

# تحلیل انتقال حرارت در محیط متخلخل با روش اغتشاشات جزئی با فرض مقادیر هدایت حرارتی کم

محمد رضا شاه نظری<sup>۱</sup>، زهرا احمدی<sup>۲</sup> و فاطمه نیکان<sup>۳</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۶/۰۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۸/۱۰)

## چکیده

بررسی انتقال حرارت در محیط متخلخل دارای کاربردهای فراوانی در صنعت می‌باشد. در این مقاله از تبدیلات لاپلاس و روش اغتشاشات منفرد برای حل انتقال حرارت یک بعدی در محیط متخلخل نیمه بی‌نهایت، با فرض ضریب هدایت حرارتی کوچک، استفاده شده است. مشابه حل ویلاتورو و همکاران [۱] دو ناحیه حل خارجی و داخلی در نظر گرفته شده است. به منظور تطابق این دو ناحیه یک روش تطابق جدید پیشنهاد شده است. همچنین شرط مرزی نوع سوم در دیواره به شرط مرزی نوع اول تبدیل و سپس در مساله اعمال شده است. مقایسه این حل با حلی که از کاربرد مستقیم شرط مرزی نوع سوم به دست آمده است، دقت خوب این روش را نشان می‌دهد جز در نزدیک دیواره که اختلاف کوچکی بین این دو پاسخ وجود دارد. این ایده می‌تواند به عنوان یک روش مفید در ساده‌سازی تحلیل مسائل مورد استفاده قرار گیرد. البته در مواردی که دقت خوب پاسخ در ناحیه‌ی تغییر شرط مرزی از نوع سوم به اول مورد توجه باشد؛ به عبارت دیگر پیش‌بینی شیب و یا تغییرات شیب با دقت بسیار بالا مد نظر باشد، این روش ممکن است منجر به اخذ نتایج تقریبی گردد. هر چند کاربرد این روش به ویژه در تحلیل مسائل مقدار مرزی، در برآورد مقادیر ویژه توابع خاص می‌تواند بسیار پر اهمیت و کاربردی باشد.

**واژه‌های کلیدی:** انتقال حرارت، اغتشاشات منفرد، تبدیل لاپلاس، ضریب هدایت حرارتی

## Perturbation Analysis Of Heat Transfer in Porous Media with Small Thermal Conductivity

M.R. Shahnazari, Z. Ahmadi, and F. Nikan

Mechanical Engineering Department

K. N. Tossi University of Technology

(Received: 28/August/2014 ; Accepted: 01/Novamber/2015)

### ABSTRACT

The study of heat transfer in porous media has many applications in industry. In this work, heat transfer between an inert gas and a semi infinite porous media based on Singular Perturbation method and with using of Laplace Transform, has been studied. To solve this problem with this approach, the thermal conductivity is assumed to be small. Also, the solution is expressed in both inner and outer layer. For matching these two layers a matching method is suggested. This approach shows a good accuracy for small values of parameter, small thermal conductivity. One time the problem is solved by using the third kind boundary condition on the wall and one time this boundary condition is changed into first kind and then has been considered in problem. With comparing between this solution and the solution of using boundary condition of third kind shows the good accuracy of this approach, except near the wall that there occurred small differences between these two solutions. This idea can be used as a useful method in simplifying the analysis of the issues. But in cases that the good accuracy of solution or slop changes with high precision is important, this procedure may be caused approximate results.

**Keywords:** Heat transfer, Singular perturbation, Laplace Transform, Thermal conductivity coefficient

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): shahnazari@kntu.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: z.ahmadi\_420@yahoo.com

۳- کارشناس ارشد: fateme.nikan93@gmail.com

## ۱- مقدمه

به دلیل کاربردهای مهم محیط متخلخل تحقیقات علمی گسترده‌ای در پدیده انتقال در بسترهای متخلخل انجام شده است. بستر متخلخل اغلب برای ذخیره انرژی گرمایی و در صنایع شیمیایی استفاده می‌شود. توسعه مدل‌های انتقال در محیط متخلخل به دلیل کاربردهای متعدد آن در زمین‌شناسی، دانش محیطی، راکتورهای شیمیایی، مدل‌سازی مخلوط سیال، احتراق، کاربردهای زیستی و استخراج نفت می‌باشد. همچنین بررسی انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل کاربردهای متعددی در صنایع نفت، گاز و بیومکانیک و... دارد.

مانند دیگر شاخه‌های مهندسی، تحلیل انتقال حرارت در طول دو دهه اخیر روی حل‌های عددی توسعه پیدا کرده است. اگرچه استفاده از روش‌های تحلیلی تقریبی هم برای توسعه و یافتن حل‌های مفیدتر برای مسائل گوناگون ادامه پیدا کرده است [۲].

تحقیقات متعددی روی جابجایی اجباری و آزاد در جریان‌های لایه مرزی صورت پذیرفته است. این موضوع به دلیل کاربرد در زمینه‌های استخراج انرژی زمین گرمایی، مدل‌سازی مخزن روغن، صنایع غذایی، جوش و ریخته‌گری در فرآیندهای ساخت دارای اهمیت است [۳].

ناسلت<sup>۱</sup> [۴-۵] مساله انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی، زمانی که از هدایت حرارت محوری صرف‌نظر می‌شود، را حل کرد. همان حل توسط آنزلیوس<sup>۲</sup> [۶]، اسپومن<sup>۳</sup> [۷] و فرنس<sup>۴</sup> [۸] برای گرمایش یا سرمایش محیط متخلخل یک‌بعدی با عبور سیال گرم یا سرد توسعه پیدا کرد. بیشتر مطالعات تحلیلی پدیده‌ها روی مدل اسپومن، پیشنهاد شده در مرجع [۶]، تمرکز دارد. این مدل از جمله هدایت حرارتی در معادلات انرژی فازهای سیال و جامد صرف‌نظر می‌کند. کوزنتساو<sup>۵</sup> [۹] یک حل تحلیلی برای گرمایش بستر متخلخل ذخیره‌ی گرمای مستطیلی، با شرط مرزی دما ثابت در دیواره توسط یک جریان با شرط عدم تعادل حرارتی از سیالی غیر قابل تراکم، را ارائه داد. چنگ<sup>۶</sup> [۱۰] روی جابجایی مختلط، نزدیک سطوح

اریب محدودشده در یک محیط متخلخل، با استفاده از تقریب لایه مرزی تحقیق کرد. حل‌های شبیه به این، برای موقعیتی که سرعت جریان آزاد و توزیع دمای سطح طبق تابع توانی از فاصله مکانی تغییر کند، به‌دست آمده است.

