها به دست آمده است. برای حل دینامیکی غیر خطی مسأله از روش ارتعاش غیر خطی و روش گالر کین استفاده شده است. با در نظر گرفتن یک عبارت سه جمله ای برای شکل خیز، رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش غیر خطی به فرم ساده ای تبدیل می شود. پاسخ دینامیکی غیر خطی با روش رانگ کوتا مرتبه چهارم به دست می آید. رفتار کمانش دینامیکی غیر خطی پوسته های مدرج تابعی تقویت شده نیز بر اساس معیار بدیانسکی- راث بررسی می شود. اثر پارامترهایی از جمله تقویت کننده ها، بستر الاستیک و نیروی محرکه بر منحنی ارتعاش غیر خطی فرکانس- دامنه و تأثیر میرایی و سرعت بارگذاری بر پاسخهای دینامیکی غیر خطی پوسته ها، بستر الاستیک و نیروی محرکه بر منحنی ارتعاش غیر خطی فرکانس- دامنه و تأثیر میرایی و سرعت بارگذاری بر پاسخهای دینامیکی غیر خطی نیز محاسبه شده است. معیار بدیانسکی- راث بررسی می شود. اثر پارامترهایی از جمله الاستیک و نیروی محرکه بر منحنی ارتعاش غیر خطی فرکانس- دامنه و تأثیر میرایی و سرعت بارگذاری بر پاسخهای دینامیکی غیر خطی پوسته-مای استوانه ای مدرج تابعی، بررسی شده است. همچنین فرکانسهای طبیعی، بارهای کمانش استاتیکی و دینامیکی غیر خطی نیز محاسبه شده است.

واژههای کلیدی: آنالیز دینامیکی غیرخطی، پوسته استوانهای تقویت شده، کمانش، بستر الاستیک، مواد تابعی

Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened FGM Cylindrical Shells With Elastic Foundation Under Uniform External Pressure

A. Shaterzadeh

K. Foroutan

Mechanical Engineering Department Shahrood University of Technology (Received: 3/June/2015; Accepted: 26/February/2016)

Abstract

The eccentrically stiffened cylindrical shells are one of the most important structures in aerospace industries. In this paper, semi-analytical method for eccentrically stiffened functionally graded (FG) cylindrical shells under external pressure and surrounded by an elastic medium is presented. The proposed model is based on Winkler and Pasternak elastic foundation parameters. According to the Von Karman nonlinear equations and the classical plate theory (CPT) of shells, strain displacement relations are obtained. The smeared stiffeners technique and Galerkin method, used for solving nonlinear dynamic problem. With considering three terms approximation for the deflection shape, the frequency-amplitude relation for non-linear dynamic buckling behavior of stiffened FGM shells is investigated based on the Budiansky-Roth criterion. The effect of parameters such as eccentrically stiffened, elastic foundation and excitation force on the frequency-amplitude curve of the nonlinear vibrations and parameters such as damping and loading speed on the nonlinear dynamic response of the FGM cylindrical shells have been investigated. The natural frequency, static and dynamic buckling load are analyzed, too.

Keywords: Nonlinear dynamic analysis, Stiffened cylindrical shell, Buckling, Elastic foundation, FGM.

a_shaterzadeh@shahroodut.ac.ir - استادیار (نویسنده پاسخگو): ۱

۲- - دانشجوی کارشناسی ارشد: Kamran.foroutan@gmail.com

۱– مقدمه

۱۲

تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوستههای استوانهای، مورد علاقهی بسیاری از محققان در سراسر جهان میباشد. در تحلیل استاتیکی، بسیاری از مطالعات بر کمانش و پس کمانش ناشی از بارهای حرارتی و مکانیکی متمرکز است. در عمل به منظور تقویت سازه جهت تحمل بارهای اعمالی از تقویت کنندههایی' با وزن کم استفاده می شود. مطالعه بر روی رفتار دینامیکی- استاتیکی غیرخطی این قبیل سازهها از منظر عملی دارای اهمیت ویژهای است. با این حال با بررسیهای صورت گرفته می توان گفت مطالعات انجام شده بر تحلیل های غیرخطی استاتیکی و دینامیکی با روشهای تحلیلی بسیار محدود است. در سالهای اخیر به دلیل قابلیتهای فراوان مواد مدرج تابعی، استفاده از این مواد در صنایع پیشرفته بسیار گسترش یافته است. مزایای استفاده از این مواد این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنشهای حرارتی، تنشهای پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب^۳ لایهای و یا روشهای مرسوم برای مقاومسازی ماده بسیار کاهش می یابد. از ورقهای مدرج تابعی به عنوان سدهای حرارتی در محیطهایی با دمای بسیار بالا مانند سازههای فضایی، راکتور هستهای، پرههای توربین، توربین گازی پیشرفته و سیستم احتراقی استفاده شده است. اغلب این مواد از ترکیب سرامیک مهندسی و فلز یا ترکیبی از فلزات ساخته میشوند.

شن^{^{*}} [۱] کمانش پوستههای نازک استوانهای مدرج تابعی کامل و ناقص در محیطهای حرارتی تحت فشار جانبی و با استفاده از تئوری کلاسیک و با استفاده از هندسهی تئوری غیرخطی فنکارمن- دانل⁶ را ارائه داده است. همچنین با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مراتب بالاتر؛ به بررسی پسکمانش² پوسته استوانهای مختلط^۲ مدرج تابعی در

- 1 Stiffeners
- 2 Functionally graded material
- 3 Composite material
- 4 Shen
- 5 von Karman-Donnell
- 6 Postbuckling
- 7 Hybrid

محیطهای حرارتی تحت بار محوری پرداختهاست. هوانگ و هان (۲] به مطالعه کمانش و پس کمانش پوسته های استوانه ای مدرج تابعی بدون تقویت کننده تحت بار پیچشی، فشار محوری، فشار شعاعی، ترکیب فشار محوری و شعاعی بر اساس تئوری پوسته دانل و روابط غیرخطی کرنش- جابهجایی برای تغییر شکلهای بزرگ پرداختهاند. شن [۳] کمانش پیچشی و پس کمانش پوسته های استوانه ای مدرج تابعی در محیط های حرارتی را بررسی نموده است. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانهای مدرج تابعی جدارنازک تحت فشار داخلی توسط عظیمی (و همکاران [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. زوزولیا و ژانگ^{۱۱} [۵] رفتار پوستههای استوانهای متقارن مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه بالا را مورد مطالعه قرار دادهاند. پس کمانش پوسته های استوانه ای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک تحت بار فشار محوری داخلی توسط شن و همکاران [۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. باقریزاده^{۲۲} و همکاران [۷] به بررسی کمانش مکانیکی پوستههای استوانهای مدرج تابعی شامل بستر الاستیک پاسترناک^{۱۳} پرداختهاند. صوفیه^{۱۴} [۸] تحلیل کمانش پوسته های مدور مدرج تابعی تحت بارگذاری ترکیبی با بستر الاستیک از نوع پاسترناک را ارائه داده است. اخیراً، نجفیزاده ۱۵ و همکاران [۹] کمانش استاتیکی خطی پوسته استوانهای مدرج تابعی تحت بار محوری با تقویت کنندههای طولی و حلقوی را مطالعه کردهاند.

بیچ^{۱۶} و همکاران [۱۰] تحلیل استاتیکی و دینامیکی غیرخطی صفحات مدرج تابعی، پنلهای استوانهای و پوستههای کوتاه با سیستم تقویتکننده همگن را بررسی کردهاند. دانگ و هوا^{۱۷} [۱۱] به مطالعه تحلیلی کمانش استاتیکی غیرخطی و تحلیل پس کمانش پوستههای استوانهای مدرج تابعی تقویتشده^{۸۸} تحت بار پیچشی با تقویتکنندههای

- 8 Huang and Han
- 9 Unstiffened
- 10 Azimi
- 11 Zozulya and Zhang
- 12 Bagherizadeh
- 13 Pasternak
- 14 Sofiyev
- 15 Najafizadeh
- 16 Bich
- 17 Dung and Hoa
- 18 Eccentrically stiffened Functionally graded material

مدرج تابعی پرداختهاند. ملکزاده فرد و همکاران [۱۲] به بررسی پاسخ دینامیکی استوانه ضخیم، تحت بارگذاری فشار مکانیکی گذرای متحرک پرداختهاند. عیسوند زیبائی^۲ و همکاران [۱۳] به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانهای نازک با رینگ تقویت شده ساخته شده از مواد هوشمندکه ترکیبی از فولاد ضدزنگ و نیکل میباشد، پرداختهاند.

دانگ و نام^۳ [۱۴] حل تحلیلی دینامیکی پوستههای استوانهاى مدرج تابعى تحت فشار خارجى احاطه شده توسط بستر الاستیک با تقویت کننده فلز را انجام دادهاند. دارابی و همکاران [۱۵] به تحلیل رزونانس پارامتری خطی و غیرخطی پوستههای استوانهای مدرج تابعی بدون تقویت کننده پرداختهاند. دنیز⁶ و صوفیه [۱۶] ارتعاشات و ناپایداری دینامیکی پوستههای مخروطی مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادهاند. هوانگ و هان [۱۷] کمانش دینامیکی غیرخطی پوستههای استوانهای مدرج تابعی بدون تقویت کننده در معرض بار محوری وابسته به زمان بر اساس معیار کمانش دینامیکی بدیانسکی- راث⁶ [۱۸] را ارائه دادهاند. آنها اثر پارامترهای مختلفی از جمله شاخص ناهمگنی، سرعت بارگذاری، پارامترهای ابعادی، افزایش دمای محیط و نقص اولیه را در کمانش دینامیکی غیرخطی مورد بررسی قرار دادهاند. بررسی ارتعاشات پیچشی و پایداری پوستههای استوانهای مدرج تابعی ارتوتروپیک^۷ با بستر الاستیک توسط نجفو و همکاران [۱۹] انجام شده است. داک و تانگ [۲۰] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تابع تنش به همراه معادلات کامل حرکت به بررسی پاسخ دینامیکی غيرخطى پوستههاى استوانهاى مدرج تابعى تقويتشده پرداختهاند. بیچ و همکاران [۲۱] پاسخ دینامیکی غیرخطی پنلهای استوانهای مدرج تابعی تقویتشده تحت بارگذاری محوری را بررسی نمودهاند. آنها برای بیان خیز از عبارت یک

- 1 MalekzadehFard
- 2 Isvandzibaei
- 3 Dung and Nam
- 4 Darabi
- 5 Deniz
- 6 Budiansky-Roth 7 - Orthotropic
- 8 Najafov
- 9 Duc and Thang

جملهای شکل کمانش خطی استفاده کردهاند، در حالی که در کار حاضر از یک عبارت سه جملهای شامل شکل پیش کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای بیان خیز استفاده شده است و همچنین جنس تقویت کننده ها مدرج تابعی، نوع بارگذاری فشار عرضی و از بستر الاستیک استفاده شده است. بیچ و همکاران [۲۲ و ۲۳] همچنین به تحلیل دینامیکی غیرخطی پوستههای نازک مدرج تابعی تقویت شده پرداختهاند. آنها دوباره برای بیان خیز از عبارت یک جملهای شکل کمانش خطی استفاده کردهاند، نوع بارگذاری را نیز محوری و جنس تقویت کنندهها را نیز فلز در نظر گرفتهاند.

