

# تحلیل ضربه کم سرعت ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک دارای لایه‌های انعطاف‌پذیر با تئوری لایه‌ای و فرمول‌بندی انرژی جدید

محمد شریات<sup>۱</sup>      محمد حسن پاچناری<sup>۲</sup>      علی مظفری<sup>۳</sup>  
 دانشکده مهندسی مکانیک      دانشکده مهندسی هوافضا      دانشکده مهندسی هوافضا  
 دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی      دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی      دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
 (تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۱/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۱۶)

## چکیده

در مقاله کنونی، پاسخ ورق کامپوزیتی چندلایه ویسکوالاستیک در برابر ضربه کم سرعت ناشی از برخورد یک جسم کروی صلب، تحلیل شده است. در این راستا، فرمول‌بندی جدیدی از انرژی که برای تحلیل ضربه مناسب بوده و انرژی پتانسیل ناشی از فروروی ضربه‌زن در ورق را نیز در نظر می‌گیرد، برای اولین بار ارائه و استفاده شده است. در تحلیل کنونی، قانون تماس هر تیز، ابتدا جهت در نظر گرفتن اثر سختی لایه‌های زیرین بر سختی ناحیه تماس، اصلاح شده است. مدل انتگرال سلسله مراتبی ولترا برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک مواد به کار رفته و برای مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار ورق، از تئوری لایه‌ای دارای توانایی در نظر گرفتن تغییر شکل‌پذیری عرضی لایه‌ها، استفاده شده است. برای یافتن پاسخ معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی حاکم، از ترکیب روش‌های اجزای محدود، انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای و شیوه انتگرال‌گیری عددی زمانی نیومارک بهره گرفته شده است. در بخش نتایج، اثر پارامترهای گوناگون رفتار ویسکوالاستیک مواد و نیز سرعت ضربه‌زن بر تاریخچه‌های زمانی نیروی ضربه، میزان فروروی و خیز ورق مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که به دلیل ماهیت میراسازی ساختاری مواد ویسکوالاستیک، سختی ورق و در نتیجه، نیروی ضربه، افزایش یافته ولی خیز دینامیکی بیشینه پدید آمده در ورق و میزان فروروی، کاهش می‌یابند. همچنین، در حالت کلی، افزایش نیروی تماس بیانگر افزایش میزان فروروی نمی‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** ضربه کم سرعت، فرمول‌بندی جدید انرژی، ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک انعطاف‌پذیر، تئوری لایه‌ای، روش اجزای محدود.

## Low-Velocity Impact Analysis of a Viscoelastic Composite Plate with Flexible Layers Based on a Layerwise Theory and a Novel Energy Formulation

M. Shariyat      M.H. Pachenari      A. Mozaffari  
 Faculty of Mechanical Engineering      Aerospace Engineering Department      Aerospace Engineering Department  
 K.N. Toosi University of Technology      K.N. Toosi University of Technology      K.N. Toosi University of Technology

(Received: 10/April/2016; Accepted: 6/December/2016)

### Abstract

In the present paper, responses of a multilayer viscoelastic composite plate against a low-velocity impact by a rigid spherical indenter is investigated. In this regard, a novel energy formulation that is suitable for impact analysis and accounts for the potential energy due to indentation is proposed and employed, for the first time. First, Hertz contact law is refined to include effect of the lower layers on the stiffness of the contact region. Voltra hierarchical integral is employed for modeling the viscoelastic material and a layerwise theory capable of considering the transverse flexibility of the layers is used to accurately model the plate behavior. To solve the governing integro-differential equations, the finite element method, trapezoidal integration method, and Newmark numerical time integration method are used. In the results section, effects of the various viscoelasticity parameters and the indenter velocity on the time histories of the contact force, indentation, and lateral deflection of the plate are investigated. Results show that due to the damping nature of the viscoelastic materials, the plate rigidity and contact force increase whereas the maximum lateral deflection and the indentation decrease. Furthermore, higher contact forces do not necessarily indicates higher indentations.

**Keywords:** Low-velocity impact, Novel energy formulation, Flexible viscoelastic composite plate, Layerwise theory, Finite element.

۱- استاد (نویسنده پاسخگو): m\_shariyat@yahoo.com

۲- دانشجوی دکتری: pachenari@gmail.com

۳- استادیار: mozaffari@kntu.ac.ir

## ۱- مقدمه

مروری جامع در خصوص مدل های ارائه شده در زمینه ضربه کم سرعت ورق کامپوزیتی ارائه کرده است.

صدربا م<sup>۲</sup> و ابودی<sup>۳</sup> [۳]، پاسخ ورق های کامپوزیتی ویسکوالاستیک را تحت بار دینامیکی با تغییرات زمانی پله ای مورد بررسی قرار دادند. آنها از روابط بولتزمن<sup>۴</sup> و سری فوریه برای یافتن پاسخ فرکانسی استفاده کردند. پاسخ دینامیکی و شبه دینامیکی تیرهای ویسکوالاستیک با استفاده از نظریه تبدیل لاپلاس و با روش اجزاء محدود، توسط چن<sup>۵</sup> [۴] بررسی شد. الیاسوف<sup>۶</sup> و آکوز<sup>۷</sup> [۵] پایداری ورق های ویسکوالاستیک تحت بار عرضی با تغییرات زمانی مثلثی را بررسی نموده و معادلات ساختاری ویسکوالاستیک را به فرم بولتزمن- ولترا<sup>۸</sup> ارائه و معادلات حاصله را به شیوه تبدیل لاپلاس حل نمودند.

برخی از پژوهشگران، نکات مرتبط با نحوه استفاده از تناظر الاستیک- ویسکوالاستیک در ورق های ویسکوالاستیک هدفمند تحت بار گسترده و نیروهای برشی درون صفحه ای را مورد کاوش قرار داده و ثابت نمودند که اصل تناظر مواد ویسکوالاستیک، ضمن آن که تنها برای تغییرات سینوسی بار قابل استفاده است، برای نوع خاصی از مواد هدفمند که تابع واهلش آنها جدایش پذیر است، برقرار است [۶ و ۷]. ابدون<sup>۹</sup> و ازرار<sup>۱۰</sup> [۸]، پاسخ ورق ویسکوالاستیک تحت بارگذاری هارمونیک را به شیوه المان محدود بررسی نمودند. برای توصیف ویژگی های ویسکوالاستیک مواد، از ماتریس واهلش پیچیده ای که تابعی از فرکانس واهلش بود، استفاده شد.

پاسخ ضربه ورق ویسکوالاستیک، توسط آسی<sup>۱۱</sup> و همکاران [۹] به شیوه المان محدود به دست آمد. در این زمینه، مدل ساده واهلش مواد غیر همگن استفاده شده و از مدل جامد ویسکوالاستیک خطی برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک بهره گرفته شد. همچنین، رفتار گذرای ورق های کامپوزیتی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری دینامیکی با تغییرات زمانی

سازه های کامپوزیتی چند لایه، به طور گسترده ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار گرفته اند. با وجود برتری هایی مانند نسبت استحکام به وزن بالا، برخی از نارسایی های این گونه از سازه ها، مانند آسیب پذیری در برابر بارهای ضربه ای پیش بینی نشده، از جمله بارهای ناشی از سقوط اجسام یا پرت شدن ابزار بر این سازه ها، همواره عامل نگران کننده ای بوده اند. زیرا آسیب های پدید آمده می توانند مقاومت سازه را به طور چشم گیری کاهش دهند. به دلیل استفاده از مواد پلیمری در ماتریس مواد کامپوزیتی و به طور کلی، وجود میرایی سازه ای قابل توجه در الیاف و ماتریس که با واژه ویسکوالاستیسیته شناخته می شود، پیش بینی دقیق پاسخ سازه های یاد شده در برابر ضربه، نیازمند استفاده از مدل های ساختاری دربر گیرنده ماهیت ویسکوالاستیک مواد می باشد.

با وجود آن که تاکنون مقالات زیادی درباره پاسخ ورق های کامپوزیتی در برابر ضربه کم سرعت منتشر شده است، اکثر این آثار در ارتباط با مقاومت در برابر آسیب، بدون در نظر گرفتن ماهیت ویسکوالاستیک رفتار مواد، بوده اند. ویژگی های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک متغیر با زمان و مکان (به دلیل تغییرات مکانی و زمانی میدان کرنش) بوده و به علت هم گیری رفتارهای الاستیک و میراسازی در مواد ویسکو الاستیک، موجب افزایش سختی و تغییر فرکانس های طبیعی ورق می گردند. در نتیجه، با توجه به این که پاسخ دینامیکی ورق، ترکیبی از پاسخ های ناشی از مدهای ارتعاشی مختلف است، این ویژگی های مواد، پاسخ ضربه را به طور چشم گیری تحت تاثیر قرار می دهند. لذا، رفتار ورق کامپوزیتی ویسکو الاستیک تحت بارهای ضربه ای را به طور کلی بهبود می بخشند. با این وجود، به دلیل آن که ویژگی های یاد شده فرایند انتقال نیرو از جسم ضربه زن به ورق و میزان فروروی ضربه زن را تحت تاثیر قرار می دهند، اظهار نظر کلی در ارتباط با پاسخ ورق در برابر ضربه، بدون ارائه یک تحلیل دقیق، امکان پذیر نمی باشد.

