

# آنالیز دینامیکی ناپایداری کششی وابسته به اندازه در نانوعملگرهای پیچشی

سروش ملیحی<sup>۱</sup>، یعقوب طادی بنی<sup>۲</sup> و حسین گلستانیان<sup>۳</sup>

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه شهرکرد

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۰۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۸/۲۱)

## چکیده

در این مقاله تأثیر نیروی واندروالس و اثر اندازه بر روی پایداری دینامیکی یک میکرو/نانو آینه الکترواستاتیک پیچشی مدل یک درجه آزادی مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا معادله حرکت سامانه استخراج شده و سپس با استفاده از روش فضای حالت، معادلات دینامیکی حل شده و نتایج مورد نظر استخراج شده است. پارامترهای پولین سامانه شامل زاویه پیچش و ولتاژ مورد بررسی قرار گرفته و وابستگی آن‌ها به نیروی واندروالس و اثرات اندازه نشان داده شده است. همچنین، نتایج نشان می‌دهند که نقاط تعادل سامانه شامل نقاط سنتر، نقاط پایدار فوکوس و نقاط ناپایدار زینی هستند. منحنی‌های فضای فازی مربوط به این نقاط، مسیرهای حلقوی متناوب، حلقه‌های هتروکلینیک و حلقه‌های هوموکلینیک را ایجاد خواهند کرد. علاوه بر این، در مقاله حاضر با استفاده از مدل تنش کوپل اصلاح شده، تأثیر اثر اندازه در دامنه و فرکانس ارتعاشی سامانه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که مدل ارائه شده تطابق بسیار خوبی با نتایج تجربی و آزمایشگاهی دارد.

**واژه‌های کلیدی:** میکرو/نانو آینه پیچشی، ناپایداری دینامیکی پولین، منحنی‌های فازی، نقاط تعادل پایدار و ناپایدار

## Size Dependent Dynamic Pull-in Instability Analysis of Torsional Nano Actuator

S. Malihi, Y. Tadi Beni and H. Golestanian

Faculty of Engineering

Shahrekord University

(Received: 26/November/2015 ; Accepted: 11/November/2016)

### ABSTRACT

In this paper, the effect of van der Waals force and size-dependent on dynamic stability is studied for single degree of freedom model of torsional electrostatic micro/nano mirror. First, the equation of motion of system is derived and applying state space method, dynamic equations are solved and desired results are obtained. The pull-in parameters including tilting angel and voltage are considered and their dependency on van der Waals force and size effect is investigated. As well as results show that equilibrium points of dynamic system include center points, stable focus points and unstable saddle points. The phase portraits related to these equilibrium points created periodic orbits, heteroclinic orbits, and homoclinic orbits. Furthermore, in present study, using modified couple stress thoery the influence of size effect on amplitude and frequency of system is considered. Obtained results show that the model presented in this paper is very good agreement with experimental results

**Keywords:** Torsional Micro/Nano Mirror, Dynamic Instability Pull-in, Phase Portraits, Stable and Instable Equilibrium Points

۱- دکتری: soroosh\_malihi@yahoo.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): tadi@eng.sku.ac.ir

۳- دانشیار: golestanian@eng.sku.ac.ir

Archive of SID

## فهرست علائم و اختصارات

برای بازتاباندن نور و دو تیر می‌باشد که از یک طرف به صفحه متصل می‌شوند. قسمت ثابت آن‌ها، شامل دو پایه نگه‌دارنده که تیرها از سمت دیگر به آن‌ها متصل می‌شوند و الکتروود که در زیر صفحه اصلی قرار گرفته است. وقتی که ولتاژ به سامانه اعمال می‌شود، قسمت متحرک می‌چرخد که بعد از حذف ولتاژ این قسمت متحرک به کمک نیروی بازباننده مکانیکی به حالت اولیه خود باز می‌گردد. اگر ولتاژ از یک حد بحرانی بیشتر شود، نیروی بازباننده مکانیکی دیگر قادر نیست سامانه را به حالت اولیه خود بازگرداند و سامانه ناپایدار می‌شود. با توجه به مطالب بیان شده، باید در طراحی نمزهای پیچشی و نانواینه‌ها متغیرهای ناپایداری پولین<sup>۲</sup> یعنی زاویه پولین و ولتاژ پولین تعیین شوند.

محققان رفتار استاتیکی میکرو- نانواینه‌های پیچشی الکترواستاتیکی را با در نظر گرفتن نیروهای بین مولکولی مورد بررسی قرار دادند. از نیروهای بین مولکولی می‌توان به نیروی کازمیر<sup>۳</sup> و نیروی واندروالس<sup>۴</sup> اشاره کرد. برهم کنش واندروالس بین دو جسم میکروسکوپی در بیش از نیم قرن به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است [۱]. نیروی واندروالس می‌تواند نقش بسیار مؤثری در سازه‌های نما ایفا می‌کند. همچنین، وقتی که فاصله صفحه و الکتروود به اندازه کافی کوچک باشد، به خاطر عملکرد پیچش نیروی کازمیر و واندروالس، حتی اگر هیچ گشتاور الکترواستاتیکی وجود نداشته باشد، پولین هنوز می‌تواند با یک انحراف کوچک در زاویه اتفاق بیفتد [۲]. در بررسی‌های انجام شده بر روی سامانه‌های میکروالکترومکانیکی، عمدتاً این سامانه‌ها از دو جنبه رفتار استاتیکی و رفتار دینامیکی مدنظر قرار می‌گیرد. در حالت استاتیکی پارامتر زمان مطرح نمی‌شود و معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مساله با کمک تئوری‌های مرتبه بالا با دقت بالایی حل می‌شوند. طادی بنی [۳] از تئوری مکانیک پیوسته برای بررسی وابستگی اندازه ناپایداری پولین محرک‌های پیچشی نانوالکترواستاتیکی کوپل- شده پیچش و خمش استفاده کرده است. همچنین، در تحقیقاتی دیگر، ناپایداری پولین کوپل شده پیچشی- خمشی نانواینه‌های الکترواستاتیکی پیچشی با در نظر گرفتن نیروی

ثابت هاماکر، J	$\bar{A} = (0.4-4) \times 10^{-19}$
عرض صفحه اصلی	a
فاصله داخلی بین دو الکتروود	$a_1$
فاصله خارجی بین دو الکتروود	$a_2$
طول صفحه اصلی	b
طول شکاف بین صفحه اصلی و الکتروود	D
نسبت کوپلینگ خمشی به پیچشی	K
تیر	L
نصف طول تیر پیچشی	t
ضخامت تیر پیچشی	T
زمان تناوب	V
ولتاژ اعمالی بین الکتروود و صفحه اصلی	v
عرض تیر پیچشی	w

## علائم یونانی

ثابت دی الکتریک خلا، $C^2 N^{-1} m^{-2}$	$\epsilon = 8.854 \times 10^{-12}$
زاویه پیچش صفحه اصلی	$\theta$
زاویه پولین بی‌بعد شده	$\theta_{PI}$

## بالانویس

متقارن	s
--------	---

## زیرنویس

مستهلك	damp
مؤثر	eff
الاستیکی	elas
الکتریکی	elec
اینرسی	inertia
ناپایداری پولین	PI

## ۱- مقدمه

اخیراً نسل جدیدی از سامانه‌های ممز/نمز<sup>۱</sup> به نام نمزهای نوری یا سامانه‌های میکروالکترومکانیکی نوری تولید گردید که میکرو/نانو آینه‌ها شامل این سامانه‌ها می‌باشد. میکرو/نانو آینه‌ها کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف از جمله پزشکی و فضایی دارند. قسمت متحرک نانواینه‌ها شامل یک صفحه اصلی

2- Pull-in  
3- Casimir  
4- Van Der Waals

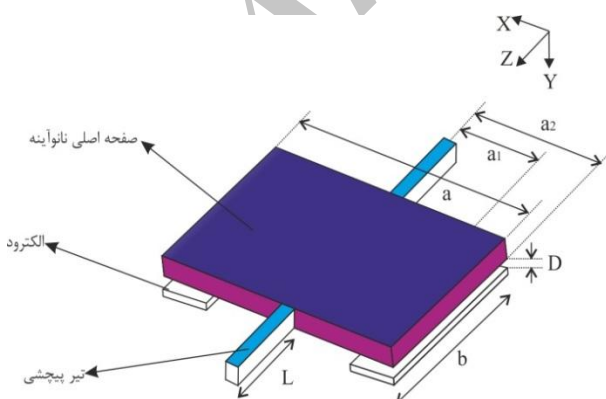
نمز بررسی کردند. آن‌ها معادله حرکت بی بعد میکروآینه را ارایه کرده و به بررسی تحلیل کیفی رفتار دینامیکی آن پرداختند. خاتمی و رضازاده [۱۴] با استفاده از یک مدل دو درجه آزادی، پاسخ دینامیکی یک میکروآینه به شوک مکانیکی را مورد بحث قرار دادند.