مروری بر مطالعات انجامشده نشان میدهد که مطالعات بسیار کمی بر تحلیل دینامیکی غیرخطی پوستههای تقويتشده مدرج تابعي احاطهشده توسط يك بستر الاستيك با استفاده از روش تحلیلی وجود دارد. در این مقاله، رفتار دینامیکی پوستههای استوانهای مدور مدرج تابعی با تقویت کننده با سیستم تقویت کننده حلقوی و طولی در پوسته تحت فشار خارجی انجام شده است. معادلات دینامیکی غیرخطی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته و لحاظ کردن روابط کرنش جابهجایی غیرخطی تغییر شکلهای بـزرگ و بـه کمک روش تقویت کننده های تکهای ۲۰ با روش گالرکین به دست آمده است. نوآوری کار در این است که از یک عبارت سه جملهای شامل شکل پیش کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیرخطی برای تقریب خیز پوسته با تقویت کننده مدرج تابعی استفاده شده است و رابطه دامنه- فرکانس از ارتعاش غیرخطی به صورت صریح و روشن به دست آمده است. علاوه بر این، پاسخ دینامیکی غیرخطی با استفاده از روش رانگ کوتا^{۱۱} مرتبه چهارم و بارهای کمانش دینامیکی یوستههای مدرج تابعی تقویتشده بر اساس معیار بدیانسکی- راث بررسی شده است و جنس تقویت کنندهها نیز مدرج تابعی در نظر گرفته شده است . نتایج نشان میدهد که تقویت کنندهها، شاخص کسر حجمی^{۱۲} و پارامترهای هندسی به شدت بر رفتار دینامیکی پوستهها تأثیر گذار است.

- 11 Runge-Kutta
- 12 Volume-fractions index

^{10 -} Smeared stiffeners technique

۲- فرمولبندی مسأله

روابط و فرمول های مورد نیاز به ترتیب ارائه شده است.

۲-۱- مشخصات قانون توانی ٔ مواد مدرج تابعی

در این مقاله مواد مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک میباشد. با اعمال قانون توانی، کسر حجمی به صورت رابطه (۱) میباشد:

$$V_{c} = V_{c}(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{k}$$

$$V_{m} = V_{m}(z) = 1 - V_{c}(z)$$
(1)

z در آن، h ضخامت پوسته؛ $0 \le k \ge 0$ شاخص کسر حجمی؛ z مختصات ضخامت که بین 2/h - e و 2/h میباشد؛ زیرنویس c مختصات ضخامت که بین $(Pr_{eff} - e)$ میباشد؛ زیرنویس قانون مشخصه مؤثر ($Pr_{eff} - e$) پوسته مدرج تابعی براساس قانون میشود: $r_{eff} = Pr_m(z)V_m(z) + Pr_c(z)V_c(z)$ (۲)

بر طبق قانون ذکرشده، مدول یانگ^۲ و دانسیته جرمی^۳ برای

یوسته و تقویتکنندهها به فرم رابطه (۳) بیان میشود:

$$\begin{split} E(z) &= E_{m}V_{m} + E_{c}V_{c} = \\ E_{m} + (E_{c} - E_{m})\left(\frac{2z + h}{2h}\right)^{k}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ E_{s} &= E_{c} + (E_{m} - E_{c})\left(\frac{2z - h}{2h_{s}}\right)^{k_{2}} \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_{s} \\ E_{r} &= E_{c} + (E_{m} - E_{c})\left(\frac{2z - h}{2h_{r}}\right)^{k_{3}} \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_{r} \\ \rho(z) &= \rho_{m}V_{m} + \rho_{c}V_{c} = \rho_{m} + (\rho_{c} - \rho_{m})\left(\frac{2z + h}{2h}\right)^{k} \\ \rho_{s} &= \rho_{c} + (\rho_{m} - \rho_{c})\left(\frac{2z - h}{2h_{s}}\right)^{k_{3}} \\ \rho_{r} &= \rho_{c} + (\rho_{m} - \rho_{c})\left(\frac{2z - h}{2h_{r}}\right)^{k_{3}} \end{split}$$

1 - Power law

که E_m ، E_m ، E_c ، ρ_m ، که انسیته مدول یانگ و دانسیته جرمی فلز و سرامیک، $0 \leq k_2 \geq 0$ و $k_3 \geq k_3$ به ترتیب شاخص کسر حجمی تقویت کننده طولی و حلقوی میباشد.

۲- ۲- روابط بنیادی و معادلات حاکم

R یک پوسته نازک استوانه ای مدرج تابعی به طول L، شعاع R که توسط بستر الاستیک احاط مشده را در نظر می گیریم. تقویت کننده های حلقوی و طولی مدرج تابعی می باشند (شکل ۱). مختصات اصلی x، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و در جهت شعاعی می باشد.



شکل (۱): پوسته استوانهای تقویت شده در محیط الاستیک.

کرنشها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله z از سطح میانی بهصورت رابطه (۴) میباشند:

 $\mathcal{E}_{x} = \mathcal{E}_{x}^{0} - z \,\chi_{x}, \, \mathcal{E}_{y} = \mathcal{E}_{y}^{0} - z \,\chi_{y}, \, \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{0} - z \,\chi_{xy} \qquad (\texttt{f})$ $\texttt{I}_{x} = \mathcal{I}_{x} + \mathcal{I}_{x} +$

$$\varepsilon_{x}^{0} = u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^{2}$$

$$\varepsilon_{y}^{0} = v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (w_{,y})^{2}$$

$$\gamma_{xy}^{0} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}$$

$$\chi_{x} = w_{,xx}, \ \chi_{y} = w_{,yy}, \ \chi_{xy} = w_{,xy}$$
(Δ)

با توجه به رابطه (۵)، معادله سازگاری به صورت رابطـه (۶) نتیجه می شود:

$$\varepsilon_{x.yy}^{0} + \varepsilon_{y,xx}^{0} - \gamma_{xy,xy}^{0} = -\frac{1}{R} w_{,xx} + (w_{,xy})^{2} - w_{,xx} w_{,yy} (\mathcal{F})$$

روابط تنش-کرنش برای پوستههای مدرج تـابعی اسـتوانهای بهصورت رابطه (۷) قابل بیان است:

^{2 -} Young's modulus

^{3 -} Mass density

$$A_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu^2} + \frac{E_{1s}d_s}{S_s}, A_{12} = \frac{E_1\nu}{1 - \nu^2}, A_{14} = \frac{E_2}{1 - \nu^2} + \frac{E_{2s}d_s}{S_s}$$

$$A_{15} = \frac{E_2\nu}{1 - \nu^2}, A_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu^2} + \frac{E_{1r}d_r}{S_r}, A_{25} = \frac{E_2}{1 - \nu^2} + \frac{E_{2r}d_r}{S_r} (11)$$

$$A_{33} = \frac{E_1}{2(1 + \nu)}, A_{36} = \frac{E_2}{2(1 + \nu)}, A_{44} = \frac{E_3}{1 - \nu^2} + \frac{E_{3s}d_s}{S_s}$$

$$A_{45} = \frac{E_3\nu}{1 - \nu^2}, A_{55} = \frac{E_3}{1 - \nu^2} + \frac{E_{3r}d_r}{S_r}, A_{66} = \frac{E_3}{2(1 + \nu)}$$

