ارتعاشات آزاد صفحه گرافنی مدور، با ملاحظه اثر سطح و عیوب هندسی

محمد حسین صبور[۱]، سید حسام الدین مدنی[۲]

دانشکده علوم و فنون نوین
دانشگاه تهران

محمد فدایی[۳*]

گروه مهندسی مکانیک
دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه صنعتی قم

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۱/۲۲ ؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۲۰)

چکیده

به‌دلیل پیچیدگی در پروسه تولید در ابعاد نانو، اغلب لایه‌های گرافن، دارای عیوب هندسی هستند. یکی از این نوع عیوب، ناشی از عدم وجود یـک یا چند پیوند کربنی در لایه گرافن در حین پروسه تولید است. اگر این صفحه گرافنی معیوب یا ناقص در دمای کاری اتاق قرار داشته باشد، حفره یا سوراخ در آن گسترش یافته و حفره‌هایی بزرگ با ساختار بی‌شکل تشکیل می‌گردد که می‌توانند قابلیت مکانیکی گرافن را تحت تـأثیر قـرار دهنـد. یکی دیگر از کابردهای صفحات سوراخ‌دار گرافنی در دیافرگم‌ها و فیلترهای جداسازی است. بـا توجـه بـه توسـعه تجیـزات نـانو الکترومکـانیکی و میکروالکترومکانیکی وجود چنین صفحاتی بسیار توسعه و گسترش پیدا خواهد کرد. از طرفی، با توجه به نسبت بالای سطح بـه حجـم در گـرافن، پدیده اثر سطح قابل اغماض نبوده و بایستی تاثیر آن لحاظ گردد. بنابراین، بررسی تاثیر عیوب هندسی یا حفره‌ها با درنظرگرفتن اثر سـطح بـرروی رفتار دینامیکی لایه گرافن از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله، حفره‌ها با چند دایره در محلی دلخـواه مـدل شـده و ارتعاشـات آزاد یـک صفحه مدور گرافنی با چند سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و با درنظرگرفتن اثر سطح در ابعاد نانو ارائه گردیده است. اثر پارامترهای سطحی در این نوع صفحات بررسی شده و فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش کمینه جداسازی مقدار تکین استخراج گردیده است.

واژه‌های کلیدی: گرافن، سوراخ خارج از مرکز، فرکانس طبیعی، اثر سطح

Free Vibrations of a Circular Graphene Sheet with Surface Effect & Geometrical Defects

M.H. Sabour, S.H. Madani
New Sciences & Technologies Department, University of Tehran.Tehran, Iran

M. Fadaee
Department of MechanicalEngineering, College of Engineering
Qom University of Technology,Qom, Iran.

(Received: 10/April/2016 ; Accepted: 10/December/2016)

ABSTRACT

Graphene sheets have gained much popularity and strong potential applications in design of nano-sized structural elements. Because of production process and constrains conditions, circular graphene sheet may be opposed to structural defect. These defects can be inverted to greater holes as amorphous construction when the graphene sheet is working in room temperature. Some of the defects and pin holes on a circular graphene sheet can be considered as multiple eccentric hole on the sheet. Hence, analyzing behavior of circular graphene sheet with multiple holes is important. According to high surface to volume ratio in single layer graphene sheet, surface effect is not negligible, should be considered. Free vibration of an annular graphene sheet, as the basis of any dynamical analysis, is analytically studied. Multipole Trefftz method as well as the translational addition theorem are employed to consider effects of circular defects on behavior of freely vibrating circular graphene sheet. Kirchhoff plate theory is used to solve the problem. Effects of surface effect parameter are investigated on the natural frequencies. These frequencies are derived by minimum singular value decomposition (SVD) method.

