

طراحی کنترل کننده برای یک ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی با

روش مد لغزشی نهایی تطبیقی

رضا خاکی^۲

دانشکده مهندسی هوافضا
دانشگاه هوایی شهید ستاری

محمد رضا سلطانپور^۱

دانشکده مهندسی برق
دانشگاه هوایی شهید ستاری

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۲۸)

چکیده

در این مقاله، کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی برای سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی (MEMS) ارائه می‌شود. برای این کار در ابتدا با استفاده از روش دینامیک وارون، دینامیک‌های معلوم سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی حذف می‌شوند تا کران عدم قطعیت‌های موجود کاهش یابد. سپس با طراحی بردار کنترل مد لغزشی ترمینال، سامانه حلقه بسته با حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری می‌گردد. در این مقاله برای جلوگیری از بروز مشکل لرزش در ورودی کنترل، تخمین‌گر تطبیقی ارائه می‌شود که تنها دارای یک قانون تطبیقی است. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سامانه حلقه بسته با کنترل کننده مد لغزشی ترمینال تطبیقی پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی زمان محدود سراسری است. برای نمایش عملکرد کنترل کننده پیشنهادی و مقایسه آن با کنترل کننده‌های مشابه، شبیه‌سازی‌هایی در چهار مرحله بر روی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی پیاده‌سازی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی را نشان می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی، کنترل مد لغزشی ترمینال، عدم قطعیت، تخمین‌گر تطبیقی، کنترل مد

لغزشی ترمینال تطبیقی، لرزش در ورودی کنترل

Design of a Controller for Using MEMS Vibrational Gyroscope System

M. R. Soltanpour

Electrical Engineering Faculty,
Shahid Sattari Aeronautical University of
Science and Technology.

R. Khaki

Airspace Engineering Faculty,
Shahid Sattari Aeronautical University of
Science and Technology.

(Received: 09/ January/2018; Accepted: 18/ June/2018)

Abstract

An adaptive terminal sliding mode control scheme is presented for Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS) vibrational gyroscope system in this paper. In this approach the dynamics of the vibrational gyroscope system is eliminated by using inverse dynamic method to reduce the bounds of existing uncertainties. The designed terminal sliding mode control vector is provided a global asymptotic stability for close loop system with uncertainties. In this paper, an adaptive estimator is proposed to prevent the occurrence of a chattering problem at the control input, which has only one law. The mathematical proof shows that the closed loop system, with proposed adaptive terminal sliding mode controller with uncertainties has a global asymptotic stability. Four-phase simulations are implemented on the MEMS vibrational gyroscope system to demonstrate the performance of the controller and compare it with other similar controllers. The simulation results show that the proposed adaptive terminal sliding mode controller has desired performance.

Keywords: MEMS Vibrational Gyroscope, Terminal Sliding Mode Control, Uncertainty, Adaptive Estimator, Adaptive Terminal Sliding Mode Control, Chattering

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): soltanpour@ssau.ac.ir

۲- دانشیار: reza_khaki@ssau.ac.ir

۱- مقدمه

در طول سال‌های گذشته و با رشد سریع و قابل ملاحظه علم کنترل، محققین از روش‌های کنترل فیدبکی برای کنترل ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی استفاده کرده‌اند [۹-۵]. در مرجع [۹]، نویسندگان یک کنترل‌کننده دفع اغتشاش فعال برای کنترل ژيروسکوپ ارتعاشی طراحی نموده‌اند. در [۶] برای غلبه بر چالش‌های موجود، کنترل‌کننده تطبیقی ارائه گردیده است. در ادامه با ترکیب کنترل تطبیقی و جبران‌ساز فازی، یک کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم برای ارتقای عملکرد ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی طراحی شده است [۵]. همچنین پژوهشگران برای غلبه بر عدم قطعیت‌های ساختاری موجود در معادلات دینامیکی ژيروسکوپ‌ها، از کنترل‌کننده‌های تطبیقی دیگری نیز استفاده نموده‌اند [۸-۷]. اگرچه راه‌کارهای ارائه شده، باعث ارتقای دقت و عملکرد این دسته از ژيروسکوپ‌ها گردیده‌اند. اما راه‌کارهای پیشنهادی بدون نقص نبوده و مشکلات آنها به قرار زیر است:

- راه‌کارهای پیشنهادی در غلبه بر عدم قطعیت‌های ساختاری توانمند هستند و در صورت بروز اغتشاش خارجی یا دینامیک مدل نشده، پایداری سامانه حلقه بسته را نمی‌توانند تضمین نمایند.
- در ساختار کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، برای تخمین زدن هر کدام از پارامترهای سامانه، از یک قانون تطبیقی استفاده می‌شود. بنابراین، در راه‌کارهای پیشنهادی، به تعداد پارامترهای سامانه ژيروسکوپ، قوانین تطبیقی وجود دارد که باید در فرایند کنترل، به‌طور هم‌زمان محاسبات مربوط به تخمین پارامترها را انجام دهند. بنابراین، در صورت بروز تأخیر در محاسبات ورودی کنترل، تضمین پایداری سامانه حلقه بسته امکان‌پذیر نخواهد بود.

در ادامه پژوهشگران با ترکیب کنترل تطبیقی و کنترل‌کننده پس‌گام، راه‌کارهای دیگری برای کنترل سامانه ژيروسکوپ ارائه نمودند [۱۱-۱۰]. در راه‌کارهای پیشنهادی، به دلیل استفاده از روش پس‌گام، فرایند طراحی کنترل‌کننده مرحله به مرحله انجام می‌شود و این امر روش طراحی کنترل‌کننده را ساده‌تر می‌نماید. از طرف دیگر، در کنترل‌کننده‌های پیشنهادی از تعداد قوانین تطبیقی نیز کاسته شده است. اما مشکل غلبه بر عدم قطعیت‌های غیرساختاری همچنان برقرار است.

ژيروسکوپ‌های میکروالکترومکانیکی^۱، ژيروسکوپ‌های ارتعاشی کوچک شده‌ای هستند که به دلیل سائز کوچک، قیمت و توان مصرفی پائین، کاربردهای فراوانی در سامانه‌های کنترل دارند. ژيروسکوپ‌های ارتعاشی میکروالکترومکانیکی، حسگرهای سرعت زاویه‌ای یک یا دو محوره‌ای هستند که با فناوری نیمه‌هادی‌ها و مدارات مجتمع ساخته می‌شوند. این ژيروسکوپ‌ها، از لحاظ ساختاری شامل تراشه‌هایی هستند با زیرلایه کوارتزی با ابعادی از چند میلی‌متر تا چند میکرون که به روش‌های فتولیتوگرافی و دیگر روش‌های تولید قطعات میکروالکترونیکی، به صورت سازه‌های ارتعاشی صفحه‌ای تهیه می‌شوند. مبنای عملکرد ژيروسکوپ‌های ارتعاشی میکروالکترومکانیکی، مشابه ژيروسکوپ‌های مکانیکی با جرم دوار است. با این تفاوت که به جای جرم دوار، از یک جسم الاستیک مرتعش بهره می‌گیرند. ماهیت عملکرد این دسته از ژيروسکوپ‌ها، ویژگی‌های منحصر به فردی را ممکن می‌سازد. به عنوان مثال نداشتن قطعه متحرک، آنها را از موتور و یاتاقان بی‌نیاز می‌کند و در برابر اکثر متغیرهای تاثیرگذار محیطی نظیر درجه حرارت و فشار مقاوم می‌کند و به آنها کارکردی طولانی و بدون نیاز به تعمیر و نگهداری می‌بخشد. از مزایای دیگر این نوع از ژيروسکوپ‌ها، می‌توان به پاسخ زمانی کوتاه، نویز کم، دقت و حساسیت عالی، مصرف انرژی ناچیز و کاهش فوق‌العاده سائز اشاره نمود. این ژيروسکوپ‌ها، در مقایسه با ژيروسکوپ‌های مکانیکی و نوری بسیار ارزان‌تر هستند و حجم کمی را اشغال می‌کنند. طراحی و کاربرد ژيروسکوپ‌های ارتعاشی میکروالکترومکانیکی، برای نخستین بار از صنایع نظامی و در مواردی نظیر پایداری و هدایت موشک‌ها و مهمات هوشمند آغاز شد [۱]. اما اخیراً در صنایع غیرنظامی نظیر اتومبیل‌سازی، دوربین‌های عکاسی و رباتیک نیز استفاده شده است [۲-۳]. طبق بررسی‌های انجام شده، آینده صنایع ژيروسکوپی، با ژيروسکوپ‌های ارتعاشی میکروالکترومکانیکی گره خورده و بعد از ژيروسکوپ‌های فیبر نوری، عمده‌ترین گزینه برای کاربردهای هوافضا خواهند بود [۴].

[۲۰-۲۱]. حاصل این ترکیب، ارائه کنترل مدلفزشی فازی^۵ و کنترل مدلفزشی فازی تطبیقی^۶ است. در سال‌های اخیر محققین از کنترل مدلفزشی فازی تطبیقی، برای کنترل سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی استفاده نموده‌اند [۲۱-۲۲]. در این مقالات عملکرد مطلوبی از کنترل کننده‌های پیشنهادی را به نمایش گذاشته‌اند. اما با این وجود، راه کارهای پیشنهادی دارای نقاط ضعفی هستند که در زیر به آنها اشاره شده است:

- اگرچه در سامانه های غیرخطی، طراحی کنترل مدلفزشی دارای اثبات پایداری بسیار قوی است، اما ترکیب این روش کنترلی با سامانه فازی که منجر به پیدایش کنترل مدلفزشی فازی می‌شود، اثبات پایداری سامانه حلقه بسته را تضعیف می‌نماید.
- حضور تابع ناپیوسته در ساختار کنترل مدلفزشی، بروز لرزش^۷ در ورودی کنترل را امری اجتناب ناپذیر نموده و این امر عمر محرکه‌های سامانه را کوتاه می‌نماید.
- در روش طراحی کنترل مدلفزشی فازی تطبیقی، برای اجتناب از بروز لرزش در ورودی کنترل و اثبات پایداری سامانه حلقه بسته، از قوانین تطبیقی^۸ استفاده می‌گردد. اگرچه راه کار پیشنهادی از بروز لرزش در ورودی کنترل جلوگیری می‌نماید، ولی حضور قوانین متعدد تطبیقی، حجم محاسبات ورودی کنترل را افزایش می‌دهد و این امر پیاده‌سازی عملی این روش‌های کنترلی را با مشکل مواجه می‌کند.
- در طراحی سامانه های فازی، محققین باید پایگاه قواعد فازی^۹ مناسبی را ارائه نمایند. از آن جا که سامانه های فازی ارائه شده، چند ورودی- چند خروجی هستند، این امر تعداد قواعد فازی را افزایش می‌دهد و طراحی آن را برای محققین بسیار مشکل می‌نماید.