در روابط (۱۲–۱۴) مدولهای یانگ محاسبه شده است:

$$E_{1} = \int_{-h/2}^{h/2} E_{sh}(z) dz = \left(E_{ou} + \frac{E_{in} - E_{ou}}{k+1}\right) h$$

$$E_{2} = \int_{-h/2}^{h/2} z E_{sh}(z) dz = \frac{\left(E_{in} - E_{ou}\right) k h^{2}}{2(k+1)(k+2)}$$

$$E_{3} = \int_{-h/2}^{h/2} z^{2} E_{sh}(z) dz = \left[\frac{E_{ou}}{12} + \left(E_{in} - E_{ou}\right) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4}\right)\right] h^{3}$$
(17)

$$E_{1s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_{s}} E_{s}(z) dz = \left(E_{in} + \frac{E_{ou} - E_{in}}{k_{2} + 1}\right) h_{s}$$

$$E_{2s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_{s}} zE_{s}(z) dz = \frac{E_{in}}{2} hh_{s}\left(\frac{h_{s}}{h} + 1\right)$$

$$+ \left(E_{ou} - E_{in}\right) hh_{s}\left(\frac{1}{k_{2} + 2} \frac{h_{s}}{h} + \frac{1}{2k_{2} + 2}\right) \qquad (17)$$

$$E_{3s} = \int_{-h/2}^{h/2+h_{s}} z^{2}E_{s}(z) dz = \frac{E_{in}}{3} h_{s}^{3}\left(\frac{3}{4} \frac{h^{2}}{h_{s}^{2}} + \frac{3}{2} \frac{h_{s}}{h} + 1\right)$$

$$+ \left(E_{ou} - E_{in}\right) h_{s}^{3}\left(\frac{1}{k_{2} + 3} + \frac{1}{k_{2} + 2} \frac{h}{h_{s}} + \frac{1}{4(k_{2} + 1)} \frac{h^{2}}{h_{s}^{2}}\right)$$

$$E_{1r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_{r}} E_{r}(z) dz = \left(E_{in} + \frac{E_{ou} - E_{in}}{k_{3} + 1}\right) h_{r}$$

$$E_{2r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_{r}} zE_{r}(z) dz = \frac{E_{in}}{2} hh_{r}\left(\frac{h_{r}}{h} + 1\right)$$

$$+ \left(E_{ou} - E_{in}\right) hh_{r}\left(\frac{1}{k_{3} + 2} \frac{h_{r}}{h} + \frac{1}{2k_{3} + 2}\right) \qquad (15)$$

$$E_{3r} = \int_{-h/2}^{h/2+h_{r}} z^{2}E_{r}(z) dz = \frac{E_{in}}{3} h_{r}^{3}\left(\frac{3}{4} \frac{h^{2}}{h_{r}^{2}} + \frac{3}{2} \frac{h_{r}}{h} + 1\right)$$

$$+ \left(E_{ou} - E_{in}\right) hh_{r}\left(\frac{1}{k_{3} + 3} + \frac{1}{k_{3} + 2} \frac{h_{r}}{h_{r}} + \frac{1}{4(k_{3} + 1)} \frac{h^{2}}{h_{r}^{2}}\right)$$

و h_r ، d_r ، S_r و h_s ، d_s ، S_s بـــه ترتيــب فاصــله، عــرض و ضخامت تقويت كننده طولى و حلقوى مىباشد.

با مرتبسازی رابطه (۹) بـر حسـب کـرنشهـا رابطـه (۱۵) حاصل میشود:

$$\sigma_x^{sh} = \frac{E(z)}{1 - v^2} \left(\varepsilon_x + v \varepsilon_y \right)$$

$$\sigma_y^{sh} = \frac{E(z)}{1 - v^2} \left(\varepsilon_y + v \varepsilon_x \right)$$

$$\tau_{xy}^{sh} = \frac{E(z)}{2(1 + v)} \gamma_{xy}$$
(Y)

که ضریب پواسون $(v)^{sh}$ ثابت فرض می شود، σ_x^{sh} ، σ_x^{sh} تنش نرمال در مختصات x ، y روی پوسته بدون تقویت کننده و τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت کننده می باشد.

همچنین روابط تنش-کرنش برای تقویتکنندههای مدرج تابعی را میتوان بهصورت رابطه (۸) نوشت [۲۰]:

$$\sigma_s^{st} = E_s \varepsilon_x$$

$$\sigma_r^{st} = E_r \varepsilon_y$$
(A)

که σ_s^{sr} ، σ_s^{sr} و F_s به ترتیب تـنش نرمـال و مـدول یانـگ برای تقویت کنندههای حلقوی و طولی میباشد. در ایـن مقالـه تقویت کنندههای حلقوی و طولی مدرج تـابعی در نظـر گرفتـه شده است. برای لحاظ کردن اثر تقویت کنندههـا بـر پوسـته از روش تقویت کنندههـای تکـهای اسـتفاده مـی کنـیم. از اثـرات پیچشی تقویت کنندهها به دلیل کوچکی صرفنظر میشود. بـا یکپارچهسازی معـادلات تـنش- کـرنش و محاسـبه نیـروهـا و ممانهای منتجه برای پوستههای اسـتوانهای مـدرج تـابعی بـا تقویت کننده روابط (۹) و (۱۰) را خواهیم داشت:

$$N_{x} = A_{11}\varepsilon_{x}^{0} + A_{12}\varepsilon_{y}^{0} - A_{14}\chi_{x} - A_{15}\chi_{y}$$

$$N_{y} = A_{12}\varepsilon_{x}^{0} + A_{22}\varepsilon_{y}^{0} - A_{15}\chi_{x} - A_{25}\chi_{y}$$

$$N_{xy} = A_{33}\gamma_{xy}^{0} - 2A_{36}\chi_{xy}$$
(9)

$$M_{x} = A_{14}\varepsilon_{x}^{0} + A_{15}\varepsilon_{y}^{0} - A_{44}\chi_{x} - A_{45}\chi_{y}$$

$$M_{y} = A_{15}\varepsilon_{x}^{0} + A_{25}\varepsilon_{y}^{0} - A_{45}\chi_{x} - A_{55}\chi_{y}$$

$$M_{xy} = A_{36}\gamma_{xy}^{0} - 2A_{66}\chi_{xy}$$

(1.)

 A_{ij} مؤلفههای سفتی کششی، خمشی و کوپل شده پوسته استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده می باشد که مقدار آنها در رابطه (۱۱) آورده شده است. N_x ، v_y و $v_x N_{+}$ ه ترتیب نیروهای نرمال و نیروهای برشی در صفحه می باشند. M_x ، M_y و $w_x M_y$ نیز به ترتیب گشتاور خمشی و گشتاور پیچشی صفحهای می باشند.

^{1 -} Poisson's ratio

$$\begin{split} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_{x}w_{,xx} \qquad (19) \\ &+ 2N_{xy}w_{,xy} + N_{y}w_{,yy} + \frac{1}{R}N_{y} + q_{0} \\ &- k_{w}w + k_{s} \left(w_{,xx} + w_{,yy}\right) = \rho_{l}w_{,tt} + 2\rho_{l}\varepsilon w_{,t} \\ &- k_{w}\omega_{,tt} + k_{s} \left(w_{,xx} + w_{,yy}\right) = \rho_{l}w_{,tt} + 2\rho_{l}\varepsilon w_{,t} \\ &- k_{y}\omega_{,tt} + k_{s} \left(w_{,tt} + w_{,tt}\right) = k_{w} (19) \\ &- k_{y}\omega_{,tt} + k_{s} \left(w_{,tt} + w_{,tt}\right) = k_{w} (19) \\ &- k_{y}\omega_{,tt} + k_{s} \left(w_{,tt} + w_{,tt}\right) = k_{w} (19) \\ &- k_{y}\omega_{,tt} + k_{s} \left(w_{,tt} + w_{,tt}\right) = k_{w} \\ &- k_{y}\omega_{,tt} + k_{s} \left(w_{,tt} + w_{,tt}\right) = k_{w} \\ &- k_{y}\omega_{,tt} + k_{s} \\ &- k_{y}\omega_{,tt} \\ &- k_{$$

رابطه (۲۰) مقدار ho_1 را نشان میدهد:

$$\rho_{1} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(Z) dZ + \int_{-h/2}^{h/2+h_{s}} \rho(z) \frac{d_{s}}{S_{s}} + \int_{-h/2}^{h/2+h_{r}} \rho(z) \frac{d_{r}}{S_{r}} = \left(\rho_{m} + \frac{\rho_{c} - \rho_{m}}{k+1}\right) h + \left(\rho_{c} + \frac{\rho_{c} - \rho_{m}}{k_{2}+1}\right) \frac{A_{s}}{S_{s}}$$
(Y ·)
+ $\left(\rho_{c} + \frac{\rho_{c} - \rho_{m}}{k_{3}+1}\right) \frac{A_{r}}{S_{r}}$

$$A_{11}^{*}\varphi_{,xxxx} + (A_{33}^{*} - 2A_{12}^{*})\varphi_{,xxyy} + A_{22}^{*}\varphi_{,yyyy} + A_{24}^{*}w_{,xxxx} + (A_{14}^{*} + A_{25}^{*} - 2A_{36}^{*})w_{,xxyy} + A_{15}^{*}w_{,yyyy} + \frac{1}{R}w_{,xx}$$
(YY)
$$-\left[(w_{,xy})^{2} - w_{,xx}w_{,yy}\right] = 0$$

$$\rho_{1}w_{,tt} + 2\rho_{1}\varepsilon w_{,t} + A_{44}^{*}w_{,xxxx} + (A_{45}^{*} + A_{54}^{*} + 4A_{66}^{*})w_{,xxyy} + A_{55}^{*}w_{,yyyy} - A_{24}^{*}\varphi_{,xxxx} - (A_{14}^{*} + A_{25}^{*} - 2A_{36}^{*})\varphi_{,xxyy}$$

$$-A_{15}^{*}\varphi_{,yyyy} - \frac{1}{R}\varphi_{,xx} - \varphi_{,yy}w_{,xx} + 2\varphi_{,xy}w_{,xy} - \varphi_{,xx}w_{,yy} - q_{0} + k_{w}w - k_{s}(w_{,xx} + w_{,yy}) = 0$$
(YY)

معادلات (۲۲) و (۲۳) سیستم معادلات غیرخطی بر حسب دو پارامتر مجهول w و ϕ میباشد. آنها به منظور بررسی

$$\begin{split} \varepsilon_{x}^{0} &= A_{22}^{*}N_{x} - A_{12}^{*}N_{y} + A_{14}^{*}\chi_{x} + A_{15}^{*}\chi_{y} \\ \varepsilon_{y}^{0} &= A_{11}^{*}N_{y} - A_{12}^{*}N_{x} + A_{24}^{*}\chi_{x} + A_{25}^{*}\chi_{y} \end{split} \tag{10} \\ \gamma_{xy}^{0} &= A_{33}^{*} + 2A_{36}^{*}\chi_{xy} \\ \text{action} &= A_{11}^{*}N_{y} - A_{12}^{*}N_{x} + A_{24}^{*}\chi_{x} + A_{25}^{*}\chi_{y} \end{aligned}$$

$$A_{11}^{*} = \frac{1}{\Delta} A_{11}, A_{22}^{*} = \frac{1}{\Delta} A_{22}$$

$$A_{12}^{*} = \frac{A_{12}}{\Delta}, A_{33}^{*} = \frac{1}{A_{33}}$$

$$\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^{2}$$

$$A_{14}^{*} = A_{22}^{*}A_{14} - A_{12}^{*}A_{15}$$

$$A_{25}^{*} = A_{11}^{*}A_{25} - A_{12}^{*}A_{15}$$

$$A_{15}^{*} = A_{22}^{*}A_{15} - A_{12}^{*}A_{25}$$

$$A_{24}^{*} = A_{11}^{*}A_{15} - A_{12}^{*}A_{14}$$

$$A_{36}^{*} = \frac{A_{36}}{A_{33}}$$
(17)