Keywords: Graphene, Eccentric hole, Natural frequency, Surface effect

۱- استادیار: sabourmh@ut.ac.ir

۲- دکترا: hesam_madani@ut.ac.ir

۳- استادیار (نویسنده پاسخگو): Fadaee@qut.ac.ir

۱- مقدمه

حفره‌ها و فقدان اتمی در مقایسه با دیگر عیب‌های سازه‌ای نظیر چرخش پیوندی در گرافن، اثر بیشتری بر روی کاهش خواص مکانیکی صفحات دایروی گرافن دارند [۱]. از کابردهای صفحات سوراخ‌دار گرافنی در دیافرگم‌ها و فیلترهای جداسازی است. با توجه به توسعه تجیزات نانو الکترومکانیکی و میکروالکترومکانیکی وجود چنین صفحاتی بسیار توسعه و گسترش پیدا خواهد کرد. نانوصفحه‌ها در تشدیدکننده‌ها، نوسانگرها و حسگرها مورد استفاده قرار گرفته و در نانو فناوری نقش به‌سزایی ایفا می‌نمایند. مشخصات ارتعاشی نانو صفحه‌های گرافنی که در نانوکامپوزیت‌ها پراکنده هستند از لحاظ کارایی سازه‌ای بسیار حائز اهمیت می‌باشد [۲]. با توجه به پیشرفت علوم مهندسی در حوزه نانوتکنولوژی، وجود ساختارهای گرافنی با یک یا چند عیب و وجود سوراخ برای پین یا غیره در اتصالات صفحات گرافن و در تجهیزات الکترومکانیکی در ابعاد نانو، بررسی مدل‌های ارتعاشی و استخراج فرکانس‌های طبیعی ضروری به نظر می‌رسد [۳]. سه رویکرد حل برای تحلیل ارتعاشی و به‌دست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی مدل پیشنهادی به‌نام روش‌های مربوط به اتم، روش‌های اتمی پیوسته و روش‌های مکانیک پیوسته وجود دارد. روش‌های پیوسته با ملاحظه عدم پیوستگی ساختارهای مقیاس نانو مسئله را مورد بررسی قرار می دهد. این روش از دقت کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار بوده اما دردسترس، کم‌هزینه و با محاسبات کمتر و در عین حال سرعت بیشتر می‌باشد. بیشتر مقالات در حوزه نانو مربوط به این رویکرد و روش می‌باشد [۴]. روش‌های تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات و پوسته‌ها در اشکال مختلف دایروی و مستطیلی و غیره در حوزه ماکرو به صورت عددی و تحلیلی در بسیاری از مقالات بررسی شده است. لین[۱] [۵] مدل ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی یک صفحه دایروی با یک سوراخ خارج از مرکز را با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه و براساس تبدیل توابع موج استوانه‌ای بررسی کرد. لاورا[۲] و همکاران [۶] با روش عددی ریلی ریتز[۳] فرکانس‌های طبیعی یک صفحه دایروی آزاد با یک سوراخ خارج از مرکز را بررسی و مطالعه کردند.لی[۴] و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۹ ارتعاشات آزاد یک صفحه دایروی با چند سوراخ خارج از مرکز را مطالعه کردند. آن‌ها با استفاده از نظریه جمع‌پذیری و با روش عددی تریفتز مدل تحلیلی را ارائه داده و درنهایت، با روش کمینه جداسازی مقدار تکین فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند لی و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۷ یک روش نیمه‌تحلیلی در تحلیل ارتعاشات آزاد یک صفحه دایروی با چند سوراخ ارائه دادند. اثر سطح، پدیده‌ای است که در سازه‌های مقیاس خرد وجود داشته، مدول الاستیسیته، چگالی و تنش در سطح سازه‌ها را تغییر می‌دهد. در سازه‌هایی در ابعاد نانو که نسبت سطح به حجم در آن‌ها بالا است، اثر سطح وجود داشته و بایستی بررسی گردد. آسمی و فرج‌پور [۹] ارتعاشات ترمومکانیکی یک صفحه گرافن با ملاحظه اثر سطح در مدل صفحه دایروی غیرمحلی را تحلیل کردند. انصاری و همکاران [۱۲-۱۰] اثر سطح در مدل‌سازی پساکمانش، رفتار ارتعاشی، ناپایداری و پاسخ ارتعاشی یک نانو صفحه دایروی را درنظر گرفتند. آن‌ها از تئوری صفحه میندلین[۵] استفاده کرده و نشان دادند که کاهش ضخامت صفحه حساسیت‌پذیری نتایج از اثر سطح را افزایش می‌دهد. وانگ[۶] و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد یک نانو رینگ/کمان را با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی دقیق این نانوسازه‌ها را به‌دست آورده و اثر مقیاس طول و سطح را در آن‌ها مورد بررسی قرار دادند. عباسی [۱۴] ارتعاشات اجباری یک نانوصفحه را با درنظرگرفتن اثرات سطح بررسی و مطالعه کرده است. او با استفاده از مدل صفحه کلاسیک معادلات خیز عرضی را با ملاحظه اثر سطح استخراج کرد. اسدی و فرشی [۱۵] ارتعاشات نانوصفحه دایروی را با درنظرگرفتن مشخصات سطح (به دلیل نسبت سطح به حجم بالا) مورد مطالعه قرار دادند. تئوری صفحه چندلایه کلاسیک، با ملاحظه اثرات سطح برای این مسئله به‌کار گرفته شد. آن‌ها فرض کردند نانو صفحه دایروی با لایه‌های پوسته نازک روی سطوح بالا و پایین وجود دارد.

مدنی و همکاران [۱۶] ارتعاشات صفحات گرافنی تک‌سوراخ دایروی را با استفاده از تئوری غیرمحلی بررسی کرد و نشان داد که نقش سوراخ در تغییر فرکانس طبیعی بسیار قابل اهمیت می‌باشد.

در این مقاله، این حفره‌ها با چند دایره در محلی دلخواه مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با چند سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز[۷] و با

1- Lin
2 -Laura
3- Rayleigh-Ritz
4 -Lee
5- Mindlin
6 - Wang
7 -Trefftz

درنظرگرفتن اثر سطح در ابعاد نانو ارائه گردیده است. اثر پارامترهای سطحی در این نوع صفحات بررسی شده و فرکانس‌های طبیعی با استفاده روش کمینه جداسازی مقدار تکین استخراج گردیده است.

۲- تحلیل ارتعاشات آزاد یک نانوصفحه دایروی با ملاحظه اثر سطح

برای تحلیل ارتعاشات عرضی با توجه به تئوری صفحه نازک کلاسیک داریم [۹] :

$$u(x,y,z) = -z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} \quad \text{(۱- الف)}$$

$$v(r,\theta,z) = -z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y} \quad \text{(۱- ب)}$$

$$w(r,\theta,z) = w(x,y,t) = w \quad \text{(۱- ج)}$$

در نتیجه برای روابط کرنش- خیز عرضی داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ , \varepsilon_{xz} = 0 \quad \text{(۲- الف)}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ \ , \varepsilon_{yz} = 0 \quad \text{(۲- ب)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\ \ , \varepsilon_{zz} = 0 \quad \text{(۲- ج)}$$

برای روابط کرنش- جابه‌جایی و برمبنای تنش صفحه‌ای نیز داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{(۳)}$$

رابطه (۳) برای نقاط داخلی ماده فله[۱] و نه در نقاط سطحی برقرار می‌باشد. برای نقاط سطحی بایستی اثرات سطح در نظر گرفته شود (شکل هندسی در پیوست نشان داده شده است). اولین اثر سطح، افزایش صلبیت خمشی صفحه می‌باشد. دومین اثر، تنش باقیمانده سطح است که به صورت یکسان در سطح بالایی و پایینی توزیع می‌گردد. براساس تئوری سطح گورتین [۱۷] روابط تشکیل‌دهنده لایه‌های سطح عبارتند از:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s\,\pm} = \tau^{s\,\pm}\delta_{\alpha\beta} + \lambda^{s\,\pm}\,\varepsilon_{\alpha\beta}^{s\,\pm}\,\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{s\,\pm}\,\varepsilon_{\alpha\beta}^{s\,\pm} \quad \text{(۴\_الف)}$$

$$\sigma_{\gamma z}^{s\,\pm} = \tau^{s\,\pm}\frac{\partial w}{\partial \gamma} \quad \text{(۴- ب)}$$