مرکین و پاپ<sup>۷</sup> [۱۱] معادلات تشابهی را برای جابجایی مختلط جریان لایه مرزی در راستای یک صفحه مسطح نیمه بی‌نهایت عمودی، با شرایطی که سرعت جریان آزاد یکنواخت و دمای دیواره نسبتی معکوس با فاصله در راستای صفحه دارد، به دست آوردند. الی و همکاران<sup>۸</sup> [۱۲] یک جریان عمودی سیال، در یک محیط متخلخل اشباع در دمای ثابت،  $T_\infty$  عبوری از یک فین عمودی که به صورت یک صفحه نیمه بی‌نهایت عمودی و ثابت مدل شده است را مورد بررسی قرار دادند.

جاوری<sup>۹</sup> [۱۳] در مورد تاثیر شرط مرزی نوع سوم دما روی انتقال حرارت جابجایی اجباری آرام در ناحیه ورودی گرمایی یک کانال مستطیلی، با حل معادله انرژی با استفاده از روش گلرکین کانتروویچ<sup>۱۰</sup>، تحقیق کرد. در مساله او پروفیل سرعت یکنواخت و کاملاً توسعه یافته در نظر گرفته شده است. وی با ثابت فرض کردن ویژگی‌های سیال و صرف نظر از انتقال حرارت هدایت محوری، به این نتیجه دست یافت که عدد بایو تاثیر قابل توجهی روی عدد ناسلت محلی دارد.

پاسخ روش‌های تحلیلی دقیق در خیلی از موارد پذیرفته شده نیستند؛ بنابراین، هر دو روش‌های پرتوربیشن<sup>۱۱</sup> و عددی مورد نیازند؛ که دلیل اهمیت روش پرتوربیشن پاسخ‌های بسته است.

پدروسو و دوموتو<sup>۱۲</sup> [۱۴] و هانگ و شیه<sup>۱۳</sup> [۱۵] حل‌های پرتوربیشن برای جامدسازی صفحه‌ای یک سیال اشباع با جابجایی در دیواره را یافتند.

سری‌های فوریه تنها روش حل پرتوربیشن در نظر گرفته شده بود که توسط کوزنتساو [۹] برای حل معادله انرژی دو بعدی در بسترهای متخلخل، مطرح شد. ویلاتورو و همکاران [۱۱] برای انتقال حرارت یک‌بعدی بین یک گاز ورودی و

7- Merkin and Pop

8- Aly et al.

9- Javeri

10- Galerkin-Kantorowich

11- Perturbation

12- Pedroso and Domoto

13- Huang and Shih

1- Nusselt

2- Anzelius

3- Schumann

4- Fernas

5- Kuznetsove

6- Cheng

فشار ثابت،  $h$  ضریب جابجایی بین سیال و جامد،  $\lambda_s$  ضریب هدایت حرارتی،  $v_f$  سرعت جریان سیال و  $P$  تخلخل می‌باشد. زیرنویس‌های  $f$  و  $s$  به ترتیب نمایانگر فازهای سیال و جامد هستند.

یک محیط نیمه بی‌نهایت که در حالت اولیه در یک دمای یکنواخت است در نظر گرفته می‌شود، بنابراین، شرایط اولیه به صورت زیر فرض می‌شوند.

$$T_f(0, x) = T_{s0}, x > 0 \quad (3)$$

$$T_s(0, x) = T_{s0}, x > 0 \quad (4)$$

سیال در  $x = 0$  با دما و سرعت جریان ثابت به جامد تزریق می‌شود.

$$T_f(t, 0) = T_{f0}, t > 0 \quad (5)$$

و شرط مرزی روبین (نوع سوم) در ورودی مرز جامد به صورت زیر است:

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x}(t, 0) = h_b (T_s(t, 0) - T_f(t, 0)) \quad (6)$$

که  $h_b$  ضریب جابجایی در مرز بین جامد و سیال است. شرایط مرزی در خروجی به دلیل نیمه بی‌نهایت بودن محیط به صورت زیر است (دما در خروجی محیط نیمه بی‌نهایت محدود است).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_s(t, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_f(t, x) = 0 \quad (7)$$

برای استفاده از روش پرتوربیشن، معادلات (۷-۱) باید، با معرفی متغیرهای بی‌بعد زیر، به فرم بی‌بعد دربیابند.

$$\tau = \frac{ht}{(1-P)\rho_s c_s} \quad (8)$$

$$y = \frac{nhx}{P\rho_f c_f v_f} \quad (9)$$

که در آن:

$$n = \frac{P\rho_f c_f}{(1-P)\rho_s c_s}$$

و همچنین  $X(\tau, y)$  و  $\epsilon(\tau, y)$  هم به فرم زیر تعریف شده‌اند.

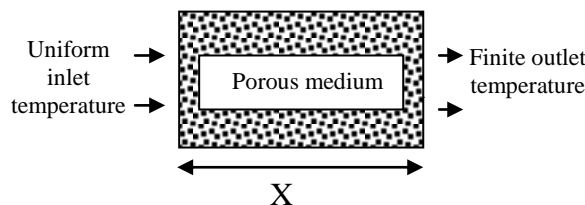
$$T_s = T_{s0} + X(\tau, y)(T_{f0} - T_{s0}) \quad (10)$$

$$T_f = T_{s0} + \epsilon(\tau, y)(T_{f0} - T_{s0}) \quad (11)$$

محیط متخلخل، بر اساس تبدیل لاپلاس و با فرض ضریب هدایت حرارتی کوچک، یک حل تحلیلی به دست آوردند. حل آن‌ها دارای معایبی بود که در اینجا تلاش به رفعشان شده است. در حل آن‌ها دو ناحیه خارجی و داخلی در نظر گرفته شده بود؛ که شرط مرزی در دیواره که باید در ناحیه داخلی اعمال شود، برای یافتن مجهولات پاسخ خارجی استفاده شده بود. همچنین برای تطبیق پاسخ‌های دو ناحیه، یک ناحیه بینابینی نیز در نظر گرفته شد. در این متن انتقال حرارت یک بعدی بین یک گاز ورودی و محیط متخلخل، بر اساس تبدیل لاپلاس و روش اغتشاشات منفرد<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار خواهد گرفت ضمن این‌که اشکالات مقاله ویلاتورو و همکاران رفع شده و همچنین شرط مرزی نوع سوم در دیواره با استفاده از ایده نویسنده مولف به نوع اول تبدیل شده و سپس در مساله اعمال می‌گردد.