با جایگزینی معادلات (۱۵) در معادلات (۱۰)، رابطـه (۱۷) به صورت زیر حاصل می شود:

$$M_{x} = A_{14}^{*}N_{x} + A_{24}^{*}N_{y} - A_{44}^{*}\chi_{x} - A_{45}^{*}\chi_{y}$$

$$M_{y} = A_{15}^{*}N_{x} + A_{25}^{*}N_{y} - A_{54}^{*}\chi_{x} - A_{55}^{*}\chi_{y} \qquad (1 \text{ V})$$

$$M_{xy} = A_{36}^{*}N_{xy} - 2A_{66}^{*}\chi_{xy}$$

که مقدار ضرایب $^*_{ij}$ مربوط به رابطه (۱۷) در رابطه (۱۸) آورده شده است:

$$A_{44}^{*} = A_{44} - A_{14}A_{14}^{*} - A_{15}A_{24}^{*}$$

$$A_{55}^{*} = A_{55} - A_{25}A_{25}^{*} - A_{15}A_{15}^{*}$$

$$A_{45}^{*} = A_{45} - A_{14}A_{15}^{*} - A_{15}A_{25}^{*}$$

$$A_{54}^{*} = A_{45} - A_{25}A_{24}^{*} - A_{15}A_{14}^{*}$$

$$A_{66}^{*} = A_{66} - A_{36}A_{36}^{*}$$
(1A)

معادلات غیرخطی حرکت پوسته استوانهای مـدور نـازک بـر اساس تئوری کلاسیک پوسته و با فـرض w >> u و w >> v و w >> vو $0^{-2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{$

$$\begin{split} A &= A_{11}^{*} m^{4} \pi^{4} + \left(A_{33}^{*} - 2A_{12}^{*}\right) m^{2} n^{2} \pi^{2} \lambda^{2} + A_{22}^{*} n^{4} \lambda^{4} \\ B &= A_{24}^{*} m^{4} \pi^{4} + \left(A_{14}^{*} + A_{25}^{*} - 2A_{36}^{*}\right) m^{2} n^{2} \pi^{2} \lambda^{2} \\ &+ A_{15}^{*} n^{4} \lambda^{4} - \frac{L^{2}}{R} m^{2} n^{2} \\ D &= A_{44}^{*} m^{4} \pi^{4} + \left(A_{45}^{*} + A_{54}^{*} + 4A_{66}^{*}\right) m^{2} n^{2} \pi^{2} \lambda^{2} \\ &+ A_{55}^{*} n^{4} \lambda^{4} \\ G &= 81 A_{11}^{*} m^{4} \pi^{4} + 9 \left(A_{33}^{*} - 2A_{12}^{*}\right) m^{2} n^{2} \pi^{2} \lambda^{2} \\ &+ A_{22}^{*} n^{4} \lambda^{4} \\ \lambda &= \frac{L}{R} \end{split}$$

$$\end{split}$$

$$\end{split}$$

$$(\Upsilon Y)$$

با جایگزینی معادلات (۲۴) و (۲۵) در معادلـه (۲۳) و با اعمال روش گالرکین در بازه $x \le L$ و $x \le 2\pi R$ و $y \le 2\pi R$ روابط (۲۸–۳۰) را داریم :

$$\begin{aligned} \sigma_{0y} &= Rq_{0} - \frac{1}{2} Rk_{w} \left(f_{2} + 2f_{0}\right) - R\rho_{1} \frac{d^{2}f_{0}}{dt^{2}} \tag{Y} \right) \\ &- R \frac{\rho_{1}}{2} \frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}} - 2R\rho_{1}\varepsilon \frac{df_{0}}{dt} - R\rho_{1}\varepsilon \frac{df_{2}}{dt} \\ L^{4}\rho_{1} \frac{d^{2}f_{1}}{dt^{2}} + 2L^{4}\rho_{1}\varepsilon \frac{df_{1}}{dt} + \left(D + \frac{B^{2}}{A}\right)f_{1} \\ &+ \left[\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{A} + \frac{B}{A}m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2} \\ &- \frac{n^{2}\lambda^{2}\left(\lambda L - 4A_{24}^{*}m^{2}\pi^{2}\right)}{4A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}}\right]f_{1}f_{2} + \left(\frac{m^{4}\pi^{4}}{16A_{22}^{*}} + \frac{n^{4}\lambda^{4}}{16A_{11}^{*}}\right)f_{1}^{3} \end{aligned} \tag{Y9} \\ &+ \left(\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{A} + \frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{G}\right)f_{1}f_{2}^{2} - \sigma_{0y}hn^{2}L^{2}\lambda^{2}f_{1} \\ &+ L^{4}k_{w}f_{1} + L^{2}k_{s}f_{1}\left[\left(\lambda n\right)^{2} + \left(m\pi\right)^{2}\right] = 0 \\ \rho_{1}\frac{\partial^{2}f_{0}}{\partial t^{2}} + \rho_{1}\frac{3}{4}\frac{\partial^{2}f_{2}}{\partial t^{2}} + 2\rho_{1}\varepsilon\frac{\partial f_{0}}{\partial t} + \frac{3}{2}\rho_{1}\varepsilon\frac{\partial f_{2}}{\partial t} \\ &+ \left\{\left[4A_{24}^{*}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4} - \frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\right]\frac{n^{2}\lambda^{2}}{32A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{B}{A}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\left(\frac{n}{R}\right)^{2}\right\}f_{1}^{2} + \frac{\sigma_{0y}h}{R} - q_{0} \end{aligned} \tag{Y} \cdot \right) \\ &+ \frac{1}{2}m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4} - \frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\left]\frac{\left(\lambda L - 4A_{24}^{*}m^{2}\pi^{2}\right)}{4A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}} \\ &+ \left\{-\left[4A_{24}^{*}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4} - \frac{1}{R}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2}\right]\frac{\left(\lambda L - 4A_{24}^{*}m^{2}\pi^{2}\right)}{4A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}} \\ &+ \left\{A_{44}^{*}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{4}\right\}f_{2} + k_{w}\left(\frac{3}{4}f_{2} + f_{0}\right) + k_{s}f_{2}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^{2} = 0 \end{aligned} \end{cases}$$

علاوه بر این، پوسته استوانهای باید شرایط بسته محیطی را ارضا کند [۱۷ و ۲۵] بنابراین رابطه (۳۱) را بهصورت زیرخواهیم داشت:

$$\int_{0}^{2\pi R} \int_{0}^{L} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \int_{0}^{2\pi R} \int_{0}^{L} \left[\varepsilon_{y}^{0} + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{2} \right] dx dy = 0 \quad (\Upsilon)$$

ویژگیهای دینامیکی پوستههای استوانهای مدور مدرج تابعی با تقویتکننده مورد استفاده قرار میگیرند.

۳- رهیافت دینامیکی روش گالرکین

شرایط تکیه گاهی پوسته استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده، ساده می باشد و پوسته در معرض توزیع فشار یکنواخت *q*0 بر روی یک بستر الاستیک قراردارد.

خیز پوستههای استوانهای را بـهصورت یـک عبـارت سـه جملهای مشابه رابطه (۲۴) در نظر میگیریم:

$$w = f_0 + f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \quad (\Upsilon F)$$

که $f_0 = f_0(t)$ دامنه مجهول کمانش یکنواخت وابسته به زمان، $f_1 = f_1(t)$ دامنه مجهول کمانش خطی وابسته به زمان، $f_1 = f_1(t)$ دامنه مجهول کمانش غیرخطی وابسته به زمان، میباشد. $f_2 = f_2(t)$ دامنه مجهول کمانش غیرخطی وابسته به زمان، میباشد. $\frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}$ و n به ترتیب بیانگر شکل کمانش خطی، شکل کمانش غیرخطی، تعداد نیم موج و تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی میباشد.

با جایگزینی معادله (۲۴) در معادله (۲۲) و حل آن، معادلهای برای تابع مجهول *\P* به دست می آید که به صورت رابطه (۲۵) می باشد:

$$\varphi = \varphi_1 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2 \cos \frac{2ny}{R} - \varphi_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + \varphi_4 \sin \frac{3m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} - \sigma_{0y} h \frac{x^2}{2}$$
(7a)

 φ_i که در آن، σ_{0y} تنش محیطی متوسط میباشد و ضرایب φ_i به صورت روابط (۲۶) میباشد:

$$\begin{split} \varphi_{1} &= \frac{n^{2} \lambda^{2}}{32 A_{11}^{*} m^{2} \pi^{2}} f_{1}^{2} - \frac{\left(4 \lambda L - 16 A_{24}^{*} m^{2} \pi^{2}\right)}{32 A_{11}^{*} m^{2} \pi^{2}} f_{2} \\ \varphi_{2} &= \frac{m^{2} \pi^{2}}{32 A_{22}^{*} n^{2} \lambda^{2}} f_{1}^{2} \\ \varphi_{3} &= \frac{B}{A} f_{1} + \frac{m^{2} n^{2} \pi^{2} \lambda^{2}}{A} f_{1} f_{2} \\ \varphi_{4} &= \frac{m^{2} n^{2} \pi^{2} \lambda^{2}}{G} f_{1} f_{2} \\ \vdots &: \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} f_{k} \\ \vdots \\ \lambda e_{4} = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{1}{\rho_1} \left\{ \left[4A_{24}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{n^2 \lambda^2}{4A_{11}^{**} m^2 \pi^2} \\ &+ 2\frac{B}{A} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right\} \\ a_{32} &= \frac{2}{\rho_1} m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{G} \right) \\ a_{33} &= \frac{1}{\rho_1} \left\{ - \left[4A_{24}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \right] \\ &- \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{(\lambda L - 4A_{24}^{**} m^2 \pi^2)}{A_{11}^{**} m^2 \pi^2} + 16A_{44}^* \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \right\} \\ a_{34} &= \frac{4}{\rho_1}, \ a_{35} &= \frac{4}{\rho_1} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