برای بررسی رفتار ساختارهای مختلف در مقیاس میکرو/نانو باید از تئوری مرتبه بالا استفاده کرد. بابایی بیردایی و بهجت [۱۵] از مدل غیرموضعی برای بررسی رفتار تیر اوپلر-برنولی بر روی بستر الاستیک وینکلر و پسترناک استفاده کردند. جلالی و خادم [۱۶] ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق ویسکوالاستیک کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن را مورد بررسی قرار دادند.

در مقاله حاضر برای بررسی دقیق تر رفتار دینامیکی نانوآینه‌های پیچشی در مدل جدید برای لحاظ نمودن اثرات اندازه در مقیاس نانو از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده است و همچنین برای لحاظ نمودن نیروهای بین ملکولی در مقیاس نانو، اثرات نیروی واندروالس در مدل سازی لحاظ شده است. پارامترهای پولین تحت این خصوصیات مورد بررسی قرار گرفته، نقاط تعادل سامانه استخراج شده و منحنی‌های فضای فازی برای نقاط تعادل سامانه در دو وضعیت پایدار و ناپایدار به دست آمده است.

## ۲- معادلات مقدماتی

شکل ۱ یک نانوآینه پیچشی الکترواستاتیک را نشان می‌دهد.



شکل (۱): نانوآینه پیچشی.

نانوآینه از یک صفحه اصلی و دو تیر الاستیک پیچشی که در بالای دو الکتروود ثابت است، ساخته شده است. برای

واندروالس مولکولی<sup>۱</sup> [۴] و تأثیر نیروی کازمیر بر روی خمش و پیچش کوپل شده در ناپایداری پولین یک نانومحرک الکترواستاتیک [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. تسیاتس و کاتسیکادلیس<sup>۲</sup> [۶] یک مدل جدید از تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای مسأله پیچش سنت و نانت میله‌های میکرو با سطح مقطع دلخواه ارایه کردند. تانگ و همکاران<sup>۳</sup> [۷] تأثیرات اندازه را بر روی پیچش تیرهای با مقاطع مختلف بررسی کردند. زمانی که اندازه تیر در مقیاس نانو و میکرو می‌باشد، صلبیت پیچشی آن از حالت مرسوم و ماکرو بیش تر می‌شود. همچنین، با استفاده از معادلات غیرخطی حاکم بر مسأله، رفتار الکترواستاتیکی میکروآینه‌های پیچشی با استفاده از مدل استاتیکی با در نظر گرفتن پیچش و خمش تیرها توسط رضازاده و همکارانش [۸] بررسی شده است. معین فرد و احمدیان [۹] تأثیر نیروی واندروالس را بر روی رفتار پولین نانو میکروآینه‌های تحریک شده الکترواستاتیکی مورد بررسی قرار دادند. هوانگ و همکاران<sup>۴</sup> [۱۰] مقایسه‌ای بین داده‌های تجربی و یک مدل تئوری با استفاده از تأثیر خمش و پیچش کوپل شده ارایه کردند و در آن خصوصیات استاتیکی میکروآینه‌های پیچشی الکترواستاتیکی به خصوص تأثیر پولین را مورد بررسی قرار دادند.

در بررسی رفتار دینامیکی، معادلات حاکم بر مسأله، معادله بی بعد حرکت سامانه می‌باشد که معمولاً با کمک روش فضای حالت حل می‌شود. محققان بسیاری رفتار دینامیکی این نوع سامانه‌ها را مورد بررسی قرار دادند. نمیرووسکی و دگانی<sup>۵</sup> [۱۱] یک مدل عمومی برای پدیده پولین در محرک‌های الکترواستاتیکی با یک درجه آزادی ارائه دادند. در تحقیقی دیگر ژائو و همکاران<sup>۶</sup> [۱۲] مدل تئوری از خصوصیات دینامیکی نانوآینه‌ها با در نظر گرفتن پیچش و خمش همزمان ارایه کردند که در آن محققان پاسخ پله و پاسخ هارمونیک پایدار نانوآینه‌ها را با روش رانگ-کوتا آنالیز کردند. گائو و ژائو<sup>۷</sup> [۱۳] تأثیر نیروی واندروالس را روی پایداری استاتیکی و دینامیکی آینه‌های

- 1- Molecular Van Der Waals Force
- 2- Tsiatas and Katsikadelis
- 3- Tong
- 4- Huang
- 5- Nemirovsky and Degani
- 6- Zhao
- 7- Guo and Zhao

که در آن،  $\theta_{\max}$  زاویه بیش تر پیچش صفحه اصلی است. بنابراین، با در نظر گرفتن زاویه پیچش کوچک و روابط (۶)، رابطه (۵) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$M_{elec} = \frac{\varepsilon V^2 b}{2\theta_{\max}^2 \Theta^2} \left( \frac{1}{1-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\alpha\Theta} + \ln \left( \frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta} \right) \right) \quad (7)$$

مقدار گشتاور واندروالس کل وارد بر سامانه از رابطه زیر به دست می آید [۲]:

$$\begin{aligned} dM_{vdw} &= dM_{vdw}^L - dM_{vdw}^R \\ &= \int_0^{a/2} \left( \frac{\bar{A}b}{6\pi(D-r\sin(\theta))^3} r dr + \frac{\bar{A}b}{6\pi(D+r\sin(\theta))^3} r dr \right) \\ &= \frac{\bar{A}b}{6\pi(\sin(\theta))^2} \left[ \frac{D}{2\left(D-\frac{a}{2}\sin(\theta)\right)^2} - \frac{D}{2\left(D+\frac{a}{2}\sin(\theta)\right)^2} + \frac{1}{\left(D+\frac{a}{2}\sin(\theta)\right)} - \frac{1}{\left(D-\frac{a}{2}\sin(\theta)\right)} \right] dr. \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن،  $\bar{A}$  ثابت هاماکر می باشد. بنابراین، برای زاویه پیچش کوچک، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M_{vdw} &= \frac{\bar{A}b}{12\pi\theta_{\max}^2 \Theta^2 D} \left[ \frac{2\Theta-1}{(1-\Theta)^2} + \frac{2\Theta+1}{(1+\Theta)^2} \right] \\ &= \frac{\bar{A}b}{3\pi\theta_{\max}^2 D} \left( \frac{\Theta}{(1-\Theta)^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

## ۲-۱- معادله استاتیکی پیچشی تیر

معادله حاکم بر تعادل پیچشی نانوتیر با استفاده از تعادل لنگر گشتاور آن به صورت زیر به دست می آید:

$$M_{elas} - \frac{1}{2}(M_{elec} + M_{vdw}) = 0 \quad (10)$$

که در معادله فوق،  $M_{elas}$  لنگر گشتاوری بازگرداننده مکانیکی تیر می باشد. برای محاسبه  $M_{elas}$  سطح مقطع تیر از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و قانون سنت و ننت استفاده می شود. طبقه محاسبه  $M_{elas}$  با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده در پیوست آورده شده است.

با قراردادن معادلات (۷)، (۹) و (پ-۶) در معادله (۱۰) معادله تعادل در پیچش به صورت زیر بیان می گردد:

استخراج کردن معادلات حاکم بر مسأله، تغییر مکان های عمودی و زاویه ای نانو تیر پیچشی بسیار کوچک فرض می شود. فرض تغییر مکان های عمودی و زاویه ای بسیار کوچک در نظر گرفته شده در بررسی سامانه های نمز باعث ایجاد خطای کم تر از ۱٪ در نتایج می شود که قابل قبول است [۱۰]. در این مقاله، خصوصیات رفتار مواد به صورت خطی در نظر گرفته می شود. انرژی کرنشی تئوری تنش کوپل اصلاح شده، طبق رابطه زیر تعریف می شود [۶]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dV \quad (1)$$

که در آن،  $\varepsilon_{ij}$  مولفه های تانسور کرنش،  $\chi_{ij}^s$  مولفه های تانسور گرادیان چرخش متقارن،  $\sigma_{ij}$  مولفه های تانسور تنش کلاسیک و  $m_{ij}^s$  مولفه های تنش های مرتبه بالا هستند. رابطه کرنش ها و جابه جایی به صورت زیر بیان می گردد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \chi_{ij}^s = \frac{1}{2} e_{jkl} u_{q,ki} \quad (2)$$

همچنین روابط معادله مشخصه برای تنش کلاسیک و تنش های مرتبه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \right), \quad m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s, \quad (3)$$

که در آن،  $\mu = E/(2(1+\nu))$  مدول برشی،  $E$  مدول یانگ و  $\nu$  نسبت پواسون است و پارامتر طول مادی ۱ مربوط به گرادیان چرخشی است.