که در آن، $\sigma_{\alpha\beta}^{s\,\pm}$، $\varepsilon_{\alpha\beta}^{s\,\pm}$ و $\tau^{s\,\pm}$ به‌ترتیب تنش، کرنش و تنش باقیمانده لایه‌های سطح (+ بالا و - پایین) هستند. $\lambda^{s\,\pm}$ و $\mu^{s\,\pm}$ ثابت‌های لامه[۲] می‌باشند. همچنین، $\delta_{\alpha\beta}$ دلتا کرونکر را نمایش می‌دهد. در معادلات بالا زیرنویس‌های یونانی مقادیر y,x را نشان می دهد. در نتیجه، با توجه به روابط (۲) و (۴) برای تنش‌های سطوح بالا و پایین داریم:

$$\sigma_{xx}^{s\pm} = \tau + (2\mu^s + \lambda^s)\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda^s + \tau)\frac{\partial v}{\partial y} = \tau \mp \frac{h}{2}\left((2\mu^s + \lambda^s)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda^s + \tau)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad \text{(۵\_الف)}$$

$$\sigma_{yy}^{s\pm} = \tau + (2\mu^s + \lambda^s)\frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda^s + \tau)\frac{\partial u}{\partial x} = \tau \mp \frac{h}{2}\left((2\mu^s + \lambda^s)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\lambda^s + \tau)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad \text{(۵- ب)}$$

$$\sigma_{xy}^{s\pm} = \mu^s\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \tau\frac{\partial v}{\partial x} = \mp(2\mu^s - \tau)\frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{(۵- ج)}$$

$$,\sigma_{xz}^{s} = \tau\frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{yz}^{s} = \tau\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{(۵- د)}$$

برای گسترش مدل صفحه با ملاحظه اثر سطح از منتجه‌های تنش زیر استفاده می‌گردد:

$$M_{xx} = \frac{h}{2}\left(\sigma_{xx}^{s+} - \sigma_{xx}^{s-}\right) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xx}dz \quad \text{(۶- الف)}$$

$$M_{yy} = \frac{h}{2}\left(\sigma_{yy}^{s+} - \sigma_{yy}^{s-}\right) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{yy}dz \quad \text{(۶- ب)}$$

$$M_{xy} = \frac{h}{2}\left(\sigma_{xy}^{s+} - \sigma_{xy}^{s-}\right) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xy}dz \quad \text{(۶- ج)}$$

با اعمال معادلات تعادل صفحات دایروی متقارن معادلات حاکم می‌تواند به صورت زیر به‌دست آید:

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \sigma_{xz}^{s+} + \sigma_{xz}^{s-} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + 2\tau\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{(۷- الف)}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \sigma_{yz}^{s+} + \sigma_{yz}^{s-} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + 2\tau\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{(۷- ب)}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y,t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)\ddot{w}dz = (2\rho^s + \rho h)\ddot{w} \quad \text{(۷- ج)}$$

1- Bulk

2- Lame

که در آن، q, ρ, h به ترتیب ضخامت، چگالی و بار عرضی خارجی وارد بر نانوصفحه می‌باشد.

در نهایت، معادله خیز عرضی نانوصفحه با ملاحظه اثر سطح بر اساس معادلات (۷-۶) برابر است با:

$$D^*\nabla^4 w + \rho^* h\ddot{w} - 2\tau\nabla^2 w - q = 0 \quad (۸)$$

که در آن، $\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2$ و w خیز عرضی صفحه را نمایش می‌دهد. برای D^*, ρ^* داریم:

$$\rho^* = \rho\left(1 + \frac{2\rho_s}{\rho h}\right), D^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \left(\frac{2\mu^s + \lambda^s}{4}\right)h^2$$

عبارت q بار عرضی توزیع‌شده روی نانوصفحه است که در تحلیل ارتعاشات آزاد صفر درنظر گرفته می‌شود. برای حل تحلیلی معادله (۸) به صورت زیر عمل می‌شود:

$$w = w(r,\theta)e^{i\omega t} \quad (۹)$$

با تنظیم‌کردن و دستکاری ریاضی معادله (۸) داریم:

$$\nabla^4 w(r,\theta) - \frac{\rho^* h\omega^2}{D^*}w(r,\theta) - \frac{2\tau}{D^*}\nabla^2 w(r,\theta) = \left(\nabla^2 w(r,\theta) + \frac{-\frac{2\tau}{D^*} + \sqrt{\left(\frac{2\tau}{D^*}\right)^2 + 4\alpha^4}}{2}w(r,\theta)\right)\left(\nabla^2 w(r,\theta) + \frac{-\frac{2\tau}{D^*} - \sqrt{\left(\frac{2\tau}{D^*}\right)^2 + 4\alpha^4}}{2}w(r,\theta)\right) = 0 \quad (۱۰)$$

پارامتر α (پارامتر فرکانسی) به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho^* h\omega^2}{D^*}}$$

پارامترهای κ, λ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\kappa = \sqrt{\frac{-\frac{2\tau}{D^*} + \sqrt{(\frac{2\tau}{D^*})^2 + 4\alpha^4}}{2}}, \lambda = \sqrt{\frac{\frac{2\tau}{D^*} + \sqrt{(\frac{2\tau}{D^*})^2 + 4\alpha^4}}{2}}$$

برای حل معادله (۱۰)، می‌توان با استفاده از جداسازی متغیرها $w(r,\theta) = R(r).e^{in\theta}$ را درنظر گرفت. درنتیجه، برای خیز داریم:

$$w(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(A_{1n}J_n(\kappa r) + A_{2n}Y_n(\kappa r) + A_{3n}I_n(\lambda r) + A_{4n}K_n(\lambda r))e^{in\theta} \quad (۱۱)$$

که در آن، J_n و Y_n توابع بسل عادی و I_n و K_n توابع بسل اصلاح‌شده می‌باشد. ضرایب A_{in} نیز ضرایب شکل مودها هستند که با توجه به شرایط مرزی استخراج می‌گردد.