اغلب مدل های ضربه ارائه شده برای ورق های کامپوزیتی عادی، مبتنی بر گسسته سازی از طریق استفاده از المان های جرم و فنر می باشند [۱]. بدیهی است که این مدل ها توانایی آشکار سازی آثار مدهای ارتعاشی بالاتر از مدخمش اول تغییر فرم و ارتعاش ورق، که گاهی چشم گیرند، را ندارند. ابریت<sup>۱</sup> [۲]

2- Cederbaum

3- Aboudi

4- Boltzman

5- Chen

6- Ilyasov

7- Aköz

8- Boltzman-Voltra

9- Abdoun

10- Azrar

11- Assie

متعددی در نظر گرفته شد. داریوشی و صدیقی [۲۲]، رفتار یک تیر ساندویچی تحت ضربه سرعت پایین با یک ضربه‌زن استوانه‌ای صلب را با مدل سازی رویه‌ها با تیر تیموشنکو و هسته با یک جسم دوبعدی که می‌تواند در راستای ضخامت فشرده شود، بررسی نمودند. نتایج به‌دست آمده، از طریق آزمون‌های انجام شده توسط مولفین یاد شده، صحت‌گذاری شدند. تحلیل رفتار ضربه ورق ساندویچی با پیش‌بار دوبعدی و رویه‌های کامپوزیتی، توسط قاجار و همکاران [۲۳]، به شیوه اجزای محدود مبتنی بر الاستیسیته سه‌بعدی صورت پذیرفت. اثر استفاده از سیمهای حافظه‌دار بر پاسخ‌های ضربه ورق‌های کامپوزیتی با یا بدون پیش تنش، توسط حسینی و همکاران [۲۴] و شریعت و همکاران [۲۵]، بررسی شد. ملک زاده فرد و همکاران [۲۶ و ۲۷]، پاسخ ارتعاشات آزاد و ضربه سرعت پایین یک ورق ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر مغناطیسی را مورد مطالعه قرار داده و از حل سری فوریه استفاده نمودند. در این پژوهش، نیروی برخورد به کمک یک مدل گسسته جرم و فنر دو درجه آزادی به‌دست آمد.

تاکنون تحقیق جامعی در خصوص تحلیل پاسخ‌های ضربه کم‌سرعت ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک ارائه نشده است. همچنین، در مقالات ارائه شده توسط مولفین دیگر، اثر سفتی لایه‌های زیرین بر سختی ناحیه تماس در نظر گرفته نشده و عموماً تحلیل‌ها یا در محیط نرم‌افزارهای تحلیل اجزای محدود تجاری یا با خطی نمودن قانون تماس هرگز صورت گرفته است. در پژوهش کنونی، پاسخ ورق به ضربه کم‌سرعت، با در نظر گرفتن اثرات لایه‌های زیرین بر سختی تماس محل ضربه و تاثیر پارامترهای ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، برای افزایش دقت نتایج و نتیجه‌گیری‌های حاصله، ضمن اصلاح رابطه تماس هرگز، از تئوری ورق لایه‌ای و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی استفاده شده است.

## ۲- استخراج روابط حاکم بر تنش و کرنش ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک

دستگاه مختصات ورق دارای تکیه‌گاه‌های ساده مورد بررسی، به همراه پارامترهای هندسی ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک، در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. طول، عرض و ضخامت ورق، به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $h$  نشان داده شده و شعاع و سرعت ضربه‌زن به ترتیب با  $R$  و  $V$  مشخص شده‌اند.

مثلی توسط آسی و همکاران [۱۰] بررسی شد. آنها از تئوری برشی مرتبه اول و روش اجزاء محدود برای یافتن معادلات حاکم استفاده کردند. حل زمانی با استفاده از روش نیومارک انجام پذیرفت [۱۱]. التنباخ<sup>۱</sup> و ارمیو<sup>۲</sup> [۱۲] رفتار خمشی ورق هدفمند ساخته شده از فوم‌های فلزی یا فوم‌های پلیمری ناهمگن ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. اخیراً، تحلیل ارتعاش غیرخطی ورق همسانگرد ویسکوالاستیک مستطیلی، توسط امابیلی<sup>۳</sup> [۱۳] انجام شده است.

در خصوص استفاده از مدل‌های پیوسته در تحلیل ضربه کم سرعت، نشیر و همکارانش [۱۴] به بررسی تنش‌ها و جابجایی‌های کلی پدید آمده در ورق پرداختند. در این تحلیل، میزان فروروی ضربه زن مورد توجه قرار نگرفته است. کریستوفرو<sup>۴</sup> و همکارانش نیز به مدل‌سازی هندسی ناحیه تماس برای ورق فاقد امکان خیز پرداختند [۱۵ و ۱۶].

ترنر<sup>۵</sup> [۱۷] به اصلاح روابط مربوط به تماس ورق ارتوتروپیک از طریق جایگزینی مدول کشسان مواد همسانگرد در رابطه هرگز با مدول کشسانی عرضی پرداخت. سپس سوانسون<sup>۶</sup> [۱۸] با استفاده از مطالعات تجربی خود، رابطه هرگز که اساساً برای "نیم فضا" به‌دست آمده را برای ضربه "ورق" اصلاح نمود. شریعت و فرزانه نسب [۱۹] ضربه کم‌سرعت ورق همسانگرد هدفمند ویسکوالاستیک را با استفاده از یک تئوری ورق تک‌لایه هم‌ارز با جدا نمودن آثار خمشی و برشی، بررسی کردند.

در زمینه تحلیل ضربه ورق با دیدگاه تئوری یا تجربی، پژوهش‌های متعددی نیز در مجلات داخلی منتشر شده‌اند. بیدی و همکاران [۲۰] تحلیل تجربی و عددی ضربه روی ورق های فولادی انحنادار را برای دستیابی به تغییر شکل ماندگار و تغییرات شتاب ضربه‌زن، انجام دادند. خورشیدی [۲۱] رفتار ضربه غیرخطی الاستوپلاستیک ناشی از برخورد یک گلوله کروی با یک ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم را با استفاده تئوری مرتبه اول برشی میندلین-ریزنر و حل تحلیلی با به‌کارگیری بسط توابع ویژه بررسی نمود. در این پژوهش، شرایط مرزی

1- Altenbach  
2- Eremeyev  
3- Amabili  
4- Christoforou  
5- Turner  
6- Swanson

برای مواد ویسکوالاستیک، رابطه تنش- کرنش بر اساس معادله بولتزمن- ولترا از رابطه (۶) برقرار می‌گردد:

$$\sigma = \int_0^t C(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (6)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از رابطه (۶)، داریم:

$$\sigma(t) = C(0)\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{dC(t-\tau)}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (7)$$

یا:

$$\sigma(t) = C(0)\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau \quad (8)$$

که در آن،  $R$  عملگری انتگرالی با هسته واهلش<sup>۳</sup> تعریف شده در رابطه (۹) می‌باشد:

$$R t = \frac{dC(t)}{d\tau} \quad (9)$$

با توجه به تعریف انتگرال کانولوشن، می‌توان رابطه (۸) را به فرم کوتاه زیر نشان داد:

$$\sigma(t) = [C(0) - \mathcal{R}^*] \varepsilon(t) \quad (10)$$

یا به فرم کوتاه‌تر:

$$\sigma(t) = \bar{C}^*(t) \varepsilon(t) \quad (11)$$

که در آن، ماتریس عملگر  $\mathcal{R}^*$  بر پایه رابطه (۱۲) تعریف می‌گردد:

$$\mathcal{R}^* \varepsilon = \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (12)$$

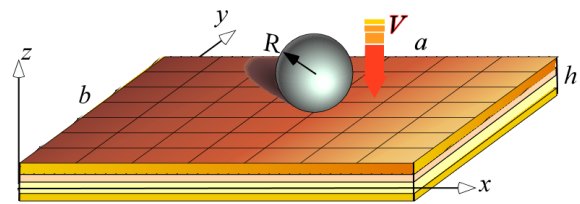
با توجه به رابطه (۱۱) می‌توان انتگرال‌های مختلف ماتریس عملگر  $\bar{C}^*$  را در ضخامت ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک یافت:

$$\begin{aligned} A_{ij}^l &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij}^*(t) z^l dz = \int_{-h/2}^{h/2} [C_{ij}(0) - \mathcal{R}_{ij}^*] z^l dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ C_{ij}^{(k)}(0) - \int_0^t \alpha C_{ij(2)}^{(k)} e^{\alpha(\tau-t)} d\tau \right] z^l dz \quad (13) \\ &= (A_{ij}^l)^E - (A_{ij}^l)^{VE} \end{aligned}$$

که در آن، اندیس‌های  $E$  و  $VE$  به ترتیب، بیانگر بخش‌های الاستیک و ویسکوالاستیک می‌باشند.

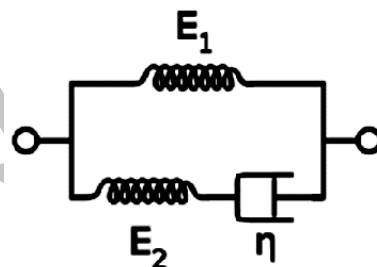
### ۳- قانون تماس هرتز و سختی تماسی در محل ضربه

در این تحقیق از قانون تماس هرتز به منظور یافتن ارتباط میان نیروی تماس و میزان فروروی ضربه‌زن استفاده شده است. طبق این قانون، ناحیه تماس، بدون اصطکاک فرض می‌شود.



شکل (۱): پارامترهای هندسی و جهت محورهای دستگاه مختصات مورد استفاده

ویژگی‌های مخلوط مواد الیاف و ماتریس، عموماً توسط قوانین میکرومکانیکی، با مشخصات هم‌ارز آنها جایگزین می‌شوند. در مقاله کنونی، از مدل جامد ویسکوالاستیک استاندارد نشان داده شده در شکل ۲، که پاسخ‌های آن هم در واهلش<sup>۱</sup> و هم در خزش<sup>۲</sup> با رفتارهای مواد مهندسی سازگار است [۲۸]، برای مدل‌سازی رفتار مخلوط ویسکوالاستیک استفاده شده است.