## ۲- تئوری

در شکل ۱ هندسه و شماتیکی از مساله نشان داده شده است. برای مدل‌سازی و تحلیل مساله، فرض شده است که سیال نیوتونی و غیر قابل تراکم، با اتلاف ویسکوزیته ناچیز، بدون هدایت حرارتی بین ذرات سیال و حرکت سیال فقط در جهت محوری جامد است. شرایط نیمه پایا و جامد با تخلخل ثابت است و از گرادیان دمای شعاعی صرف نظر شده و گرادیان دما فقط در جهت محور است.



شکل (۱): شماتیک مساله مورد بررسی

با اعمال این فرضیات معادلات انرژی فازهای سیال و جامد به صورت زیر خواهند بود [۱۶].

$$P\rho_f c_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) = -h(T_f - T_s) \quad (1)$$

$$(1-P)\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = h(T_f - T_s) + (1-P)\lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \quad (2)$$

که در آن،  $x$  موقعیت محوری در طول محیط،  $t$  زمان،  $T$  دما،  $\rho$  چگالی،  $c_s$  گرمای ویژه جامد،  $c_f$  گرمای ویژه سیال در

## ۲-۱- تبدیل شرط مرزی نوع سوم به نوع اول

هدف این است که شرط مرزی نوع سوم روبین که در این مساله در نظر گرفته شده است به نوع اول تبدیل شده و بعد در مساله اعمال شود و نتایج آن با حالتی که شرط نوع سوم اعمال شده مقایسه گردد. با در نظر گرفتن تغییر متغیر در ناحیه داخلی شرط مرزی به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \widehat{X}^{(i)}}{\partial Y}(s, 0) = \gamma \beta (\widehat{X}^{(i)}(s, 0) - \widehat{\epsilon}^{(i)}(s, 0)), \widehat{\epsilon}^{(i)}(s, 0) = \frac{1}{s} \quad (22)$$

که معادلات بالا می‌توانند به فرم زیر نوشته شوند.

$$\widehat{X}^{(i)}(s, 0) - \frac{1}{\gamma \beta} \frac{\partial \widehat{X}^{(i)}}{\partial Y}(s, 0) = \frac{1}{s} \quad (23)$$

لازم به ذکر است که علامت  $\widehat{\phantom{x}}$  نشاندهنده تبدیل لاپلاس است. دو جمله‌ی اول بسط تیلور  $(\widehat{X}^{(i)}(s, 0) - \frac{1}{\gamma \beta} \frac{\partial \widehat{X}^{(i)}}{\partial Y}(s, 0))$  همان رابطه بالاست بنابراین:

$$\widehat{X}^{(i)} \Big|_{0-\frac{1}{\gamma \beta}} = \frac{1}{s} \quad (24)$$

حال بسط حل داخلی، که با علامت  $\widetilde{\phantom{x}}$  از حل خارجی مجزا شده است، یعنی معادله (۲۳) در رابطه بالا جایگذاری می‌شود.

$$\widetilde{X} \Big|_{0-\frac{1}{\gamma \beta}} + \beta \widetilde{X} \Big|_{\frac{1}{2} 0-\frac{1}{\gamma \beta}} + \beta^2 \widetilde{X} \Big|_{1 0-\frac{1}{\gamma \beta}} + \dots = \frac{1}{s} \quad (25)$$

حال بسط تیلور هر جز نوشته می‌شود، که معادله زیر را می‌دهد:

$$(\widetilde{X} \Big|_{0-\frac{1}{\gamma \beta}} - \frac{1}{\gamma \beta} \widetilde{X}' \Big|_{0-\frac{1}{\gamma \beta}} + \dots) + \beta (\widetilde{X} \Big|_{\frac{1}{2} 0-\frac{1}{\gamma \beta}} - \frac{1}{\gamma \beta} \widetilde{X}' \Big|_{\frac{1}{2} 0-\frac{1}{\gamma \beta}} + \dots) \quad (26)$$

$$+ \dots + \beta^2 (\widetilde{X} \Big|_{1 0-\frac{1}{\gamma \beta}} - \frac{1}{\gamma \beta} \widetilde{X}' \Big|_{1 0-\frac{1}{\gamma \beta}} + \dots) = \frac{1}{s}$$

از آن جایی که،  $\beta^2 = \frac{\lambda_s h}{(1-P)\rho_s c_s v_f^2}$  و

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\lambda_s h}{(1-P)\rho_s c_s v_f h_b}$$

هم مرتبه هستند پس  $o(\frac{1}{\gamma}) = o(\beta^2)$  بنابراین:

حال مجموعه معادلات (۱) و (۲) به شکل بدون بعد زیر تبدیل می‌شوند.

$$n \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) = X - \epsilon \quad (12)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} - \beta^2 \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \epsilon - X \quad (13)$$

با تعریف متغیرهای بدون بعد، شرایط اولیه و مرزی هم به شکل زیر تغییر می‌کنند.

$$\epsilon(0, y) = 0, X(0, y) = 0, y > 0 \quad (14)$$

$$\epsilon(\tau, 0) = 1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}(\tau, 0) = \gamma(X(\tau, 0) - \epsilon(\tau, 0)) \quad (16)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} X(\tau, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \epsilon(\tau, y) = 0 \quad (17)$$

که در آن

$$\beta^2 = (1-P)\lambda_s h \left( \frac{n}{P\rho_f c_f v_f} \right)^2$$

$$\gamma = \frac{h_b P\rho_f c_f v_f}{hn\lambda_s}$$

می‌باشد. در این مساله ضریب هدایت حرارتی، و بنابراین  $\beta^2$  کوچک فرض شده است.