در سال‌های اخیر محققین برای کنترل سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی، از ترکیب کنترل مدلفزشی و کنترل تطبیقی نیز استفاده نموده‌اند [۲۳-۲۶]. در این ساختار کنترلی، هر کدام از این کنترل کننده‌ها

کنترل مدلفزشی^۱، یکی از تکنیک‌های کنترل ساختار متغیر^۲ است که از آن برای کنترل سامانه‌های خطی و غیرخطی دارای عدم قطعیت^۳ استفاده می‌شود [۱۲-۱۳]. تاکنون محققین از کنترل مدلفزشی برای کنترل سامانه‌های غیرخطی متعددی استفاده نموده‌اند. نتایج ارائه شده، موفقیت این روش کنترلی را در غلبه بر عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در این سامانه ها را نشان می‌دهند [۱۴-۱۶]. در این روش، کنترل کننده با سوئیچ نمودن به موقع از ساختاری به ساختاری دیگر، متغیرهای حالت سامانه را وادار می‌نماید که به سمت سطح لغزش که تابعی از متغیرهای حالت یا خطاهای ردگیری سامانه است، همگرا شوند. در مراحل طراحی کنترل مدلفزشی، تابع لیاپانوفی ارائه می‌گردد که پایداری سامانه حلقه بسته را تضمین می‌نماید. اگر بخواهیم به صورت مختصر، مزایای استفاده از کنترل مدلفزشی را در مقایسه با سایر کنترل کننده‌های مقاوم بیان نمائیم، نکات زیر از مهم ترین آنها است:

- زمانی که متغیرهای حالت سامانه به سطح لغزش می‌رسند، درجه سامانه کاهش می‌یابد و به همین دلیل سامانه حلقه بسته در برابر عدم قطعیت‌های ساختاری، غیرساختاری و اغتشاشات^۴ موجود مقاوم شده و دینامیک سامانه سریع تر می‌گردد [۱۷].
- طراحی کنترل مدلفزشی بسیار ساده است و از حجم محاسباتی پایینی نیز برخوردار است. بنابراین، پیاده‌سازی عملی آن به سادگی امکان پذیر است. این عوامل باعث گردیده که استفاده از کنترل مدلفزشی در بین محققین از جذابیت بالایی برخوردار باشد [۱۷-۱۹].

تاکنون پژوهشگران از کنترل مدلفزشی، برای کنترل سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی استفاده نموده‌اند [۱۸-۱۹]. در این مقالات، راه کار و چگونگی پیاده‌سازی این روش کنترلی بر روی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی ارائه شده است. در ادامه محققین برای ارتقای عملکرد کنترل مدلفزشی، آن را با روش‌هایی نظیر کنترل فازی ترکیب کرده‌اند

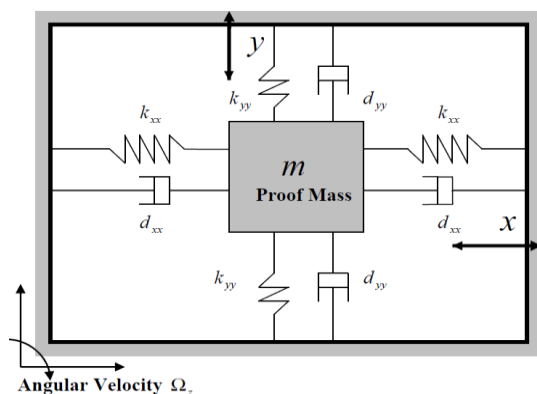
5- Fuzzy Sliding Mode Control
6- Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control
7- Chattering
8- Adaptive Law
9- Fuzzy Rule Base

1- Sliding Mode Control
2- Variable Structure Control
3- Uncertainty
4- Disturbances

طراحی کنترل مد لغزشی ترمینال^۴ اختصاص دارد. در بخش ۴، نحوه طراحی کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی ارائه می‌شود. در بخش ۵، مراحل پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی بیان می‌گردد. در بخش ۶ مقاله، با ارائه شبیه‌سازی‌هایی در چهار مرحله، عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد و بخش ۷ به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲- معادلات دینامیکی ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی

در این بخش از مقاله، معادلات دینامیکی ژيروسکوپ میکروالکترومکانیکی محور Z نشان داده شده در شکل ۱، بیان می‌شود. کار این ژيروسکوپ، اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای خارجی Ω^* است. مطابق شکل ۱، ژيروسکوپ میکروالکترومکانیکی دارای یک جرم معلق به‌همراه چند فنر، یک عملگر و سنسور الکترواستاتیکی برای ایجاد حرکت نوسانی و تعیین موقعیت و سرعت جرم است



شکل (۱): نمای شماتیک یک ژيروسکوپ

میکروالکترومکانیکی محور Z [۲۲].

در هر ژيروسکوپ ارتعاشی، دو فرایند تحریک^۵ و تشخیص^۶ در حال انجام است. با توجه به این‌که ژيروسکوپ‌های ارتعاشی براساس شتاب کوریولیس کار می‌کنند، برای تولید شتاب کوریولیس، ایجاد یک حرکت نسبی داخلی (V_{rel}) برای المان حساس^۷ امری ضروری است. این حرکت نسبی با اندرکنش با چرخش خارجی Ω^* ، شتاب کوریولیس $2\Omega \times V_{rel}$ را به‌وجود می‌آورد. وظیفه

وظیفه ویژه‌ای را بر عهده دارند. به‌صورتی که تخمین^۱ پارامترهای سامانه ژيروسکوپ، توسط کنترل تطبیقی انجام می‌شود و غلبه بر عدم قطعیت‌های غیرساختاری^۲ و اغتشاشات خارجی بر عهده کنترل مد لغزشی است. تحلیل‌های ریاضی و نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب کنترل‌کننده‌های پیشنهادی را نشان می‌دهند. اما در طراحی این دسته از کنترل‌کننده‌ها، مشکلاتی وجود دارد که در زیر به آنها اشاره می‌گردد:

- در کنترل‌کننده‌های پیشنهادی اگرچه زمان رسیدن متغیرهای حالت به سطح لغزش در زمانی محدود اتفاق می‌افتد، اما کنترل این زمان محدود و کم یا زیاد نمودن آن از طریق ضرایب کنترل‌کننده امکان‌پذیر نیست.
- از آن‌جا که ضرایب فنریت و ضرایب میرایی در سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی بسیار کوچک هستند، تنظیم قواعد تطبیقی که بتوانند این ضرایب را تخمین بزنند، بسیار مشکل است.
- برای طراحی تخمین‌گرهای تطبیقی، باید معادلات دینامیکی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی به‌صورت معادلات رگرسیون^۳ پیاده‌سازی شود. این امر فرایند طراحی تخمین‌گرهای تطبیقی را پیچیده و بسیار زمان‌بر می‌نماید.
- در ساختار کنترل‌کننده‌های مد لغزشی تطبیقی ارائه شده، از قوانین تطبیقی متعددی استفاده شده است. این امر حجم محاسبات ورودی کنترل را افزایش داده و پیاده‌سازی این کنترل‌کننده‌ها را با مشکل مواجه می‌سازد.

در مقاله پیشرو، از ترکیب کنترل مد لغزشی و کنترل تطبیقی، برای کنترل مد تحریک سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی استفاده می‌شود. روش ترکیب نمودن این تکنیک‌ها به گونه‌ای است که مشکلات فوق را بر طرف نموده و در نهایت، دامنه ورودی کنترل را بسیار نرم و پیوسته می‌نماید.

در ادامه ساختار مقاله به‌صورتی است که در بخش ۲ مقاله، معادلات دینامیکی ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی ارائه می‌شود. بخش ۳ مقاله به شیوه

4- Terminal Sliding Mode Control
5- Drive Mode
6- Sense Mode
7- Proof Mass

1- Estimate
2- Un-Structure Uncertainties
3- Regression Equations

از معادلات (۲)، (۳) و (۴) معادلات دینامیکی بی‌بعد ژيروسکوپ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{q} + D\dot{q} + K_b q = u(t) - 2\Omega\dot{q} \quad (5)$$

در ادامه، با انتخاب متغیرهای حالت زیر، معادلات دینامیکی بی‌بعد ژيروسکوپ به حوزه معادلات حالت انتقال داده می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{x}{q_0} = x_1, \frac{\dot{x}}{q_0} = x_2, \frac{y}{q_0} = x_3, \frac{\dot{y}}{q_0} = x_4, \frac{u_x}{m\omega_0^2 q_0} = u_1, \frac{u_y}{m\omega_0^2 q_0} = u_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{d_{xx}}{m\omega_0} x_2 + \frac{d_{xy}}{m\omega_0} x_4 - \frac{2\Omega^*}{\omega_0} x_4\right) - \frac{k_{xx}}{m\omega_0^2} x_1 - \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2} x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\left(\frac{d_{xy}}{m\omega_0} x_2 + \frac{d_{yy}}{m\omega_0} x_4 + \frac{2\Omega^*}{\omega_0} x_2\right) - \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2} x_1 - \frac{k_{yy}}{m\omega_0^2} x_3 + u_2 \end{cases} \quad (6)$$

برای ساده شدن معادلات فوق، تعریف زیر ارائه می‌گردد:

$$f_1(X) = -\left(\frac{d_{xx}}{m\omega_0} x_2 + \frac{d_{xy}}{m\omega_0} x_4 - \frac{2\Omega^*}{\omega_0} x_4\right) - \frac{k_{xx}}{m\omega_0^2} x_1 - \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2} x_3 \quad (7)$$

$$f_2(X) = -\left(\frac{d_{xy}}{m\omega_0} x_2 + \frac{d_{yy}}{m\omega_0} x_4 + \frac{2\Omega^*}{\omega_0} x_2\right) - \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2} x_1 - \frac{k_{yy}}{m\omega_0^2} x_3$$

است. معادلات (۷) در (۶) $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ که

جای گذاری می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(X) + u_1 + d_1(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(X) + u_2 + d_2(t) \end{cases} \quad (8)$$

نکته ۱: در معادلات دینامیکی (۶)، نقش دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاشات متغیر با زمان خارجی در معادلات دینامیکی ژيروسکوپ ارتعاشی لحاظ نشده است. از آنجا که این معادلات براساس فرضیات ۱ تا ۴ برای سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی استخراج گردیده‌اند، بنابراین، این ساده‌سازی‌ها، کنترل کننده را در مرحله پیاده‌سازی عملی با دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاشات متغیر با زمان روبرو می‌نمایند. به همین دلیل تأثیر این عوامل را، در معادلات دینامیکی (۸)، از طریق دینامیک‌های $d_1(t)$ و $d_2(t)$ اعمال می‌نمائیم. لازم به ذکر است که در طراحی کنترل کننده فرض بر آن است که دینامیک‌های $d_1(t)$ و $d_2(t)$ معلوم نیستند، اما کران بالای مشخص و معلومی دارند. به عبارت دیگر $|d_1(t)| \leq D_1$ و $|d_2(t)| \leq D_2$ هستند که D_1 و D_2 ضرایب مثبت و معلومی می‌باشند.