گشتاور الکترواستاتیکی نیز برای یک المان دیفرانسیلی از صفحه نانواینه از رابطه زیر به دست می آید [۳]:

$$dM_{elec} = \frac{\varepsilon V^2 b}{2(D-r\sin\theta)^2} r dr \quad (4)$$

بنابراین، گشتاور الکترواستاتیکی کل حول محور پیچشی عبارت است از:

$$\begin{aligned} M_{elec} &= \int_{a_1}^{a_2} dM_{elec} \\ &= \frac{\varepsilon V^2 b}{2 \sin^2 \theta} \left( \frac{D}{D-a_2 \sin \theta} - \frac{D}{D-a_1 \sin \theta} + \ln \left( \frac{D-a_2 \sin \theta}{D-a_1 \sin \theta} \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن،  $V$  ولتاژ اعمالی بین صفحه آینه و الکتروود پارامترهای بی بعد  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\Theta$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_{\max}}, \quad \alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \beta = \frac{a_2}{a}, \quad \theta_{\max} = \frac{2D}{a}, \quad (6)$$

همچنین روابط (۱۴)، معادله حرکت سامانه به صورت رابطه زیر به دست می آید:

$$I \ddot{\Theta} + C \dot{\Theta} + K_t \Theta = \frac{\varepsilon V^2 b}{2\theta_{\max}^3 \Theta^2} \left( \frac{1}{1-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\alpha\Theta} + \ln \left( \frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta} \right) \right) + \frac{\bar{A}b}{3\pi\theta_{\max}^2 D} \left( \frac{\Theta}{(1-\Theta^2)^2} \right) \quad (15)$$

برای حل معادله بالا از پارامترهای بی بعد استفاده می گردد که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\xi = \frac{CT}{I}, \eta = \frac{\varepsilon b V^2}{2\theta_{\max}^3 K_t}, T^2 = \frac{I}{K_t}, \lambda = \frac{\bar{A}b}{3\pi\theta_{\max}^2 D}, \tau = \frac{t}{T} \quad (16)$$

که در آن، T زمان تناوب سامانه می باشد. با به کار بردن پارامترهای بی بعد در رابطه (۱۶)، معادله حرکت سامانه به صورت معادله بی بعد (۱۷) استخراج می شود:

$$\ddot{\Theta} + \xi \dot{\Theta} + \Theta = \frac{\eta}{\Theta^2} \left( \frac{1}{1-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\alpha\Theta} + \ln \left( \frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta} \right) \right) + \lambda \left( \frac{\Theta}{(1-\Theta^2)^2} \right) \quad (17)$$

برای حل معادله (۱۷) با روش فضای حالت، پارامترهای  $x_1$  و  $x_2$  به صورت روابط زیر تعریف می شود:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \Theta \\ x_2 &= \dot{\Theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Theta} = \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{\Theta} = \dot{x}_2 = \frac{\eta}{x_1^2} \left( \frac{1}{1-\beta x_1} - \frac{1}{1-\alpha x_1} + \ln \left( \frac{1-\beta x_1}{1-\alpha x_1} \right) \right) + \lambda \left( \frac{x_1}{(1-x_1^2)^2} \right) - \xi x_2 - x_1. \end{cases} \quad (18)$$

ماتریس ژاکوبین سامانه به صورت رابطه (۱۹) است:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x_1) & -\xi \end{pmatrix} \quad (19)$$

که در آن:

$$F(x_1) = \frac{\eta}{x_1^2} \left( \frac{1}{1-\beta x_1} - \frac{1}{1-\alpha x_1} + \ln \left( \frac{1-\beta x_1}{1-\alpha x_1} \right) \right) + \lambda \left( \frac{x_1}{(1-x_1^2)^2} \right) - x_1. \quad (20)$$

$$-\frac{\varepsilon b V^2}{2\theta_{\max}^3 \Theta^2} \left[ \frac{1}{1-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\alpha\Theta} + \ln \left( \frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta} \right) \right] + \frac{2\Theta\theta_{\max}(\mu J)_{\text{eff}}}{L} - \frac{\bar{A}b}{3\pi\theta_{\max}^2 D} \left( \frac{\Theta}{(1-\Theta^2)^2} \right) = 0 \quad (11)$$

که در آن:

$$(\mu J)_{\text{eff}} = \mu(J + J_c)$$

بنابراین، از رابطه (۱۱) می توان ولتاژ اعمالی بر سامانه را طبق رابطه (۱۲) به دست آورد:

$$V = \left[ \left( \frac{4\theta_{\max}^3 \theta_{\text{eff}}^3}{\varepsilon b} \right) \left[ \frac{(\mu J)_{\text{eff}}}{L} - \frac{\bar{A}b}{6\pi\theta_{\max}^2 D(1-\Theta^2)^2} \right] \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{1-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\alpha\Theta} + \ln \left( \frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta} \right) \right] \quad (12)$$

رابطه (۱۲) را می توان به صورت بی بعد مانند رابطه (۱۳) بازنویسی کرد:

$$\bar{V} = \frac{V}{\left( \frac{4\theta_{\max}^3 (\mu J)_{\text{eff}}}{\varepsilon b L} \right)^{1/2}} = \left( \frac{1 - \frac{\bar{A}bL}{6\pi\theta_{\max}^2 D(1-\Theta^2)^2} (\mu J)_{\text{eff}}}{\left[ \frac{1}{1-\beta\Theta} - \frac{1}{1-\alpha\Theta} + \ln \left( \frac{1-\beta\Theta}{1-\alpha\Theta} \right) \right]} \right)^{1/2} \quad (13)$$

زمانی که اندازه و هندسه میکروآینه پیچشی مشخص باشد، می توان زاویه پولین سامانه  $\Theta_{PI}$  را از رابطه  $\frac{d\bar{V}}{d\Theta} = 0$  به راحتی به دست آورد. سپس با جایگذاری  $\Theta_{PI}$  در رابطه (۱۳)، مقدار  $\bar{V}_{PI}$  نیز به دست می آید.

## ۲-۲- معادله دینامیکی پیچشی تیر

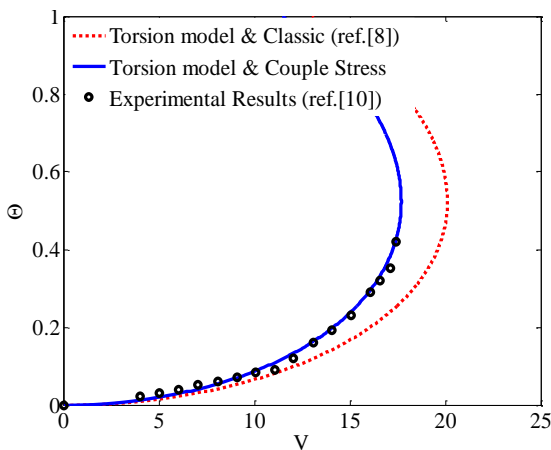
در این قسمت برای استخراج معادله دینامیکی حاکم از نتایج قسمت قبل استفاده می گردد و سامانه موردنظر با یک سامانه فنر پیچشی و مستهلک کننده مدل می گردد که در آن گشتاورهای حاکم بر معادله حرکت به صورت روابط زیر می باشند:

$$\begin{aligned} M_{\text{elas}} &= K_t \theta = 2 \frac{(\mu J)_{\text{eff}}}{L} \theta_{\max} \Theta, \\ M_{\text{damp}} &= C \dot{\Theta} = C \theta_{\max} \dot{\Theta}, \\ M_{\text{inertia}} &= I \ddot{\Theta} = I \theta_{\max} \ddot{\Theta}, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن،  $\mu$  مدول برشی،  $J_{\text{eff}}$  ممان اینرسی معادل سطح مقطع مستطیل شکل، C ثابت مستهلک کننده و I ممان اینرسی صفحه اصلی می باشد. با استفاده از روابط (۷ و ۹) و

همچنین برای میکروآینه مدول برشی  $\mu = ۶۶$  Gpa و نسبت پواسون  $\nu = ۰/۲۹$  می‌باشد.

به منظور تصدیق، مدل حاضر که با استفاده از تئوری تنش کوپل در نظر گرفته شده است، با نتایج تجربی مقایسه شده و همچنین اختلاف آن با مدل پیچشی کلاسیک بررسی می‌شود. نتایج تئوری تنش کوپل و تجربی و تفاوت آن‌ها با مدل کلاسیک در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل (۲): مقایسه نتایج ولتاژ و زاویه پولین تجربی و مدل تنش کوپل با مدل کلاسیک پیچشی یک درجه آزادی.

میکروآینه مورد آزمایش با استفاده از روش میکروماشین-کاری سطح سه لایه‌ای پلی‌سیلیکون تولید شده است. در این روش از یک لایه نیتريد مجزا بر روی زیرلایه سیلیکون، سه لایه پلی‌سیلیکون به ضخامت  $۰/۵\mu\text{m}$ ،  $۱/۵\mu\text{m}$  و  $۲\mu\text{m}$  و دو لایه از فسفوسیلیکات شیشه که بین سه لایه پلی‌سیلیکون قرار می‌گیرد، استفاده می‌شود. در نهایت بر روی لایه فوقانی پلی‌سیلیکون، یک لایه فلزی به ضخامت  $۰/۵\mu\text{m}$  برای ایجاد سطح انعکاس قرار داده می‌شود. برای اندازه‌گیری زاویه پیچش میکروآینه، پرتو لیزر بر روی سطح میکروآینه تابانده می‌شود. سپس انعکاس آن توسط یک صفحه تصویر، جمع‌آوری شده و تصویر توسط دوربین گرفته می‌شود. با اندازه‌گیری جابه‌جایی پرتو لیزر، زاویه پیچش میکروآینه محاسبه می‌شود [۱۷].