در این مقاله به منظور حل معادلات (۱۲-۱۷)، روش تبدیل لاپلاس استفاده شده است که  $\widehat{X}(s, y)$  و  $\widehat{\epsilon}(s, y)$  تبدیلات لاپلاس  $X(\tau, y)$  و  $\epsilon(\tau, y)$  هستند. بنابراین، معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت زیرند.

$$n(s \widehat{\epsilon} + \frac{\partial \widehat{\epsilon}}{\partial y}) = \widehat{X} - \widehat{\epsilon} \quad (18)$$

$$s\widehat{X} - \beta^2 \frac{\partial^2 \widehat{X}}{\partial y^2} = \widehat{\epsilon} - \widehat{X} \quad (19)$$

$$\widehat{\epsilon}(s, 0) = \frac{1}{s} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial y}(s, 0) = \gamma(\widehat{X}(s, 0) - \widehat{\epsilon}(\tau, 0)) \quad (21)$$

از آن جایی که حل و معکوس تبدیلات لاپلاس آن به صورت تحلیلی قابل دستیابی نیست، یک حل مجانبی تقریبی برای دمای هر دو فاز سیال و جامد در نظر گرفته شده است و حل‌های داخلی و خارجی به دست آمده‌اند.

$$\beta^2 \rightarrow n(s \hat{\epsilon}_1 + \frac{\partial \hat{\epsilon}_1}{\partial y}) = \hat{X}_1 - \hat{\epsilon}_1 \quad (32)$$

$$s\hat{X}_1 - \frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial y^2} = \hat{\epsilon}_0 - \hat{X}_0 \quad (33)$$

جملات بالاتر هم به سادگی قابل دستیابی اند.

پاسخ معادلات (۳۰) و (۳۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\epsilon}_0 = ce^{-sy} \exp\left(\frac{-sy}{n(1+s)}\right) \quad (34)$$

$$\hat{X}_0 = \frac{c}{1+s} e^{-sy} \exp\left(\frac{-sy}{n(1+s)}\right) \quad (35)$$

و پاسخ معادلات (۳۲) و (۳۳) هم می‌دهد:

$$\hat{\epsilon}_1 = A_1 \exp\left[-sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right] + \frac{c}{n(1+s)^2} \left(s + \left(\frac{s}{n(1+s)}\right)^2 y \exp\left[-sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right]\right) \quad (36)$$

$$\hat{X}_1 = \frac{A_1}{1+s} \exp\left[-sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right] + \frac{c}{n(1+s)^3} \left(s + \frac{s}{n(1+s)}\right)^2 y \exp\left[-sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right] + \frac{1}{n(1+s)} \left(s + \frac{c}{n(1+s)^2} \left(s + \left(\frac{s}{n(1+s)}\right)^2 y \exp\left[-sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right]\right)\right) \quad (37)$$

در حل داخلی یک متغیر جدید تعریف می‌شود، یعنی  $y$  نسبت به  $\beta$  مقیاس می‌شود. تقریب داخلی  $\hat{\epsilon}^{(i)}(s, Y)$  و  $\hat{X}^{(i)}(s, Y)$  جایی که  $Y = \frac{y}{\beta}$  و  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\beta \partial Y}$  است، تعیین می‌شوند. نتایج عددی در مرجع [۱] پیشنهاد می‌دهد که فرم و ظاهر لایه مرزی در  $y = 0$  از پهنای  $o(\beta)$  می‌باشد.

بسط پاسخ داخلی به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$\hat{\epsilon}^{(i)}(s, Y) = \hat{\epsilon}_0(s, Y) + \beta \hat{\epsilon}_1(s, Y) + \beta^2 \hat{\epsilon}_1(s, Y) + o(\beta^3) \quad (38)$$

$$o\left(\frac{1}{\gamma\beta}\right) = o(\beta) \quad (27)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب یکسان  $\beta$  در طرفین شرط مرزی برای مرتبه‌های مختلف معادلاتی به دست می‌آید که در مساله داخلی اعمال شده است. با این تحلیل شرط مرزی به شکل ساده تبدیل شده و سپس در مساله اعمال می‌شود که این گونه حل مساله راحت‌تر می‌شود.

### ۳- روش تحلیل

در کار ویلاتورو و همکارانش [۱] اشکالاتی وجود داشت که در این متن رفع شده است. در کار آنها شرط مرزی در نقطه  $y = 0$  برای ناحیه حل خارجی اعمال شده بود، که آنها برای تطابق دو حل داخلی و خارجی نیاز به یک ناحیه حل بینابینی<sup>۱</sup> داشتند.

در کار حاضر، شرط مرزی در  $y = 0$  برای ناحیه داخلی مورد استفاده قرار گرفته است و همچنین یک راه پیشنهادی برای تطابق پاسخها مطرح شده است.

همان‌طور که بیان شد شرط مرزی نوع سوم در  $y = 0$  به نوع اول تبدیل شده و بعد در مساله اعمال می‌گردد.

در این مقاله از روش اغتشاشات منفرد برای حل معادلات (۱۸-۲۱) در محیط لاپلاس استفاده شده است. بسط حل خارجی بر حسب پارامتر کوچک  $\beta^2$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\hat{\epsilon}^{(o)}(s, y) = \hat{\epsilon}_0(s, y) + \beta^2 \hat{\epsilon}_1(s, y) + \beta^4 \hat{\epsilon}_2(s, y) + \dots \quad (28)$$

$$\hat{X}^{(o)}(s, y) = \hat{X}_0(s, y) + \beta^2 \hat{X}_1(s, y) + \beta^4 \hat{X}_2(s, y) + o(\beta^6) \quad (29)$$

با جایگذاری بسط حل خارجی در معادلات حاکم و مساوی قرار دادن توان‌های یکسان  $\beta^2$  از طرفین تساوی برای توان‌های مختلف  $\beta^2$  می‌توان نوشت:

$$\beta^0 \rightarrow n(s \hat{\epsilon}_0 + \frac{\partial \hat{\epsilon}_0}{\partial y}) = \hat{X}_0 - \hat{\epsilon}_0 \quad (30)$$

$$s\hat{X}_0 = \hat{\epsilon}_0 - \hat{X}_0 \quad (31)$$

$$(\hat{\epsilon}_0)_{y \rightarrow 0} = (\hat{\epsilon}_0)_{Y \rightarrow \infty} \rightarrow C = \frac{1}{s} \quad (49)$$

$$(\hat{\epsilon}_1)_{y \rightarrow 0} = (\hat{\epsilon}_1)_{Y \rightarrow \infty} \rightarrow A_1 = 0 \quad (50)$$

مقدار  $(\hat{X}_1)_{y \rightarrow 0}$  و  $(\hat{X}_1)_{Y \rightarrow \infty}$  با هم برابر نیستند که این تقریبی بودن این روش را نشان می‌دهد.