با سادهسازی معادلات (۳۳–۳۵)، معادلات (۳۹–۴۱) را داریم:

$$\left(\frac{d^{2}f_{0}}{dt^{2}} + 2\varepsilon\frac{df_{0}}{dt}\right) + b_{1}f_{0} - b_{12}f_{1}^{2} - b_{13}f_{1}^{2}f_{2} + b_{14}f_{2}$$
(٣٩)
$$-a_{13}q_{0} + b_{15}k_{w}f_{0} + b_{16}k_{w}f_{2} - b_{17}k_{s}f_{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{2}f_{1}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{1}}{dt} \end{pmatrix} + a_{22}f_{1} + b_{21}f_{1}f_{0} + b_{22}f_{1}f_{2} + a_{25}f_{1}f_{2}^{2} + b_{23}f_{1}^{3} - b_{24}k_{w}f_{1}f_{0} - b_{25}k_{w}f_{1}f_{2}$$
 (F.)
 $+ b_{26}k_{s}f_{1}f_{2} + a_{27}k_{w}f_{1} + a_{28}k_{s}f_{1} = 0$

$$\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{2}}{dt}\right) + a_{31}f_{1}^{2} + a_{32}f_{1}^{2}f_{2} + a_{33}f_{2}$$

$$+ a_{34}k_{w}\left(\frac{3}{4}f_{2} + f_{0}\right) + a_{35}k_{s}f_{2} = 0$$
(F1)

که مقدار ضرایب b_{ij} در روابط (۴۲) و (۴۳) آورده شده

است:

$$b_{11} = 2a_{11}, \ b_{12} = \left(\frac{1}{2}a_{31} + a_{12}\right), \ b_{13} = \frac{1}{2}a_{32}$$

$$b_{14} = \left(a_{11} - \frac{1}{2}a_{33}\right), \ b_{15} = \left(2a_{14} - \frac{1}{2}a_{34}\right)$$
(FT)
$$b_{16} = \left(a_{14} - \frac{3}{8}a_{34}\right), \ b_{17} = \frac{1}{2}a_{35}$$

با استفاده از معادلات (۱۵)، (۲۱)، (۲۲) و (۲۵)، رابطه با استفاده از معادلات (۱۵)، (۲۱)، (۲۹) و (۲۵)، رابطه (۳۲) را میتوان به صورت زیر نوشت: $-2A_{11}^{*}\sigma_{0y}h + \frac{1}{R}(f_{2} + 2f_{0}) - \frac{1}{4}\left(\frac{n}{R}\right)^{2}f_{1}^{2} = 0$ (۳۲) با حـذف σ_{0y} از معادلات (۸۸-۳۰۰) و استفاده از رابطه با حـذف (۳۵-۳۳) داریم: $\left(\frac{d^{2}f_{0}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{0}}{dt^{2}}\right)_{+} 1\left(d^{2}f_{2} - df_{-}\right)$

$$\left(\frac{d^2 f_0}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_0}{dt}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_2}{dt}\right)$$

$$+ a_{11} (f_2 + 2f_0) - a_{12} f_1^2 - a_{13} q_0 + a_{14} k_w (f_2 + 2f_0) = 0$$

$$(12c) (12c) (12$$

$$\begin{aligned} a_{23}f_1\left(\frac{d^2f_0}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{df_0}{dt}\right) + \left(\frac{d^2f_1}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{df_1}{dt}\right) \\ + \frac{a_{21}}{2}f_1\left(\frac{d^2f_2}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{df_2}{dt}\right) + a_{22}f_1 + a_{23}f_1f_2 + a_{24}f_1^3 \quad (\texttt{Tf}) \\ + a_{25}f_1f_2^2 - a_{26}q_0f_1 + a_{27}k_wf_1 + a_{28}k_sf_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{2}}{dt} \end{pmatrix} + a_{31}f_{1}^{2} + a_{32}f_{1}^{2}f_{2} + a_{33}f_{2} + a_{34}k_{w} \left(\frac{3}{4}f_{2} + f_{0}\right) + a_{35}k_{s}f_{2} = 0$$
 (75)

$$a_{11} = \frac{1}{2A_{11}^* R^2 \rho_1}, \ a_{12} = \frac{n^2}{8A_{11}^* R^3 \rho_1}$$

$$a_{13} = \frac{1}{\rho_1}, \ a_{14} = \frac{1}{2\rho_1}$$
(٣۶)

$$\begin{split} a_{21} &= \frac{Rn^{2}\lambda^{2}}{L^{2}}, \ a_{22} = \frac{1}{L^{4}\rho_{1}} \left(D + \frac{B^{2}}{A} \right) \\ a_{23} &= \frac{1}{L^{4}\rho_{1}} \left[\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{A} + \frac{B}{A}m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2} \\ &- \frac{n^{2}\lambda^{2} \left(\lambda L - 4A_{24}^{*}m^{2}\pi^{2} \right)}{4A_{11}^{*}m^{2}\pi^{2}} \right] \\ a_{24} &= \frac{1}{L^{4}\rho_{1}} \left(\frac{m^{4}\pi^{4}}{16A_{22}^{*}} + \frac{n^{4}\lambda^{4}}{16A_{11}^{*}} \right) \tag{(YY)} \\ a_{25} &= \frac{1}{L^{4}\rho_{1}} \left(\frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{A} + \frac{m^{2}n^{2}\pi^{2}\lambda^{2}}{G} \right) \\ a_{26} &= \frac{Rn^{2}\lambda^{2}}{L^{2}\rho_{1}}, \ a_{27} &= \frac{1}{\rho_{1}}, \\ a_{28} &= \frac{1}{L^{2}\rho_{1}} \Big[\left(\lambda n \right)^{2} + \left(m\pi \right)^{2} \Big] \end{split}$$

$$b_2$$
 تقویت کننده را محاسبه کرد. برای یافتن پاسخ دینامیکی
 b_2 غیرخطی از روش رانگ کوتا مرتبه چهار استفاده شده است.
 b_2 با نادیده گرفتن جملات مربوط به کمانش یکنواخت و
 b_2 کمانش غیرخطی، معادله (۳۴) به صورت رابطه (۴۸) کاهش
 b_2 می یابد:

$$\left(\frac{d^{2}f_{1}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{1}}{dt}\right) + \left(a_{22} + a_{27}k_{w} + a_{28}k_{s}\right)f_{1} + a_{24}f_{1}^{3} (f\lambda)$$
$$-a_{26}f_{1}Q\sin\left(\Omega t\right) = 0$$

با فرض ارتعاش آزاد بدون میرایی خطی و صرفنظر از جملات مرتبه بالا، معادله (۴۸) بهصورت رابطه (۴۹) درمیآید:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \left(a_{22} + a_{27}k_w + a_{28}k_s\right)f_1 = 0 \tag{49}$$

بنابراین فرکانس طبیعی پوستههای استوانهای مدرج تـابعی با تقویتکننده بهصورت رابطه (۵۰) محاسبه میگردد:

$$\omega_{mn} = \sqrt{a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28}} \tag{(\Delta \cdot)}$$

که ه_{mn} فرکانس طبیعی پوسته مدرج تابعی با تقویتکننده -میباشد.

با در نظر گرفتن
$$f_1(t) = \eta \sin \Omega t$$
 و اعمال روش
گالرکین، بر معادله (۴۸) رابطه فرکانس-دامنه ارتعاش
غیرخطی بهصورت رابطه (۵۱) را داریم:

$$\Omega^{2} - \frac{4}{\pi} \varepsilon \Omega = (a_{22} + k_{w} a_{27} + k_{s} a_{28})$$

$$+ \frac{3}{4} a_{24} \eta^{2} - \frac{8}{3\pi} a_{26} Q$$
(Δ 1)

که
$$\eta$$
 دامنه ارتعاش غیرخطی $f_1(t)$ است.

با معرفی پارامتر بی بعد فرکانس بـهصورت
$$\omega_{mn}=\Omega/arphi_m$$
عادله (۵۱) بهصورت رابطه (۵۲) درمیآید:

$$\xi^{2} - \frac{4\varepsilon}{\pi\omega_{mn}}\xi = 1 + \frac{3}{4}\frac{a_{24}}{\omega_{mn}^{2}}\eta^{2} - \frac{8a_{26}}{3\pi\omega_{mn}^{2}}Q \qquad (\Delta\Upsilon)$$

$$\xi^{2} - \frac{4\varepsilon}{\pi\omega_{mn}} \xi = 1 + \frac{3}{4} \frac{a_{24}}{\omega_{mn}^{2}} \eta^{2}$$
 (5°)

$$b_{21} = -b_{11}a_{21}, \ b_{22} = -b_{14}a_{21} - a_{33}\frac{a_{21}}{2} + a_{23}$$

$$b_{23} = -b_{12}a_{21} - a_{31}\frac{a_{21}}{2} + a_{24}$$

$$b_{24} = \left(a_{21}b_{15} + \frac{a_{21}}{2}a_{34}\right), \ b_{25} = \left(a_{21}b_{16} + \frac{3}{8}a_{21}a_{34}\right)$$

$$b_{26} = \left(a_{21}b_{17} - \frac{a_{21}}{2}a_{35}\right)$$
(fr)

اگر $f = w_{\text{max}}$ باشد، پس با توجه به معادله (۲۴)، با مقداردهی m = iL/2m و $y = j\pi/2n$ ماکزیمم خیر پوسته به صورت رابطه (۴۴) خواهد شد:

$$f = f_0 + f_1 + f_2$$
 (۴۴)
که $i \in j$ عدد صحیح فرد می باشند.