نتایج نشان می‌دهد که پارامترهای پولین به دست آمده با تئوری تنش کوپل برای مدل یک درجه آزادی پیچش تیر با شرط  $(l/t=۰/۵)$  بسیار نزدیک به مقادیر تجربی به دست آمده است. بنابراین مدل پیشنهادی یک درجه آزادی با دقت بسیار خوبی قادر به پیش‌بینی زاویه و ولتاژ پولین سامانه می‌باشد.

و علامت مشتق نسبت به  $x_1$  می‌باشد. مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین به صورت  $\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 4F'(x_1)})$  می‌باشد.

نقاط تعادل با برابر صفر قراردادن سمت راست روابط (۱۸) به دست می‌آید:

$$x_2 = 0, \quad \frac{\eta}{x_1^2} \left( \frac{1}{1-\beta x_1} - \frac{1}{1-\alpha x_1} + \ln \left( \frac{1-\beta x_1}{1-\alpha x_1} \right) \right) + \lambda \left( \frac{x_1}{(1-x_1^2)^2} \right) - x_1 = 0, \quad (21)$$

اگر در رابطه (۲۱) ولتاژ را برابر صفر قرار دهیم یعنی  $\eta=0$  می‌توان تغییرات زاویه پولین را بر حسب مقدار فاصله بین صفحه اصلی و الکتروود در نبود ولتاژ به دست آورد. همچنین مقدار این فاصله بحرانی به صورت رابطه (۲۲) به دست می‌آید:

$$d_{cr} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\bar{A}b}{3\pi K_t L} \times \frac{1}{(1-\theta^2)^2} \right)^{1/4} = \left( \frac{\bar{A}b}{3\pi K_t L} \right)^{1/4} \quad (22)$$

فاصله بین صفحه اصلی و الکتروود زیرین به همراه ولتاژ پولین از پارامترهایی هستند که بایستی با وجود نیروی و ندروالس در سامانه برای جلوگیری از ناپایداری در نظر گرفته شوند.

### ۳- نتایج و بحث

در این قسمت رفتار دینامیکی نانوآینه تحت اثر نیروی و اندروالس و اثر اندازه بر روی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

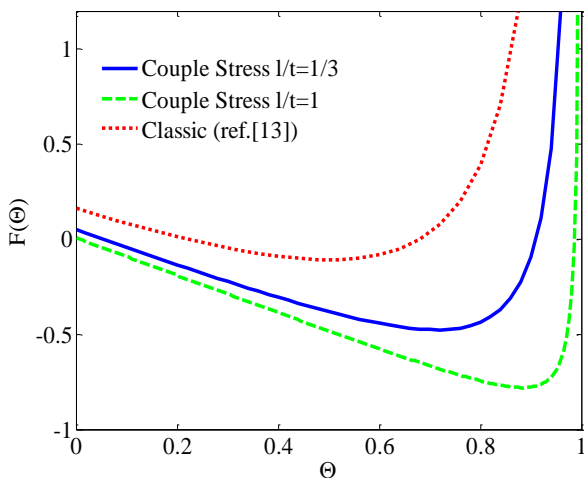
#### ۳-۱- اعتبارسنجی مدل حاضر و مقایسه آن با نتایج تجربی

مشخصات هندسی سامانه مورد نظر در جدول ۱ آمده است:

جدول (۱): مشخصات هندسی میکروآینه پیچشی.

مورد	اندازه ( $\mu\text{m}$ )
طول صفحه اصلی آینه a	۱۰۰
عرض صفحه اصلی آینه b	۱۰۰
ضخامت صفحه اصلی آینه t	۱/۵
طول تیر پیچشی L	۶۵
عرض تیر پیچشی w	۱/۵۵
ضخامت تیر پیچشی t	۱/۵
عرض الکتروود $a_1$	۶
عرض الکتروود $a_2$	۸۴
طول گپ بین صفحه و الکتروود D	۲/۷۵

و  $\Theta_{pullin}$  در حقیقت بین این دو نقطه تعادل قرار می‌گیرد. مقدار این نقطه بحرانی نیز با استفاده از معادله  $F'(\Theta)=0$  به دست می‌آید. با توجه به شکل می‌توان دریافت که مقدار زاویه نقاط تعادل پایدار در مدل ارائه‌شده با تئوری تنش کوپل کم‌تر از مدل کلاسیک و مقدار زاویه نقاط تعادل ناپایدار در مدل ارائه‌شده با تئوری تنش کوپل بیش‌تر از مدل کلاسیک است. بنابراین، اثر اندازه باعث افزایش فاصله بین نقطه تعادل پایدار و ناپایدار شده است.



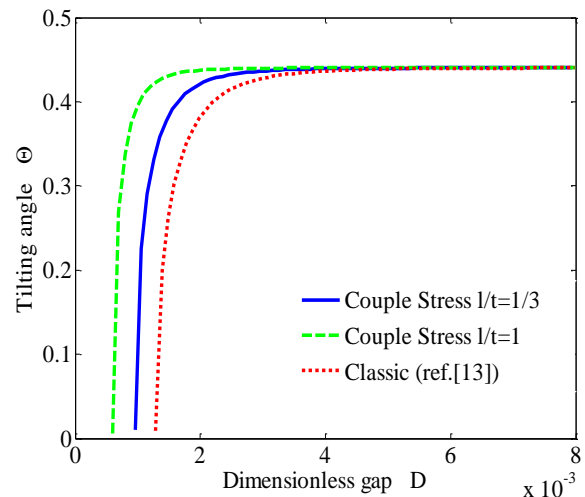
شکل (۴): منحنی تغییرات تابع  $F(\Theta)$  بر حسب  $\Theta$  برای ولتاژ  $V = \Delta/\delta < V_{pullin}$ .

از دو نقطه تعادل به دست آمده نقطه‌ای که دارای مقدار کم‌تری است نقطه تعادل پایدار سامانه می‌باشد. چون  $F'(\Theta_1) < 0$ ، مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین درحالتی که  $\xi = 0$  باشد، به صورت ریشه‌های موهومی بدون مقدار حقیقی هستند و نمودار فازی آن به صورت سنتر است. اما وقتی که  $\xi \neq 0$  و  $|F'(\Theta)| < 4\xi^2$  باشد، نقطه تعادل به صورت فوکوس<sup>۱</sup> می‌باشد. در صورتی که قسمت حقیقی ریشه‌ها منفی باشد (یعنی  $\xi > 0$ )، نقطه تعادل به صورت فوکوس پایدار می‌باشد. زمانی که  $\xi \neq 0$  و  $|F'(\Theta)| > 4\xi^2$  باشد، نقطه تعادل یک نقطه ناپایدار زینی<sup>۳</sup> می‌باشد که برای ولتاژ پایین‌تر از ولتاژ پولین فیزیکی نمی‌باشد. نقطه دوم که دارای مقدار بیش‌تر از نقطه اول است، نقطه تعادل ناپایدار سامانه می‌باشد. چون  $F'(\Theta_2) > 0$  است مقادیر ویژه دارای ریشه‌های با علامت مخالف هستند. بنابراین، این نقطه دیگر به مقدار  $\xi$  وابسته نیست و منحنی فازی آن به صورت نقطه ناپایدار زینی است.

### ۳-۲- رفتار نانوآینه پیچشی با در نظر گرفتن اثر اندازه

مقادیر زاویه و ولتاژ پولین به هندسه سامانه نیز وابسته است. بنابراین، مقدار گپ بین صفحه اصلی و الکتروود زیرین دارای اهمیت می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۸)، می‌توان تغییرات زاویه پولین را برحسب مقدار گپ بین صفحه و الکتروود مطابق شکل ۳ رسم کرد. در این شکل، اختلاف دو تئوری کلاسیک و تنش کوپل به خوبی نشان داده شده است. مطابق منحنی‌های تئوری تنش کوپل با افزایش مقدار نسبت پارامتر مادی ۱ به ضخامت سطح مقطع تیر پیچشی، مقدار گپ کاهش می‌یابد. منحنی‌ها در نهایت با افزایش مقدار گپ بین صفحه اصلی و الکتروود به یک مقدار ثابت زاویه پولین ( $\Theta = 0.4404$ ) میل می‌کنند و در مقادیر بیش‌تر از  $D = 0.05$  دیگر افزایش نخواهد یافت.

برای هر مقدار از ولتاژ اعمالی، معادله (۱۸) دارای چند ریشه می‌باشد که تعدادی از این ریشه‌ها به صورت حقیقی و تعدادی موهومی است. اما تنها ریشه‌هایی که بین ۰، ۱ و حقیقی می‌باشد، قابل قبول است. بنابراین، می‌توان بسته به مقدار پارامترهای ولتاژ اعمالی و مقدار گپ بین صفحه اصلی و الکتروود، چند حالت را مورد بررسی قرار داد.