سامانه تحریک، ایجاد یک حرکت نسبی به صورت ارتعاشاتی با دامنه و فرکانسی مشخص است. از طرف دیگر سامانه تشخیص، کار تعیین سرعت زاویه‌ای خارجی را بر عهده دارد. برای به دست آوردن معادلات دینامیکی، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- قاب جرم متمرکز، با سرعت ثابت Ω^* می‌چرخد.
- با توجه به مقدار جابجایی، نیروهای جانب مرکز $m\Omega^{*2} x$ و $m\Omega^{*2} y$ ناچیز فرض می‌گردند.
- نیروی کوریولیس در جهت عمود بر محور تحریک و محور چرخش ایجاد می‌شود.
- فرض بر آن است که: $\Omega_x^* \approx \Omega_y^* \approx \Omega_z^* \cong 0$ ، $\dot{\Omega}_z^* = \ddot{\Omega}_z^* \cong 0$

براساس فرضیات فوق، معادلات دینامیکی ژيروسکوپ به صورت زیر استخراج می‌گردد [۴-۱]:

$$m\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y = u_x(t) + 2m\Omega^*\dot{y} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + d_{yy}\dot{y} + d_{xy}\dot{x} + k_{yy}y + k_{xy}x = u_y(t) - 2m\Omega^*\dot{x}$$

که در آن، m جرم متمرکز، x و y مختصات جرم نسبت به دستگاه قاب و k_{xx} ، k_{yy} ، k_{xy} ضرایب ماتریس فنریت هستند. پارامترهای d_{xx} ، d_{xy} و d_{yy} ضرایب میرایی، $u_x(t)$ و $u_y(t)$ نیروهای تحریک الکترواستاتیکی، Ω^* سرعت زاویه‌ای خارجی، $2m\Omega^*\dot{x}$ و $2m\Omega^*\dot{y}$ نیروهای تداخلی ایجاد شده در اثر نیروی کوریولیس هستند. با استفاده از زمان بی‌بعد $\tau = \omega_0 t$ و تقسیم دو طرف معادله (۱) بر $m\omega_0^2$ که در آن ω_0 فرکانس مبنا است، فرم بی‌بعد و ماتریسی معادلات به صورت زیر خواهد بود [۴-۱]:

$$\ddot{q} + \frac{D^*\dot{q}}{m\omega_0} + \frac{K_a q}{m\omega_0^2} = \frac{u^*(t)}{m\omega_0^2} - \frac{2\Omega^*\dot{q}}{\omega_0} \quad (2)$$

پارامترهای معادله (۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ q_0 \\ y \\ q_0 \end{bmatrix}, D^* = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{bmatrix}, K_a = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$u^* = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \Omega^* = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega^* \\ \Omega^* & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن، q_0 طول مرجع است. در ادامه پارامترهای زیر تعریف می‌شوند:

$$D = \frac{D^*}{m\omega_0}, K_b = \frac{K_a}{m\omega_0^2}, u = \frac{u^*}{m\omega_0^2 q_0}, \Omega = \frac{\Omega^*}{\omega_0} \quad (4)$$

۲-۲- طراحی کنترل مد لغزشی ترمینال

برای طراحی کنترل کننده، از معادلات (۱۰) نسبت به زمان انتگرال می گیریم:

$$\dot{s}_i = \ddot{e}_i + c_i \dot{e}_i - (\ddot{h}_i(t) + c_i \dot{h}_i(t)), \quad i=1,2 \quad (12)$$

در ادامه، معادله (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\dot{s}_i = (f_i(X) + u_i + d_i(t) - \ddot{x}_{d_i}) + c_i \dot{e}_i - (\ddot{h}_i(t) + c_i \dot{h}_i(t)), \quad i=1,2 \quad (13)$$

حال ورودی کنترل را به صورت زیر انتخاب می نمایم:

$$u_i = -\hat{f}_i(X) + \ddot{x}_{d_i} - c_i \dot{e}_i + (\ddot{h}_i(t) + c_i \dot{h}_i(t)) + u_{s_i}, \quad i=1,2 \quad (14)$$

که در آن، $\hat{f}_i(X)$ بخش معلوم دینامیک های $f_i(X)$ و $\hat{f}_2(X)$ هستند و u_{s_i} ورودی کنترل جدیدی است که باید طراحی شود. معادله (۱۴) در (۱۳) جای گذاری و به صورت زیر ساده سازی می گردد:

$$\dot{s}_i = f_i(X) - \hat{f}_i(X) + d_i(t) + u_{s_i}, \quad i=1,2 \quad (15)$$

با تعریف $\Delta f_i(X) = f_i(X) - \hat{f}_i(X) + d_i(t)$ ، معادله (۱۵) به صورت زیر بیان می شود:

$$\dot{s}_i = \Delta f_i(X) + u_{s_i}, \quad i=1,2 \quad (16)$$

نکته ۲: برای تعیین $\hat{f}_i(X)$ باید تخمینی از مقادیر ضرایب فنری و ضرایب میرایی در دسترس باشند زیرا یکی از فرضیات طراحی کنترل پیشنهادی این است که کران بالای عدم قطعیت های پارامتری، دینامیک های مدل نشده و اغتشاشات خارجی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی باید معلوم و مشخص باشند.

برای طراحی ورودی کنترل u_{s_i} ، تابع کاندیدای لیاپانف زیر ارائه می گردد:

$$V(s_i) = \frac{1}{2} s_i^2, \quad i=1,2 \quad (17)$$

از معادله فوق نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\dot{V}(s_i) = s_i \dot{s}_i, \quad i=1,2 \quad (18)$$

معادله (۱۶) در (۱۸) جای گذاری می شود:

$$\dot{V}(s_i) = s_i (\Delta f_i(X) + u_{s_i}), \quad i=1,2 \quad (19)$$

در ادامه، u_{s_i} به صورت زیر انتخاب می گردد:

$$u_{s_i} = -\rho_i \text{sign}(s_i), \quad i=1,2 \quad (20)$$

۳- طراحی کنترل کننده مد لغزشی ترمینال برای کنترل موقعیت ژيروسکوپ دو محوره

در این بخش از مقاله، کنترل کننده ای برای ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی طراحی می شود که جرم متمرکز را وادار نماید تا یک حرکت پیوسته و هماهنگ را دنبال کند. برای این کار در ابتدا سطوح لغزش ورودی های کنترل تعیین می گردند.

۳-۱- طراحی سطوح لغزش

در این بخش، خطاهای ردگیری به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_{d_1} \\ e_2 = x_3 - x_{d_3} \end{cases} \quad (9)$$

که در آن، x_{d_1} و x_{d_3} مقادیر مطلوبی هستند که باید متغیرهای حالت x_1 و x_3 به سمت آنها همگرا شوند. برای این که این همگرایی در زمانی محدود اتفاق بیافتد، سطوح لغزش زیر ارائه می شود:

$$s_1 = \dot{e}_1 + c_1 e_1 - (\dot{h}_1(t) + c_1 h_1(t)) \quad (10)$$

$$s_2 = \dot{e}_2 + c_2 e_2 - (\dot{h}_2(t) + c_2 h_2(t))$$

که c_1 و c_2 ضرایبی ثابت و مثبت و توابع $h_1(t)$ و $h_2(t)$ در فاصله زمانی $[0, T]$ بیکران هستند. برای این که از ابتدای فرایند کنترل، متغیرهای حالت (خطای ردگیری و مشتق آن) بر روی سطوح لغزش قرار گیرند، باید $e_1(0) = h_1(0)$ ، $e_2(0) = h_2(0)$ ، $\dot{e}_1(0) = \dot{h}_1(0)$ و $\dot{e}_2(0) = \dot{h}_2(0)$ از طرف دیگر برای این که خطاهای ردگیری در زمان T برابر صفر شوند، باید $h_1(T) = \dot{h}_1(T) = \ddot{h}_1(T) = 0$ و $h_2(T) = \dot{h}_2(T) = \ddot{h}_2(T) = 0$ گردند. برای رسیدن به این هدف $h_i(t)$ به صورت زیر انتخاب می شود:

$$h_i(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} e_i(0)^{(k)} t^k + 0 & 0 \leq t \leq T \\ \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl}}{T^{j+l+3}} e_i(0)^{(l)} \right) t^{j+3} & t > T \end{cases} \quad (11)$$

که در آن، a_{jl} ثابت هایی هستند که از حل معادلات به دست می آیند. در بخش بعدی مقاله، نحوه طراحی کنترل کننده ارائه می شود.

۴- طراحی کنترل کننده مد لغزشی ترمینال تطبیقی برای کنترل موقعیت ژيروسکوپ دو محوره

در بخش قبل، کنترل کننده ای برای سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی پیشنهاد گردید که این سامانه را در برابر عدم قطعیت های موجود، دارای پایداری مجانبی زمان محدود سراسری نمود. اما به دلیل حضور تابع علامت در ورودی کنترل، بروز لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب ناپذیر است و این امر پیاده سازی راه کار پیشنهادی را با مشکل مواجه می سازد. به همین دلیل در این بخش از مقاله، با استفاده از کنترل تطبیقی، ساختار کنترل پیشنهادی را به گونه ای تغییر می دهیم که از بروز لرزش در ورودی کنترل جلوگیری گردد:

$$u_i = -\hat{f}_i(X) + \ddot{x}_{d_i} - c_i \dot{e}_i + (\dot{h}_i(t) + c_i h_i(t)) + u_{s_i}, \quad i=1,2$$

$$u_{s_i} = -\hat{\xi}_i \text{sat}(s_i, \varepsilon_i), \quad s_i = \dot{e}_i + c_i e_i - (\dot{h}_i(t) + c_i h_i(t)) \quad (23)$$

$$\text{sat}(s_i, \varepsilon_i) = \begin{cases} \text{sign}(s_i), & |s_i| > \varepsilon_i > 0 \\ \frac{s_i}{\varepsilon_i}, & |s_i| \leq \varepsilon_i \end{cases}$$

$$h_i(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} e_i(0)^{(k)} t^k + \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl}}{T^{j-l+3}} e_i(0)^{(l)} \right) t^{j+3}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

که در آن، ε_i ثابتی کوچک و $\hat{\xi}_i$ تخمینی از عدم قطعیت های $\Delta f_i(X)$ است که در ادامه با استفاده از مفاهیم کنترل تطبیقی و از طریق قانون تطبیقی به دست می آید.