معادلات (۳۹–۴۱) و (۴۴) برای بررسی تأثیر پارامترهای ورودی بر رفتار منحنی خیز-ماکزیمم بار پوستههای مدرج تابعی با تقویتکننده استفاده میشود.

۳-۱- آنالیز ارتعاش غیرخطی

برای بررسی ارتعاشات غیر خطی پوسته مدرج تابعی با تقویت کننده فرض می کنیم فشار خارجی با شدت *q*₀ = Q sin Ωt اعمال گردد. بنابراین معادلات (۳۹-۴۱) به صورت معادلات (۴۵-۴۷) خواهد شد:

$$\left(\frac{d^2 f_0}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df_0}{dt}\right) + b_{11} f_0 - b_{12} f_1^2 - b_{13} f_1^2 f_2 + b_{14} f_2$$

$$-a_{13} Q \sin(\Omega t) + b_{15} k_w f_0 + b_{16} k_w f_2 - b_{17} k_s f_2 = 0$$
(Fa)

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{2}f_{1}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{1}}{dt} \end{pmatrix} + a_{22}f_{1} + b_{21}f_{1}f_{0} + b_{22}f_{1}f_{2} + a_{25}f_{1}f_{2}^{2} + b_{23}f_{1}^{3} - b_{24}k_{w}f_{1}f_{0} - b_{25}k_{w}f_{1}f_{2} + b_{26}k_{s}f_{1}f_{2} + a_{27}k_{w}f_{1} + a_{28}k_{s}f_{1} = 0$$

$$(\$)$$

$$\left(\frac{d^{2}f_{2}}{dt^{2}} + 2\varepsilon \frac{df_{2}}{dt}\right) + a_{34}f_{1}^{2} + a_{32}f_{1}^{2}f_{2} + a_{33}f_{2} + a_{34}k_{w}\left(\frac{3}{4}f_{2} + f_{0}\right) + a_{35}k_{s}f_{2} = 0$$
(FY)

٣-٢- آناليز كمانش

۳-۲-۲- آنالیز کمانش استاتیکی خطی پوستههای استوانهای مدرج تابعی با تقویتکننده

با حذف شکل کمانش یکنواخت و کمانش غیرخطی و قرار دادن 0 = $\dot{f_1} = 0$ و این که 0 $\neq f_1$ معادله (۳۴) به صورت رابطه (۵۴) درمیآید:

$$a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28} + a_{24} f_1^2 - a_{26} q_0 = 0 \qquad (\Delta \mathfrak{F})$$

با نادیده گرفتن جمله مرتبه دو f₁ در معادله (۵۴)، رابطه (۵۵) را داریم:

$$q_0^{sbu} = \frac{a_{22} + k_w a_{27} + k_s a_{28}}{a_{26}} \tag{(\Delta\Delta)}$$

که q_0^{sbu} بار کمانش اســتاتیکی خطـی پوســتههـای اسـتوانهای مدرج تابعی با تقویتکننده میباشد.

$$q_{scr} = \min(q_0^{sbu}) \tag{(\Delta F)}$$

۳-۲-۲ تحلیل کمانش دینامیکی غیرخطی اســتوانه مــدرج تابعی با تقویتکننده

بر اساس معادلات (۴۲– ۴۰)، تحلیل کمانش بحرانی دینامیکی غیرخطی پوسته های استوانه ای مدور مدرج تابعی با تقویت کننده تحت فشار جانبی مختلف وابسته به زمان خطی مشابه $q_0 = ct$ در نظر گرفته می شود که C سرعت بار گذاری (N/m²s) می باشد.

معادلات (۴۲- ۴۰) یک دستگاه سه معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم غیر خطی هستند. بنابراین، حل تحلیلی آنها به راحتی مقدور نیست. در این مقاله، این دستگاه معادلات به روش رانگ کوتا مرتبه چهارم حل شده است. زمان بحرانی دینامیکی (t_{cr}) را میتوان بر اساس معیار بدیانسکی-راث [۱۸] به دست آورد. بر اساس این معیار، برای مقادیر بزرگ سرعت بارگذاری، در منحنی دامنه-زمان جابهجاییها سریعاً برحسب زمان افزایش مییابند و منحنی با عبور از ناحیه شیبدار متناظر با t_{cr} که افت پایداری رخ میدهد، به ماکزیمم خود میرسد. بار متناظر با زمان بحرانی دینامیکی، بار کمانش بحرانی دینامیکی نامیده میشود.

۴– نتایج عددی

به منظور راستی آزمایی فرمول بندی حاضر، فرکانس های طبیعی پوسته های استوانه ای ایزوتروپیک تقویت شده کامل بدون بستر الاستیک در شکل ۲ آورده شده است که با تحلیل سیوال و نومن [۲۷] مقایسه شده است. همچنین کمانش استاتیکی پوسته های استوانه ای ایزوتروپیک تقویت شده بدون بستر الاستیک تحت فشار خارجی که در جدول ۱ آورده شده است با مطالعات باروچ و سینگر [۲۸]، ردی و استارنس [۲۵] استوانه ای ایزوتروپیک بدون تقویت کننده با بستر الاستیک در و شن [۲۹] مقایسه شده است و فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای ایزوتروپیک بدون تقویت کننده با بستر الاستیک در و پالیوال و همکاران [۳۱] مقایسه شده است. از بررسی نتایج فوق می توان دریافت که نتایج حاصل با سایر مراجع هم خوانی مناسبی دارد.



جدول (۱): مقایسه بار کمانش استاتیکی پوستههای استوانهای ایزوتروییک با تقویتکننده داخلی تحت فشار خارجی (m=1)

		0	.,	
شن	ردی و استارنس	باروچ و سينگر	مطالعه حاضر	نوع تقویت کننده
۱۰۰/۷	۹۳/۵	1.7	1.17/877 (4)*	بدون تقوي <i>ت ك</i> ننده
1 • 7/7	٩۴/٧	١٠٣	1• 4/494 (4)	تقویت کننده طولی
٣۶٨/٣	۳۵۷/۵	۳۷۰	WY9/894 (M)	تقویت کننده حلقوی
۳۷۴/۱	880	۳۷۷	۳۸۷/۱۹۲ (۳)	هر دو تقویت کننده

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) میباشد.

۴-۱- پاسخ دینامیکی پوسته استوانهای مدرج تابعی با تقویتکننده

در این قسمت، پوستههای استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده و بدون تقویت کننده با بستر الاستیک و شعاع (R) Λ / متر، طول (L) Λ / (R) متر بررسی شده است. ترکیب مواد شامل آلومینیوم⁽ با مدول یانگ (ρ_m) Λ (K) تیوتن نیوتن بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_m) ۲۷۰۲ کیلوگرم بر متر مکعب و آلومینا ^۲ با مدول یانگ (ρ_m) Λ (κ) تیوتن بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_a) Λ (κ) تا λ متر محب و آلومینا ^۲ با مدول یانگ (ρ_a) می در م بر متر مربع، دانسیته جرمی (ρ_a) Λ (κ) و Λ (κ می شود. ارتفاع تقویت کننده ها معادل (Λ) متر، پهنای آن ها می شود. ارتفاع تقویت کننده می شود. سیستم تقویت کننده شامل ۱۵ تقویت کننده حلقوی و ۶۳ تقویت کننده طولی می باشد.

جدول **۳** فرکانس طبیعی پوستههای استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده دارای ارتعاش آزاد با پارامترهای بستر الاستیک ($_{w}$ و $_{s}$) 0 (k_{s} و $_{w}$) محب و الاستیک ($_{w}$ و $_{s}$) 0 (k_{s} و $_{w}$) محب متبر محب م 1 ($h_{s} = d_{r}$) برابر (h_{r} متر، می باشد. ارتفاع تقویت کننده ها ($d_{s} = d_{r}$) برابر (h_{r} متر، عرض تقویت کننده ها ($h_{s} = h_{r}$) برابر ($h_{s} = h_{r}$) برابر (h_{r} متر، محب می برابر ($h_{s} = d_{r}$) با هم برابر است. به پوسته و تقویت کننده ها (k_{s} (k_{s}) با هم برابر است. به وضوح مشخص است که فرکانس طبیعی پوسته های تقویت شده بالاتر از پوسته های بدون تقویت کننده می باشد. زمانی که نسبت لز افزایش می یابد، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می کند. جدول **۳** نشان می ده د که با کاهش نسبت پیدا می کند. جدول **۳** نشان می ده د که با کاهش نسبت

اثر نیروی محرکه $_{0}^{0}$ بر روی منحنی ارتعاش غیرخطی فرکانس-دامنه پوسته استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده داخلی در شکل ۳ نشان دادهشده است. دو ضریب بستر الاستیک ($_{w}^{k} e_{s}^{k}$) به ترتیب $^{0} \times 1 \times 4$ نیوتن بر متر مکعب و $^{1} \times 1 \times 5$ نیوتن بر متر و دو مقدار Q برابر $^{0} \times 1 e^{1}$ و نیوتن بر متر مربع در نظر گرفته می شود. می توان مشاهده کرد که با کاهش نیروی محرکه منحنی ارتعاش اجباری به منحنی ارتعاشات آزاد نزدیک تر می شود.