پاسخ‌های معادلات (۳۴-۳۵) و (۳۶-۳۷) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\hat{\epsilon}_0 = \frac{1}{s} e^{-sy} \exp\left(\frac{-sy}{n(1+s)}\right) \quad (51)$$

$$\hat{X}_0 = \frac{1}{s(1+s)} e^{-sy} \exp\left(\frac{-sy}{n(1+s)}\right) \quad (52)$$

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{s}{n(1+s)^2} \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)^2 y \exp\left[-\right. \quad (53)$$

$$\left. sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right]$$

$$\hat{X}_1 = \frac{s}{n(1+s)^3} \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)^2 y \exp\left[-\right. \quad (54)$$

$$\left. sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right] + \frac{s}{n(1+s)^2} \left(1 + \right. \quad (54)$$

$$\left. \frac{1}{n(1+s)}\right)^2 \exp\left[-sy \left(1 + \frac{1}{n(1+s)}\right)\right]$$

پاسخ‌های معادلات (۵۱-۵۴)، به وسیله انتگرال برومیچ<sup>۱</sup> برای تبدیل لاپلاس معکوس، به دست خواهند آمد [۶]. معادلات (۳)-(۵). نتایج به دست آمده در جدول ۱ نشان داده شده است.

همچنین معکوس لاپلاس معادلات (۵۳-۵۴) طبق همان روندی که در مرجع [۱] ذکر شده است، به سادگی به دست می‌آیند و نتایج هم در جدول ۱ نمایش داده شده است.

در نهایت تبدیل لاپلاس معکوس حل‌های تقریبی داخلی هم در جدول ۲ ذکر شده است.

جواب اصلی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود.

$$\epsilon_0 = \hat{\epsilon}_0^{(i)} + \epsilon_0^{(o)} - \frac{1}{2} [(\hat{\epsilon}_0^{(i)})^{(o)}]_{Y \rightarrow \infty} + (\epsilon_0^{(o)})^{(i)}]_{y \rightarrow 0} \quad (47)$$

$$\epsilon_1 = \hat{\epsilon}_1^{(i)} + \epsilon_1^{(o)} - \frac{1}{2} [(\hat{\epsilon}_1^{(i)})^{(o)}]_{Y \rightarrow \infty} + (\epsilon_1^{(o)})^{(i)}]_{y \rightarrow 0} \quad (48)$$

$$\hat{X}^{(i)}(s, Y) = \tilde{X}_0(s, Y) + \beta \tilde{X}_1(s, Y) + \quad (39)$$

$$\beta^2 \tilde{X}_1(s, Y) + o(\beta^3)$$

برای حل داخلی، با توجه به تغییر متغیر انجام شده، معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت زیر خواهند شد.

$$\text{Eqs:} \begin{cases} \beta^0 \rightarrow n(s\beta \hat{\epsilon}^{(i)} + \frac{\partial \hat{\epsilon}^{(i)}}{\partial Y}) = \beta(\hat{X}^{(i)} - \hat{\epsilon}^{(i)}) \\ s\hat{X}^{(i)} - \frac{\partial^2 \hat{X}^{(i)}}{\partial Y^2} = \hat{\epsilon}^{(i)} - \hat{X}^{(i)} \end{cases}$$

$$\text{B.C.:} \begin{cases} \hat{\epsilon}^{(i)}(s, 0) = \frac{1}{s} \\ \hat{X}^{(i)}(s, -\frac{1}{\beta}) = \frac{1}{s} \end{cases} \quad (40)$$

با جایگذاری معادلات (۳۸) و (۳۹) در (۴۰) و مساوی قرار دادن توان‌های مختلف  $\beta$  در طرفین معادلات و شرایط مرزی، پاسخ‌ها به صورت زیر یافت می‌شوند.

$$\hat{\epsilon}_0(s, Y) = \frac{1}{s} \quad (41)$$

$$\tilde{X}_0(s, Y) = \frac{1}{s(1+s)} \exp(-\sqrt{1+s}Y) + \frac{1}{s(1+s)} \quad (42)$$

$$\hat{\epsilon}_1(s, Y) = 0 \quad (43)$$

$$\tilde{X}_1 = \frac{-1}{\sqrt{1+s}} \exp(-\sqrt{1+s}Y) \quad (44)$$

$$\hat{\epsilon}_1(s, Y) = 0 \quad (45)$$

$$\tilde{X}_1(s, Y) = 2 \exp(-\sqrt{1+s}Y) \quad (46)$$

#### ۴- روش تطبیق پیشنهادی

برای تعیین حل خارجی که به دلیل کمبود شرط مرزی برای اعمال کردن، دارای ضرایب مجهول بود؛ باید از روش تطابق پیشنهادی زیر استفاده کرد.

$$(\hat{\epsilon}^{(o)})^i_{y \rightarrow 0} = (\hat{\epsilon}^{(i)})^o_{Y \rightarrow \infty} \quad (47)$$

$$(\hat{X}^{(o)})^i_{y \rightarrow 0} = (\hat{X}^{(i)})^o_{Y \rightarrow \infty} \quad (48)$$

طبق این روابط، حل داخلی وقتی  $Y \rightarrow \infty$  برابر است با حل خارجی وقتی  $y \rightarrow 0$  و با این روش ضرایب مجهول حل خارجی به دست می‌آیند.

جدول (۲): پاسخ‌های حل داخلی برای دمای جامد

$(\tilde{\epsilon}_0^{(i)}(\tau, Y))$  و گاز  $(\tilde{X}_0^{(i)}(\tau, Y))$ .

Zeroth order	$\tilde{\epsilon}_0^{(i)}(\tau, Y) = 1$
	$\tilde{X}_0^{(i)}(\tau, Y) = e^{-\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{2\sqrt{\tau}}\right) + 1 - e^{-\tau}$
Middle order	$\tilde{\epsilon}_1^{(i)}(\tau, Y) = 0$
	$\tilde{X}_1^{(i)}(\tau, Y) = \frac{-e^{-\tau} \frac{Y^2}{4\tau}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\tau}}$
First order	$\tilde{\epsilon}_1^{(i)}(\tau, Y) = 0$
	$\tilde{X}_1^{(i)}(\tau, Y) = \frac{e^{-\tau} \frac{Y^2}{4\tau}}{\sqrt{\pi} \tau}$

بعضی از پاسخ‌ها تابعی از زمان هستند که این تقریبی بودن حل را نشان می‌دهد؛ اما برای  $\beta^2 = 1$  دقت خوبی دارند. مقایسه نتایج با حل عددی انجام شده توسط ویلاتورو و همکاران [۱] نشانگر دقت خوب آن است.