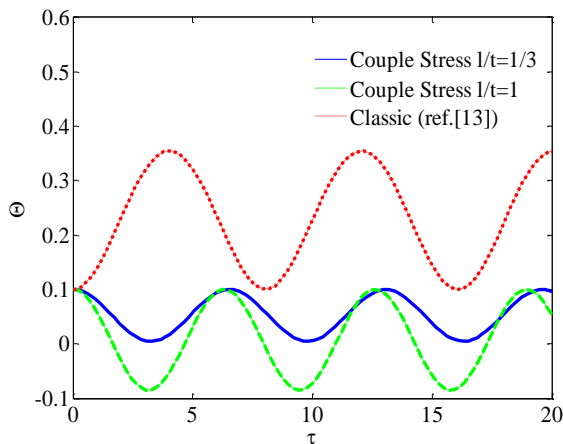
شکل (۳): منحنی تغییرات زاویه پولین برحسب مقدار گپ بین صفحه اصلی و الکتروود زیرین سامانه.

#### حالت اول: $D > D_{critical}$ and $V < V_{pullin}$

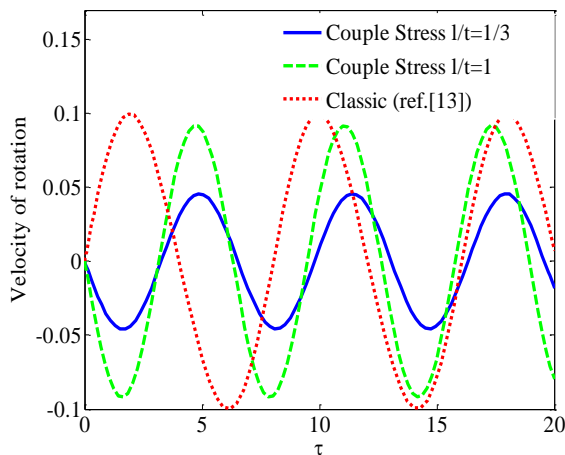
همان‌طور که در شکل ۴ آمده است، مقدار متغیر  $\Theta$  بین مقادیر ۰ و ۱ می‌باشد و منحنی‌ها در دو نقطه  $\Theta_1$  و  $\Theta_2$  خط  $F(\Theta)=0$  را قطع می‌کنند. این نقاط، نقاط تعادل سامانه هستند

1- Center  
2- Focus  
3- Saddle





شکل (۷): منحنی تغییرات زاویه برحسب زمان برای ولتاژ  $V = \delta/\delta < V_{pullin}$  بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

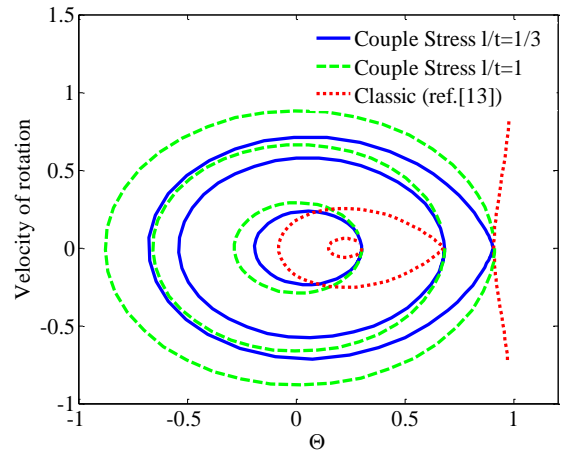


شکل (۸): منحنی تغییرات سرعت دورانی برحسب زمان برای ولتاژ  $V = \delta/\delta < V_{pullin}$  بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

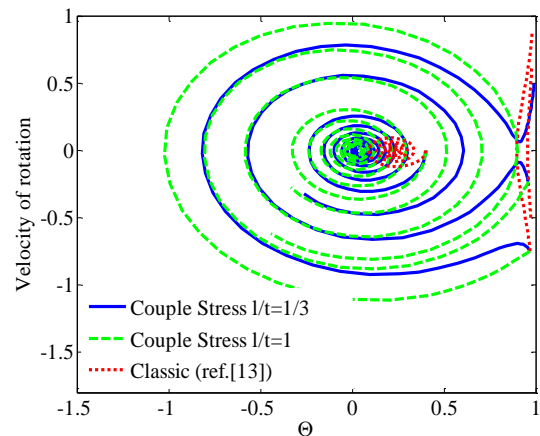
همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، دامنه تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه در مدل تنش کوپل و با لحاظ کردن اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک کاهش یافته است. همچنین، دوره تناوب سامانه با در نظر گرفتن اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک کمتر شده است.

اشکال ۹-۱۰ نیز، به ترتیب منحنی بی‌بعد تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه را برحسب زمان برای شرایط ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین، با وجود مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$  نشان می‌دهند.

مطابق مطالب بیان شده منحنی‌های فازی نقاط تعادل سامانه شامل منحنی‌های متناوب<sup>۱</sup>، هتروکلینیک<sup>۲</sup> و هوموکلینیک<sup>۳</sup> در اشکال ۵-۶ نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این اشکال این است که تئوری تنش کوپل باعث افزایش محدوده پایداری سامانه در فضای فازی نسبت به مدل کلاسیک شده است که با توجه به شکل ۴ قابل انتظار بود.



شکل (۵): منحنی فازی سامانه برای ولتاژ  $V = \delta/\delta < V_{pullin}$  بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .



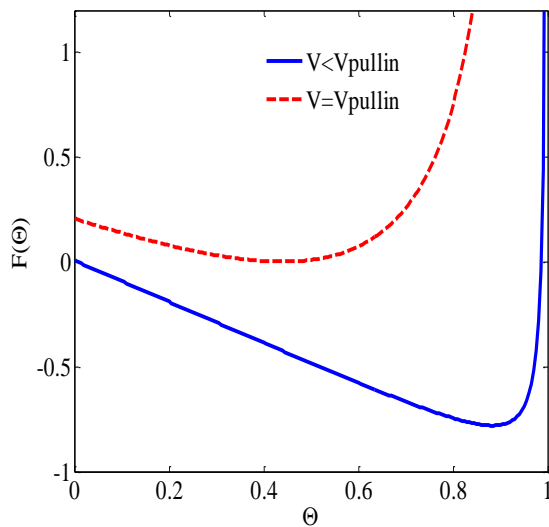
شکل (۶): منحنی فازی سامانه برای ولتاژ  $V = \delta/\delta < V_{pullin}$  با مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

اشکال ۷-۸، به ترتیب منحنی بی‌بعد تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه را برحسب زمان برای شرایط ولتاژ کمتر از ولتاژ پولین، بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$  نشان می‌دهند.

- 1- Periodic
- 2- Heteroclinic
- 3- Homoclinic

**حالت دوم:  $D > D_{critical}$  and  $V = V_{pullin}$**

اگر ولتاژ اعمالی به سامانه برابر با ولتاژ پولین شود، نقاط تعادل  $\Theta_1$  و  $\Theta_2$  روی خط  $F=0$  همانند شکل ۱۱ بر روی یکدیگر خواهند افتاد. بنابراین، معادله  $F(\Theta)=0$  دارای یک ریشه بین ۰ و ۱ است که این  $\Theta_{critical}$ ، معادله  $F'(\Theta)=0$  را ارضاء می‌کند.



شکل (۱۱): منحنی تغییرات تابع  $F(\Theta)$  برحسب  $\Theta$  برای مدل تنش کوپل.

**حالت سوم:  $D < D_{critical}$  and  $V > V_{pullin}$**

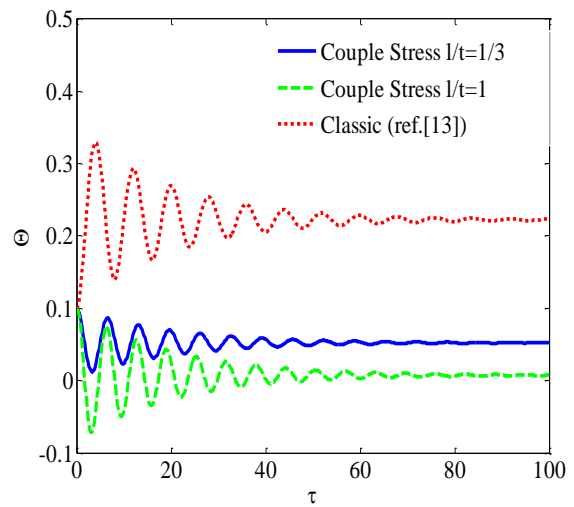
اگر ولتاژ اعمالی به سامانه بیش‌تر از ولتاژ پولین باشد یا مقدار گپ بین صفحه اصلی و الکتروود زیرین کم‌تر از مقدار بحرانی آن باشد، ناپایداری پولین اتفاق می‌افتد. بنابراین، سامانه در این موارد هیچ نقطه تعادلی نخواهد داشت.