جدول (۲): مقایسه فرکانس پوسته استوانهای بدون

تقويت كننده با بستر الاستيك						
پاليوال و	صوفيه و	مطالعه حاضر	п			
همكاران	همكاران					
•/&VXXY	•/۶۷۹۲۱	•/۶۷۴٨•	١			
•/٣۶٣٩۴	•/79497	•/٣۶۴۶٣	٢			
•/7•679	•/٢•٨•۴	•/7•97•	٣			
•/17740	۰/۲۰۸۰۴	•/17776	۴			

جدول (۳): تأثیر R / h و ضریب کسر حجمی k بر فرکانس طبیعی پوسته استوانهای مدرج تابعی با بستر الاستیک

با تقويتكننده	بدون تقويت كننده	k	R / h
۳۵۷۹/۵(۵)	۲۱۸۷/۶(۶)*	٠/٢	1
$ abla \cdot \Delta \cdot / \lambda(\Delta) $	780.18(8)	١	1
7836/4(0)	۳۰۲۳/۷(۶)	۵	1
2222/9(4)	8187/4(8)	١.	1
۳۱۹۶/۰(۶)	۱۸۸۸/۰(۷)	٠/٢	10.
۲۸۹۸/۳(۵)	۲۲۶۰/۸(۷)	١	10.
۲۵۸۷/۵(۵)	2207/T(V)	۵	10.
24V4/V(4)	784W/1(V)	١.	10.
۳۰۴۷/۳(۶)	1461/2(4)	•/٢	۲۰۰
۲۸۴۵/۸(۵)	۲۰۲۶/۸(۷)		7
۲۵۹۶/۰(۵)	222./2(V)	۵	7
2402/2(4)	TTTV/8(V)	1.	۲۰۰
۲۹۸۶/۷(۶)	1818/Q(V)	• /٢	۲۵۰
۲۸۱۹/۸(۵)	1988/9(4)	١	۲۵۰
۲۶۰۳/۸(۴)	۲۱۳۲/۳(۷)	۵	۲۵۰
٢۴٣۴/٨(۴)	T110/8(V)	١.	۲۵۰

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) میباشد.

جدول ۴ تأثیر بستر الاستیک و تقویت کننده بر روی فرکانس طبیعی پوستههای استوانهای را نشان می دهد که شاخص کسر حجمی پوسته و تقویت کنندهها (k_{1} , k_{2} , k_{2}) شاخص کسر حجمی پوسته و تقویت کنندهها (k_{3} , k_{2} , k_{2}) برابر با ۱، نسبت h/h برابر ۲۵۰، ارتفاع تقویت کنندهها ($d_{s} = d_{r}$) برابر ۱۰/۰ متر، عرض تقویت کنندهها ($h_{s} = h_{r}$) برابر ۲۰۲۵ متر می باشد. همان طور که می توان دید پارامترهای بستر الاستیک (k_{s} و k_{s}) به شدت بر روی

^{1 -} Aluminum

^{2 -} Alumina

فرکانس طبیعی پوستهها تأثیر میگذارد. همچنین در صورت وجود هر دو پارامتر بستر الاستیک، فرکانس طبیعی بزرگتر میشود.



بستر الاستیک (k_{w} و k_{w}) به ترتیب ۲۰^۵×۵ نیوتن بر متر مکعب و ۲/۵×۵۰^۴ نیوتن بر متر و نسبت R/h برابر ۲۵۰، (k_{3} ، k_{2} ، k_{3}) برابر ۱ و مدهای (mو n) به ترتیب برابر (1 و h) نشان میدهد. نتایج نشان میدهد که منحنی فرکانس–دامنه پوسته بدون تقویت کننده از پوسته تقویت شده و بدون بستر الاستیک پایین تر است.

پاسخهای غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویت کننده و بدون تقویت کننده در شکل **۵** نشان داده شده است. که پارامترهای بستر الاستیک ($_w e_s)$ به ترتیب $^{\Lambda} \times 1 \times 0 \times 1 \times 0$ نیوتن بر متر مکعب و $^{1} \times 1 \times 0 \times 1 \times 0$ نیوتن بر متر و نسبت R / hبرابر ۲۵۰، ($_{10} e_s$, $_{10} \times 1 \times 0 \times 1 \times 0$) به ترتیب ($_{10} e_s$) به ترتیب برابر ($1 e_s$) می باشد. فرکانسهای تحریک مربوط به ($_{10} \sin(300t) = 10^6 \sin(300t)$ این نتایج نشان می دهد که تقویت کننده ها، به شدت دامنه ارتعاشی پوسته را زمانی که فرکانسهای تحریک از فرکانسهای طبیعی دورتر است، کاهش می دهد.



در شکل \mathbf{r} پوسته استوانهای با تقویت کننده با پارامترهای بستر الاستیک (k_w و k_w) به ترتیب $^{0} \cdot 1 \times 0$ نیوتن بر متر مکعب و $^{1} \cdot 1 \times 10^{4}$ نیوتن بر متر و نسبت n / h برابر (۵۰، (k_s , k_s) برابر ۱ و مدهای (m و n) به ترتیب برابر (۱ و ۵) و فرکانس تحریک (Ω) برابر با ۳۰۰ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. همان طور که مشاهده می شود زمانی که نیروی محرکه کوچک است، رابطه خیز – سرعت به صورت یک منحنی بسته است. زمانی که نیروی محرکه (Q) افزایش

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) میباشد.

۵×۱۰^۴

٠

1.*

 $7/0 \times 1.^{4}$

۵×۱۰^۴

شکل ۴ تأثیر هر دو تقویت کننده و بستر الاستیک را بر روی منحنی فرکانس- دامنه ارتعاش آزاد غیرخطی برای پارامترهای

 $T M \Delta / V(V)$

۱۶۹۹/۹(۸)

 $1 \land 1 ? \Delta(\Lambda)$

190T/V(V)

510T/9(V)

 $TAYT/V(\Delta)$

 $TYY\Delta/1(\Delta)$

۲۷۹۶/۸(۵)

 $T\Lambda T\Lambda / Q(\Delta)$

۲۸۸۱/۶(۵)

 $\Delta \times 10^{\circ}$

۰,

۰^

۰۶

۱۰

مییابد یعنی برابر با ۱۰^۶ × ۱/۵ نیوتن بر متـر مربـع، منحنـی خیز-سرعت بینظمتر میشود که در شکل **۷** مشاهده میشود.



در شکل ۸ مشاهده می شود زمانی که فرکانسهای تحریک به فرکانسهای طبیعی نزدیک هستند، پدیده ای جالب مشابه پدیده هارمونیک ضربان ارتعاش خطی مشاهده می شود. فرکانس تحریک (Ω) برابر با ۲۸۱۰ رادیان بر ثانیه است که به فرکانس طبیعی (۵٫٫ ۲۸۱۹/۸ رادیان بر ثانیه برای پوسته استوانه ای با تقویت کننده داخلی، نزدیک می باشد. همان طور که مشاهده می شود، دامنه ضربه، زمانی که فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی نزدیک می شود، در حال افزایش



در شکل ۹ و ۱۰ تأثیر میرایی بر پاسخهای غیرخطی مشاهده می شود، که ضریب میرایی خطی برابر ۲/۳ در نظر گرفته شده است. تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی در دورههای اول ارتعاش خیلی کوچک است (شکل ۹) درحالی که در دورههای بعدی دامنه را به شدت کاهش می دهد (شکل ۱۰).





۴-۲- کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته مدرج تابعی با تقویتکننده

به منظور تحلیل کمانش دینامیکی غیرخطی پوستههای استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده، پوستههای استوانهای مدرج تابعی با تقویت کننده و بدون تقویت کننده با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک با شعاع (R) ۵/۰ متر، طول (L) ۵/۷۰ متر در نظر گرفته میشود. ترکیب مواد مانند بخش قبلی میباشد. ارتفاع تقویت کننده ۲۰۰۵ متر و عرض آن ۲۰۰۲ متر میباشد. سیستم تقویت کننده شامل ۱۵ تقویت کننده حلقوی و ۶۳ تقویت کننده طولی میباشد.

شکل **۲۱–۱۱** پاسخهای دینامیکی پوستههای تقویت شده با بستر الاستیک و بدون بستر الاستیک تحت بار مکانیکی را نشان میدهد. این نمودارها نشان میدهد که نقطه مشخصی مانند تحلیل استاتیکی وجود ندارد. در عوض، ناحیه ناپایداری جایی است که منحنی شیب f نسبت به t به شدت افزایش پیدا میکند. بر طبق معیار بدیانسکی– راث [۸]، زمان بحرانی پیدا میکند. بر طبق معیار بدیانسکی– راث [۸]، زمان بحرانی بر_{er} را میتوان در میانه ایان ناحیه در نظر گرفت. بنابراین، میتوان نقطه عطف منحنی یعنی $0 = \int_{r=r}^{2} \frac{1}{r} \frac{1}{2} d$ را انتخاب کرد [۷]. تأثیر سرعت بارگذاری بر پاسخهای دینامیکی پوستههای استوانهای در شکل **۱۱** و **۲۱** نشان داده شده است. سه مقدار سرعت بارگذاری (c) برابر با ³۰۱، ³۰۱×۲ و مشخص است که بارهای کمانش دینامیکی بحرانی و پاسخ مشخص است که بارهای کمانش دینامیکی بحرانی و پاسخ





تفویت شده تحت فشار حارجی با بستر الاستیک (^K و ^k) به ترتیب ۱۰^۵×۵ نیوتن بر متر مکعب و ۲/۵×۲/۵ نیوتن بر متر و مدهای (*m*و *n*) به ترتیب برابر ۱ و ۸

تأثیر بستر الاستیک و تقویت کننده بر بارهای کمانش بحرانی غیرخطی در جدول **۵** آورده شده است. در محاسبات پارامترهای بستر الاستیک ($k_w e_s A$) به ترتیب $1 \times 1 \times 0 \times 1$ نیوتن بر متر مکعب و $1 \times 1 \times 0 \times 1 \times 1$ نیوتن بر متر و نسبت R / hبرابر ۲۵۲، ($k_s k_2 \cdot 1 \times 1 \times 0$) برابر ۱ و مقدار سرعت بارگذاری (n) برابر با $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$ برابر ۱ و مقدار سرعت بارگذاری وضوح مشخص است که بستر الاستیک باعث افزایش قابل وضوح مشخص است که بستر الاستیک باعث افزایش قابل توجه بار بحرانی کمانش می شود. به نظر می رسد تقویت کننده های طولی و تقویت کننده های حلقوی به شدت بر بار بحرانی کمانش پوسته ها تأثیر می گذارد. جدول ۵ همچنین نشان می دهد بارهای بحرانی کمانش دینامیکی از بارهای بحرانی کمانش استایکی بیشتر است.