نکته ۵: اندازه گیری تغییرات ضرایب فنریت و ضرایب میرایی در سامانه ژروسکوپ ارتعاشی کار بسیار دشواری است. از طرف دیگر تعیین مقادیر واقعی دینامیک های مدل نشده و اغتشاشات خارجی وارده بر این سامانه نیز دشوارتر است. به همین دلیل در این بخش از مقاله، با استفاده از مفاهیم کنترل تطبیقی، راه کاری ارائه می شود تا تخمینی از کران بالای عدم قطعیت های $\Delta f_i(X)$ به دست آید.

فرض می شود که $\hat{\xi}_i^*$ مقدار بهینه و $\hat{\xi}_i$ مقدار تخمینی کران عدم قطعیت های $\Delta f_i(X)$ هستند. در این صورت خطای تخمین به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{\xi}_i = \hat{\xi}_i - \xi_i^* \quad (24)$$

که ρ_i ثابتی مثبت است. معادله (۲۰) در (۱۹) جای گذاری می شود:

$$\dot{V}(s_i) = s_i (\Delta f_i(X) + u_{s_i}), \quad i=1,2$$

$$= s_i (\Delta f_i(X) - \rho_i \text{sign}(s_i)) \quad (21)$$

$$= s_i \Delta f_i(X) - \rho_i |s_i|$$

در معادله فوق، اگر $\rho_i > |\Delta f_i(X)|$ انتخاب شود، آن گاه $\dot{V}(s_i) \leq 0$ می گردد. از طرف دیگر در صورتی $\dot{V}(s_i) = 0$ می شود که $s_i = 0$ باشد، بنابراین براساس قضیه لاسال [۲۷-۲۸] سامانه حلقه بسته با کنترل پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است. در یک جمع بندی کنترل پیشنهادی نهایی به صورت زیر است:

$$u_i = -\hat{f}_i(X) + \ddot{x}_{d_i} - c_i \dot{e}_i + (\dot{h}_i(t) + c_i h_i(t)) + u_{s_i}, \quad i=1,2$$

$$u_{s_i} = -\rho_i \text{sign}(s_i), \quad s_i = \dot{e}_i + c_i e_i - (\dot{h}_i(t) + c_i h_i(t)) \quad (22)$$

$$h_i(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} e_i(0)^{(k)} t^k + \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{l=0}^2 \frac{a_{jl}}{T^{j-l+3}} e_i(0)^{(l)} \right) t^{j+3}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

نکته ۳: از آن جا که متغیرهای حالت سامانه از ابتدا فرایند کنترل بر روی سطح لغزش قرار می گیرند، بنابراین، در راه کار پیشنهادی، مرحله رسیدن متغیرهای حالت به سطح لغزش حذف می شود و این امر مقاوم بودن سراسری سامانه حلقه بسته را تضمین می نماید.

نکته ۴: برای تضمین مقاوم بودن سامانه حلقه بسته، باید $s_i(t) = 0$ باشد. در این صورت باید $e_i(t) = h_i(t)$ و $\dot{e}_i(t) = \dot{h}_i(t)$ گردد و با انتخاب $h_i(T) = \dot{h}_i(T) = 0$ ، نتیجه می شود که $e_i(T) = \dot{e}_i(T) = 0$ شده و خطاهای ردگیری در زمان محدود و قابل کنترل T ، به سمت صفر همگرا می شوند. به عبارت دیگر انتخاب و تغییر زمان T در اختیار طراح قرار می گیرد. بنابراین، نتیجه می شود که سامانه حلقه بسته در حضور عدم قطعیت های موجود، دارای پایداری مجانبی زمان محدود سراسری است.

۳-۳- نحوه محاسبه $h_i(t)$ و $\dot{h}_i(t)$

محاسبه $h_i(t)$ و مشتقات آن با جزئیات در بخش ضمیمه مقاله آمده است.

عدم قطعیت‌های موجود را تخمین بزنند. بنابراین، راه‌کار پیشنهادی نه تنها بسیار ساده است، بلکه از حجم محاسبات بسیار پائینی نیز برخوردار است. از طرف دیگر در کنترل پیشنهادی، انتخاب و کنترل زمان صفر شدن خطاهای ردگیری، به راحتی و از طریق طراحی توابع $h_i(t)$ قابل انجام است. بنابراین، سامانه حلقه بسته، دارای پایداری مجانبی زمان محدود سراسری است.

۵- نحوه پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی

برای پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی، مرحله به مرحله به صورت زیر عمل می‌شود:

۱. در ابتدا باید دینامیک‌ها و پارامترهای معلوم سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی تعیین شوند.
۲. با توجه به بخش ۳-۳ مقاله، توابع $h_i(t)$ و $\dot{h}_i(t)$ را محاسبه و پس از تعیین خطاهای ردگیری، با استفاده از معادله (۱۰) سطوح لغزش s_1 و s_2 طراحی می‌گردند.
۳. با استفاده از دینامیک‌های معلوم سامانه ژيروسکوپ، شتاب‌های مطلوب، اطلاعات مربوط به خطای سرعت‌ها و مشتقات توابع $h_i(t)$ ، کنترل ورودی u_i طراحی می‌شود.
۴. با استفاده از قانون تطبیقی (۳۰) و پس از انتخاب گین ρ_i ، کران عدم قطعیت‌های $\hat{\xi}_i$ به دست می‌آید.
۵. با مشخص شدن $\hat{\xi}_i$ ، ورودی کنترل u_{s_i} تعیین و در نهایت ورودی کنترل پیشنهادی u_i تکمیل می‌شود.

۶- شبیه‌سازی

در این بخش از مقاله برای بررسی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی یک سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی پیاده‌سازی می‌شود. پارامترهایی که برای سامانه ژيروسکوپ در نظر گرفته شده‌اند در جدول ۱ آمده است، که از مراجع [۳-۴] انتخاب گردیده‌اند. ورودی ثابت با زمان $\Omega^* = 5$ به عنوان ورودی سامانه تحریک انتخاب شده است. موقعیت‌های مطلوب در راستای x و y به صورت $x_d(t) = 10^{-6} \sin(\omega_1 t)$ و $y_d(t) = 1.2 \times 10^{-6} \sin(\omega_2 t)$ با $\omega_1 = 4.17 \text{ Hz}$ و $\omega_2 = 5.11 \text{ Hz}$ تنظیم گردیدند. شرایط اولیه $(x(0), y(0))$ برابر با $(0.4e^{-6}, 1.2e^{-6})$ انتخاب شد.

برای طراحی مجدد ورودی کنترل u_{s_i} و تعیین قانون تطبیقی، تابع کاندیدای لیاپانف زیر ارائه می‌گردد:

$$V(s_i, \tilde{\xi}_i) = \frac{1}{2} s_i^2 + \frac{1}{2\rho_i} \tilde{\xi}_i^2, \quad i=1,2 \quad (25)$$

که ρ_i ضریب مثبتی است که به آن گین تطبیقی گفته می‌شود. از تابع فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) = s_i \dot{s}_i + \frac{1}{\rho_i} \tilde{\xi}_i \dot{\tilde{\xi}}_i, \quad i=1,2 \quad (26)$$

از آن جا که، $\dot{\xi}_i^*$ مقدار ثابتی است و با توجه به معادله (۲۴) و با جای گذاری معادله (۱۶) در (۲۶)، داریم:

$$\dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) = s_i (\Delta f_i(X) + u_{s_i}) + \frac{1}{\rho_i} \tilde{\xi}_i \dot{\tilde{\xi}}_i, \quad i=1,2 \quad (27)$$

بخش u_{s_i} از معادله (۲۳) در (۲۷) جای گذاری می‌گردد:

$$\dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) = s_i (\Delta f_i(X) - \hat{\xi}_i^* \text{sat}(s_i, \varepsilon_i)) + \frac{1}{\rho_i} \tilde{\xi}_i \dot{\tilde{\xi}}_i, \quad i=1,2 \quad (28)$$

معادله (۲۴) در (۲۸) جای گذاری، به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) = s_i (\Delta f_i(X) - (\tilde{\xi}_i + \xi_i^*) \text{sat}(s_i, \varepsilon_i)) + \frac{1}{\rho_i} \tilde{\xi}_i \dot{\tilde{\xi}}_i, \quad i=1,2 \quad (29)$$

$$= s_i (\Delta f_i(X) - \hat{\xi}_i^* \text{sat}(s_i, \varepsilon_i)) + \tilde{\xi}_i \left(\frac{1}{\rho_i} \dot{\tilde{\xi}}_i - s_i \text{sat}(s_i, \varepsilon_i) \right)$$

با توجه به معادله فوق، قانون تطبیقی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\dot{\tilde{\xi}}_i = \rho_i s_i \text{sat}(s_i, \varepsilon_i) \quad (30)$$

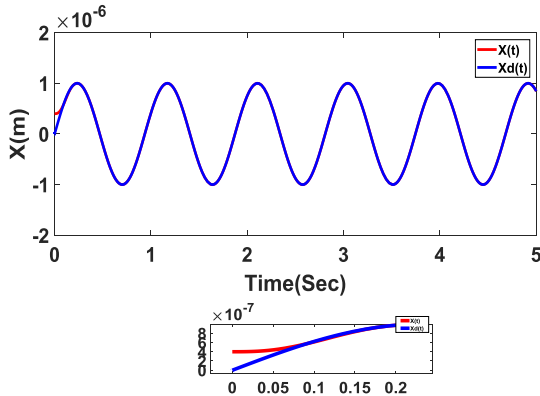
با جای گذاری معادله (۳۰) در (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) &= s_i (\Delta f_i(X) - \hat{\xi}_i^* \text{sat}(s_i, \varepsilon_i)), \quad i=1,2 \\ &\leq |\Delta f_i(X)| s_i \text{sat}(s_i, \varepsilon_i) - \hat{\xi}_i^* s_i \text{sat}(s_i, \varepsilon_i) \\ &\leq s_i \text{sat}(s_i, \varepsilon_i) (|\Delta f_i(X)| - \hat{\xi}_i^*) \leq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

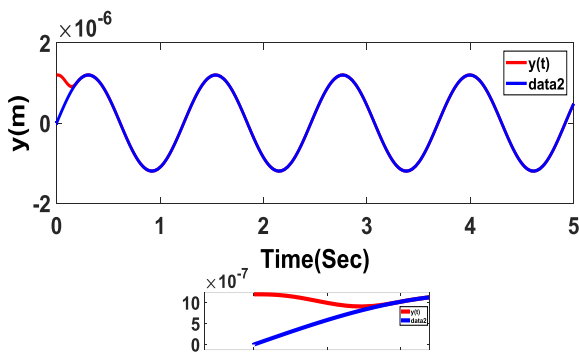
با توجه به معادله فوق، $\dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) \leq 0$ است و تنها زمانی $\dot{V}(s_i, \tilde{\xi}_i) = 0$ می‌شود که $s_i = 0$ باشد. بنابراین، براساس قضیه لاسال [۲۷-۲۸]، سامانه حلقه بسته با ورودی پیشنهاد معادله (۲۳) و قانون تطبیقی (۳۰)، در حضور عدم قطعیت‌های موجود دارای پایداری مجانبی سراسری است.