شکل (۲): مدل جامد ویسکوالاستیک استاندارد

فرم تابع واهلش این مدل ویسکوالاستیک، به فرم معادله (۱) است [۲۸]:

$$E(t) = E_1 + E_2 e^{-\alpha t} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\alpha$  عکس زمان واهلش  $t_r$  است:

$$\alpha = \frac{1}{t_r} = \frac{E_2}{\eta} \quad (2)$$

که در آن،  $\eta$  میزان میرایی (طبق شکل ۲) است. در مواد ویسکوالاستیک، ضریب پواسون نزدیک به مواد تراکم‌ناپذیر بوده و مستقل از زمان پنداشته می‌شود. لذا، طبق رابطه (۱)، رابطه زیر میان ضرایب الاستیک و ویسکوالاستیک برقرار خواهد بود:

$$C_{ij}(t) = C_{ij(1)} + C_{ij(2)} e^{-\alpha t} \quad (3)$$

در نتیجه:

$$C_{ij}(0) = C_{ij(1)} + C_{ij(2)} \quad (4)$$

$$C_{ij}(\infty) = C_{ij(1)} \quad (5)$$

$$F = F_{max} \left( \frac{\beta - \beta_0}{\beta_{max} - \beta_0} \right)^{\frac{5}{2}} \quad (20)$$

که در آن،  $F_{max}$  نیروی تماس بیشینه،  $\beta_{max}$  نفوذ بیشینه ناشی از نیروی تماس بیشینه و  $\beta_0$  میزان نفوذ ماندگار می‌باشد.

#### ۴- معادلات حاکم بر حرکت ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک انعطاف‌پذیر و جرم ضربه‌زن

در این بخش، فرم جدیدی از معادلات انرژی، برای یافتن معادله حاکم بر ورق ارائه خواهد شد. برای افزودن دقت ردگیری تغییرات مولفه‌های جابجایی، از تئوری لایه‌های ویژه‌ای استفاده شده و سرانجام، معادلات حاکم بر حرکت، به فرم اجزای محدود بدست آمده‌اند.

#### ۴-۱- معادلات تنش کرنش، بر پایه تئوری لایه‌ای

بر پایه تئوری لایه‌ای، تغییرات مولفه‌های جابجایی درون هر لایه ورق را می‌توان به گونه زیر بیان نمود [۳۰]:

$$u(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} U_{n(k-1)+l}(x, y) \varphi_l(z)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} V_{n(k-1)+l}(x, y) \varphi_l(z) \quad (21)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} W_{m(k-1)+l}(x, y) \psi_l(z)$$

که در آن،  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب، مولفه‌های جابجایی ورق در امتداد محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند.  $k$  شماره لایه ( $k=1$  متناظر با لایه زیرین است) و  $l$  شماره لایه محلی هر لایه می‌باشد. در رابطه (۲۱)،  $N$  تعداد لایه‌های ورق و  $n$  و  $m$  مرتبه چند جمله‌ای تغییرات درون لایه‌ای (به ترتیب، برای مولفه‌های درون صفحه‌ای و عرضی) است.  $U_l$ ،  $V_l$  و  $W_l$  مقدار مولفه‌های یاد شده در هر زیر لایه می‌باشد. به بیان دیگر، مولفه‌های جابه‌جایی بر حسب توابع تقریبی بر حسب تمامی مقادیر زیر لایه‌ها در هر  $x$  و  $y$  مشخص، نوشته شده است. بدیهی است که برای مشاهده تغییرات چند جمله‌ای یاد شده، باید در هر لایه،  $n+1$  یا  $m+1$  زیر لایه تعریف شوند.

در هر لایه، لازم است تغییرات درون همان لایه (اثر زیر لایه‌های متناظر با آن لایه دیده) شود. لذا می‌توان توابع تغییرات عرضی را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\varphi_l(z) = [H(z - z_{k-1}) - H(z - z_k)] Z_l^n(z)$$

$$\psi_l(z) = [H(z - z_{k-1}) - H(z - z_k)] Z_l^m(z) \quad (22)$$

قانون هرتز، نیروی تماس بین دو جسم را به فرم رابطه (۱۴) در اختیار قرار می‌دهد:

$$F = K \beta^{3/2} \quad (14)$$

که در آن،  $K$  سختی ناحیه تماس و  $\beta$  میزان فروروی می‌باشد.

$$K = \frac{4}{3} \sqrt{RE^*} \quad (15)$$

$E^*$  مدول الاستیسیته موثر سطح تماس است. بنابراین، از ترکیب روابط (۱۴) و (۱۵):

$$\beta = \left( \frac{3F}{4\sqrt{RE^*}} \right)^{2/3} \quad (16)$$

محققان نشان داده‌اند که چنانچه مدول ماده همسانگرد در رابطه هرتز با ترکیبی از ویژگی‌های مکانیکی ماده همسانگرد عرضی (مانند ورق‌های کامپوزیت) جایگزین گردد، میزان نفوذ را می‌توان از رابطه هرتز مشابه با رابطه تماس مواد همسانگرد محاسبه نمود. رابطه مرتب شده ترنر [۱۷] که توسط سوانسون [۱۸] ارائه شده، مدول الاستیسیته موثر سطح تماس ماده کامپوزیتی را به گونه زیر تعریف می‌نماید:

$$E^* = \frac{2}{\lambda_1 \lambda_3} \quad (17)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{E_x / E_y - \nu_{xz}^2}{1 - \nu_{xy}^2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{(E_x / 2G_{xz}) - \nu_{xz}(1 + \nu_{xy})}{1 - \nu_{xy}^2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \nu_{xy}}{G_{xy}} \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} \quad (18)$$

در رابطه (۱۶)، تنها اثر لایه تحت ضربه در نظر گرفته شده است. میزان نرمی یا سفتی لایه‌های زیرین، سختی ناحیه تماس ورق را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. برای در نظر گرفتن اثر سختی لایه‌های زیرین، می‌توان از مدول میانگین وزنی زیر (با توجه به این که سفتی هر لایه به نسبت  $E/h$  آن لایه وابسته بوده و سفتی لایه‌ها سری هستند)، استفاده نمود:

$$(E^*)_{eq} = h / \sum_{k=1}^N (h_k / E_k) \quad (19)$$

$h_k$  ضخامت لایه  $k$ -ام است.

برای مرحله باربرداری، قانون تماس هرتز بهبود یافته توسط یانگ<sup>۱</sup> و سان<sup>۲</sup> [۲۹] ارایه شده و بر اساس آن نیروی نفوذ توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

1- Yang  
2- Sun

هر تابع دو بعدی دلخواه دیگر، می توان بر پایه یک المان بندی درون صفحه ای، مانند آنچه در شکل ۱ نمایش داده شده، بیان نمود:

$$\begin{aligned} U_i(x, y) &= \mathcal{N}(x, y) \widehat{U}_i \\ V_i(x, y) &= \mathcal{N}(x, y) \widehat{V}_i \\ W_i(x, y) &= \mathcal{N}(x, y) \widehat{W}_i \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن،  $i$  شمارنده زیر لایه است و برای مثال،  $\widehat{U}_i$  بردار مقادیر جابجایی  $U_i$  در نقاط گره هر المان درون صفحه ای (برای نمونه، بردار مقادیر  $U_{n(k-1)+l}$  در نقاط گره) و  $\mathcal{N}$  بردار توابع شکل است. به بیان دیگر، شبکه های المانی زیر لایه های مختلف، دارای المان های موازی می باشند. در پژوهش کنونی، از المان مستطیلی نه نقطه گره ای استفاده شده است. از جای گذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۲۵)، خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \Gamma(\delta) \widehat{\delta} \quad (27)$$

که در آن:

$$\widehat{\delta}^T = (\widehat{U} \quad \widehat{V} \quad \widehat{W}) \quad (28)$$

در حقیقت، بر پایه روابط (۲۱) و (۲۶):

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x, y, z) \widehat{\delta}(t) \quad (29)$$

در نتیجه، بر پایه روابط (۲۴) و (۲۷):

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \partial \mathbf{H} \widehat{\delta} = \Gamma(\widehat{\delta}) \widehat{\delta} \quad (30)$$

که در آن،  $H$  تابع هیوی ساید و برای مثال،  $Z_i^n(z)$  تابع تقریب (تابع شکل)  $l$ -ام مرتبه  $n$  است. برای نمونه، برای تغییرات خطی درون هر لایه:

$$Z_1^1(z) = 1 - \frac{z - z_k}{h_k}, \quad Z_2^1(z) = \frac{z - z_k}{h_k} \quad (23)$$

روابط کرنش-جابجایی بدین صورت تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (24)$$

حال اگر روابط جابجایی (۲۱) را در معادلات کرنش (۲۴) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial U_{n(k-1)+l}}{\partial x} \varphi_l \\ \varepsilon_y &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial V_{n(k-1)+l}}{\partial y} \varphi_l \\ \gamma_{xy} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial U_{n(k-1)+l}}{\partial y} \varphi_l \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial V_{n(k-1)+l}}{\partial x} \varphi_l \\ \gamma_{yz} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} V_{n(k-1)+l} \frac{d\varphi_l}{dz} \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial y} \psi_l \\ \gamma_{xz} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} U_{n(k-1)+l} \frac{d\varphi_l}{dz} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial x} \psi_l \end{aligned} \quad (25)$$

تغییرات عرضی مولفه های جابجایی، طبق رابطه (۲۱)، توسط توابع  $\varphi_l(z)$  و  $\psi_l(z)$  که در رابطه (۲۲) تعریف شده اند، کاملاً معلوم می باشند. تغییرات درون صفحه ای مولفه های جابجایی، بنابر رابطه (۲۱)، در تعریف پارامترهای جابجایی  $U, V$  و  $W$  مستتر است. از آنجا که تغییرات درون صفحه ای این پارامترها، مجهول است، مسئله کنونی دوبعدی است (هر چند که پارامترهای جابجایی  $U, V$  و  $W$  در زیر لایه های مختلف، به فرم یکسان تغییر نمی نمایند). این تغییرات را مانند تغییرات

$$\delta \Pi = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [(\delta \varepsilon)^T \sigma + \rho(\delta \delta)^T \ddot{\delta}] dz dA + K \beta^{3/2} \delta \beta \quad (36)$$

$$+ m_i \left( \ddot{w}|_{x=a/2, y=b/2} + \ddot{\beta} \right) \left( \delta w|_{x=a/2, y=b/2} + \delta \beta \right) = 0$$