شکل ۲ و ۳ به ترتیب دمای بی‌بعد فاز سیال و جامد را برای  $\beta^2 = 0$ ،  $\beta^2 = 0$ ،  $n = 0$  و  $n = 5$  نشان می‌دهند.

از حل مشاهده می‌شود که با تغییر شرط مرزی از نوع سوم به اول در میزان دمای فاز سیال، تغییری ایجاد نمی‌شود و منحنی‌های دمای سیال در دو حالت اعمال شرط مرزی نوع سوم و یا نوع اول یکسان می‌باشد؛ چون این شرط در مساله فاز سیال دخیل نمی‌باشد. همان‌طور که مشخص است، دمای فاز سیال در مرز یک است که شرط مرزی اعمال شده بر مساله همین بود و مقدار دما در  $y > \tau$  هم صفر است که این شرط هم در حین حل در ناحیه خارجی اعمال شده بود [۱].

$$X_0 = \tilde{X}_0^{(i)} + X_0^{(o)} - \frac{1}{2} [(\tilde{X}_0^{(i)})^{(o)}]_{Y \rightarrow \infty} + (X_0^{(o)})^{(i)}_{y \rightarrow 0}$$

$$X_1 = \tilde{X}_1^{(i)} + X_1^{(o)} - \frac{1}{2} [(\tilde{X}_1^{(i)})^{(o)}]_{Y \rightarrow \infty} + (X_1^{(o)})^{(i)}_{y \rightarrow 0}$$

### ۵- نتایج

طبق محاسبات، حل تحلیلی تقریبی نهایی برای مساله یک بعدی انتقال حرارت بین یک گاز ورودی و یک محیط متخلخل نیمه بی‌نهایت، با دو جمله برای حل خارجی و سه جمله برای حل داخلی، در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

جدول (۱): پاسخ‌های حل خارجی برای دمای جامد

$(X(\tau, y))$  و گاز  $(\epsilon(\tau, y))$ .

Zeroth order	$\epsilon_0(\tau, y) = H(\tau - y) e^{-\frac{y}{n}} \{ 1 + \int_0^{\tau-y} \exp(-u) I_1(2\sqrt{\frac{yu}{n}}) \sqrt{\frac{y}{un}} du \}$
	$X_0(\tau, y) = H(\tau - y) e^{-\frac{y}{n}} \int_0^{\tau-y} \exp(-u) I_0(2\sqrt{\frac{yu}{n}}) du$
First order	$\epsilon_1(\tau, y) = \frac{y}{n} H(\tau - y) e^{y-\tau-\frac{y}{n}} \{ I_0(z) + \frac{2-n}{gn} I_1(z) - \frac{2n-1}{g \frac{2}{n^2}} I_2(z) - \frac{1}{g \frac{3}{n^2}} I_3(z) \}$
	$X_1(\tau, y) = H(\tau - y) e^{y-\tau-\frac{y}{n}} \{ I_0(z) + \frac{2-n+y}{gn} I_1(z) - \frac{y}{g \frac{4}{n^3}} I_4(z) + \frac{1+2y-n(2+y)}{g \frac{2}{n^2}} I_2(z) + \frac{y-n(1+2y)}{g \frac{3}{n^3}} I_3(z) \}$

دیواره ( $y = 0$ ) یک شکستگی در منحنی اتفاق افتاده که به دلیل تغییر شرط مرزی می‌باشد و با این تغییر عملاً نقطه

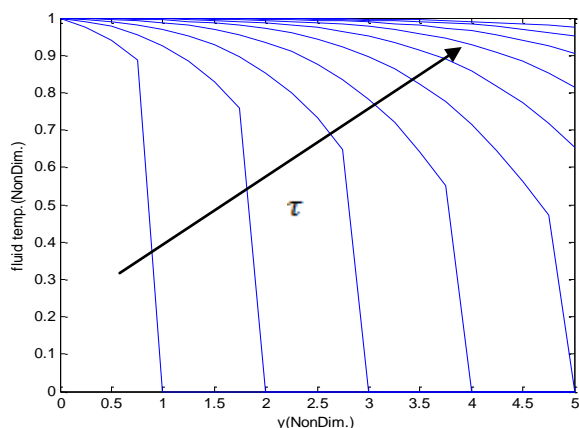
$$\text{اعمال شرط در } y = 0 - \frac{1}{\gamma\beta} \text{ می‌باشد.}$$

به منظور امکان مقایسه بهتر نتایج حاصل از جایگزینی شرط نوع اول به جای شرط نوع سوم، این نتایج با نتایج حاصل از کاربرد مستقیم شرط نوع سوم، در شکل ۴ نشان داده شده است.

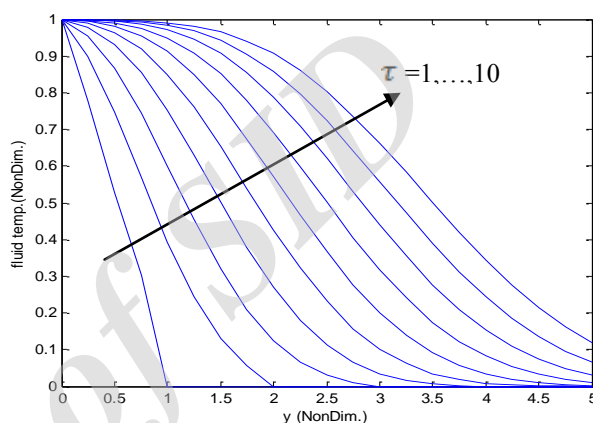
در زمان‌های کمتر، منحنی تغییر دما محدوده کوچک‌تری از  $y$  را دربرمی‌گیرد و با افزایش زمان، منحنی دما بخش وسیع‌تری از فاصله را دربرمی‌گیرد و به همین ترتیب با گذشت زمان در کل ناحیه دما توزیع می‌شود.

دمای بی‌بعد فاز جامد نسبت به  $y$  در شکل ۳ رسم شده است.