نکته ۶: در کنترل پیشنهادی، به جای استفاده از تخمین‌گرهای متعددی که باید ضرایب فنریت، ضرایب میرایی و اغتشاشات خارجی را تخمین بزنند، تنها دو تخمین‌گر طراحی می‌شود که می‌تواند کران

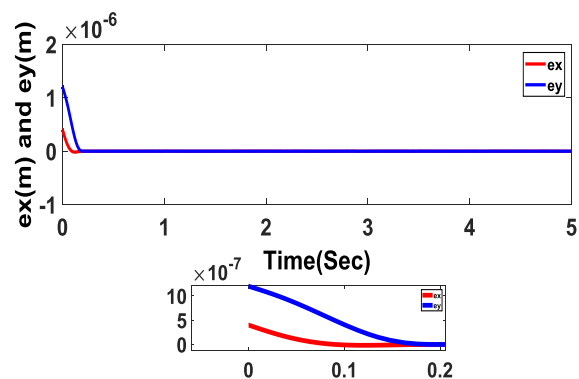
ثانیه صفر نموده است. در شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌گردد که تغییرات موقعیت یعنی \dot{x} و \dot{y} نیز به خوبی و در زمان مورد نظر به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا شده‌اند. مطابق شکل ۸ می‌بینیم که عملکرد خوب کنترل مد لغزشی، با بروز لرزش شدید همراه است که این امر پیاده‌سازی عملی این کنترل کننده را غیر ممکن می‌سازد.



شکل (۳): ردگیری دقیق موقعیت x با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال.



شکل (۴): ردگیری دقیق موقعیت y با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال.



شکل (۵): بردار خطاهای ردگیری با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال.

جدول (۱): پارامترهای سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی.

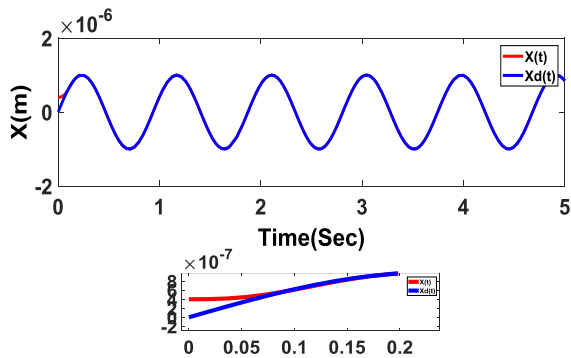
m	$0.57 \times 10^{-8} \text{ kg}$
d_{xx}	$0.429 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}$
d_{xy}	$0.0429 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}$
d_{yy}	$0.0687 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}$
k_{xx}	80.98 N/m
k_{xy}	5 N/m
k_{yy}	71.62 N/m
ω_0	1 kHz
q_0	10^{-6} m

مرحله اول شبیه‌سازی:

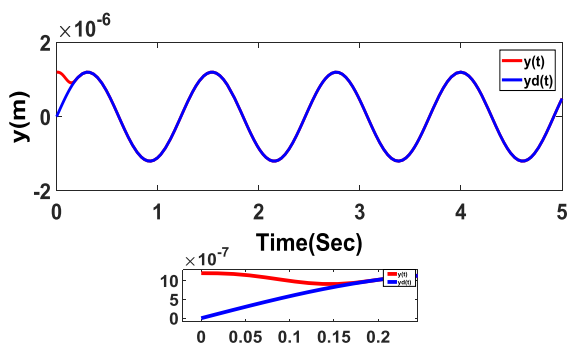
در این بخش از شبیه‌سازی، کنترل مد لغزشی ترمینال به سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی اعمال گردید. ضرایب کنترل کننده مد لغزشی ترمینال برابر با $\rho_1 = \rho_2 = 25$ ، $c_1 = c_2 = 10$ ، ضرایب توابع $h_1(t)$ و $h_2(t)$ مطابق با ضرایب ارائه شده در بخش ضمیمه مقاله و $T = 0.2$ ثانیه تنظیم شدند.

برای اعمال عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، به ترتیب فرض بر آن است که مقادیر پارامترهای سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی ۸۰ درصد جدول ۱ است و برای اعمال دینامیک مدل نشده و اغتشاش خارجی، گرفته شد. بنابراین، در این بخش از شبیه‌سازی، عملکرد کنترل مد لغزشی پیشنهادی در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری بررسی می‌شود. پس از اجرای شبیه‌سازی، مطابق شکل‌های ۳ و ۴ می‌بینیم که موقعیت‌های x و y از شرایط اولیه شروع و در زمانی برابر با 0.2 ثانیه به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا شده‌اند. از شکل ۵ نتیجه می‌شود که کنترل کننده پیشنهادی به خوبی عمل نموده و خطاهای ردگیری موقعیت e_x و e_y را در 0.2

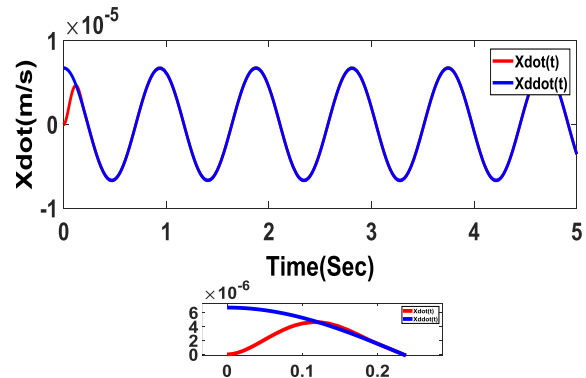
شبیه‌سازی، مطابق شکل ۹، موقعیت x از شرایط اولیه شروع و در زمانی برابر با 0.2 ثانیه به سمت مقدار مطلوب خود همگرا شده است. از شکل ۱۰ نتیجه می‌شود که عملکرد کنترل پیشنهادی در مورد موقعیت y نیز خوب است و آن را در 0.2 ثانیه به مقدار مطلوب خود می‌رساند. شکل ۱۱، نتایج شکل‌های ۹ و ۱۰ را تأیید نموده و نحوه همگرا شدن بردار خطاهای ردگیری را به خوبی نمایش می‌دهد. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌شود که عملکرد کنترل پیشنهادی در برابر عدم قطعیت‌های موجود بسیار خوب بوده و توانسته است که سرعت‌های \dot{x} و \dot{y} را در زمان مورد نظر به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا نماید. از شکل ۱۴ نتیجه می‌شود که تخمین‌گرهای تطبیقی به خوبی عمل نموده و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، پدیده نامطلوب لرزش در ورودی کنترل را حذف نموده‌اند. با دقت در این شکل می‌بینیم که دامنه‌های ورودی u_x و u_y نرم و پیوسته هستند. در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود که قوانین تطبیقی پیشنهادی به خوبی کران عدم قطعیت‌های موجود را تخمین زده‌اند.



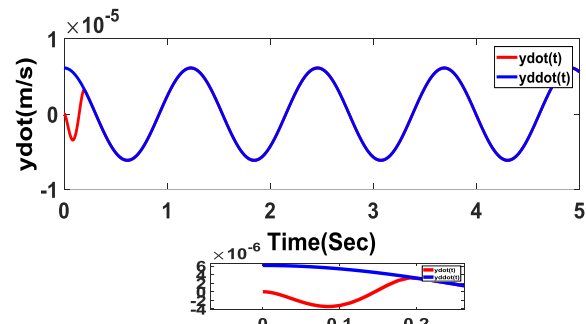
شکل (۹): ردگیری دقیق موقعیت x با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها.



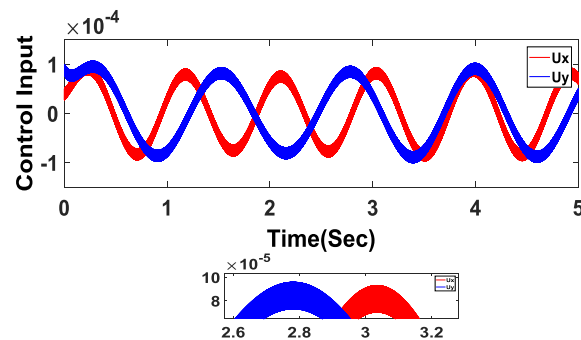
شکل (۱۰): ردگیری دقیق موقعیت y با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها.



شکل (۶): ردگیری دقیق سرعت \dot{x} با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال.



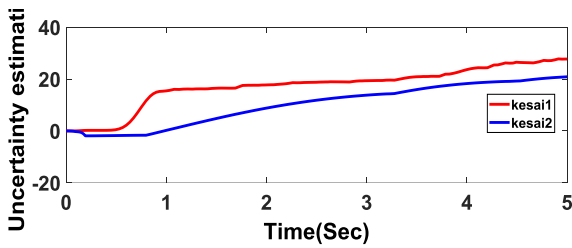
شکل (۷): ردگیری دقیق سرعت \dot{y} با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال.



شکل (۸): ورودی‌های کنترل مد لغزشی ترمینال.