بر پایه روابط (۲۱) و (۲۶) می‌توان نوشت:

$$w|_{x=a/2, y=b/2} = W_{nN+1}|_{x=a/2, y=b/2} = \mathcal{G} \delta \quad (37)$$

از سوی دیگر، بردار گسترش یافته مجهولات نقاط گره همان‌ها را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \delta \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (38)$$

و از روابط (۲۹)، (۳۷) و (۳۸)، می‌توان برای نمونه، نوشت:

$$\delta = [H \ 0] \Sigma = \bar{H} \Sigma$$

$$w|_{x=a/2, y=b/2} = \mathcal{G} \delta = \bar{\mathcal{G}} \Sigma \quad (39)$$

$$\beta = [0 \ 1] \Sigma = Y \Sigma$$

و به طور مشابه، از روابط (۱۰) و (۳۰):

$$\varepsilon = [\Gamma(\delta) \ 0] \Sigma = [\partial H \ 0] \Sigma = \bar{\Gamma} \Sigma \quad (40)$$

$$\sigma(t) = [C(0) - \mathcal{R}^*] \bar{\Gamma} \Sigma(t) \quad (41)$$

در نتیجه:

$$\delta \varepsilon = [\partial H \ 0] \delta \Sigma = \Omega \delta \Sigma \quad (42)$$

رابطه (۳۶) را می‌توان بر پایه روابط (۳۷) تا (۴۲)، به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} (\delta \Sigma)^T \triangleleft & \left( \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \Omega^T [C(0) - \mathcal{R}^*] \bar{\Gamma} \Sigma \right. \\ & + \rho \bar{H}^T \bar{H} \ddot{\Sigma} dz dA + [Y^T K(Y \Sigma)^{1/2}] \Sigma \\ & \left. + m_i (\bar{\mathcal{G}} + Y)^T (\bar{\mathcal{G}} + Y) \ddot{\Sigma} \right) \triangleright = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

با توجه به اینکه  $(\delta \Sigma)^T$  اختیاری است، از رابطه (۴۳) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} & \left( \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\rho \bar{H}^T \bar{H}] dz dA + m_i (\bar{\mathcal{G}} + Y)^T (\bar{\mathcal{G}} + Y) \right) \ddot{\Sigma} \\ & + \left[ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \Omega^T C(0) \bar{\Gamma} dz dA + Y^T K(Y \Sigma)^{1/2} \right] \Sigma \\ & - \left[ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \Omega^T \mathcal{R}^* \bar{\Gamma} dz dA \right] \Sigma = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

که فرم اجزای محدود معادلات حاکم بر ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک و جرم ضربه زن است. عبارت آخر سمت اول رابطه (۴۴)، مشخصاً شامل اثرات هسته واهلش ویسکوالاستیک است.

## ۴-۲- فرمول‌بندی جدید انرژی برای یافتن معادلات حاکم

برای یافتن معادلات حاکم بر ورق کامپوزیتی تحت ضربه کم

سرعت، از اصل کار مجازی استفاده می‌کنیم:

$$\delta \Pi = \delta U^* - \delta W^* = 0 \quad (31)$$

که در آن،  $\Pi$ ،  $U^*$  و  $W^*$  به ترتیب، انرژی پتانسیل کل، انرژی کرنشی و کار بارهای خارجی (از جمله نیروهای اینرسی یا دالامبر) است. انرژی پتانسیل، شامل انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل ناشی از فروروی جرم ضربه‌زن در ورق است:

$$\begin{aligned} U^* &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dz dA + \int_0^a F d\beta \\ &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dz dA + \int_0^\beta K \beta^{3/2} d\beta \end{aligned} \quad (32)$$

در رابطه (۳۲)، نیروی تماس، از رابطه (۱۴) جایگزین شده است. لذا، فرم باز شده رابطه (۳۲) برای مسئله کنونی، برای مجموعه ورق و ضربه‌زن، طبق رابطه (۳۳) است:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dz dA \\ &+ \frac{2K}{5} \beta^{5/2} + \frac{1}{2} m_i V^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho(\delta)^T \delta d\Omega \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن،  $\Omega$ ،  $m_i$  و  $V$  به ترتیب، حجم ورق و جرم و سرعت ضربه‌زن است. در فاز باربرداری، لازم است که عبارت درون انتگرال رابطه (۳۲) متناظر با رابطه (۲۰) تغییر یابد. سرعت ضربه‌زن از طریق رابطه زیر به خیز ورق مرتبط می‌شود:

$$V = \frac{\partial}{\partial t} \left( w|_{x=a/2, y=b/2} + \beta \right) \quad (34)$$

در نتیجه، از روابط (۳۳) و (۳۴):

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dz dA + \frac{2K}{5} \beta^{5/2} \\ &+ m_i \left( \ddot{w}|_{x=a/2, y=b/2} + \ddot{\beta} \right) \left( w|_{x=a/2, y=b/2} + \beta \right) \\ &+ \int_0^b \int_0^a \rho(\delta)^T \delta dx dy \end{aligned} \quad (35)$$

در نوشتن معادله (۳۳) از این نکته که نیروی تماس یک نیروی داخلی است، استفاده شده است. همچنین، دو عبارت آخر رابطه (۳۵)، شامل حاصل ضرب نیروی اینرسی جرم ضربه‌زن در جابجایی آن و معادل انرژی جنبشی هستند (کار نیروهای اینرسی). تغییرات انرژی پتانسیل کل، طبق رابطه (۳۱) باید صفر باشد:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* \bar{\Gamma} \Sigma &= \int_0^t \alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma d\tau \\ &= \sum_{s=1}^r \mathcal{W}_{s-1} [\alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma]_{t=(s-1)\Delta t} \Delta t \\ &\quad + \mathcal{W}_r [\alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma]_{t=r} \Delta t \end{aligned} \quad (45)$$

در این رابطه،  $r$  تعداد گام‌های زمانی، تا لحظه مورد بررسی است و  $\mathcal{W}$  ضریب وزنی است (در روش انتگرالگیری ذوزنقه‌ای، اولین و آخرین ضریب،  $0.5$  و ضرایب میانی، برابر با  $1$  می‌باشند). لذا حد بالای عبارت جمع (سیگما) با زمان متغیر است. این عبارت دارای جملات معلوم (از گام‌های زمانی قبل) بوده و تنها عبارت آخر رابطه (۴۵) در گام زمانی مورد بررسی مجهول است. لذا فرم رابطه (۴۴)، پیش از اعمال روش نیومارک برای حل عددی معادله دیفرانسیلی بر حسب زمان، به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\left( \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\rho \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}}] dz dA + m_i (\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{Y})^T (\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{Y}) \right) \ddot{\Sigma} \\ &+ \left\{ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \Omega^T [\mathbf{C}(0) \bar{\Gamma} + \mathbf{K} \mathbf{Y}^T (\mathbf{Y} \Sigma)]^{1/2} \right. \\ &\left. - \mathcal{W}_r \alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \right\}_{t=r} \Delta t \{ dz dA \} \Sigma \\ &= - \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \Omega^T \sum_{s=1}^r \mathcal{W}_{s-1} \right. \\ &\left. [\alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma]_{t=(s-1)\Delta t} \Delta t \right\} dz dA \end{aligned} \quad (46)$$

و به فرم نمادین:

$$\mathbf{M} \ddot{\Sigma} + \mathbf{K}(\Sigma, t) \Sigma = \mathcal{F}(\Sigma, t) \quad (47)$$

گام‌های حل عددی مسئله کنونی را می‌توان به فرم زیر خلاصه نمود:

- ۱- تشکیل ماتریس‌های المانی رابطه (۴۷)، بر پایه رابطه (۴۶) و ترکیب ماتریس‌ها برای استخراج ماتریس‌های کل مجموعه ورق و ضربه‌زن.
- ۲- اعمال شرایط مرزی، پیش از آغاز حل معادلات حاکم، برای پیشگیری از حصول دستگاه معادلات تکین. برای مثال، برای ورق دارای تکیه‌گاه‌های ساده، می‌توان تنها پارامترهای جابجایی لایه میانی را برابر با صفر قرار داد. روش دیگر، صفر نمودن پارامترهای جابجایی مربوط به جابجایی‌های عمود بر لبه (عرضی و درون صفحه‌ای) و صفر نمودن گشتاور خمشی لبه است.

۳- تعریف شرایط اولیه:

$$\left[ \Sigma, \dot{\Sigma} \right]_{t=0} = \mathbf{0}$$

#### ۴-۳- اشکال فرمول‌بندی‌های انرژی ارائه شده تاکنون،

##### برای تحلیل ضربه

در مقالات موجود، کار نیروی ضربه‌زن، با عبارت  $W = Fw$  نشان داده شده که حتی با فرض ورق الاستیک و قانون تماس خطی، باید برابر با  $W = \frac{1}{2} Fw$  باشد. از رابطه یاد شده،  $\delta W = F \delta w$  را به دست می‌آورند که این نتیجه، همراه با فرض اشتباه دیگری است که در آن، نیروی  $F$  مستقل از  $w$  پنداشته می‌شود. نتیجه این دو فرض اشتباه، تصادفاً، تنها برای سازه الاستیک، درست است. در صورتی که نیروی وارده متناسب با جابجایی نباشد، نتیجه حاصله اشکال خواهد داشت. طبق رابطه (۱۴)، نیروی ضربه، متناسب با توان  $\frac{3}{2}$  میزان فروروی است. لذا نتایج فرمول‌بندی‌های انرژی ارائه شده تاکنون در زمینه تحلیل ضربه، دارای خطا می‌باشند. از سوی دیگر، خطی‌سازی قانون تماس که در برخی از مراجع انجام شده، اشکال دارد. تماس، پدیده‌ای غیرخطی است. به همین دلیل، در فرمول‌بندی جدید، کار نیروی خارجی (انرژی پتانسیل ناشی از ضربه‌زن)، در رابطه (۳۲)، به فرمی دقیق ارائه شده است.