اعمال شرایط مرزی در تحلیل ارتعاشات صفحات به صورت زیر می‌باشد:

- گیردار که در آن $w = w_r = 0$
- ساده که در آن $w = M_r = 0$
- آزاد که در آن $V_r = M_r = 0$

که در آن، M_r و V_r به‌ترتیب ممان خمشی و نیروی برشی در جهت شعاعی می‌باشد.در مختصات قطبی برای ممان خمشی و نیروی برشی داریم:

$$M_r = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\} \quad (۱۲\text{- الف})$$

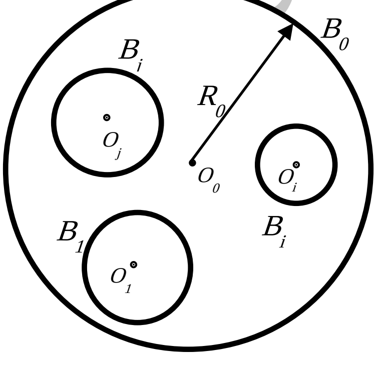
$$M_{r\theta} = -D(1-\nu)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right\} \quad (۱۲\text{- ب})$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w \quad (۱۲\text{- ج})$$

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} \quad (۱۲\text{- د})$$

۳- روش تریفتز و اعمال شرایط مرزی خارج مرکزی

در شکل ۱، یک صفحه دایروی با H سوراخ خارج از مرکز (مراکز دایره‌های خارج از مرکز O_i بوده که i از ۱ تا H می‌باشد) مشاهده می‌شود [۷] .



شکل (۱): یک صفحه دایروی با چند سوراخ خارج از مرکز

این مسئله را می توان با توجه به H+1 شرایط مرزی B_i به صورت زیر نشان داد:

$$B = \bigcup_{0}^{H} B_k \quad (۱۳)$$

در نتیجه با توجه به تئوری تریفتز برای خیز صفحه چند سوراخ می‌توان خیز صفحه را از ترکیب خیز چند دایره داخلی و خارجی به صورت زیر نوشت:

$$w(r_0, r_1, \dots r_H, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_H) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_0} \{ A_{1m}J_m(\kappa r_0) + A_{2m}I_m(\lambda r_0)\} + \sum_{k=1}^{H}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_k}\left\{B_{1m}^{k}H_m^{(1)}(\kappa r_k) + B_{2m}^{k}K_m(\lambda r_k)\right\} \quad (۱۴)$$

که در آن، B_{im}^{k} و B_{im}^{k} ضرایب شکل مودها هستند که با توجه به اعمال شرایط مرزی تعیین می‌گردند. با توجه به این‌که برای دایره بزرگ در حالت کلی بایستی در $r_1 = 0$ مقدار خیز معلوم داشته باشد ضرایب توابع بسل Y و K صفر می‌گردد. برای دوایر داخلی نیز در حالت کلی، هنگامی‌که r_2 بزرگ می‌شود مقدار تابع بسل بهینه‌شده I بسیار بزرگ شده که درنتیجه ضریب این تابع بسل صفر شده و می‌توان مجموع ضرایب توابع بسل J و Y را به صورت تابع هنکل نوع اول $H^{(1)} = J + i \cdot Y$ نمایش داد. همان‌طورکه در شکل **۲** نیز مشخص می‌باشد $(r_p, \theta_p), (r_q, \theta_q)$ به ترتیب زوایا و شعاع‌های قطبی نسبت به دو مرکز دایره p و q می‌باشد. با استفاده از تئوری جمع‌پذیری داریم:

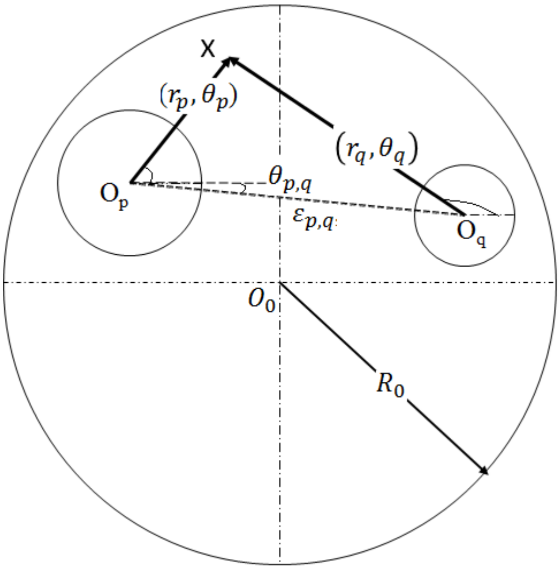
$$J_m(\kappa r_p)e^{im\theta_p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(\kappa\varepsilon_{p,q})e^{i(m-n)\theta_{p,q}}J_n(\kappa r_q)e^{in\theta_q} \quad (\text{۱۵-الف})$$

$$I_m(\lambda r_p)e^{im\theta_p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{m-n}(\lambda\varepsilon_{p,q})e^{i(m-n)\theta_{p,q}}I_n(\lambda r_2)e^{in\theta_q} \quad (\text{۱۵-ب})$$