جدول (۵): تأثیر بستر الاستیک و تقویت کننده بر بار بحرانی

کمانش پوسته استوانهای مدرج تابعی (^۵ ۱۰×)

با بستر	با بستر	بدون بستر	بدون بستر	نوع
الاستيك	الاستيك	الاستيك	الاستيك	تقويت كننده
(دینامیکی)	(استاتیکی)	(دینامیکی)	(استاتیکی)	
				بدون
٢/١٢٠(٩)	١/٨٥٠(٩)	1/684(9)	١/٢٩٢(٩)*	تقويتكننده
				تقويتكننده
۴/۳۰۴(۸)	۴/۰۲۲(۸)	٣/٧٣٢(٨)	۳/۳۴۵(۸)	طولى
				تقويتكننده
۲/۳۰۴(۹)	١/٨۵٨(٩)	1/829(9)	۱/۳۰۰(۹)	حلقوى
				هر دو
۴/۲۷۱(۸)	۴/۰۳۸(۸)	٣٧۴۴/(٨)	٣/۴۶۵(٨)	تقويت كننده

*عدد داخل پرانتز شماره مد کمانش (n) میباشد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش نیمه تحلیلی برای تحلیل پوستههای نازک استوانهای مدور مدرج تابعی با تقویت کننده در معرض فشار خارجی وابسته به زمان که توسط بستر الاستیک احاطه شده، پیشنهاد شده است. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و روش تقویت کننده های تکه ای با جمله های غیرخطی فن کارمن، معادلات حاکم به دست آمده است. یک عبارت سه جمله ای شامل شکل پیش کمانش، شکل کمانش خطی و شکل کمانش غیر خطی برای تقریب خیز پوسته با تقویت کننده مدرج تابعی استفاده شده است. با استفاده از روش مدور مدرج تابعی استفاده شده است. با استفاده از روش مدور مدرج تابعی با تقویت کننده به دست آورده شده است و رابطه فر کانس – دامنه ارتعاش غیر خطی به فرم ساده نوشته شده است. پاسخ دینامیکی غیر خطی و بار کمانش دینامیکی بحرانی با استفاده از روش رانگ کوتا و معیار بدیانسکی – راث

بعضی از نتایج به دست آمده از این مطالعه عبارت است:

الف) تقویتکنندهها و بستر الاستیک تأثیر زیادی بر افزایش فرکانس طبیعی پوستهها دارد.

ب) زمانی که فرکانسهای تحریک به فرکانسهای طبیعی نزدیک هستند، پدیدهای جالب مثل پدیده هارمونیک ضربان ارتعاش خطی مشاهده میشود.

ج) تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی در اولین دوره ارتعاش

ناچیز است، اگرچه دامنه را در دورههای بعد به شـدت کـاهش میدهد.

د) تقویت کنندهها و بستر الاستیک، پایداری دینامیکی و ظرفیت تحمل بار پوستههای مدرج تابعی را بالا میبرند.

ه) بیش ترین فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد مربوط به پوسته شامل بستر الاستیک با حضور هر دو پارامتر (k_w و k_w میباشد.

و) نسبت شعاع به ضخامت، بستر الاستیک و موقعیت تقویتکنندهها تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی پوسته استوانهای دارد.

ز) تقویتکنندههای طولی تأثیر ناچیز و تقویتکننـدههـای حلقوی تأثیر قابل توجهی بر بار بحرانـی کمـانش پوسـتههـای استوانهای مدرج تابعی دارند.

8- مراجع

- Shen, H.S. "Postbuckling Analysis of Pressure-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments", Eng. Struct., Vol. 25, No. 4, pp. 487-497, 2003.
- Huang, H. and Han, Q. "Nonlinear Elastic Buckling and Postbuckling of Axially Compressed Functionally Graded Cylindrical Shells", Int. J. Mech. Sci., Vol. 51, No. 7, pp. 500-507, 2009.
- 3. Shen, H.S. "Torsional Buckling and Postbuckling of FGM Cylindrical Shells in Thermal Environments", Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 44, No. 6, pp. 644-657, 2009.
- Azimi, P., Mehrabani, M.M., and Jafari, A.A. "Effect of Internal Pressure on Free Vibration of a FGM Cylindrical Shell", Aerospace Mech. J., Vol. 7, No. 1, pp. 81-90, 2011. (In Persian)
- Zozulya, V.V. and Zhang, and Ch. "A High Order Theory for Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells", Int. J. Mech. Sci., Vol. 60, No. 1, pp. 12-22, 2012.
- Shen, H.S. "Postbuckling of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium", Int. J. Mech. Sci., Vol. 51, No. 5, pp. 372-383, 2009.
- Bagherizadeh, E., Kiani, Y., and Eslami, M.R. "Mechanical Buckling of Functionally Graded Material Cylindrical Shells Surrounded by Pasternak Elastic Foundation", Compos. Struct., Vol. 93, No. 11, pp. 3063-3071, 2011.
- 8. Sofiyev, A.H. "Buckling Analysis of FGM Circular Shells Under Combined Loads and Resting on the

Foundations", Meccanica, Vol. 48, No. 4, pp. 829-840, 2013.

- 20. Duc, N.D. and Thang, P.T. "Nonlinear Dynamic Response and Vibration of Shear Deformable Imperfect Eccentrically Stiffened S-FGM Circular Cylindrical Shells Surrounded on Elastic Foundations", j.ast, Vol. 40, pp. 115–127, 2015.
- 21. Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H., "Nonlinear Dynamical Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Cylindrical Panels", Compos. Struct., Vol. 94, No. 8, pp. 2465-2473, 2012.
- Bich D.H., Dung D.V., and Nam V.H., "Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Imperfect Functionally Graded Doubly Curved Thin Shallow Shells", Compos. Struct., Vol. 96, pp. 384-395, 2013.
- 23. Bich D.H., Duc N.D., and Quan T.Q. "Nonlinear Vibration of Imperfect Eccentrically Stiffened Functionally Graded Double Curved Shallow Shells Resting on Elastic Foundation Using the First Order Shear Deformation Theory" Mechanical Sciences, Vol. 80, pp. 16-28, 2013.
- 24. Brush, D.O. and Almroth, B. O. "Buckling of Bars, Plates and Shells", Mc Graw-Hill, New York, 1975.
- Reddy, J.N. and Starnes, J.H. "General Buckling of Stiffened Circular Cylindrical Shells According to a Layerwise Theory", Comput. Struct., Vol. 49, No. 4, pp. 605-616, 1993.
- 26. Volmir, A.S. "Non-linear Dynamics of Plates and Shells", Science Edition M, USSR, 1972. (in Russian).
- 27. Sewall, J.L. and Naumann, E.C. "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Cylindrical Shells with and Without Longitudinal Stiffeners", NASA technical, note D-4705, pp. 1-54, 1968.
- Baruch, M. and Singer, J. "Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Hydro-static Pressure", J. Mech. Eng. Sci. Vol. 5, No. 1, pp. 23-27, 1963.
- Shen, H.S. "Post-buckling Analysis of Imperfect Stiffened Laminated Cylindrical Shells Under Combined External Pressure and Thermal Loading", Int. J. Mech., Vol. 40, No. 4, pp. 339-355, 1998.
- Sofiyev, A.H. "The Non-linear Vibration of FGM Truncated Conical Shells", Compos. Struct., Vol. 94, No. 7, pp. 2237-2245, 2012.
- 31. Paliwal, D.N., Pandey, R. K., and Nath, T. "Free Vibration of Circular Cylindrical Shell on Winkler and Pasternak Foundation", Int. J. Pres. Ves. Pip., Vol. 69, No. 1, pp. 79-89, 1996.

Pasternak Type Elastic Foundation", Mech. Res. Commun., Vol. 37, No. 6, pp. 539-544, 2010.

- Najafizadeh, M.M., Hasani, A., and Khazaeinejad, P. "Mechanical Stability of Functionally Graded Stiffened Cylindrical Shells", Appl. Math., Vol. 54, No. 2, pp. 1151-1157, 2009.
- 10. Bich, D.H., Nam, V.H., and Phuong, N.T. "Nonlinear Postbuckling of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Plates and Shallow Shells", Vietnam J. Mech., Vol. 33, No. 3, pp. 132-147, 2011.
- Dung, D.V. and Hoa, L.K. "Nonlinear Buckling and Post-buckling Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Under External Pressure", Thin-Walled Struct., Vol. 63, pp. 117-124, 2013.
- MalekzadehFard K., ZamaniSani, S.M., and Tajdari, M., Satouri, S. "Dynamic Analysis of the Long Thick Cylindrical Shell Subjected to Mechanical Transient Moving Pressure", Aerospace Mech. J., Vol. 10, No. 3, pp. 43-52, 2014. (In Persian)
- 13. Isvandzibaei, M.R., Setareh, M., and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", Aerospace Mech. J., Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2010. (In Persian)
- 14. Dung, D.V. and Nam, V.H. "Nonlinear Dynamic Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Thin Shells Under External Pressure and Surrounded by an Elastic Medium", European J., Vol. 46, pp. 42-53, 2014.
- Darabi, M., Darvizeh, M., and Darvizeh, A. "Nonlinear Analysis of Dynamic Stability for Functionally Graded Cylindrical Shells Under Periodic Axial Loading", Compos. Struct., Vol. 83, No. 2, pp. 201-211, 2008.
- 16. Sofiyev, A.H. "The Vibration and Stability Behavior of Freely Supported FGM Conical Shells Subjected to External Pressure", Compos. Struct. Vol. 89, No. 3, pp. 356-366, 2009.
- Huang, H. and Han, Q. "Nonlinear Dynamic Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to a Time-dependent Axial Load", Compos. Struct., Vol. 92, No. 2, pp. 593-598, 2010.
- Budiansky, B. and Roth, R.S. "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", NASA technical, note D_1510, pp. 597-606, 1962.
- Najafov, A.M., Sofiyev, A.H., and Kuruoglu, N., "Torsional Vibration and Stability of Functionally Graded Orthotropic Cylindrical Shells on Elastic