

بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد ساختارهای مختلف نانولوله‌های

برن نیتريد تحت تنش اولیه

عباس زندی باغچه‌مریم^۱ و محمد حسینی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک،

دانشگاه صنعتی سیرجان

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۰۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۲۴)

چکیده

در این مقاله اثرات مدول الاستیسیته ساختارهای مختلف (زیگزاگ، کایرال، آرمچیر) بر پاسخ ارتعاشی نانو لوله برن نیتريد تحت تاثیر تنش اولیه به صورت تحلیلی بررسی شده است. با استفاده از فرضیات تئوری‌های تیر اویلر برنولی و تیر تیموشنکو و تئوری الاستیسیته غیرمحلّی، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. شرایط مرزی بررسی شده، دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل - یکسر گیردار و یکسر گیردار - یکسر آزاد است. همچنین مدول الاستیسیته ساختارهای مختلف مورد مطالعه و تاثیر آنها بر روی مقادیر فرکانس طبیعی سامانه بررسی شده است. در نهایت، تاثیر پارامترهای مختلف از جمله قطر نانولوله، اثر تنش اولیه، پارامتر غیرمحلّی و پارامترهای هندسی نانولوله برن نیتريد بر روی فرکانس طبیعی انواع ساختارها بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش پارامتر غیرمحلّی و اثرات تنش اولیه منجر به کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. از سویی دیگر مشاهده شد که افزایش قطر نانولوله موجب افزایش فرکانس سامانه شده و با افزایش قطر بیشتر از ۰/۶ نانومتر، تغییری در نتایج مشاهده نمی‌شود.

واژه‌های کلیدی: فرکانس طبیعی، نانولوله برن نیتريد، مدول الاستیسیته، ساختارهای مختلف نانو لوله، تنش اولیه

Analytical Analysis for Free Vibration of Different Arrangements of BNNTs under Initially Stress

A. Zandi-Baghche-Maryam and M. Hosseini

Department of Mechanical Engineering,
Sirjan University of Technology

(Received: 30/December/2017 ; Accepted: 15/July/2018)

ABSTRACT

In this research, an analytical analysis is used to investigate the effects of elasticity modulus of different arrangements (zigzag, chiral, armchair) on the vibrations responses of boron nitride nanotubes (BNNTs) under initially stress. By using the Euler-Bernoulli and Timoshenko nonlocal elasticity theories, the governing equation of motion and boundary conditions are derived via Hamilton's principle. The analysis considers beams with four different boundary conditions, namely pinned-pinned, fixed-fixed, pinned-fixed and fixed-free. The elasticity modulus of zigzag, armchair and chiral is studied and the effects of these arrangements on natural frequency are investigated. Finally, the effect of various parameters such as nanotube diameter, initial stress, nonlocal parameter and geometric parameters of BNNTs on the natural frequency of zigzag, armchair and chiral BNNTs has been studied. The results show that the natural frequency is decreased when nonlocal parameter and initial stress increase. Furthermore, we observe an increase in natural frequency as nanotube diameter is increased up to 0.6nm while afterwards there is no noticeable change in natural frequency.

Keywords: Natural Frequency, Boron Nitride Nanotubes, Elasticity Modulus, Different Arrangement of Nanotube, Initial Stress

۱- کارشناسی ارشد: abas.zandi@yahoo.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): hosseini@sirjantech.ac.ir

۱- مقدمه

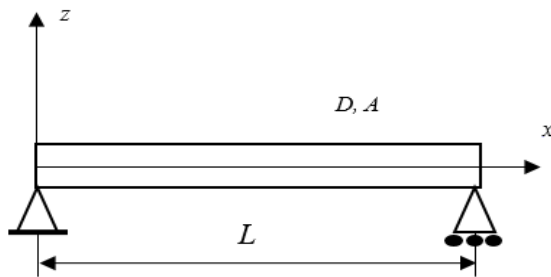
محققان متعددی بررسی شده است. شکریه و رفیعی [۱۳] برای مدل کردن نانولوله از مدل الاستیک خطی استفاده کردند و برای نانولوله‌های کربنی مدول الاستیسیته‌های Γ به دست آوردند. لی و همکاران [۱۴] نتایج کاملاً متفاوتی برای مدول الاستیسیته به دست آوردند. آن‌ها نشان دادند مقدار مدول با افزایش قطر کاهش می‌یابد. پروانه و شریعتی نیز نتیجه‌ای مشابه را به دست آورده و نشان دادند نوع بارگذاری و ضریب بار نیز بر مدول الاستیک موثر است [۱۵]. همچنین لو و هو [۱۶] با بررسی چند مدول از نانولوله‌ها بیان کردند که با افزایش قطر، مدول الاستیسیته ساختارهای زیگزگ^۱ و کایرال^۲ افزایش می‌یابد ولی در ساختار آرمچیر^۳ افزایش قطر اثر محسوس بر روی مدول الاستیسیته ندارد. آیت‌اللهی و همکاران [۱۷] برای مدل کردن نانولوله از پتانسیل غیرخطی مورس استفاده کرده و مشاهده کردند که تا حدود کرنش ۵ درصد، نانولوله رفتاری کاملاً خطی دارد اما پس از کرنش ۵ درصد رفتار آن تغییر می‌کند. کانگ و همکاران [۱۸] کماتش نانولوله‌های کربنی تحت بار فشاری محوری را به کمک دو روش مکانیک مولکولی و روش اجزا محدود محاسبه کردند. وانگ و گو [۱۹] یک مدل ساختاری پیوسته در مقیاس نانو با استفاده از قانون کوشی- بورن مرتبه بالا ایجاد کردند و رفتار نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تحت تغییر شکل‌های بزرگ در دماهای محدود را شبیه‌سازی نمودند. با استفاده از یک مدل‌سازی پیوسته مبتنی بر تئوری پوسته نازک، شیما و همکارانش [۲۰] تغییر شکل شعاعی نانولوله‌های کربنی چند جداره تحت فشار هیدرواستاتیکی را مورد مطالعه قرار دادند و با به‌کارگیری این تئوری، فشار بحرانی نانولوله را تخمین زدند.