$$H_m^1(\kappa r_p)e^{im\theta_p} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(\kappa\varepsilon_{p,q})e^{i(m-n)\theta_{p,q}}j_n(\kappa r_q)e^{in\theta_q}, & r_q < \varepsilon_{p,q} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{m-n}(\kappa\varepsilon_{p,q})e^{i(m-n)\theta_{p,q}}H_n^{(1)}(\kappa r_q)e^{in\theta_q}, & r_q > \varepsilon_{p,q} \end{cases} \quad (\text{۱۵-ج})$$

$$K_m(\lambda r_p)e^{im\theta_p} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n K_{m-n}(\lambda\varepsilon_{p,q})e^{i(m-n)\theta_{p,q}}I_n(\lambda r_q)e^{in\theta_q}, & r_q < \varepsilon_{p,q} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} I_{m-n}(\lambda\varepsilon_{p,q})e^{i(m-n)\theta_{p,q}}K_n(\lambda r_q)e^{in\theta_q}, & r_q > \varepsilon_{p,q} \end{cases} \quad (\text{۱۵-د})$$

در معادله (۱۵)، $(\varepsilon_{p,q}, \theta_{p,q})$ مختصات قطبی O_p نسبت به مختصات قطبی O_q است. در نتیجه، اعمال شرایط مرزی به راحتی امکان‌پذیر خواهد شد.



شکل (۲): نمایش هندسی دوایر مرکزی و داخلی

برای اعمال شرایط مرزی داخلی و خارجی طبق معادلات (۱۵-۱۴) داریم:

$$w(r_0, \theta_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{im\theta_0}\{A_{1m}J_m(\kappa r_0) + A_{2m}I_m(\lambda r_0)\} + \sum_{k=1}^{H}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{1m}^{k}j_{m-n}(\kappa\varepsilon_{k,0})e^{i(m-n)\theta_{k,0}}H_n^{(1)}(\kappa r_0)e^{in\theta_0} + B_{2m}^{k}(-1)^{m-n}I_{m-n}(\lambda\varepsilon_{k,0})e^{i(m-n)\theta_{k,0}}K_n(\lambda r_0)e^{in\theta_0}$$

$$\begin{aligned} w(r_p, \theta_p) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_p}\left\{B_{1m}^{p}H_m^{(1)}(\kappa r_p) + B_{2m}^{p}K_m(\lambda r_p)\right\} \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta_p}.e^{i(m-n)\theta_{0,p}}\{A_{1m}J_{m-n}(\kappa\varepsilon_{0,p})J_n(\kappa r_p) + A_{2m}I_{m-n}(\lambda\varepsilon_{0,p})I_n(\lambda r_p)\} \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1,k\neq p}^{H}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta_p}.e^{i(m-n)\theta_{k,p}}\{B_{1m}^{k}H_{m-n}(\kappa\varepsilon_{k,p})J_n^{(1)}(\kappa r_p) + B_{2m}^{k}(-1)^n K_{m-n}(\lambda\varepsilon_{k,p})I_n(\lambda r_p)\} \end{aligned}$$

در معادلات بالا، اندیس O برای دایره خارجی و اندیس p برای هر سوراخ یا دایره داخلی است. در قسمت‌های دوم هر دو معادله بالا با توجه به جابه‌جایی نمایه‌های m و n خواهیم داشت:

$$w(r_0,\theta_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_0}(\{A_{1m}J_m(\kappa r_0) + A_{2m}I_m(\lambda r_0)\}$$
$$\sum_{k=1}^{H}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)\theta_{k,0}}\{B_{1n}^{k}J_{n-m}(\kappa\varepsilon_{k,0})H_m^{(1)}(\kappa r_0) + B_{2n}^{k}(-1)^{n-m}I_{n-m}(\lambda\varepsilon_{k,0})K_m(\lambda r_0)\})$$

(۱۶- الف)

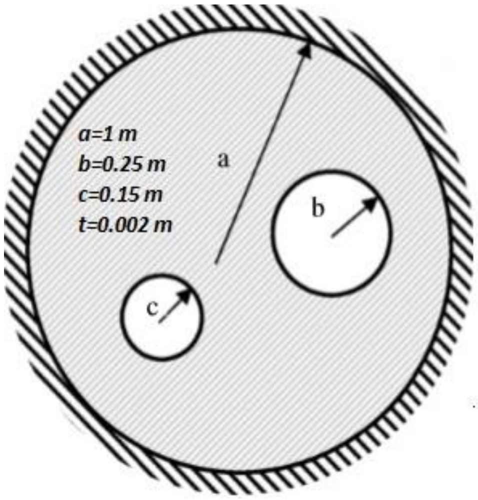
$$w(r_p,\theta_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_p}\,(\{B_{1m}^{p}H_m^{(1)}(\kappa r_p) + B_{2m}^{p}K_m(\lambda r_p)\}$$
$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)\theta_{0,p}}\{A_{1n}J_{n-m}(\kappa\varepsilon_{0,p})J_m(\kappa r_p)$$
$$+A_{2n}I_{n-m}(\lambda\varepsilon_{0,p})I_m(\lambda r_p)\}$$
$$+\sum_{k=1,k\neq p}^{H}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)\theta_{k,p}}\{B_{1n}^{k}H_{n-m}(\kappa\varepsilon_{k,p})J_m^{(1)}(\kappa r_p)$$
$$+B_{2n}^{k}(-1)^{m}K_{n-m}(\lambda\varepsilon_{k,p})I_m(\lambda r_p)\}$$

(۱۶- ب)