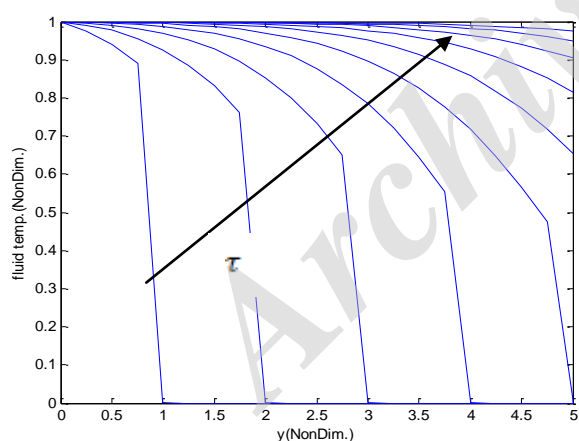
همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود، در ناحیه نزدیک



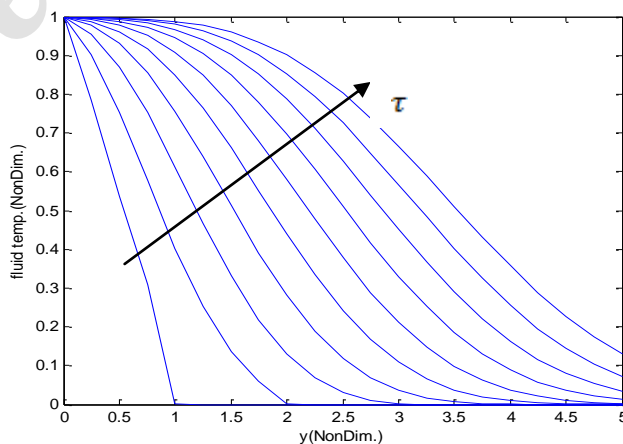
b)  $n=5, \beta^2=0$



a)  $n=0.5, \beta^2=0$



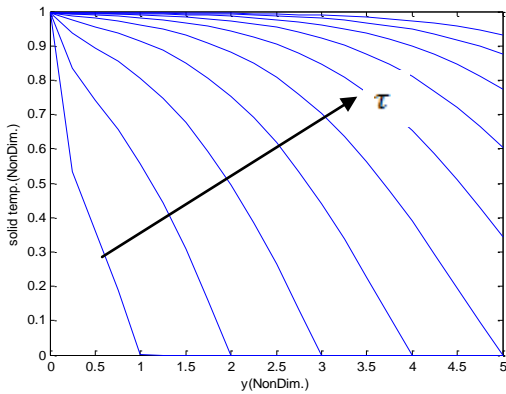
d)  $n=5, \beta^2=0.01$



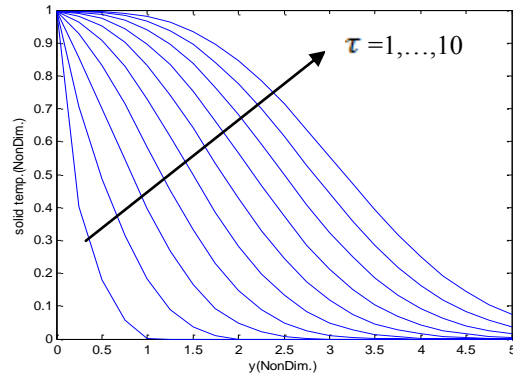
c)  $n=0.5, \beta^2=0.01$

شکل (۲): حل تحلیلی  $(\tau, y) \in$  برای  $n=0.5$  و  $\beta^2=0.01$  (a,c) و برای  $n=5$  و  $\beta^2=0$  (b,d). محور افقی بر حسب  $y$  و محور عمودی نشان‌دهنده  $(\tau, y) \in$ .

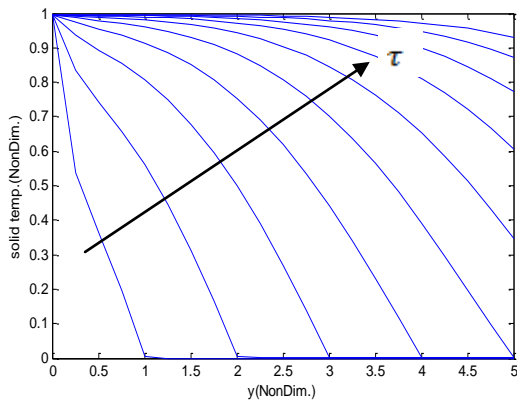




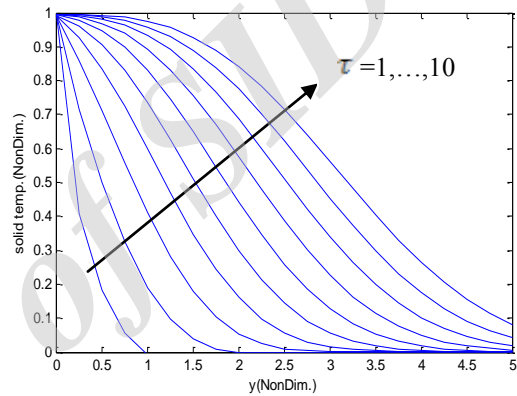
b)  $n=5, \beta^2=0$



a)  $n=0.5, \beta^2=0$

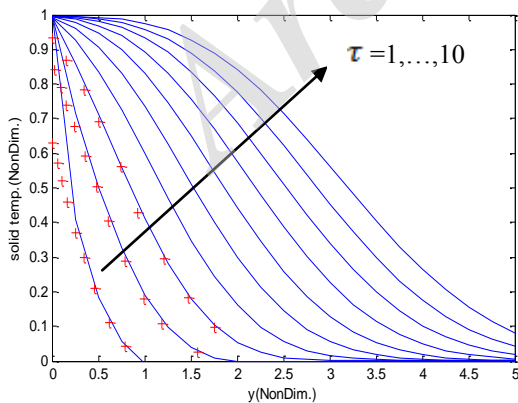


d)  $n=5, \beta^2=0.01$

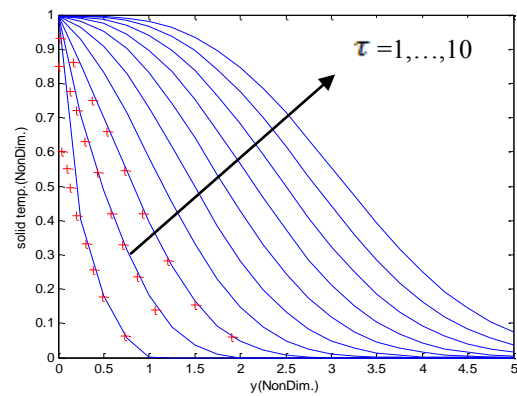


c)  $n=0.5, \beta^2=0.01$

شکل (۳): حل تحلیلی  $X(\tau, y)$  برای  $\beta^2 = 0$  و  $\beta^2 = 0.01$  و برای  $n = 0.5$  و  $n = 5$  (b,d) و برای  $n = 0.5$  و  $n = 5$  (a,c). محور افقی بر حسب  $y$  و محور عمودی نشان‌دهنده  $X(\tau, y)$ .