**۳-۳- رفتار نانوآینه پیچشی در غیاب ولتاژ و تأثیر نیروی واندروالس بر روی آن**

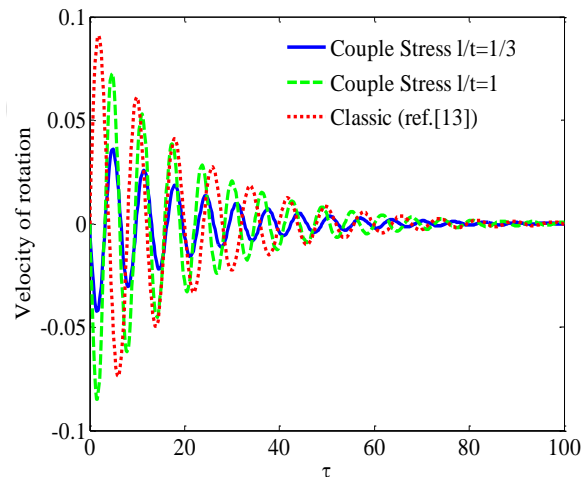
زمانی که ولتاژ اعمالی به سامانه حذف شود (یعنی  $\eta=0$ )، رابطه

(۱۹) به شکل 
$$F(x_1) = \lambda \left( \frac{x_1}{(1-x_1^2)^2} \right) - x_1$$
 ساده می‌شود. شکل

(۱۲)، تغییرات تابع  $F(\Theta)$  برحسب  $\Theta$  در نبود ولتاژ نشان می‌دهد.

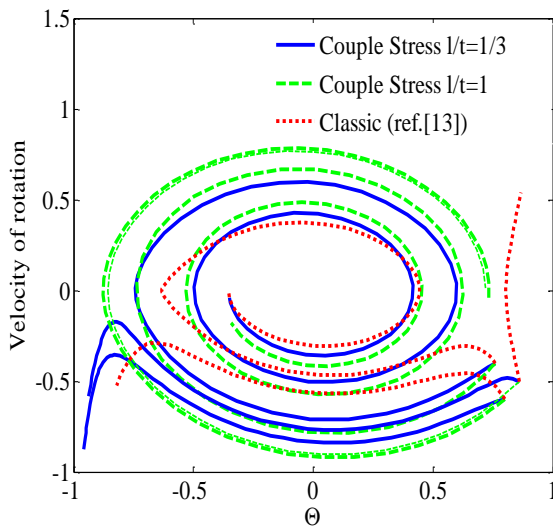


شکل (۹): منحنی تغییرات زاویه برحسب زمان برای ولتاژ  $V = \Delta/\Delta < V_{pullin}$  با وجود مستهلک‌کننده و  $D > D_{critical}$ .



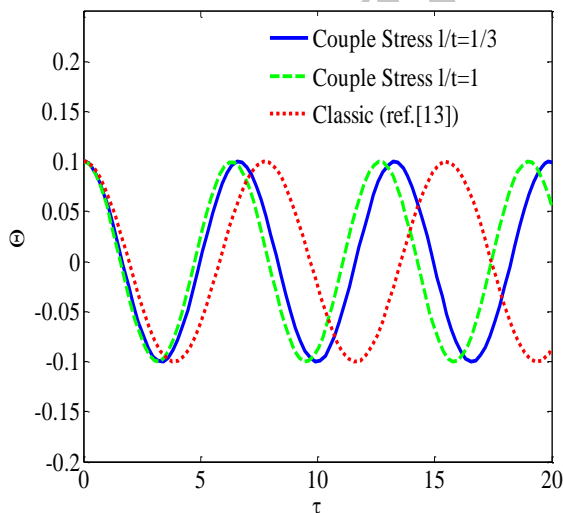
شکل (۱۰): منحنی تغییرات سرعت دورانی برحسب زمان برای ولتاژ  $V = \Delta/\Delta < V_{pullin}$  با وجود مستهلک‌کننده و  $D > D_{critical}$ .

همان‌طور که در اشکال ۹-۱۰ دیده می‌شود اثر اندازه دامنه تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه را در مدل تنش کوپل نسبت به مدل کلاسیک کاهش می‌دهد. فرکانس ارتعاشی سامانه نیز در مدل تنش کوپل افزایش یافته است. همچنین، با توجه به شکل ۹، همه منحنی‌ها با وجود مستهلک‌کننده در نهایت به یک مقدار ثابت می‌رسند که قابل انتظار است. ولی این مقدار ثابت برای مدل کلاسیک بسیار بیش‌تر از مدل تنش کوپل می‌باشد. به عبارت دیگر، اثر اندازه زاویه پیچش سامانه را کاهش می‌دهد. در مورد شکل ۱۰، همه منحنی‌ها در نهایت به صفر می‌رسند.

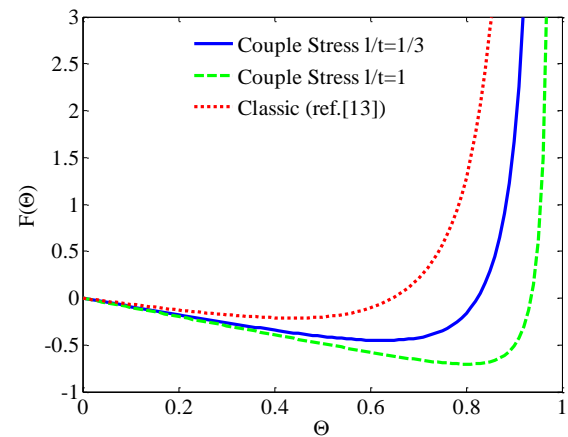


شکل (۱۴): منحنی فازی سامانه برای ولتاژ  $V=0$  با مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

اشکال ۱۶-۱۵، به ترتیب منحنی بی بعد تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه را برحسب زمان برای شرایط  $V=0$ ، بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$  نشان می دهند. همان طور که اشکال نشان می دهند اثر اندازه باعث کاهش دوره تناوب ارتعاش سامانه نسبت به مدل کلاسیک شده است. بنابراین، در مدل تنش کوپل فرکانس ارتعاشی سامانه بیش تر است.

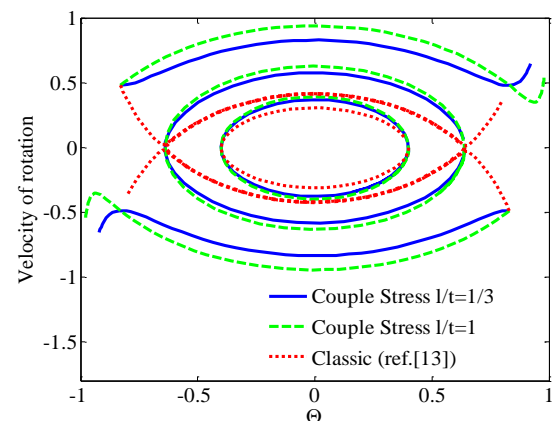


شکل (۱۵): منحنی تغییرات زاویه برحسب زمان برای ولتاژ  $V=0$  بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

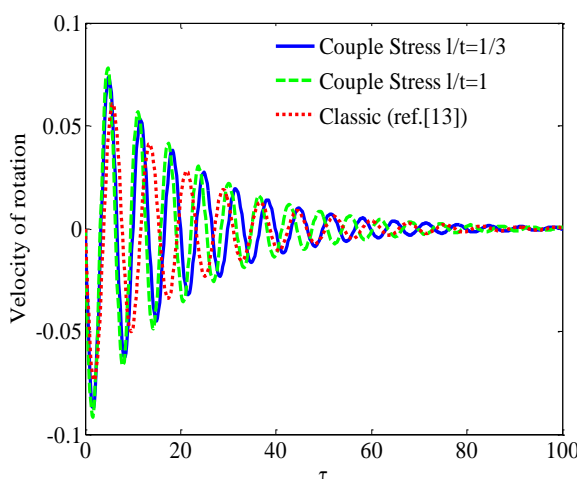


شکل (۱۲): منحنی تغییرات تابع  $F(\Theta)$  برحسب  $\Theta$  برای ولتاژ  $V=0$ .