حال می‌توان معادلات شرایط مرزی داخلی و خارجی را اعمال نمود. بعد از اعمال شرایط مرزی، بسته به نوع آزاد، ساده و گیرداربودن در یک شعاع و کل زوایا در آن شعاع (عدم وابستگی به θ) برای هر دایره، دو معادله ایجاد می‌شود. با استفاده از ضرب $e^{im\theta_q}$ (که q=0..H) برای همه معادلات دایره خارجی و دوایر داخلی و با توجه به خاصیت تعامد برای هر $m = -\infty..\infty$ یک معادله تشکیل می‌گردد. N نیز در هر کدام از معادلات، از m- تا m تغییر خواهد نمود. درنتیجه با کاهش مقدار m تا همگرایی $(H + 1)(4m + 2)$ معادله وجود دارد. $(H + 1)(4m + 2)$ نیز مجهول وجود دارد که درنتیجه یک دستگاه معادلات به صورت $A_{(H+1)(4m+2)}X_{(H+1)(4m+2)} = 0$ وجود خواهد داشت. در این معادله، X ضرایب شکل مودها می‌باشد. برای این‌که این معادله جواب غیرصفر داشته باشد باید دترمینان ضرایب صفر باشد. برای استخراج فرکانس‌هایی که دترمینان ضرایب را صفر می‌کند از روش کمینه جداسازی مقدار تکین استفاده می شود.

۴- نتایج و بحث

نمونه اول: در شکل **۳** ورق دایروی با دو سوراخ در ابعاد ماکرو در شرایط مرزی در دایره خارجی گیردار و داخلی آزاد مشخص می‌باشد.



شکل (۳): ورق دایره ای با دو سوراخ [۸]

همان‌طورکه در جدول **۱** مشاهده می‌شود نتایج تحلیل با مطالعه حاضر با دقت بسیار خوبی با نتایج منابع و مراجع قبلی مطابقت داشته و مطالعه حاضر نتایج صحیحی را ارائه می‌دهد. فرکانس‌های به‌دست‌آمده به روش اجزاء محدود[۱] در نرم‌افزار آباکوس مدل شده است. مقادیر جدول **۱** پارامتر فرکانسی (α) می‌باشد.

جدول (۱): مقایسه پنج فرکانس ارتعاشی اول بدون بعد ورق دایروی با دو و سه سوراخ غیر هم‌مرکز با لبه‌های داخلی آزاد و لبه خارجی گیردار

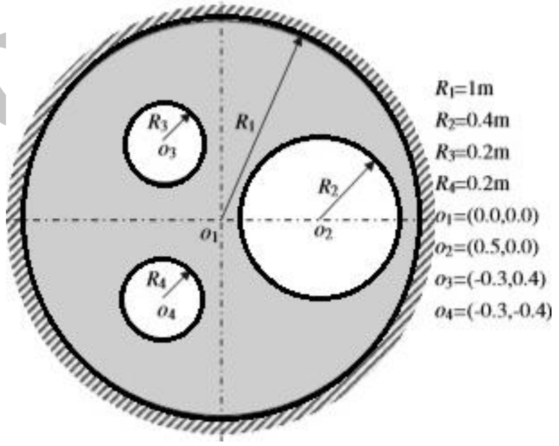
نمونه	روش حل	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم
اول	منبع [۸]	۳/۱۷۷	۴/۵۲۹	۴/۶۹۹
	روش المان محدود	۳/۱۹۵	۴/۵۲۹	۴/۷۰۸
	مطالعه حاضر	۳/۱۷۶	۴/۵۲۷	۴/۶۹۵
دوم	منبع [۱۸]	۳/۱۹۶	۴/۴۸۷	۴/۸۱۵
	روش المان محدود	۳/۱۹۶	۴/۴۸۸	۴/۸۱۷
	مطالعه حاضر	۳/۱۹۵	۴/۴۸۵	۴/۸۱۱

1- FEM

ادامه جدول (۱)

نمونه	روش حل	فرکانس چهارم	فرکانس پنجم
اول	منبع [۸]	۵/۷۵۱	۵/۹۵۷
	روش المان محدود	۵/۸۰۷	۶/۰۲۸
	مطالعه حاضر	۵/۷۴۱	۵/۹۴۲
دوم	منبع [۱۸]	۶/۰۲۳	۶/۱۰۷
	روش المان محدود	۶/۰۲۷	۶/۱۰۸
	مطالعه حاضر	۶/۰۱۵	۶/۱۰۰

نمونه دوم: در شکل **۴** ورق دایروی با دو سوراخ در ابعاد ماکرو در شرایط مرزی در دایره خارجی گیردار و داخلی آزاد مشخص می‌باشد.



شکل (۴): ورق دایروی با سه سوراخ [۱۸]

نمونه سوم: یک صفحه با دو سوراخ (خارج مرکز) که در آن اثرات سطح مورد بررسی قرار گرفته و فرکانس‌های طبیعی استخراج گردیده است. در شکل **۵** یک صفحه گرافنی مدور با دو سوراخ نمایش داده شده است. مشخصات نانوماده گرافن به صورت فله و به صورت لایه سطحی برابر است با:

$$E = 10^9 Gpa\ , \rho = 2750\frac{Kg}{m^3}\ , \nu = 0.3$$

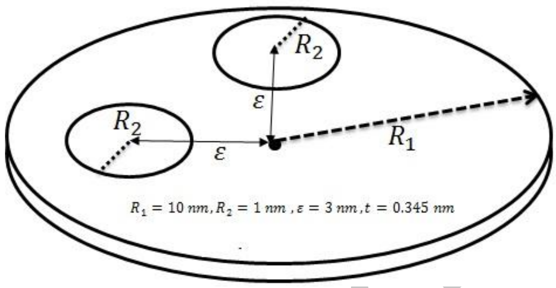
$$\rho^s = 5.46 \times 10^{-7}\frac{Kg}{m^2}\ , E^s = 4, 6, 8\frac{N}{m}\ , \tau = 0.4, 0.5\ , 0.6\frac{N}{m}$$

ثابت‌های لامه برابر هستند با:

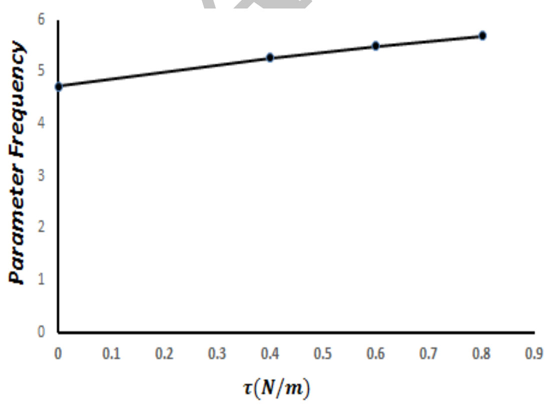
$$\lambda^s = \frac{E^s \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ ,\ \mu^s = \frac{E^s}{2(1+\nu)}$$

که با توجه به مدول الاستیسیته سطحی مشخص می‌گردد. شکل **۶** مقادیر پارامتر فرکانسی اول به ازای مقادیر مختلف تنش سطحی باقیمانده مختلف به صورت زیر می‌باشد. شرایط مرزی خارجی گیردار و داخلی آزاد می‌باشد. همان‌طورکه در این شکل مشاهده می‌شود به ازای افزایش مقدار تنش باقیمانده سطح مقدار پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. همان‌طورکه پیش‌بینی می‌شود وجود پدیده اثر سطح منجر به افزایش فرکانس می‌گردد.

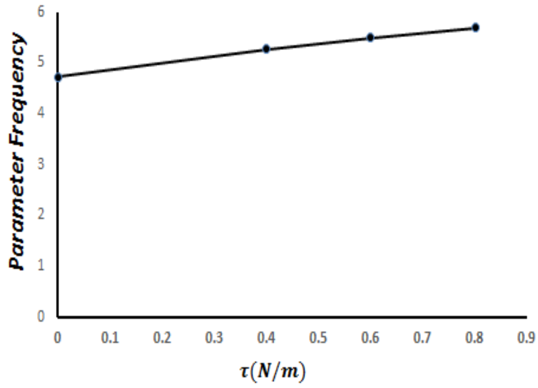
همان‌طورکه از رابطه پارامتر فرکانسی مشخص است با افزایش مقدار مدول الاستیسیته سطحی پارامتر فرکانسی به صورت افزایشی تغییر خواهد کرد. همان‌گونه که از شکل **۷** استنباط می‌شود در شرایط گیردار- گیردار نیز با افزایش تنش باقیمانده سطح مقدار پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که در این شرایط سفتی تکیه‌گاه‌ها بیشتر است سطح فرکانس از حالت قبل بالاتر می‌باشد.



شکل (۵): صفحه مدور گرافنی با دو سوراخ



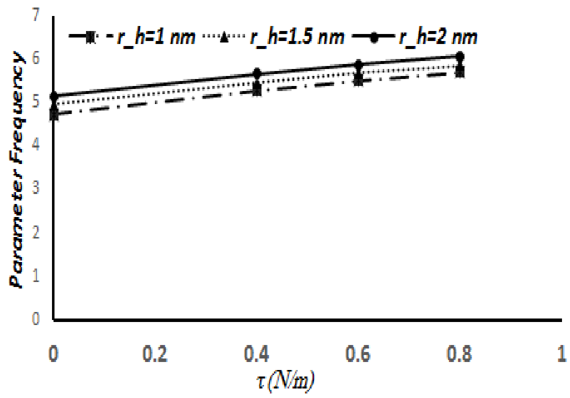
شکل (۶): پارامتر فرکانسی اول بی بعد برحسب تنش باقیمانده سطحی برای شرایط گیردار- آزاد



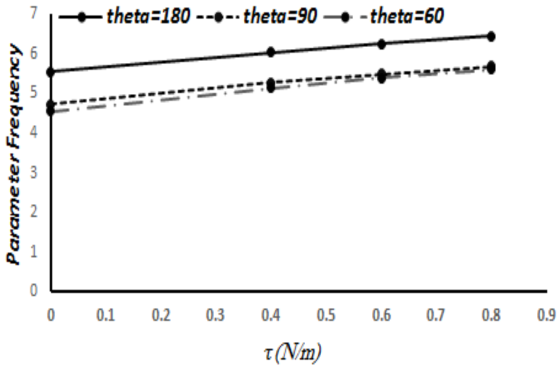
شکل (۷): پارامتر فرکانسی اول برحسب تنش باقیمانده سطحی برای شرایط گیردار- گیردار

در شکل **۸** پارامتر فرکانسی اول برحسب تغییرات تنش سطحی و شعاع سوراخ‌ها ارائه گردیده است. همان‌طورکه از شکل مشخص است افزایش شعاع سوراخ و همچنین افزایش تنش سطحی منجر به افزایش فرکانس بی‌بعد می‌گردد. این پدیده برای حالت‌های دیگر تکیه‌گاهی نیز صحت دارد. در نتیجه افزایش شعاع سوراخ منجر به افزایش فرکانس خواهد گردید.

در شکل **۹** پارامتر فرکانسی اول برحسب تغییرات تنش سطحی و زاویه بین سوراخ‌ها ارائه گردیده است. با توجه به نمودارهای این شکل، مشاهده می‌شود که با افزایش تنش سطحی و همچنین افزایش زاویه بین دو سوراخ، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه با افزایش شعاع بین دو سوراخ فرکانس افزایش می‌یابد.