مرحله دوم شبیه‌سازی:

در این مرحله از شبیه‌سازی، عملکرد کنترل کننده مدل لغزشی ترمینال تطبیقی در مواجه با عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی بررسی می‌شود. شرایط حاکم بر این مرحله از شبیه‌سازی، عیناً مطابق مرحله اول شبیه‌سازی است. ضرایب کنترل کننده پیشنهادی، مطابق با ضرایب کنترل کننده مدل لغزشی ترمینال در مرحله اول شبیه‌سازی تنظیم شد. پس از اجرای



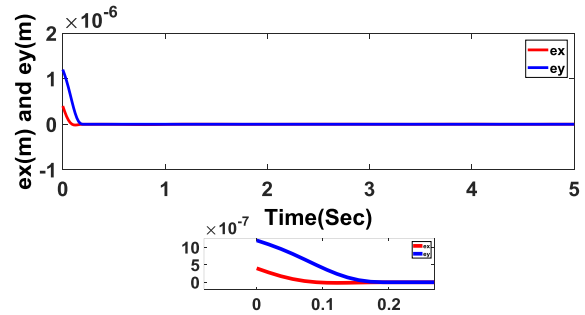
شکل (۱۵): عملکرد قوانین تطبیقی در تخمین زدن کران عدم قطعیت‌ها.

مرحله سوم شبیه‌سازی:

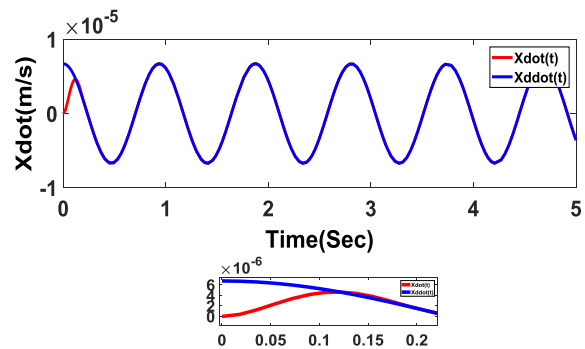
در این مرحله از شبیه‌سازی برای مقایسه عملکرد کنترل پیشنهادی، کنترل کننده مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی بر روی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی پیاده‌سازی می‌شود [۲۱]. شرایط حاکم بر این مرحله از شبیه‌سازی، مطابق مراحل اول و دوم شبیه‌سازی است. ضرایب کنترل کننده پیشنهادی، مطابق با مقادیر زیر تنظیم گردید:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 4.1 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 5.5 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 4.2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

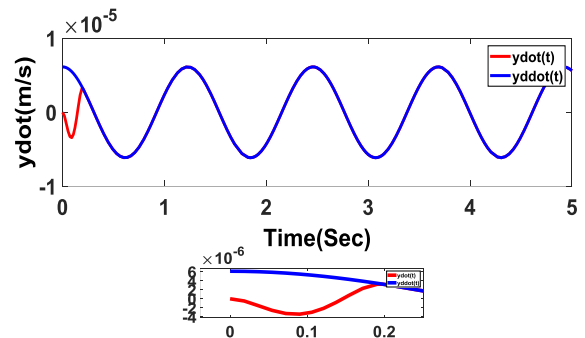
پس از اجرای شبیه‌سازی، مطابق شکل ۱۶، موقعیت x از شرایط اولیه شروع و در زمانی برابر با $1/3$ ثانیه به سمت مقدار مطلوب خود همگرا شده است. از شکل ۱۷ نتیجه می‌شود که کنترل کننده [۲۱] در مورد موقعیت y بهتر عمل نموده و در 0.5 ثانیه آن را به مقدار مطلوب خود رسانده است. شکل ۱۸، نتایج شکل‌های ۱۶ و ۱۷ را تأیید می‌نماید. در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ مشاهده می‌شود که عملکرد کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی در برابر عدم قطعیت‌های موجود بسیار خوب بوده و توانسته است که سرعت‌های \dot{x} و \dot{y} را به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا نماید. از شکل ۲۱ نتیجه می‌شود که عملکرد تقریب‌گر پیشنهادی و عمل انتگرال‌گیری مناسب بوده و ورودی‌های کنترل با دامنه‌ای نرم، پیوسته و عاری از هرگونه لرزشی همراه است. این امر پیاده‌سازی عملی این کنترل کننده را بر روی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی تضمین می‌نماید.



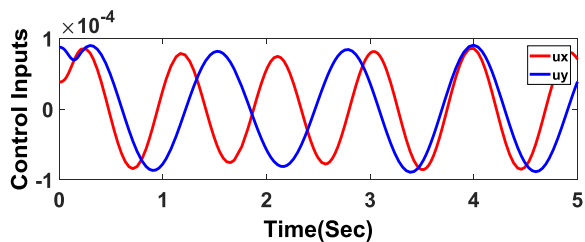
شکل (۱۱): بردار خطاهای ردگیری با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها.



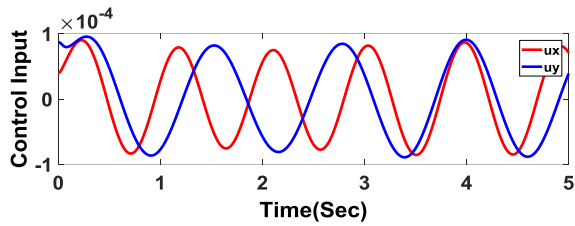
شکل (۱۲): ردگیری دقیق سرعت \dot{x} با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها.



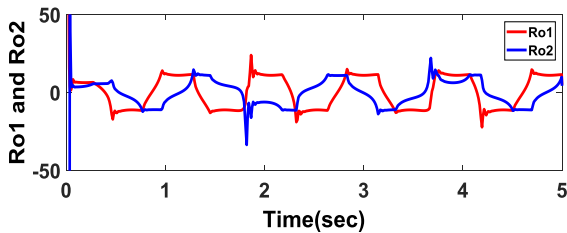
شکل (۱۳): ردگیری دقیق سرعت \dot{y} با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها.



شکل (۱۴): ورودی‌های کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها.



شکل (۲۱): بردار ورودی کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی.

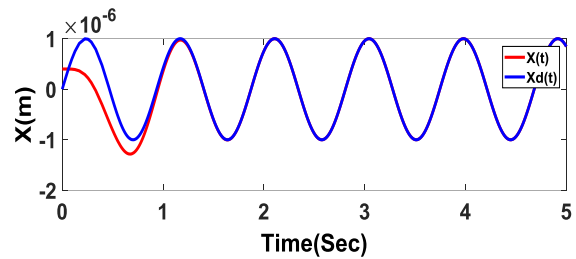


شکل (۲۲): عملکرد تقریب‌گرهای فازی تطبیقی در تقریب زدن کران عدم قطعیت‌ها.

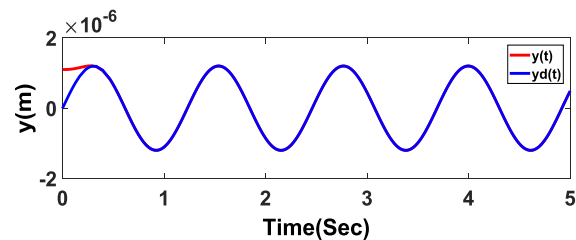
مرحله چهارم شبیه‌سازی:

در این مرحله از شبیه‌سازی، عملکرد کنترل‌کننده مد لغزشی ترمینال تطبیقی در مواجهه با نویز وارده بر سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی بررسی می‌شود. شرایط حاکم بر این مرحله از شبیه‌سازی، مطابق مرحله اول شبیه‌سازی است. به عبارت دیگر حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی سامانه ژيروسکوپ عیناً مطابق مرحله اول شبیه‌سازی است، با این تفاوت که در این بخش $T = 0.1$ ثانیه تنظیم شد. نویز اعمالی با دامنه‌ای بین $[-0.5, 0.5]$ با میانگین صفر و واریانس ۱ در نظر گرفته شد.

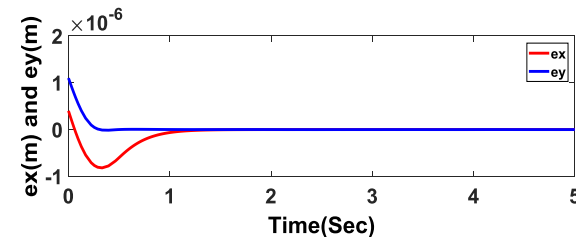
پس از اجرای شبیه‌سازی، مطابق شکل ۲۳ موقعیت x از شرایط اولیه شروع و در زمانی برابر با ۰/۱ ثانیه به سمت مقدار مطلوب خود همگرا شده است. از شکل ۲۴ نتیجه می‌شود که عملکرد کنترل پیشنهادی در مورد موقعیت y نیز خوب است و آنرا نیز در زمان ۰/۱ ثانیه به مقدار مطلوب رسانده است. شکل ۲۵ نتایج شکل‌های ۲۳ و ۲۴ را تأیید نموده و نحوه همگرا شدن خطاهای ردگیری را نشان می‌دهد. در شکل‌های ۲۶ و ۲۷ مشاهده می‌شود که کنترل پیشنهادی در برابر نویز و عدم قطعیت‌های موجود به خوبی عمل نموده و سرعت‌های \dot{x} و \dot{y} را در زمان مورد نظر به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا می‌نماید. از شکل ۲۸



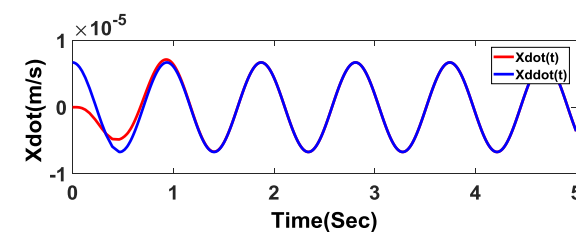
شکل (۱۶): ردگیری دقیق موقعیت x با اعمال کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی.



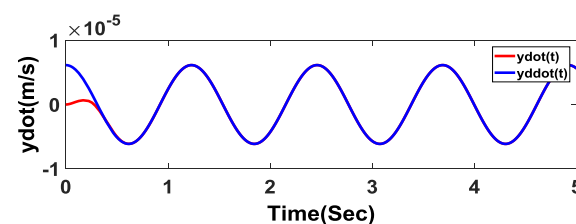
شکل (۱۷): ردگیری دقیق موقعیت y با اعمال کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی.