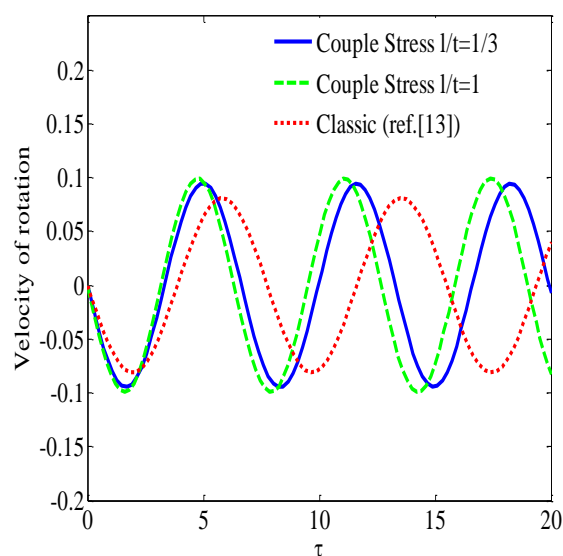
همان طور که در شکل ۱۲ مشخص است منحنی ها دو نقطه برخورد  $\Theta_1=0$  و  $\Theta_2$  با خط  $F=0$  در بین ۰ و ۱ دارند. بنابراین، سامانه دارای دو نقطه تعادل است که یکی از این نقاط نقطه صفر است. در حالی که ریشه دوم معادله  $F(\Theta)=0$  دارای مقدار حقیقی مثبت است. زمانی که سامانه متقارن است، یک نقطه تعادل دیگر به صورت قرینه نقطه تعادل دوم با علامت مخالف وجود دارد. همانند مطالب بیان شده، برای نقطه تعادل اول وقتی که پارامتر  $\xi=0$  است در نمودار فازی پایداری به صورت سنتر و زمانی که  $\xi \neq 0$  باشد پایداری آن به صورت فوکوس است. نقاط دوم و سوم تعادل برای هر مقدار از  $\xi$ ، به صورت ناپایدار زینی هستند. در اشکال ۱۴-۱۳، منحنی های فازی که شامل متناوب، هتروکلینیک و هوموکلینیک برای سه نقطه تعادل برای شرایطی که ولتاژی به سامانه اعمال نمی شود و سامانه تنها تحت نیروی واندروالس قرار دارد، نشان داده شده است. همانند حالات قبل، اثر اندازه در این منحنی ها باعث افزایش محدوده پایداری فضای فازی شده است.



شکل (۱۳): منحنی فازی سامانه برای ولتاژ  $V=0$  بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .



شکل (۱۸): منحنی تغییرات سرعت دورانی برحسب زمان برای ولتاژ  $V=0$  و وجود مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .



شکل (۱۶): منحنی تغییرات سرعت دورانی برحسب زمان برای ولتاژ  $V=0$  بدون مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

اشکال ۱۷-۱۸ نشان می‌دهند که در نبود ولتاژ، اثر اندازه تأثیر چشمگیری در دامنه تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه نسبت به مدل کلاسیک ندارد. فرکانس ارتعاشی سامانه نیز در مدل تنش کوپل نسبت به مدل کلاسیک تغییر چندانی نداشته است. همچنین، همه منحنی‌ها با وجود مستهلک کننده در نهایت به یک مقدار ثابت صفر خواهند رسید.

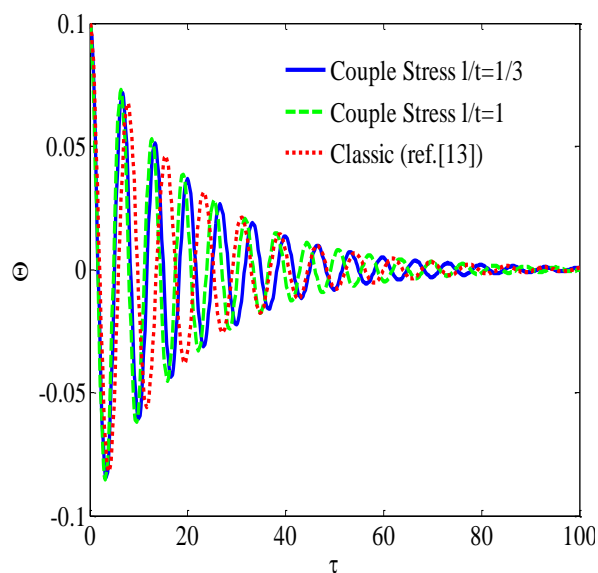
در حالتی که ولتاژ اعمالی به سامانه صفر است و مقدار گپ بین صفحه اصلی و الکتروود زیرین به مقدار بحرانی آن برسد (یعنی  $V=0$  و  $D=D_{critical}$ )، نقطه تعادل دوم به سمت نقطه تعادل اول حرکت کرده و بروی آن منطبق می‌شود.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله تأثیر اثر اندازه با استفاده از مدل تنش کوپل اصلاح شده و نیروی واندروالس بر روی پایداری یک میکروآینه الکترواستاتیک پیچشی مدل یک درجه آزادی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده عبارتند از:

- ۱- در میکروآینه‌های الکترواستاتیک پیچشی، ممکن است حتی در نبود ولتاژ اعمالی ناپایداری پولین اتفاق بیفتد. علت این اتفاق وجود نیروهای بین مولکولی از جمله نیروی واندروالس می‌باشد. بنابراین اندازه گپ بین صفحه اصلی و الکتروود زیرین برای جلوگیری از پولین مهم می‌باشد.

اشکال ۱۷-۱۸، به ترتیب منحنی بی‌بعد تغییرات زاویه و سرعت دورانی سامانه را برحسب زمان برای شرایط بدون ولتاژ، با وجود مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$  نشان می‌دهند.



شکل (۱۷): منحنی تغییرات زاویه برحسب زمان برای ولتاژ  $V=0$  و وجود مستهلک کننده و  $D > D_{critical}$ .

7. Tong, P., Yang, F., Lam, D.C.C., and Wang, J., "Size Effects of Hair-Sized Structures -Torsion", *Journal of Key Engineering Materials*, Vol. 261, pp. 11-22, 2004.
  8. Rezazadeh, G., Khatami, F., and Tahmasebi, A., "Investigation of the Torsion and Bending Effects on Static Stability of Electrostatic Torsional Micromirrors", *Microsystem Technologies*, Vol. 13, No. 7, pp. 715-722, 2007.
  9. Moeenfard, H., and Ahmadian, M.T., "Analytical Modeling of Static Behavior of Electrostatically Actuated Nano/micromirrors Considering Van Der Waals Forces", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 28, pp.729-736, 2012.
  10. Huang, J.M., Liu, A.Q., Deng, Z.L., Zhang, Q.X., Ahn, J., and Asundi, A., "An Approach to the Coupling Effect Between Torsion and Bending for Electrostatic Torsional Micromirrors", *Sensors and Actuators, A: Physical*, Vol. 115, pp. 159-167, 2004.
  11. Nemirovsky, Y., and Bochobza-Degani, O., "A Methodology and Model for the Pull-In Parameters of Electrostatic Actuators", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 10, No. 4, pp. 601-615, 2001.
  12. Zhao, J.P., Chen, H.L., Huang, J.M., and Liu, A.Q., "A Study of Dynamic Characteristics and Simulation of MEMS Torsional Micromirrors", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 120, No. 1, pp.199-210, 2005.
  13. Guo, J.G., and Zhao, Y.P., "Dynamic Stability of Electrostatic Torsional Actuators with Van Der Waals Effect", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 675-685, 2006.
  14. Khatami, F., and Rezazadeh, G., "Dynamic Response of a Torsional Micromirror to Electrostatic Force and Mechanical Shock", *Microsystem Technologies*, Vol. 15, pp. 535-545, 2009.
  15. Babaei Birdaei, F., and Behjat, B., "Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Elastic Foundation Considering Nonlocal Effects in Nano Scale", *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 13, No. 1, pp. 53-60, 2015 (in Persian).
  16. Jalali, A., and Khadem, S.E., "Nonlinear Vibration and Dynamic Stability Analysis of a Nanocomposite Viscoelastic Microplate Under an Electrostatic Actuation", *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 8, No. 3, pp. 51-68, 2012 (in Persian).
  17. Zhang, X.M., Chau, F.S., Quan, C., Lam, Y.L., and Liu, A.Q., "A Study of the Static Characteristics of a Torsional Micromirror", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 90, pp. 73-81, 2001.
- ۲- اثر اندازه نسبت به مدل کلاسیک مکان نقاط تعادل پایدار و ناپایدار سامانه را تغییر می‌دهد. به این صورت که این اثر نقطه تعادل پایدار سامانه را کاهش و نقطه تعادل ناپایدار سامانه را افزایش می‌دهد. بنابراین، فاصله بین این دو نقطه افزایش می‌یابد که نتیجه آن افزایش محدوده پایداری سامانه در منحنی‌های فضای فازی نسبت به مدل کلاسیک می‌باشد.
- ۳- اثر اندازه و استفاده از تئوری تنش کوپل باعث کاهش دوره تناوب سامانه و افزایش فرکانس ارتعاشی آن نسبت به مدل کلاسیک می‌شود. همچنین، این اثر دامنه و شدت پارامترهای بیان‌شده را نیز کاهش می‌دهد.
- ۴- اگرچه مدل حاضر یک درجه آزادی است اما با لحاظ کردن اثر اندازه و نیروی واندروالس می‌تواند به خوبی نتایج تجربی پیشین را دنبال کند.