#### ۵- حل معادلات حرکت ورق کامپوزیتی ویسکو

##### الاستیک

معادله حرکت به دست آمده برای ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک، به دلیل غیرخطی بودن معادله ساختاری ویسکو الاستیسیته و نیز استفاده از رابطه غیرخطی تماس، دارای مرتبه بالایی از غیرخطی بودن است. لذا، حل نهایتاً باید به صورت نموی انجام شود.

برای حل رابطه (۴۴)، باید از روش‌های انتگرال‌گیری زمانی عددی، مانند روش نیومارک استفاده شود. لذا محدوده حل باید ابتدا به گام‌هایی زمانی که اندازه آنها بسیار کوچکتر از زمان پاسخ (مشخصاً از یک دهم پرپود متناظر با فرکانس طبیعی اول ورق) کوچکتر است، تجزیه شود. در پژوهش کنونی، گام زمانی یاد شده برابر با  $5 \times 10^{-5}$  ثانیه در نظر گرفته شده است. برای ورق با تکیه‌گاه ساده، جابجایی‌های لایه میانی (پارامترهای جابجایی متناظر) باید برابر با صفر قرار داده شوند. شرایط اولیه ورق نیز شامل جابجایی و سرعت صفر می‌باشند. پیش از استفاده از روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک، لازم است در دستگاه معادلات انتگرال- دیفرانسیل (۴۴)، انتگرال زمانی گسسته‌سازی شود:



۴- تعیین شتاب اولیه اجزاء، از رابطه (۴۷).  
 ۵- تجزیه دامنه زمانی حل به گام‌های بسیار ریز (کوچکتر از یک دهم پرپود طبیعی اول ورق).  
 ۶- تعیین مقدار عناصر ماتریس غیرخطی سفتی  $K(\Sigma, t)$  بر پایه مقادیر انتهای گام زمانی یا مرحله تکرار قبلی.  
 ۷- به‌هنگام سازی عبارات ویسکوالاستیک طرفین رابطه (۴۶).  
 ۸- حل دستگاه معادلات حاصله، به روش انتگرال‌گیری عددی Newmark [۳۱ و ۳۲]. در این گام، مقادیر پارامترهای جابجایی  $U_{n(k-1)+l}, V_{n(k-1)+l}, W_{n(k-1)+l}$  از رابطه (۲۱)، در نقاط گره زیر لایه‌های مختلف، به همراه مشتقات زمانی اول و دوم (سرعت‌ها و شتاب‌ها) به‌دست خواهند آمد.  
 ۹- بررسی همگرایی پاسخ‌های هر مرحله زمانی، از طریق مقایسه با نتایج مرحله تکرار قبلی. برای مثال، شرط همگرایی زیر می‌تواند اختیار گردد:  
 که در آن،  $\theta$  یکی از پارامترهای جابجایی، مثلاً  $U_{n(k-1)+l}$  است و  $S$  شمارنده مرحله تکرار، در هر فاصله زمانی است.  $\epsilon$  عدد بسیار کوچکی مانند ۰/۰۰۰۱ است.  
 ۱۰- در صورت عدم همگرایی، مراحل از گام ششم و در غیر این صورت، ذخیره مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب به عنوان مقادیر اولیه گام زمانی بعدی.  
 ۱۱- تکرار گام‌های ۶ تا ۱۰ تا رسیدن به زمان نهایی حل عددی.

۴- تعیین شتاب اولیه اجزاء، از رابطه (۴۷).  
 ۵- تجزیه دامنه زمانی حل به گام‌های بسیار ریز (کوچکتر از یک دهم پرپود طبیعی اول ورق).  
 ۶- تعیین مقدار عناصر ماتریس غیرخطی سفتی  $K(\Sigma, t)$  بر پایه مقادیر انتهای گام زمانی یا مرحله تکرار قبلی.  
 ۷- به‌هنگام سازی عبارات ویسکوالاستیک طرفین رابطه (۴۶).  
 ۸- حل دستگاه معادلات حاصله، به روش انتگرال‌گیری عددی Newmark [۳۱ و ۳۲]. در این گام، مقادیر پارامترهای جابجایی  $U_{n(k-1)+l}, V_{n(k-1)+l}, W_{n(k-1)+l}$  از رابطه (۲۱)، در نقاط گره زیر لایه‌های مختلف، به همراه مشتقات زمانی اول و دوم (سرعت‌ها و شتاب‌ها) به‌دست خواهند آمد.  
 ۹- بررسی همگرایی پاسخ‌های هر مرحله زمانی، از طریق مقایسه با نتایج مرحله تکرار قبلی. برای مثال، شرط همگرایی زیر می‌تواند اختیار گردد:  
 که در آن،  $\theta$  یکی از پارامترهای جابجایی، مثلاً  $U_{n(k-1)+l}$  است و  $S$  شمارنده مرحله تکرار، در هر فاصله زمانی است.  $\epsilon$  عدد بسیار کوچکی مانند ۰/۰۰۰۱ است.  
 ۱۰- در صورت عدم همگرایی، مراحل از گام ششم و در غیر این صورت، ذخیره مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب به عنوان مقادیر اولیه گام زمانی بعدی.  
 ۱۱- تکرار گام‌های ۶ تا ۱۰ تا رسیدن به زمان نهایی حل عددی.

$$\left\| \vartheta_j^{(s+1)} - \vartheta_j^{(s)} \right\| / \left\| \vartheta_j^{(s+1)} \right\| \cong \epsilon \quad (48)$$

### ۶- نتایج و بحث نتایج

در این بخش، ابتدا نتایج حاصل از فرمول‌بندی کنونی به منظور صحه‌گذاری، با نتایج موجود در مراجع دیگر مقایسه خواهند شد. در گام دوم، نتایج جدیدی ارائه خواهند شد. نتایج جدید یاد شده، مبتنی بر بررسی اثر پارامترهای مختلف بر تاریخچه پاسخ‌های ضربه ورق می‌باشند.

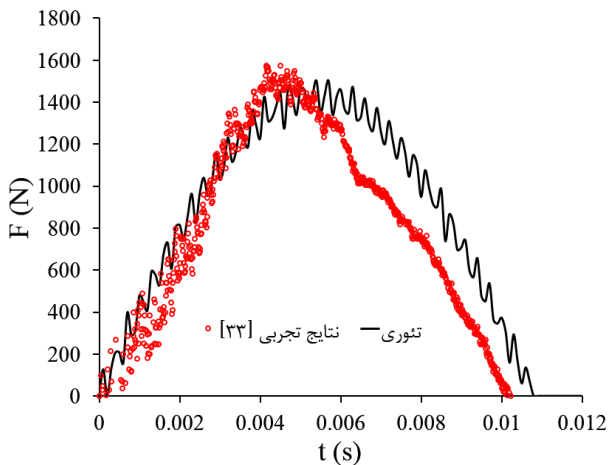
#### ۶-۱- صحه‌گذاری نتایج

برای بررسی دقت تئوری لایه‌ای و فرمول‌بندی انرژی ارائه شده در مقاله کنونی، ابتدا پاسخ ضربه کم‌سرعت به‌دست‌آمده با فرمول‌بندی کنونی، با نتایج تجربی به‌دست‌آمده توسط نیکنامی و شرعیات [۳۳] مقایسه شده است. ورق شیشه/اپوکسی مورد آزمایش، مربعی بوده و دارای پنج لایه با ضخامت برابر و ضخامت کل ۲ میلی‌متر می‌باشد. الیاف شیشه از نوع IRGWP200 و رزین از نوع اپوکسی CY219 و نسبت

$$E_1 = 38.2GPa, \quad E_2 = E_3 = 9.56GPa, \quad \rho = 1540kgm^{-3}$$

$$G_{12} = G_{13} = 3.44GPa, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.2850$$

تاریخچه زمانی نیروی تماس پیش‌بینی شده توسط پژوهش کنونی، در شکل ۳، با نتایج تجربی مرجع [۳۳] مقایسه شده است. همان‌گونه که از شکل ۳ پیداست، نتایج فرمول‌بندی کنونی، تطابق خوبی با نتایج تجربی نشان می‌دهند.



شکل (۳): مقایسه تاریخچه زمانی نیروی تماس پیش‌بینی شده توسط پژوهش کنونی با نتایج تجربی مرجع [۳۳]

صحه‌گذاری نتایج تحلیل دینامیکی ورق ویسکوالاستیک بر پایه مقایسه با نتایج تسای<sup>۱</sup> و وانگ<sup>۲</sup> [۳۴] انجام پذیرفته است. در این زمینه، یک ورق مستطیلی ویسکوالاستیک همسانگرد با ابعاد (۱۰×۱۰) m و ضخامت ۱ m دارای تکیه‌گاههای ساده با مشخصات زیر، تحت بار یکنواخت ناگهانی با تغییرات زمانی پله به شدت  $p=10N/m^2$  قرار داده شده است:

$$E_1 = 9.8 \times 10^7 N/m^2, \quad E_2 = 2.45 \times 10^7 N/m^2,$$

$$\rho = 2200kg/m^3, \quad \nu = 0.35,$$

$$\eta = 2.744 \times 10^8 Ns/m^2$$

تاریخچه‌های زمانی خیز مرکز ورق، برای ورق ویسکوالاستیک در شکل ۴ مقایسه شده‌اند. در پژوهش کنونی،  $n=m=1$  در نظر گرفته شده است.