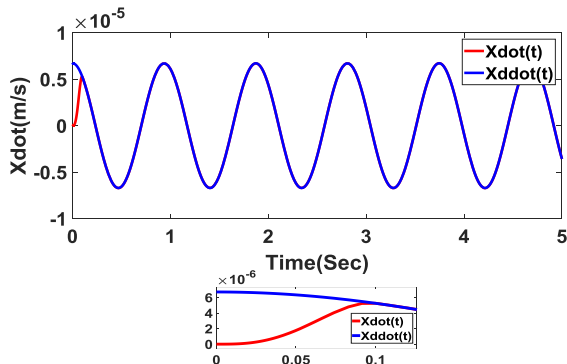
شکل (۱۸): بردار خطاهای ردگیری با اعمال کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی.



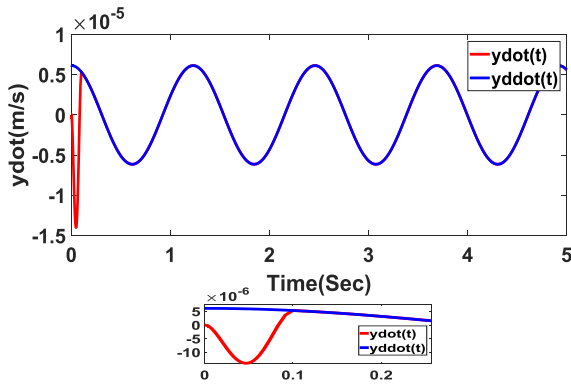
شکل (۱۹): ردگیری دقیق سرعت \dot{x} با اعمال کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی.



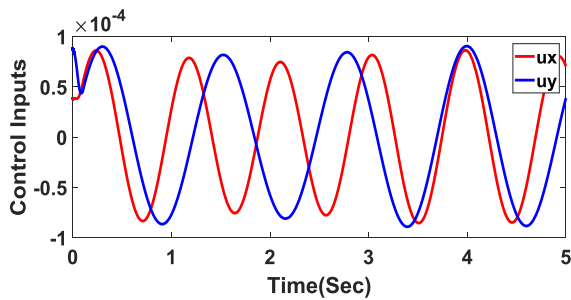
شکل (۲۰): ردگیری دقیق سرعت \dot{y} با اعمال کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی.



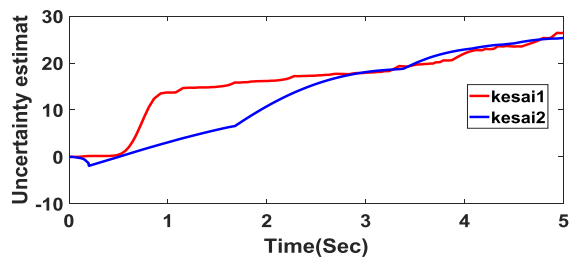
شکل (۲۶): ردگیری دقیق سرعت \dot{x} با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها و نویز.



شکل (۲۷): ردگیری دقیق سرعت \dot{y} با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها و نویز.

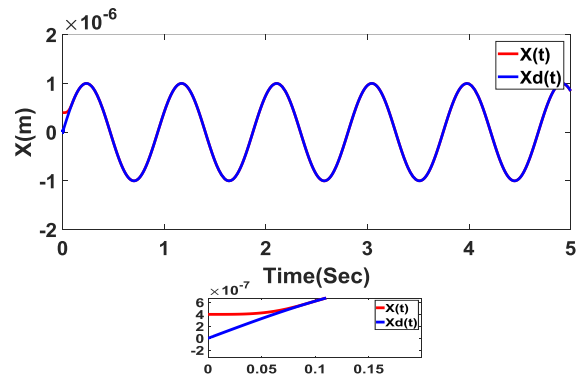


شکل (۲۸): ورودی‌های کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها و نویز.

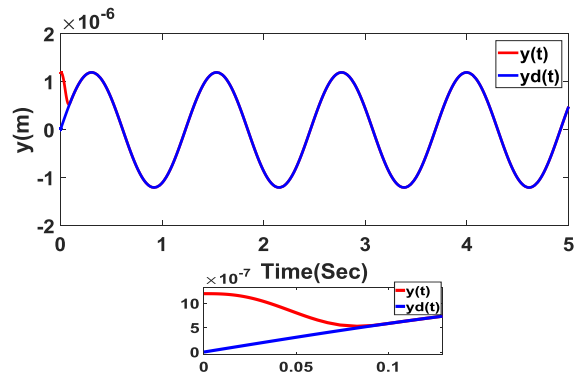


شکل (۲۹): عملکرد قوانین تطبیقی در تخمین زدن کران عدم قطعیت‌ها.

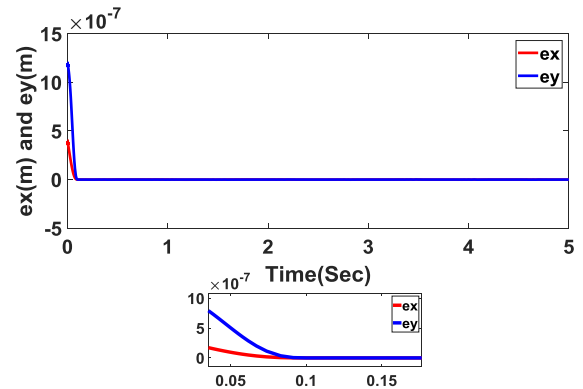
نتیجه می‌گردد که عملکرد خوب کنترل پیشنهادی با دامنه‌های ورودی نرم و پیوسته‌ای همراه است. در شکل ۲۹ می‌بینیم که قوانین تطبیقی به خوبی کران عدم قطعیت‌های موجود را تخمین زده‌اند و با این تخمین مناسب، دقت ردگیری را بسیار افزایش داده‌اند.



شکل (۲۳): ردگیری دقیق موقعیت x با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها و نویز.



شکل (۲۴): ردگیری دقیق موقعیت y با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها و نویز.



شکل (۲۵): بردار خطاهای ردگیری با اعمال کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی در حضور عدم قطعیت‌ها و نویز.

۶-۱- جمع‌بندی نتایج شبیه‌سازی‌ها

با دقت در نتایج شبیه‌سازی‌های ارائه شده، نتیجه می‌شود که کنترل مد لغزشی ترمینال، دارای سرعت همگرایی بالایی بوده و خطاهای ردگیری را در $0/2$ ثانیه به سمت صفر همگرا نموده است. دقت و سرعت همگرایی این کنترل‌کننده، در نتایج مربوط به سرعت‌های \dot{x} و \dot{y} نیز به خوبی قابل مشاهده است. اما این عملکرد عالی، مطابق شکل ۸ با لرزش بسیار شدیدی در دامنه ورودی کنترل همراه است. این امر باعث کوتاه شدن عمر محرکه‌های سامانه تحریک سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی می‌شود.

کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی، در حضور نویز و عدم قطعیت‌های موجود دارای عملکردی به خوبی و با سرعت همگرایی کنترل مد لغزشی ترمینال است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که تخمین‌گر تطبیقی به خوبی عمل نموده و مطابق شکل‌های ۱۴ و ۲۸، اثری از لرزشی در ورودی‌های کنترل دیده نمی‌شود. با دقت در شکل‌های ۱۵ و ۲۹، می‌بینیم که قوانین تطبیقی به درستی عمل نموده و توانسته‌اند که کران عدم قطعیت‌های موجود را تخمین بزنند. به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که افزودن تخمین‌گر تطبیقی به کنترل مد لغزشی ترمینال، مزایای این تکنیک کنترلی را حفظ نموده و توانسته است که مشکلات آن‌را که بروز لرزش در ورودی‌های کنترلی است را برطرف نماید.

کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی، سرعت همگرایی خطای ردگیری e_x و سرعت \dot{x} را به اندازه $1/1$ ثانیه نسبت به عملکرد کنترل مد لغزشی ترمینال و کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی افزایش داده است. اما عملکرد آن در مورد خطای e_y و سرعت \dot{y} بهتر بوده و زمان همگرایی آن‌ها را به اندازه $0/3$ ثانیه افزایش داده است. اما از شکل ۲۱ نتیجه می‌شود که ترکیب تقریب‌گر فازی تطبیقی و عمل انتگرالگیری به خوبی عمل نموده و ورودی‌های کنترل دارای دامنه‌ای بسیار نرم و پیوسته هستند. شکل ۲۲ عملکرد مطلوب تقریب‌گرهای فازی تطبیقی را به خوبی نمایش می‌دهد. اگرچه این کنترل‌کننده، سرعت همگرایی حالت‌های x و \dot{x} را خیلی کند نموده است، اما اگر منصفانه به این مسئله نگاه کنیم نتیجه می‌گیریم که این کنترل‌کننده نیز قابلیت پیاده‌سازی عملی بر روی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی را دارد.

نکته ۷: اگر چه کنترل مد لغزشی فازی تطبیقی با سطح لغزش مجانبی قابلیت پیاده‌سازی عملی را دارد، اما کمترین زمان همگرایی خطای ردگیری e_x در آن $1/3$ ثانیه است که این زمان را نمی‌توان حتی با افزایش ضرایب ورودی کنترل نیز کاهش داد.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی برای سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی ارائه شد. در راه‌کار ارائه شده برای حذف زمان رسیدن متغیرهای حالت به سطح لغزش، از تابع $h_i(t)$ و مشتقات آن استفاده گردید. سپس با استفاده از دینامیک‌های معلوم سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی، کران عدم قطعیت‌های موجود را کاهش داده تا دامنه ورودی‌های کنترل در محدوده مناسبی قرار گیرند. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سامانه حلقه بسته با کنترل پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی زمان محدود سراسری است. شیوه طراحی کنترل پیشنهادی به گونه‌ای است که زمان صفر شدن خطاهای ردگیری کاملاً در اختیار طراح بوده و به عبارت دیگر قابل کنترل است. در ادامه برای جلوگیری از بروز پدیده لرزش در ورودی‌های کنترل، تخمین‌گر تطبیقی ارائه شد که تنها دارای یک قانون تطبیقی است. اثبات ریاضی نشان داد که افزودن تخمین‌گر تطبیقی پیشنهادی، تمامی مزایای کنترل پیشنهادی را حفظ نموده و از حجم محاسبات بسیار پائینی برخوردار است و از بروز لرزش در ورودی‌های کنترل نیز جلوگیری می‌نماید. سامانه حلقه بسته با کنترل مد لغزشی ترمینال تطبیقی و در حضور عدم قطعیت‌های موجود دارای پایداری مجانبی زمان محدود سراسری است. در نهایت برای نمایش عملکرد کنترل پیشنهادی و مقایسه آن با کنترل‌کننده‌های مشابه، شبیه‌سازی‌هایی در چهار مرحله بر روی سامانه ژيروسکوپ ارتعاشی میکروالکترومکانیکی پیاده‌سازی گردید. نتایج شبیه‌سازها عملکرد مطلوب کنترل پیشنهادی را نشان می‌دهند.