شکل (۸): پارامتر فرکانسی اول برحسب تنش سطحی و شعاع سوراخ‌ها برای شرایط گیردار- گیردار



شکل (۹): پارامتر فرکانسی اول برحسب تغییرات تنش سطحی و زاویه بین سوراخ‌ها برای شرایط گیردار- گیردار

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تاثیر عیوب فقدان اتمی بر ارتعاشات صفحات گرافنی تک‌لایه مدور با ملاحظه پدیده اثر سطح بررسی و نشان داده شد که وجود سوراخ‌ها در گرافن، موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی و در نتیجه تغییر خواص ارتعاشی گرافن می‌گردد. اثر سطح که تنش و کرنش را در لایه‌های سطحی تغییر می‌دهد، نقش افزایشی داشته و با رشد آن فرکانس افزایش می‌یابد. برای اولین بار چندین سوراخ در گرافن معیوب با چند دایره مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با چند سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و با درنظرگرفتن اثر سطح مطالعه و بررسی گردید. نتایج و شبیه‌سازی برای فرکانس بی‌بعد اول نشان می‌دهد که با افزایش شعاع سوراخ‌ها فرکانس‌های طبیعی ورق معیوب افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش زاویه بین حفره‌ها و عیوب، فرکانس طبیعی ورق معیوب بیشتر می‌شود.

۶- مراجع

1. Dewapriya, N., Arachchige, M. “Molecular Dynamics Study of Effects of Geometric Defects on the Mechanical Properties of Graphene”, Nuwan Dewapriya Mallika Arachchige, 2012.

2. Behfar, K., Naghdabadi, R. “Nanoscale Vibrational Analysis of a Multi-layered Mraphene Sheet Embedded in an Elastic Medium”, J. Compos. Sci. Technol., Vol. 65, Nom′s. 7-8, pp. 1159–1164, 2005.

3. Mohammadi, M., Goodarzi, M., Ghayour, M., Farajpour, A. “Influence of In-plane Pre-load on the Vibration Frequency of Circular Graphene Sheet

Via Nonlocal Continuum Theory", Composites Part B: Engineering, Vol. 51, pp. 121-129, 2013.

4. Ravari, M.K., Shahidi, A. "Axisymmetric Buckling of the Circular Annular Nanoplates Using Finite Difference Method", Meccanica., Vol. 48, No. 1, pp. 135-144, 2013.

5. Lin, W. "Free Transverse Vibrations of Uniform Circular Plates and Membranes with Eccentric Holes", Journal of Sound and Vibration", Vol. 81, No. 3, pp.425-435, 1982.

6. Laura, P.A.A., Masia, U., Avalos, D.R. "Small Amplitude, Transverse Vibrations of Circular Plates Elastically Restrained Against Rotation with an Eccentric Circular Perforation with a Free Edge", Journal of Sound and Vibration, Vol. 292, No′s. 3-5, pp. 1004–1010, 2006.

7. Lee, W.M., Chen, J.T. "Free Vibration Analysis of a Circular Plate with Multiple Circular Holes by Using the Multipole Trefftz Method", CMES, Vol.1403, No.1, pp.1-19, 2009.

8. Lee, W.M., Chen, J.T., Lee, Y.T. "Free Vibration Analysis of Circular Plates with Multiple Circular Holes Using Indirect BIEMs", Journal of Sound and Vibration,Vol. 304, pp. 811-830, 2007.

9. Asemi, SR., Farajpour, A. "Decoupling the Nonlocal Elasticity Equations for Thermo-Mechanical Vibration of Circular Graphene Sheets Including Surface Effects", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 60, pp. 80-90, 2014.

10. Ansari, R., Mohammadi, V., Faghih Shojaei, M., Gholami, R., Sahmani, S. "Surface Stress Effect on the Pull-in Instability of Circular Nanoplates", Journal of Acta Astronautica, Vol. 102, pp. 140–150, 2014.

11. Ansari, R., Gholami, R., Shojaei, MF., Mohammadi, V., Sahmani, S. "Surface Stress Effect on the Vibrational Response of Circular Nanoplates with Various Edge Supports", Journal of Applied Mechanics, Vol. 80, No.2, pp. 021021-021027, 2013.

12. Ansari, R., Mohammadi, V., Faghih Shojaei, M., Gholami, R., Sahmani, S. "Surface Stress Effect on the Postbuckling and Free Vibrations of Axisymmetric Circular Mindlin Nanoplates Subject to Various Edge Supports", Journal of Composite Structures, Vol. 112, pp. 358-67, 2014.

13. Wang, C.M., Duan, W.H. "Free Vibration of Nanorings/Arches Based on Nonlocal Elasticity", Journal of Applied Physics, Vol. 104, No.014303-014308, 2008.

14. Assadi, A. "Size Dependent Forced Vibration of Nanoplates with Consideration of Surface Effects", Journal of Applied mathematical modeling, Vol. 37, No. 5, pp. 3575-3588, 2013.

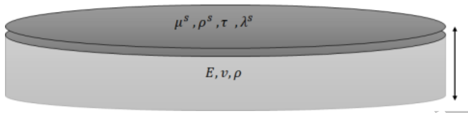
15. Assadi, A., Farshi, B. "Vibration Characteristics of Circular Nanoplates", Journal of Applied Physics, Vol. 108, pp. 074312-074312-5, 2010.

16. Madani, S.H., Sabour, M.H., Fadaee, M. "Effect of Geometrical Defect on Free Vibration of a Circular Graphene sheet using Trefftz Method", in Aerospace Mechanics Journal, Vol. 13, No. 2, pp. 113-121, 2017, (in Persian) .

17. Gurtin, M. E. ,Weissmülle, J., Larch, F. "A General Theory of Curved Deformable Interfaces in Solids at Equilibrium", Philosophical Magazine", Vol. 78, No. 5, pp. 1093-1109, 1998.

18. Lee, W. M. , Chen, J. T. "Null-field Integral Equation Approach for Free Vibration Analysis of circular plates with multiple circular holes", Journal of Comput Mech, Vol. 42, pp. 733–747, 2008.

۷- پیوست‌ها



شکل (۱۰): مشخصات ماده فله و سطح خارجی