1- Tsai  
 2- Wang

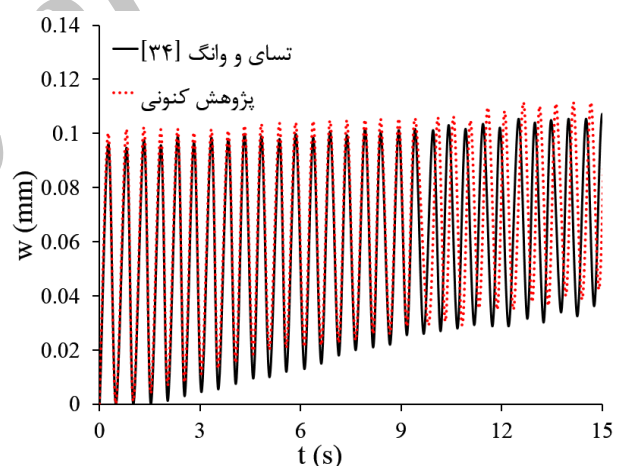
در تحلیل‌های پارامتری، ممکن است مقدار برخی از این ویژگی‌ها، برای تحلیل حساسیت به پارامتر، تغییر داده شود. ورق روی تکیه‌گاه‌های الاستیک مستقر است. در بخش‌های بعد، ابتدا به مقایسه تاریخچه‌های زمانی نیروی تماس و خیز عرضی و نفوذ دو ورق کامپوزیتی و کامپوزیت یسکوالاستیک پرداخته و سپس به بررسی تأثیر مواردی از قبیل سرعت ضربه‌زن، ضریب میرایی و اثرات نسبت سفتی بر پاسخ دینامیکی ورق تحت ضربه پرداخته شده است.

### ۶-۳- بررسی اثر ویسکوالاستیسیت بر پاسخ ضربه

در این بخش، پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی چندلایه گرافیت/اپوکسی ویسکوالاستیک با خصوصیات آورده شده در بخش ۲-۶ در اثر برخورد ضربه‌زنی کروی از جنس فولاد ( $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ) و شعاع ۶ میلی‌متر با سرعت اولیه ۳۰ متر بر ثانیه، مورد بررسی قرار گرفته است. لایه چینی ورق کامپوزیت مشابه ورق ویسکوالاستیک است که متقارن و متعامد بوده و به صورت  $[0/90/0/90/0]$  می‌باشد. در این حالت، انرژی جنبشی ضربه زن،  $3/2$  ژول است. تاریخچه زمانی نیروی تماسی، میزان نفوذ و خیز ورق در نقطه وارد آمدن ضربه از ورق، به ترتیب، در شکل‌های ۵ تا ۷ نشان داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نیروی تماس و خیز در نقطه ضربه کاملاً غیر هم‌فاز بوده و این ضربه، ضربه‌ای موج-کنترل شده (ضربه جرم کوچک) است. ضمناً به علت کم بودن جرم ضربه‌زن، خیز ورق پس از پایان یافتن زمان ضربه و به صفر رسیدن نیروی تماسی همچنان ادامه داشته و مقدار بیشینه آن پس از پایان یافتن زمان ضربه حاصل می‌گردد. با مقایسه نتایج ارائه شده در شکل‌های ۵ تا ۷ می‌توان استنباط نمود که به علت افزایش سختی کلی و موضعی ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک نسبت به ورق کامپوزیتی، به دلیل موازی بودن المان‌های الاستیک و ویسکوالاستیک از مدل جامد ویسکوالاستیک نشان داده شده در شکل ۲، مقادیر بیشینه نفوذ و خیز عرضی ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک نسبت به ورق کامپوزیتی کاهش داشته و پیرو آن، نیروی تماس بیشینه در ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک نسبت به ورق کامپوزیتی افزایش یافته است.

مقایسه نتایج کنونی با نتایج مرجع [۳۴] در شکل ۴، بیانگر سازگاری نتایج فرمول‌بندی و روش حل عددی کنونی با نتایج مرجع [۳۴] می‌باشد. با وجود این که بار دینامیکی وارده دارای تغییرات پله‌ای با زمان است، پاسخ گذرای پدید آمده، دارای نوسانات سینوسی است. در ورق ویسکوالاستیک، به دلیل میرایی ساختاری حاصله، نوسانات به تدریج با زمان میرا می‌شوند ولی چون، ورودی بار، اجباری است، بخش به‌جای‌مانده از انرژی بار که همچنان به ورق انتقال می‌یابد، صرف ایجاد خیز استاتیکی می‌شود (مقدار میانگین خیز با زمان افزایش یافته است) تا سرانجام، پس از میرا شدن ارتعاش، خیز کاملاً استاتیکی حاصل گردد. بدیهی است که در لحظه ابتدایی، به دلیل صلب شدن میراساز در مدل جامد سه پارامتری، خیز ورق کاهش یافته و پس از سپری شدن زمان، این صلیبیت کاهش یافته است. به همین دلیل، خیز ورق مرتباً با زمان افزایش می‌یابد.



شکل (۴): مقایسه نتایج مرجع [۳۴] با نتایج کنونی برای تاریخچه‌های زمانی خیز ورق ویسکوالاستیک

### ۶-۲- مشخصات پایه ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک

#### مورد بررسی

از این بخش، نتایج حل عددی فرمول‌بندی المان محدود ارائه شده، برای یافتن پاسخ ضربه کم‌سرعت ورق کامپوزیت گرافیت/اپوکسی ویسکوالاستیک ۱۰ لایه با آرایش  $[0/90/0/90/0]$  با خصوصیات پایه زیر بررسی خواهند شد:

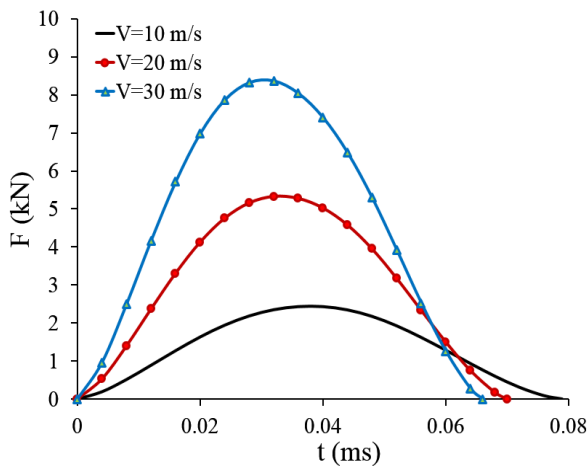
$$a = b = 0.1m, \quad h = 5mm, \quad \alpha = 0.2,$$

$$E_1 / E_2 = 0.4, \quad \rho = 2200 \text{ kg/m}^3,$$

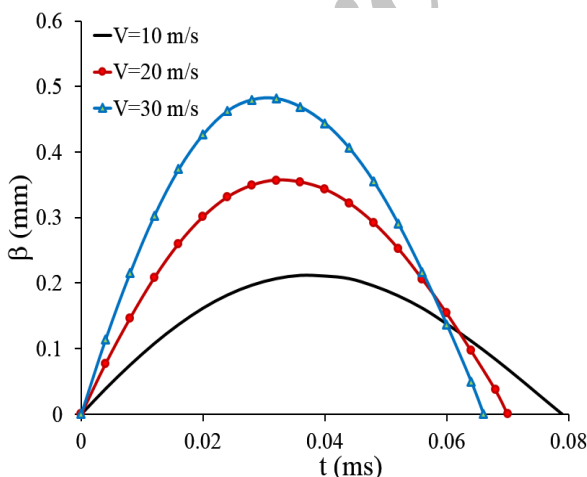
$$\nu = 0.35, \quad \eta = 2.744 \times 10^8 \text{ Ns/m}^2$$

30 m/s. نتایج حاصله برای تاریخچه نیروی تماس، مقدار نفوذ و خیز ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک، به ترتیب، در شکل‌های ۸ تا ۱۰ نشان داده شده‌اند.

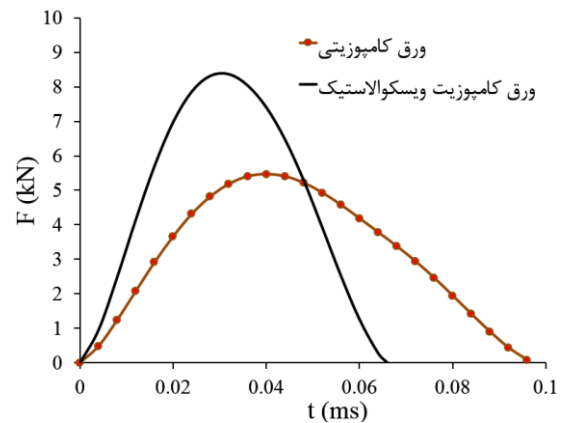
مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت اولیه ضربه‌زن، مقادیر بیشینه نیروی تماسی، میزان نفوذ و خیز افزایش می‌یابند ولی این افزایش سرعت اولیه، سبب کاهش مدت زمان ضربه می‌گردد. در حقیقت، افزایش سرعت ضربه‌زن موجب می‌شود که ورق زوتر به خیز بیشینه برسد و لذا برگشت ورق و جدایش ضربه‌زن از ورق، در مدت زمانی کوتاه‌تر و در سرعتی بالاتر صورت می‌پذیرد.