b)  $n=0.5, \beta^2=0.01$



a)  $n=0.5, \beta^2=0$

شکل (۴): حل تحلیلی  $X(\tau, y)$  برای  $n = 0.5$  و  $\beta^2 = 0$  و  $n = 0.5$  و  $\beta^2 = 0.01$  و مقایسه آن با حل تحلیلی انجام شده بدون تغییر شرط مرزی از نوع سوم به اول، محور افقی بر حسب  $y$  و محور عمودی نشان‌دهنده  $X(\tau, y)$ .

- Time-depende Boundry Conditions", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 46, pp. 1497-1501, 2003.
3. Shahnazari, M.R. "A Novel Homotopy Perturbation Method: Kouros's Method for a Thermal Boundary Layer in a Saturated Porous Medium", *Int. J. Engineering Transactions A*, Vol. 25, pp. 59-64, 2012.
  4. Nusselt, W. "Eine neue Formel für den Wärmeübergang im Kreuzstrom" *Tech. Mech. U. Thermodyn*, Vol. 1, pp. 417-422, 1930.
  5. Nusselt, W. "Der Wärmeübergang im Kreuzstrom", *Z. Ver. Deut. Ing.*, Vol. 55, pp. 2021-2024, 1911.
  6. Anzelius, A. "Über Erwärmung vermittels durchströmender Medium", *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 6, pp. 291-294, 1926.
  7. Schuman, T. "A Liquid Flowing Through a Porous Prism", *Franklin Inst.*, Vol. 208, pp. 405-416, 1929.
  8. Furnas, C.C. "Heat Transfer from a Gas Stream to a Bed of Broken Solids". *Trans. Am. Inst. Chem. Eng.*, Vol. 24, pp. 142-193, 1930.
  9. Kuznetsov, A.V. "A Perturbation Solution for Heating a Rectangular Sensible Heat Storage Packed Bed with a Constant Temperature at the Walls", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 40, pp. 1001-1006, 1996.
  10. Cheng, P. "Combined Free and Forced Convection Flow about Inclined Surfaces in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 807-814, 1977.
  11. Merkin, J.H., and Pop, I. "Mixed Convection along a Vertical Surface: Similarity Solutions for Uniform Flow", *Fluid Dynamic Research*, Vol. 30, pp. 233-250, 2002.
  12. Aly, E.H., Elliott, L., and Ingham, D.B. "Mixed Convection Boundary-layer Flow over a Vertical Surface Embedded in Porous Medium". *J. Mech. Fluids*, Vol. 22, pp. 529-543, 2003.
  13. Javeri, V. "Laminar Heat Transfer in a Rectangular Channel for the Temperature Boundary Condition of the Third Kind", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 21, pp. 1029-1034, 1978.
  14. Pedroso, R.I., and Domoto, G.A. "Exact Solution by Perturbation Method for Planar Solidification of a Saturated Liquid with Convection at the Wall", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 1816-1819, 1973.
  15. Huang, C.C., and Shih, Y.P. "Perturbation Solution for Planar Solidification of a Saturated Liquid with Convection at the Wall", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 1481-1483, 1975.

جزئیات حل تحلیلی انجام شده بدون تغییر شرط مرزی در مرجع [۱۷] که توسط مولفان بررسی شده است، وجود دارد. همچنین حل عددی در مرجع [۱] انجام شده است که مقایسه آن با حل تحلیلی انجام شده در مرجع [۱۷] توضیح داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود حل در هر دو حالت با هم تطابق کامل دارند، جز در ناحیه نزدیک دیواره که به واسطه

اعمال شرط تغییر یافته در نقطه  $y = 0 - \frac{1}{\gamma\beta}$  منحنی دارای

شکست می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با گذشت زمان این اختلاف کم‌تر می‌شود.

به عبارت دیگر اگر هدف مساله برآورد بسیار دقیق پروفیل دما، در نقاط نزدیک دیواره، باشد؛ استفاده از روش جایگزینی شرط نوع اول به جای سوم خیلی سنجیده نیست.

#### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، انتقال حرارت یک‌بعدی بین گاز ورودی و یک محیط متخلخل نیمه بی‌نهایت، بر اساس تبدیل لاپلاس و استفاده از روش اغتشاشات منفرد با فرض ضریب هدایت حرارتی کوچک، مورد بررسی قرار گرفت. دو ناحیه حل خارجی و داخلی در نظر گرفته شد. شرط مرزی در  $y = 0$  طبق ایده پیشنهادی نویسنده مولف به نوع اول تبدیل و شرط نوع اول در مساله اعمال شد. این تغییر در شرط مرزی فقط در دمای جامد تاثیر می‌گذارد و با توجه به نتایج ترسیم شده و مقایسه پاسخ در دو حالت ذکر شده، نشان می‌دهد که با تغییر شرط مرزی فقط در ناحیه نزدیک دیواره، اختلافی در دما ایجاد می‌شود که تقریب خوبی به ما می‌دهد. نکته قابل توجه این است که در مواردی که شیب دما در ناحیه تغییر شرط مرزی اهمیت داشته باشد و دقت بالا مورد نظر باشد منجر به اخذ نتایج تقریبی می‌شود.

#### ۷- مراجع

1. Villatoro, F., Pérez, J., Santander, J.L.G., Borovsky, M.A., Ratis, Yu.L., Izzheurov, E.A., and Fernández de-Córdoba, P. "Perturbation Analysis of the Heat Transfer in Porous Media with Small Thermal Conductivity", *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 374, pp. 57-70, 2011.
2. Caldwell, J., and Kwan, Y.Y. "On The Perturbation Method for the Stefan Problem with

16. Nield, D.A., and Bejan, A. "Convection in porous media", springer-verlag, New York, 1999.
17. Ahmadi, Z. "Perturbation Analysis of Heat Transfer in Porous Media with Small Thermal conductivity", MSc. Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, 2013 (In Persion).

Archive of SID