۸- منابع

1. Barbour N. and Schmidt G. "Inertial Sensor Technology Trends", IEEE Sensors Journal, Vol. 1, No. 4, pp. 332-339, 2001.

16. Soltanpour, M.R., Khooban, M.H. and Soltani, M. "Robust Fuzzy Sliding Mode Control for Tracking the Robot Manipulator in Joint Space and in Presence of Uncertainties", *Robotica*, Vol. 32, No. 3, pp. 433-446, 2014.
17. Veysi, M. and Soltanpour, M.R. "Voltage-base Control of Robot Manipulator Using Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control", *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 19, No. 5, pp. 1430-1443, 2017.
18. Fei, J. and Yuan, Z. "Dynamic Sliding Mode Control of MEMS Gyroscope", in *Control Applications (CCA), 2013 IEEE International Conference on*, 2013, pp. 437-442: IEEE.
19. Batur, C., Sreeramreddy, T. and Khasawneh Q. "Sliding Mode Control of a Simulated MEMS Gyroscope", *ISA Transactions*, Vol. 45, No. 1, pp. 99-108, 2006.
20. Kuo, C.-L., Yau, H.-T., Lin, C.-H. and Tsui, C.-K. "Fuzzy Sliding Mode Control for a Gyroscope System", in *Mechatronics and Automation (ICMA), 2012 International Conference on*, 2012, pp. 133-137 IEEE.
21. Ren, J., Zhang, R., and Xu, B. "Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control of MEMS Gyroscope with Finite Time Convergence", *Journal of Sensors*, Vol. 2016, 2016.
22. Liang, X., Fei, J., and Xue, Y. "Adaptive Fuzzy Control of MEMS gyroscope Using Global Fast Terminal Sliding Mode Approach", in *Control and Robotics Engineering (ICCARE), 2017 2nd International Conference on*, 2017, pp. 109-112: IEEE.
23. Fei, J. and Chowdhury, F. "Robust Adaptive Sliding Mode Controller for Triaxial Gyroscope", in *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, 2009, pp. 5574-5579: IEEE.
24. Fei, J. "Robust Adaptive Vibration Tracking Control for a Micro-Electro-Mechanical Systems Vibratory Gyroscope with Bound Estimation", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 4, No. 6, pp. 1019-1026, 2010.
25. Wang, S. and Fei, J. "Robust Adaptive Sliding Mode Control of MEMS Gyroscope Using T-S Fuzzy Model", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 77, No. 1-2, pp. 361-371, 2014.
26. Chu, Y. and Fei, J. "Adaptive Global Sliding Mode Control for MEMS Gyroscope Using RBF Neural Network", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2015, 2015.
27. Khalil, H.K. "Nonlinear Systems", Prentice-Hall, New Jersey, Vol. 2, No. 5, pp. 5-1, 1996.
28. Janardhanan, B. and Spurgeon, S. "Advances in Sliding Mode Control: Concept, Theory and Implementation", ed: New York: Springer, 2013.
2. Acar C. and Shkel A. "Four Degrees-of-Freedom Micromachined Gyroscope", University of California, Irvine, 2001.
3. Acar C. and Shkel A. "MEMS Vibratory Gyroscopes: Structural Approaches to Improve Robustness", Springer Science & Business Media, 2008.
4. Painter, C.C. and Shkel, A.M. "Active Structural Error Suppression in MEMS Vibratory Rate Integrating Gyroscopes", *IEEE Sensors Journal*, Vol. 3, No. 5, pp. 595-606, 2003.
5. Fei, J. and Zhou, J. "Robust Adaptive Control of MEMS Triaxial Gyroscope Using Fuzzy Compensator", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, Vol. 42, No. 6, pp. 1599-1607, 2012.
6. Leland, R.P. "Adaptive control of a MEMS gyroscope using Lyapunov methods", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, No. 2, pp. 278-283, 2006.
7. Song, Z., Li, H., and Sun, K. "Adaptive Dynamic Surface Control for MEMS Triaxial Gyroscope with Nonlinear Inputs", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 78, No. 1, pp. 173-182, 2014.
8. Zareh, M. and Soheili, S. "A Modified Model Reference Adaptive Control with Application to MEMS Gyroscope", *Journal of Mechanical Science and technology*, Vol. 25, No. 8, p.2061, 2011.
9. Zheng, Q., Dong, L., Lee, D. H., and Gao, Z. "Active Disturbance Rejection Control for MEMS Gyroscopes", in *American Control Conference*, 2008, 2008, pp. 4425-4430: IEEE.
10. Fang, Y., Fei, J., Yang, Y., and Hua, M. "Adaptive Control of MEMS gyroscope Using Backstepping Approach", in *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014 14th International Conference on*, 2014, pp. 361-366: IEEE.
11. Lu, C. and Fei, J. "Backstepping control of MEMS gyroscope using adaptive neural observer", *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, Vol. 8, No. 6, pp. 1863-1873, 2017.
12. Utkin, V.I. "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer Science & Business Media, 2013.
13. Utkin, V. "Variable Structure Systems with Sliding Modes", *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 22, No. 2, pp. 212-222, 1977.
14. Khooban, M.H. and Soltanpour, M.R. "Swarm Optimization Tuned Fuzzy Sliding Mode Control Design for a Class of Nonlinear Systems in Presence of Uncertainties", *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol. 24, No. 2, pp. 383-394, 2013.
15. Soltanpour, M.R., Zolfaghari, B., Soltani, M., and Khooban, M.H. "Fuzzy Sliding Mode Control Design for a Class of Nonlinear Systems with Structured and Unstructured Uncertainties", *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No. 7, pp. 2713-2726, 2013.

و به همین ترتیب برای اینکه $\dot{h}_i(T) = 0$ و $\ddot{h}_i(T) = 0$ شوند نیز باید معادلات زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} 3a_{00} + 4a_{10} + 5a_{20} = 0 \\ 1 + 3a_{01} + 4a_{11} + 5a_{21} = 0 \\ 1 + 3a_{02} + 4a_{12} + 5a_{22} = 0 \\ 6a_{00} + 12a_{10} + 20a_{20} = 0 \\ 6a_{01} + 12a_{11} + 20a_{21} = 0 \\ 1 + 6a_{02} + 12a_{12} + 20a_{22} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

از حل معادلات (۳۵) و (۳۶)، نتایج زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} a_{00} = -10 \\ a_{10} = 15 \\ a_{20} = -6 \end{cases}, \begin{cases} a_{01} = -6 \\ a_{11} = 8 \\ a_{21} = -3 \end{cases}, \begin{cases} a_{02} = -1.5 \\ a_{12} = 1.5 \\ a_{22} = -0.5 \end{cases} \quad (37)$$

بنابراین $h_i(t)$ ، $\dot{h}_i(t)$ و $\ddot{h}_i(t)$ به دست می‌آیند.

پیوست:

برای طراحی تابع $h_i(t)$ و مشتقات آن به صورت زیر عمل می‌نمائیم:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= e_i(0) + \dot{e}_i(0)t + \frac{1}{2}\ddot{e}_i(0)t^2 + \\ &\left(\frac{a_{00}}{T^3}e_i(0) + \frac{a_{01}}{T^2}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{02}}{T}\ddot{e}_i(0)\right)t^3 + \\ &\left(\frac{a_{10}}{T^4}e_i(0) + \frac{a_{11}}{T^3}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{12}}{T^2}\ddot{e}_i(0)\right)t^4 + \\ &\left(\frac{a_{20}}{T^5}e_i(0) + \frac{a_{21}}{T^4}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{22}}{T^3}\ddot{e}_i(0)\right)t^5 \\ \dot{h}_i(t) &= \dot{e}_i(0) + \ddot{e}_i(0)t + \\ &3\left(\frac{a_{00}}{T^3}e_i(0) + \frac{a_{01}}{T^2}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{02}}{T}\ddot{e}_i(0)\right)t^2 + 4 \\ &\left(\frac{a_{10}}{T^4}e_i(0) + \frac{a_{11}}{T^3}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{12}}{T^2}\ddot{e}_i(0)\right)t^3 + \\ &5\left(\frac{a_{20}}{T^5}e_i(0) + \frac{a_{21}}{T^4}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{22}}{T^3}\ddot{e}_i(0)\right)t^4 \\ \ddot{h}_i(t) &= \ddot{e}_i(0) + 6\left(\frac{a_{00}}{T^3}e_i(0) + \frac{a_{01}}{T^2}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{02}}{T}\ddot{e}_i(0)\right)t + \\ &12\left(\frac{a_{10}}{T^4}e_i(0) + \frac{a_{11}}{T^3}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{12}}{T^2}\ddot{e}_i(0)\right)t^2 + \\ &20\left(\frac{a_{20}}{T^5}e_i(0) + \frac{a_{21}}{T^4}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{22}}{T^3}\ddot{e}_i(0)\right)t^3 \end{aligned} \quad (38)$$

از آنجا که $h_i(T) = 0$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} h_i(T) &= e_i(0) + \dot{e}_i(0)T + \frac{1}{2}\ddot{e}_i(0)T^2 + \\ &\left(\frac{a_{00}}{T^3}e_i(0) + \frac{a_{01}}{T^2}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{02}}{T}\ddot{e}_i(0)\right)T^3 + \\ &\left(\frac{a_{10}}{T^4}e_i(0) + \frac{a_{11}}{T^3}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{12}}{T^2}\ddot{e}_i(0)\right)T^4 + \\ &\left(\frac{a_{20}}{T^5}e_i(0) + \frac{a_{21}}{T^4}\dot{e}_i(0) + \frac{a_{22}}{T^3}\ddot{e}_i(0)\right)T^5 = \\ &(1 + a_{00} + a_{10} + a_{20})e_i(0) + \\ &(1 + a_{01} + a_{11} + a_{21})\dot{e}_i(0)T + \\ &\left(\frac{1}{2} + a_{02} + a_{12} + a_{22}\right)\ddot{e}_i(0)T^2 = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

برای اینکه شرایط $h_i(T) = 0$ مهیا شود، باید معادلات زیر حاکم باشند:

$$\begin{cases} 1 + a_{00} + a_{10} + a_{20} = 0 \\ 1 + a_{01} + a_{11} + a_{21} = 0 \\ 0.5 + a_{02} + a_{12} + a_{22} = 0 \end{cases} \quad (35)$$