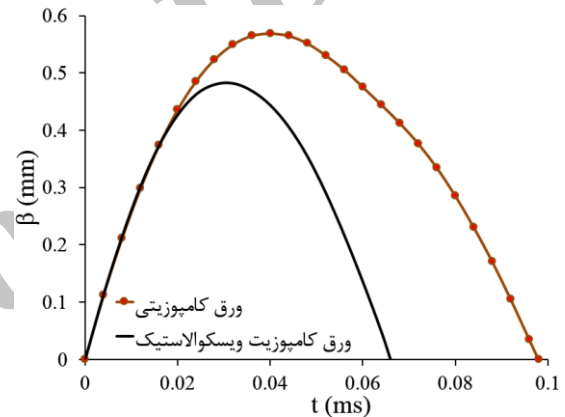
شکل (۸): اثرات سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه نیروی تماسی ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک



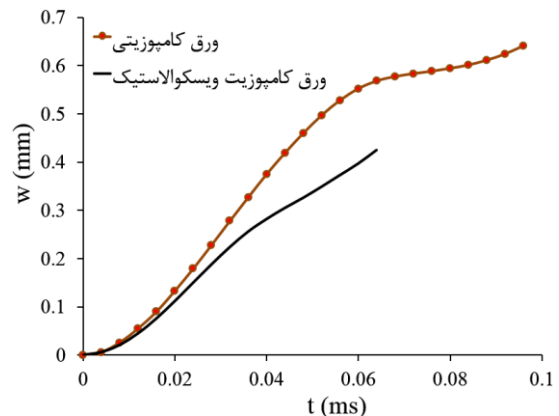
شکل (۹): اثرات سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه میزان نفوذ در ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک



شکل (۵): بررسی اثر رفتار ویسکوالاستیک مواد بر تاریخچه نیروی ضربه ورق کامپوزیتی



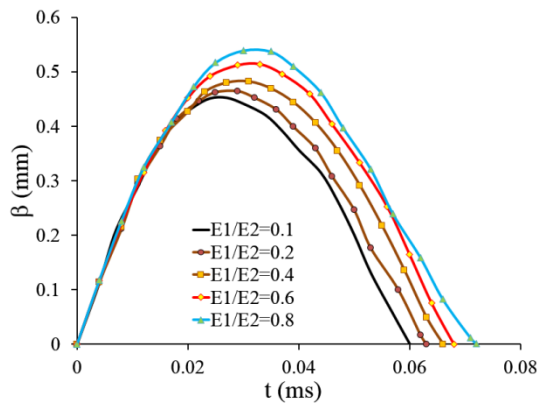
شکل (۶): بررسی اثر رفتار ویسکوالاستیک مواد بر تاریخچه میزان نفوذ ضربه‌زن در ورق کامپوزیتی



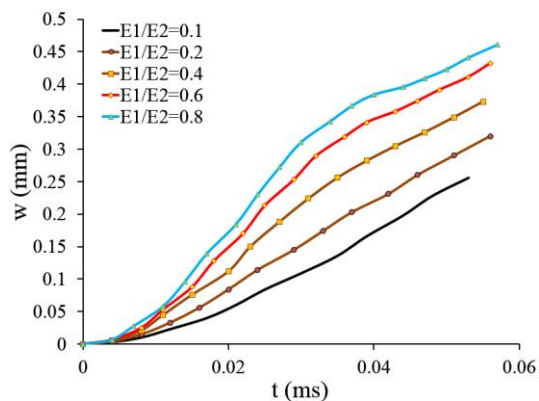
شکل (۷): بررسی اثر رفتار ویسکوالاستیک مواد بر تاریخچه خیز ورق کامپوزیتی در محل ضربه

#### ۴-۶- اثر سرعت اولیه ضربه‌زن

برای بررسی اثر سرعت ضربه‌زن بر پاسخ‌های ورق، سه سرعت اولیه متفاوت برای ضربه‌زن در نظر گرفته شده‌اند:  $V=10, 20,$



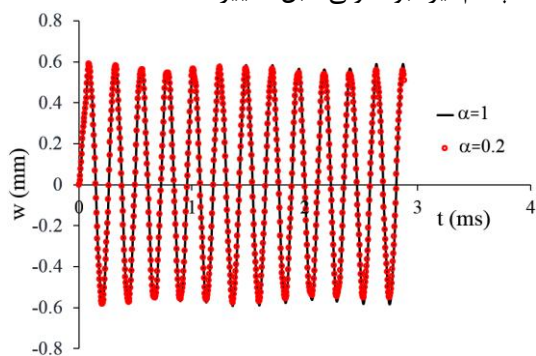
شکل (۱۲): اثر نسبت مدول‌ها بر تاریخچه میزان نفوذ در ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک



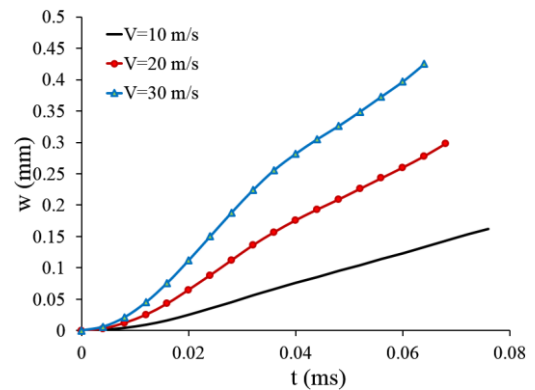
شکل (۱۳): اثر نسبت مدول‌ها بر تاریخچه خیز ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک

#### ۶-۶- بررسی اثر ضریب میرایی بر پاسخ گذرا

ارتعاش ورق، پس از ضربه خاتمه نیافته و ادامه خواهد داشت. برای بررسی میزان تأثیر ضریب میرایی ( $\eta$ )، نتایج دو مقدار متناظر با پارامتر متناسب با عکس این ضریب ( $\alpha = 0.2, 1$ )، بر ارتعاش ورق در زمان‌های پس از ضربه، در شکل ۱۴ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج شکل ۱۴ آشکار می‌سازند که اختلاف نتایج ضرایب میرایی مختلف، در زمان‌های بسیار کوتاه، چشم‌گیر نبوده ولی قابل تمییز است.



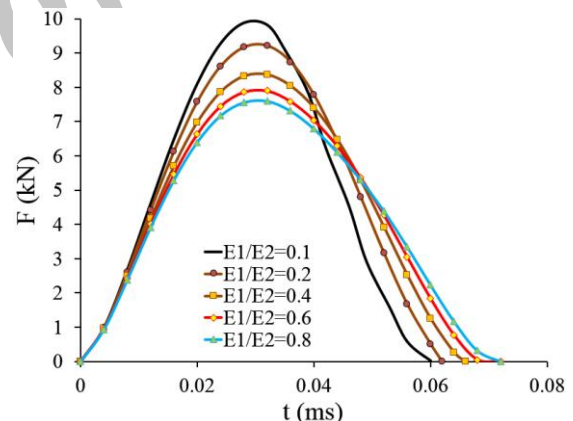
شکل (۱۴): مقایسه اثر ضریب  $\alpha$  بر تغییرات خیز ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک در زمان کوتاهی پس از ضربه



شکل (۱۰): اثرات سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه خیز محل ورود ضربه ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک

#### ۶-۵- اثر نسبت ضرایب سفتی مدل ویسکوالاستیک

اثرات نسبت مدول‌های مدل ویسکوالاستیک نشان داده شده در شکل ۲ (اثر  $E_1 / E_2$ )، بر پاسخ‌های ضربه ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک، در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳، برای پنج نسبت  $E_1 / E_2 = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  مشخص گردیده است.



شکل (۱۱): اثر نسبت مدول‌ها بر تاریخچه نیروی تماسی ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک

برای مدول الاستیک مشخص  $E_1$ ، افزایش نسبت  $E_1 / E_2$  بدان مفهوم است که اثرات میرایی ویسکوالاستیک بر پاسخ‌ها (و تنش پدید آمده) کاهش یافته و رفتار ورق ویسکوالاستیک، در حد به ورق الاستیک نزدیک می‌گردد. زیرا افزایش این نسبت در مقدار ثابت  $E_1$ ، به منزله کاهش  $E_2$  و حمل عمده بار توسط شاخه سخت‌تر الاستیک است. لذا اگر نسبت  $E_1 / E_2$  به سمت بی‌نهایت میل کند، اثرات میرایی به‌طور ضعیف درگیر شده و در حد، ورق ویسکوالاستیک به ورق الاستیک تبدیل می‌گردد. به همین دلیل در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳، با افزایش نسبت  $E_1 / E_2$ ، مقادیر بیشینه نیروی تماس کاهش یافته ولی مقدار نفوذ، زمان ضربه و مقدار بیشینه خیز افزایش یافته است.

۳- در برخی حالت‌ها، روند تغییرات (کاهش یا افزایش) نیروی تماس و فروروی مشابه است (مانند، روند مشاهده شده در اثر افزایش سرعت اولیه ضربه‌زن) و در برخی حالت‌ها، متفاوت است (برای مثال، نتایج ذکر شده در بخش‌های بررسی اثر ویسکو الاستیسته و نسبت مدول‌ها در مدل ویسکوالاستیسته).

۴- برخلاف پیش‌بینی‌های مدل‌های گسسته، زمان‌های متناظر با خیز بیشینه و نیروی تماس یا فروروی بیشینه، در حالت کلی متفاوتند. به تعبیر دیگر، در مدل واقعی، بر خلاف مدل گسسته، زمان‌های روی دادن بیشینه خیز و بیشینه فروروی، حتی برای ورق بدون میرایی، متفاوتند.

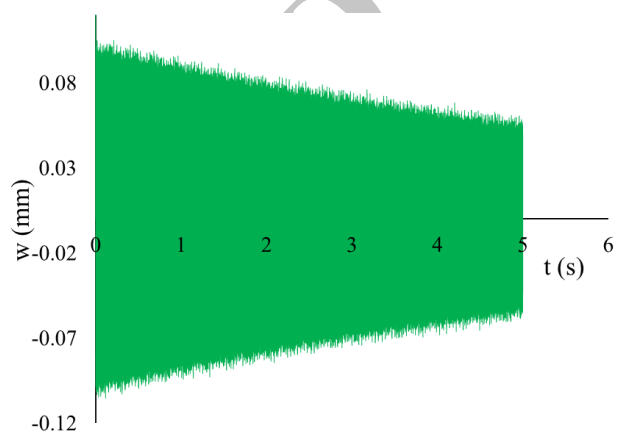
۵- با کاهش ضریب میرایی، زمان واهلش (که برخی پژوهش‌گران، آن را زمان آرامش یا آسایش نیز نامیده‌اند) افزایش یافته و ورق دیرتر به حالت پایا می‌رسد در حالیکه با افزایش میزان میرایی، ورق سخت‌تر شده و زودتر به حالت پایا می‌رسد.

۶- برای داده‌های کنونی، با افزایش نسبت ضرایب سفتی مدل ویسکوالاستیک، اثرات میرایی کاهش یافته و در حد، ورق ویسکوالاستیک به ورق الاستیک تبدیل می‌گردد.