#### ۵- مراجع

1. Kirsch, V.A., "Calculation of the Van Der Waals Force Between a Spherical Particle and an Infinite Cylinder", *Advances in Colloid and Interface Science*, Vol. 104, pp. 311-324, 2003.
2. Guo, J.G., and Zhao, Y.P., "Influence of Van Der Waals and Casimir Forces on Electrostatic Torsional Actuators", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, pp. 1027-1035, 2004.
3. Tadi Beni, Y., "Use of Augmented Continuum Theory for Modeling the Size Dependent Material Behavior of Nano-Actuators", *IJST, Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 36, No. M1, pp. 41-52, 2012.
4. Tadi Beni, Y., Koochi, A., Kazemi, A.S., and Abadyan, M., "Modeling the Influence of Surface Effect and Molecular Force on Pull-In Voltage of Rotational Nano-Micro Mirror Using 2-DOF Model", *Canadian Journal Physics*, Vol. 90, pp. 963-974, 2012.
5. Tadi Beni, Y., Abadyan, M., and Koochi, A., "Effect of the Casimir Attraction on the Torsion/Bending Coupled Instability of Electrostatic Nano-Actuators", *Journal of Physica Scripta*, Vol. 84, pp. 1-9, 2011.
6. Tsias, G.C., and Katsikadelis, J.T., "A New Microstructure-Dependent Saintvenant Torsion Model Based on a Modified Couple Stress Theory", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, pp.741-747, 2011.

پیوست:

$$M_{elas} = \mu\Omega \int_A \left( X^2 + Y^2 + X \frac{\partial \psi}{\partial Y} - Y \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) dA + 3Al^2 \mu\Omega$$

$$= \mu \frac{\theta}{L} \left( J + \int_A \left( X \frac{\partial \psi}{\partial Y} - Y \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) dA + 3Al^2 \right), \quad (5-پ)$$

$$J_c = \int_A \left( X \frac{\partial \psi}{\partial Y} - Y \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) dA + 3Al^2,$$

در رابطه فوق، A مساحت سطح مقطع تیر و J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع تیر مستطیل شکل است و  $J_c$  ممان اینرسی قطبی اصلاح شده می باشد.

بنابراین، گشتاور الاستیک تیر از رابطه زیر به دست می آید:

$$M_{elas} = \frac{\mu\theta}{L} (J + J_c) \quad (6-پ)$$

که در رابطه بالا، J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع و  $J_c$  ممان اینرسی قطبی اصلاح شده به صورت زیر می باشد:

$$J = \frac{tw^3}{3} \left[ 1 - \frac{192w}{\pi^5 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \tanh\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2w}\right) \right]. \quad (7-پ)$$

$$J_c = 3Al^2$$

$$+4t^4 \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{w(\varepsilon_1^2 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(t^2 + \varepsilon^2 p_k^2)} - \frac{2\varepsilon_1^2 \tanh(p_k \frac{w}{t})}{t \varepsilon p_k} \right] \\ & \times \left[ \frac{t \sqrt{t^2 + \varepsilon^2 p_k^2} \coth\left(\frac{w}{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_k^2}{t^2}}\right)}{t^2 + \varepsilon_1^2 p_k^2} + \frac{1}{p_k^2} + \frac{t^2}{t^2 + \varepsilon^2 p_k^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-پ)$$

$$-4w^4 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{t(\varepsilon_1^2 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(w^2 + \varepsilon^2 p_k^2)} - \frac{2\varepsilon_1^2 \tanh(p_k \frac{t}{w})}{w \varepsilon p_k} \right] \\ & \times \left[ \frac{w \sqrt{w^2 + \varepsilon^2 p_k^2} \coth\left(\frac{t}{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_k^2}{w^2}}\right)}{w^2 + \varepsilon_1^2 p_k^2} + \frac{1}{p_k^2} + \frac{w^2}{w^2 + \varepsilon^2 p_k^2} \right] \end{aligned} \right\}$$

که در آن:

$$\varepsilon^2 = \frac{l^2}{4} \quad \text{و} \quad \varepsilon_1^2 = \frac{l^2}{2}$$

در روابط فوق، w و t عرض و ضخامت سطح مقطع هستند. همچنین، مقادیر  $B_k$  و  $b_k$  از روش سری پیشنهادی در منبع [۱۲] تعیین می شوند. مشخص است که  $J_c$  تابعی از پارامترهای طول مادی l که در تئوری گرادیان کرنش ظاهر می شوند، می باشد.

بر طبق روش منبع [۱۲]، برای به دست آوردن  $A_k$ ،  $a_k$ ،  $B_k$  و  $b_k$  می توان از حل جبری روابط (۹-پ) استفاده کرد.

محاسبه لنگر پیچشی الاستیک با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده

فرض می شود میدان تغییر مکان به صورت زیر باشد:

$$u_1 = -\Omega YZ, \quad (1-پ)$$

$$u_2 = -\Omega XZ,$$

$$u_3 = \Omega \psi(X, Y),$$

که در آن،  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  به ترتیب تغییر مکان در راستای X، Y و Z هستند. تابع  $\psi(X, Y)$  نیز تابع اعوجاج است که تنها به X و Y وابسته است و  $\Omega$  زاویه دوران در واحد طول میله می باشد که بسیار کوچک است.

میدان تغییر مکان پیشنهاد شده در معادله (۱-پ) معادلات تعادل را در جهات X و Y ارضاء می کند [۱۲]. معادله تعادل باقیمانده در جهت محوری به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial Y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (m_{11} - m_{22})}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m_{12}}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m_{12}}{\partial Y^2} = 0. \quad (2-پ)$$

می توان نشان داد که با استفاده از رابطه (۱-پ) و جایگذاری مولفه های تنش، معادله حاکم بر میله پیچشی به صورت زیر به دست می آید:

$$\nabla^2 \left[ \psi - \left( \frac{l^2}{4} \right) \nabla^2 \psi \right] = 0 \quad (3-پ)$$

و شرایط مرزی سامانه عبارت است از:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} - \left( \frac{l^2}{4} \right) \nabla^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) - \left( \frac{l^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial t} \right) = n_x Y - n_y X, \quad (4-پ)$$

$$\left( \frac{l^2}{4} \right) \nabla^2 \psi - l^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0,$$

که در آن، n مختصات در جهت عمودی و t مختصات جهت مماسی سطح میله است. با در نظر گرفتن سطح مقطع مستطیلی به ابعاد  $t^*w$  و قراردادن مرکز مختصات وسط سطح مقطع تیر، گشتاور کل اعمالی بر روی سطح مقطع از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\begin{aligned}
 A_k + F_k \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) B_k &= 0, \\
 I_k \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) B_k + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ J_{k,n} \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) a_n + H_{k,n} \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) b_n \right] &= \\
 P_k \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} T_{k,n} \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right), & \\
 a_k - F_k \left( \frac{w}{2}, \frac{t}{2} \right) b_k &= 0, \\
 I_k \left( \frac{w}{2}, \frac{t}{2} \right) b_k + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -J_{k,n} \left( \frac{w}{2}, \frac{t}{2} \right) A_n + H_{k,n} \left( \frac{w}{2}, \frac{t}{2} \right) B_n \right] &= \\
 -P_k \left( \frac{w}{2}, \frac{t}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} T_{k,n} \left( \frac{w}{2}, \frac{t}{2} \right), &
 \end{aligned} \tag{۹-پ}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 F_k \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) &= \frac{\varepsilon_1^2 \frac{t}{2} p_k}{\varepsilon \left( \frac{t^2}{4} + \varepsilon_1^2 p_k^2 \right)} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_k^2}{t^2}} \coth \left( \frac{w}{2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_k^2}{t^2}} \right), \\
 H_{k,n} \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) &= 2 \frac{tw}{4} \frac{1}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 p_n^2}{w^2} \right) \right] \frac{\sqrt{\frac{w^2}{4} + \varepsilon^2 p_n^2}}{\frac{t^2}{w^2} p_n^2 + p_k^2 + \frac{t^2}{4\varepsilon^2}} \\
 &\quad \times \coth \left( \frac{t}{2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 p_n^2}{w^2}} \right) \cdot \sin(p_n) \cdot \sin(p_k), \\
 I_k \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) &= \frac{t^2}{4} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1^2 p_k^2}{t^2} \left[ \frac{\varepsilon_1^2 \sqrt{\frac{t^2}{4} + p_k^2 \varepsilon^2}}{\varepsilon \left( \frac{t^2}{4} + \varepsilon_1^2 p_k^2 \right)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \coth \left( \frac{w}{2} \sqrt{1 + \frac{p_k^2 \varepsilon^2}{t^2}} \right) \tanh \left( p_k \frac{w}{t} \right) \right] \right], \\
 J_{k,n} \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) &= 2 \frac{tw}{4} \frac{\varepsilon_1^2 p_n^3}{t^2 + p_k^2 \frac{w^2}{4}} \sin(p_k) \cdot \sin(p_n), \\
 P_k \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) &= \frac{2\varepsilon_1^2}{p_k} \tanh \left( p_k \frac{t}{w} \right), \\
 T_{k,n} \left( \frac{t}{2}, \frac{w}{2} \right) &= \frac{tw\varepsilon_1^2}{(p_n \frac{t}{2})^2 + (p_k \frac{w}{2})^2} \sin(p_k) \cdot \sin(p_n), \\
 p_k &= \frac{k\pi}{L},
 \end{aligned} \tag{۱۰-پ}$$

برای میله با سطح مقطع مربع ( $t=w$ )، خواهیم داشت:

$$B_k = b_k \text{ و } A_k = a_k$$