آنچه در مرور مطالعات گذشته به آن اشاره شد نشان دهنده این امر است که با وجود پژوهش‌های قابل توجهی که در زمینه خواص مکانیکی نانولوله‌ها انجام شده است، اما عمده این تحقیقات به بررسی مدول الاستیسیته نانولوله‌های کربنی اختصاص یافته و تاثیر آن بر پاسخ ارتعاشی و فرکانس طبیعی نانولوله برن‌نیتريد مورد بررسی

پس از کشف نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱، این مواد به علت خواص مکانیکی و فیزیکی فوق‌العاده خود توجه بسیاری از محققان و مهندسين را به خود جلب کرده‌اند. از مزایای نانولوله‌ها می‌توان به مقاومت بالا و چگالی کم آن‌ها اشاره کرد، که موجب می‌شود نانولوله‌های کربنی به‌عنوان الیافی در مقیاس نانو در تقویت و کاهش وزن کامپوزیت‌ها مؤثر باشند. لذا پیش‌بینی خواص مکانیکی این ساختارها تحت بارگذاری‌های مختلف اهمیت ویژه‌ای دارد. همچنین کشف نانوساختارها موجب شده است که فعالیت‌های تحقیقاتی گسترده‌ای در علوم مهندسی، به بحث نانو ساختارها و کاربردهای آنها اختصاص یابد، دلیل عمده آن اندازه کوچک، چگالی کم، سختی بالا و استحکام زیاد می‌باشد [۴-۱]، که این خواص منحصر به فرد موجب کارایی زیاد آنها در تمامی شاخه‌های نانو فناوری، از دانش سیال‌شناسی گرفته تا دانش پزشکی گردیده است. در دانش سیال‌شناسی می‌توان از نانولوله‌ها به‌عنوان یک نانولوله برای حمل و یا ذخیره سیال استفاده کرد [۶-۵]. در شاخه پزشکی، می‌توان نانولوله‌های کربنی را به‌عنوان حسگرهای زیستی [۸-۷]، یا کانالی برای تزریق دارو [۹] مورد استفاده قرار داد. همچنین در سامانه‌های تزریق دارویی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره برای تزریق دارو به سلول‌های مورد هدف استفاده می‌شوند [۱۰]. اهمیت این موضوع موجب شده است که تحلیل دینامیکی نانولوله‌های حامل جریان سیال، به یکی از موضوعات مهم مورد بحث در میان محققان تبدیل گردد. ارینگن یک تئوری الاستیسیته غیرمحلی را پیشنهاد کرد که براساس آن تنش در هر نقطه از جسم نه تنها به کرنش در آن نقطه بلکه وابسته به کرنش‌های سایر نقاط جسم نیز است [۱۱].

امروزه شبیه‌سازی‌های محاسباتی به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای پیش‌بینی خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی استفاده می‌شوند. این شبیه‌سازی‌ها را می‌توان به دو زیرگروه کلی مدل‌سازی اتمی یا شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مدل‌سازی محیط پیوسته تقسیم نمود [۱۲]. شبیه‌سازی دینامیک مولکولی یکی از پیشرفته‌ترین تکنیک‌ها در شبیه‌سازی نانوساختارهاست که توسط

1- Zigzag
2- Chiral
3- Armchair



شکل (۱): نانولوله تحت تنش اولیه با شرایط مرزی دوسر مفصل.

در این قسمت ابتدا تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نانولوله به دست می‌آید، سپس با استفاده از اصل همپلتون معادله حاکم بر حرکت و شرایط مرزی براساس تئوری تیر اویلر- برنولی و تئوری تیر تیموشنکو استخراج می‌شود.