#### ۸- مراجع

- Gong, S. and Lam, K. "Effects of Structural Damping and Stiffness on Impact Response of Layered Structure", AIAA J., Vol. 138, No. 9, pp. 1730-1735, 2000.
- Abrate, S. "Impact Engineering of Composite Structures", Springer, Wien, 2011.
- Cederbaum, G. and Aboudi, J. "Dynamic Response of Viscoelastic Laminated Plates", J. Sound Vibr., Vol.133, No. 2, pp. 225-238, 1989.
- Chen, T. "The hybrid Laplace Transform Finite Element Method Applied to The Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 38, No. 3, pp. 509-522, 1995.
- Iiyasov, M. and Aköz, A. "The Vibration and Dynamic Stability of Viscoelastic Plates", Int. J. Eng. Sci., Vol. 38, No. 6, pp. 695-714, 2000.
- Paulino, G. and Jin, Z. "Correspondence Principle in Viscoelastic Functionally Graded Materials",

در شکل ۱۵، تغییرات خیز عرضی ورق ویسکوالاستیک تا ۵ ثانیه پس از ضربه، برای  $\alpha=1$  نشان داده شده است. با توجه به نسبت بزرگی زمان یاد شده نسبت به زمان یک نوسان (زمان ضربه، متناظر با نیم سیکل اول نوسان است)، اثر ضریب میرایی بسیار مشهود می‌باشد. بر پایه نتایج شکل‌های ۱۴ و ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش ضریب میرایی (افزایش  $\alpha$ )، زمان واهلش افزایش یافته و ورق دیرتر پایدار می‌شود در حالیکه با افزایش میزان میرایی (کاهش  $\alpha$ )، ورق سخت‌تر شده و زودتر به حالت پایا می‌رسد.



شکل (۱۵): اثر ضریب میرایی بر تاریخچه خیز ورق، تا ۵ ثانیه پس از ضربه ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک

#### ۷- نتیجه‌گیری

در پژوهش کنونی، اثر پارامترهای ساختاری و سینماتیکی بر پاسخ‌های ضربه و رفتار دینامیکی گذرای ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک تحت بار ضربه‌ای با استفاده از مدل ویسکوالاستیک سلسله مراتبی، تئوری ورق لایه‌ای و فرم جدیدی از عبارات انرژی، مورد بررسی قرار گرفت. در مسیر پژوهش، علاوه بر تصحیح قانون تماس هرتز برای در نظر گرفتن اثر سفتی لایه‌های زیرین بر سختی سطح تماس، الگوریتمی عددی برای حل دستگاه معادلات اجزای محدود غیرخطی پدید آمده، ارائه شده است. برخی از نتایج کاربردی به‌دست آمده، عبارتند از:

- ۱- صلبیت ورق ویسکوالاستیک، در زمان‌های اولیه ضربه بزرگتر است.
- ۲- با وجود آنکه نیروی تماس در ورق ویسکوالاستیک بزرگتر است، بر خلاف تصور، مقادیر میزان فروروی و زمان ضربه در این ورق کمترند.

- on Steel Curved Panels”, *Modares Mech. Eng. J.*, Vol. 16, No. 4, pp. 281-288, 2016. (in Persian)
21. Khorshidi, K. “Analytical Nonlinear Elasto-Plastic Impact Response of a Moderately Thick Rectangular Plate”, *Aero. Mech. J.*, Vol. 6, No. 4, pp. 25-42, 2011. (in Persian)
  22. Dariushi, S. and Sadighi, M. “Nonlinear High Order Theory for Analysis of Sandwich Beam with Flexible Core Under Low Velocity Impact”, *Modares Mech. Eng. J.*, Vol. 15, No. 9, pp. 381-388, 2015. (In Persian)
  23. Ghajar, R., Shariyat, M. and Hosseini, S.H. “Nonlinear Numerical Elasticity Analysis of Eccentric Low-Velocity Impact of a Rectangular Sandwich Plate with Composite Face Sheets Subjected to Biaxial Preloads”, *J. Solid Fluid Mech.*, Vol. 5, No. 1, pp. 87-99, 2015. (in Persian)
  24. Hosseini, S.H., Shariyat, M. and Ghajar, R. “Numerical Simulation of Low-Velocity Impact of Rectangular Composite Plates with Embedded SMA Strips, Considering the Instantaneous Local Phase Changes”, *J. Energ. Mater.*, Vol. 10, No. 2, pp. 53-63, 2015. (in Persian)
  25. Shariyat, M., Samaee, S. and Moradi, M. “Nonlinear Vibration Analysis of Composite Plates with SMA Wires, Considering Instantaneous Variations of the Martensite Volume Fraction”, *J. Solid Mech. Eng.*, Vol. 5, No. 1, pp. 57-70, 2012. (in Persian)
  26. Malekzade Fard, K., Payganeh, Gh. and Rashed Saghavaz, F. “Free Vibration and Low Velocity Impact Analysis of Sandwich Plates with Smart Flexible Cores”, *Modares Mech. Eng. J.*, Vol. 14, No. 13, pp. 191-200, 2015. (In Persian)
  27. Payganeh, Gh., Malekzade Fard, K. and Rashed Saghavaz, F. “Effects of Important Geometrical and Physical Parameters on Free Vibration and Impact Force for Sandwich Plates with Smart Flexible Cores”, *Modares Mech. Eng. J.*, Vol. 15, No. 1, pp. 21-30, 2015. (in Persian)
  28. Lakes, R. “Viscoelastic Materials”, Cambridge University Press, 2009.
  29. Yang, S. and Sun, C. “Indentation Law for Composite Laminates”, *ASTM 6<sup>th</sup> conference*, paper No. STP787, 1982.
  30. Shariyat, M. “Thermal Buckling Analysis of Rectangular Composite Plates with Temperature-Dependent Properties Based on a Layerwise Theory”, *Thin-Wall. Struct.*, Vol. 45, No. 4, pp. 439-452, 2007.
  31. Shariyat, M. and Hosseini, S.H. “Eccentric Impact Analysis of Pre-Stressed Composite Sandwich Plates with Viscoelastic Cores: A Novel Global-Local Theory and a Refined Contact Law”, *Compos. Struct.*, Vol. 117, pp. 333-345, 2014.
  32. Shariyat, M. and Hosseini, S.H. “Accurate Eccentric Impact Analysis of The Preloaded SMA ASME J. Appl. Mech., Vol. 68, No. 1, pp. 129-132, 2001.
  7. Paulino, G. and Jin, Z. “Viscoelastic Functionally Graded Materials Subjected to Antiplane Shear Fracture”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 68, No. 2, pp. 284-293, 2001.
  8. Abdoun, F. and Azrar, L. “Forced Harmonic Response of Viscoelastic Structures by an Asymptotic Numerical Method”, *Comput. Struct.*, Vol. 87, No. 1-2, pp. 91-100, 2009.
  9. Assie, A. and, Eltaher, M. “Behavior of a Viscoelastic Composite Plates Under Transient Load”, *J. Mech. Sci. Tech.*, Vol. 25, No. 5, pp. 1129-1140, 2011.
  10. Assie, A. and Eltaher, M. “The Response of Viscoelastic-Frictionless Bodies Under Normal Impact”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 52, No. 3, pp. 446-454, 2010.
  11. Assie, A., Eltaher, M. and Mahmoud F. “Modeling of Viscoelastic Contact-Impact Problems”, *Appl. Math. Model.*, Vol. 34, No. 9, pp. 2336-2352, 2010.
  12. Altenbachand, H. and Ermejev, V. “Analysis of The Viscoelastic Behavior of Plates Made of Functionally Graded Materials”, *ZAMM J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 88, No. 5, pp. 332- 341, 2008.
  13. Amabili, M. “Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Rectangular Plates”, *J. Sound Vibr.*, Vol. 362, pp. 142-156, 2016.
  14. Nosier, A., Kapania, R. and Reddy, J.N. “Low-Velocity Impact of Laminated Composites Using a Layerwise Theory”, *Comput. Mech.*, Vol. 13, No. 5, pp. 360-379, 1994.
  15. Christoforou, A.P., Elsharkawy, A.A. and Guedouar, L.H. “An Inverse Solution for Low-Velocity Impact in Composite Plates”, *Comput. Struct.*, Vol. 79, No. 29, pp. 2607-2619, 2001.
  16. Christoforu, P.A. and Yigit, A.S. “Characterization of Impact in Composite Plates”, *Compos. Struct.*, Vol. 43, No. 1, pp. 15-24, 1998.
  17. Turner, J. “Contact on a Transversely Isotropic Half-Space, or Between Two Transversely Isotropic Bodies”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 16, No. 5, pp. 409-419, 1980.
  18. Swanson, S. “Contact Deformation and Stress in Orthotropic Plates”, *Compos. Struct.*, Vol. 36, No. 10, pp. 1421-1429, 2005.
  19. Shariyat, M. and Farzan Nasab, F. “Low-Velocity Impact Analysis of The Hierarchical Viscoelastic FGM Plates, Using an Explicit Shear-Bending Decomposition Theory and The New DQ Method”, *Compos. Struct.*, Vol. 113, pp. 63-73, 2014.
  20. Bidi, A., Liaghat, Gh. And Rahimi, Gh. “Experimental and Numerical Analysis of Impact

- Composite Plates, Based on a Novel Mixed-Order Hyperbolic Global-Local Theory”, *Compos. Struct.*, Vol. 124, pp. 140-151, 2015.
33. Niknami, A., Shariyat, M. “Coupled Thermoelasticity Impact Response Analysis of Composite Plates with SMA Wires in Thermal Environments”, *Iranian J. Mech. Eng.*, Vol. 16, No. 1, pp. 78-101, 2015.
34. Wang, Y. and Tsai, T. “Static and Dynamic Analysis of a Viscoelastic Plate by The Finite Element Method”, *J. Appl. Acoust.*, Vol. 25, No. 2, pp. 77-94, 1988.

Archive of SID

Archive of SID