۱-۲- تئوری تیر اویلر- برنولی

براساس تئوری تیر اویلر- برنولی رابطه تغییر مکان و کرنش به صورت معادله زیر است:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

که در آن x مختصات طولی و z مختصاتی است که از سطح میانی لوله اندازه‌گیری شده است. $w(x, t)$ تغییر مکان نانولوله و ϵ_{xx} کرنش عرضی نانولوله است. وردش انرژی کرنشی نانولوله به صورت معادله زیر است:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dA dx \quad (2)$$

که در رابطه فوق σ_{xx} بیانگر تنش است. با جایگزینی معادله (۱) در معادله (۲)، معادله انرژی کرنشی به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\delta U = - \int_0^L M \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx \quad (3)$$

که در معادله (۳)، M گشتاور خمشی لوله و به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$M = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (4)$$

وردش انرژی پتانسیل ناشی از تنش اولیه فشاری σ_0 به صورت رابطه زیر قابل بیان است:

$$\delta V = - \int_0^L \sigma_0 A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (5)$$

قرار نگرفته است. از سوی دیگر، در این تحقیقات تأثیر تغییر ساختار نانولوله بر روی این خواص به طور جامع مطالعه نشده و فقط به بررسی با ساختارهای آرمچیر و زیگزاگ با ابعاد خاص محدود شده‌اند. حال آن که جهت بررسی تأثیر ساختار نانولوله بر روی فرکانس طبیعی سامانه، لازم است که تأثیر زوایه‌های مختلف و قطر نانولوله بررسی شود. همچنین تئوری کلاسیک توانایی بررسی ارتعاشی سازه در مقیاس نانو را ندارد، لذا استفاده از تئوری غیرمحلّی ارینگن^۱ که شامل پارامتر غیرمحلّی و بیانگر اثر اندازه می‌باشد اجتناب‌ناپذیر است. بنابراین، این پژوهش به بررسی این موضوع اختصاص یافته است.

از نوآوری اصلی این پژوهش می‌توان به بررسی تحلیلی اثرات اندازه و تئوری غیرمحلّی ارینگن، تنش اولیه، ساختارهای مختلف (زیگزاگ، کایرال، آرمچیر) و استفاده از شرایط مرزی مختلف و تئوری‌های تیر اویلر- برنولی^۲ و تیموشنکو^۳ بر روی رفتار ارتعاشی نانولوله برن نیترید اشاره نمود. براساس تئوری‌های تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو و تئوری الاستیسته غیرمحلّی ارینگن و با استفاده از روش همپلتون^۴ معادلات حاکم حرکت و شرایط مرزی استخراج شده است. شرایط مرزی بررسی شده، دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل - یکسر گیردار و یکسر گیردار- یکسر آزاد است. تأثیر پارامترهای مختلف نانولوله شامل قطر، طول و همچنین ساختارهای مختلف بر مدول الاستیسته و فرکانس طبیعی نانولوله برن نیترید، به طور مستقل بررسی می‌شود. سرانجام مدول الاستیسته ساختارهای آرمچیر، زیگزاگ و کایرال را مطالعه و تأثیر آن‌ها بر روی مقادیر فرکانس طبیعی بررسی می‌شود. همچنین صحت نتایج با مقایسه با نتایج حاصل از آنچه قبلاً در تحقیقات پیشین ارائه شده است تأیید می‌گردد.

۲- معادله حاکم بر حرکت و شرایط مرزی

یک نانولوله با طول L ، قطر D و سطح مقطع A با شرایط مرزی دوسر مفصل را همانند شکل ۱ در نظر بگیرید.

1- Eringen
2- Euler- Bernoulli
3- Timoshenko
4- Hamilton

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (13)$$

σ_{xx} , ε_{xx} , E , $e_0 a$ به ترتیب تنش عمودی، کرنش عمودی، مدول یانگ و پارامتر مقیاس طول است. همچنین a طول مشخصه درونی و e_0 یک پارامتر غیرمحل می باشد، که به صورت تجربی و آزمایشگاهی به دست می آید و به جنس ماده وابسته است. با ضرب طرفین معادله (۱۳) در z و انتگرال گیری بر روی سطح، معادله (۱۳) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (14)$$

که I ممان اینرسی (گشتاور دوم سطح) ناحیه است. با جایگزینی معادله (۱۰) در معادله (۱۴)، گشتاور خمشی غیرمحل به صورت زیر تعریف می شود:

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 (\sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \quad (15)$$

همچنین با دو بار مشتق گیری از معادله (۱۵) و با استفاده از معادله (۱۰)، معادلات حاکم بر حرکت نانولوله به صورت زیر حاصل می شود:

$$\left(EI - (e_0 a)^2 \sigma_0 A \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

بر اساس معادلات (۱۰) و (۱۱) شرایط مرزی غیرمحل دو سر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل- یکسر گیردار و یکسر گیردار- یکسر آزاد به ترتیب به صورت زیر تعریف شده است:

$$w = 0, M = (e_0 a)^2 \left(\sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ at } x = 0, L \quad (17)$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0 \quad (18)$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ at } x = L$$

$$w = 0, M = (e_0 a)^2 \left(\sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ at } x = 0 \quad (19)$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ at } x = L$$

همچنین وردش انرژی جنبشی نانو لوله به صورت رابطه (۶) است:

$$\delta T = \int_0^L \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dx \quad (6)$$

که در آن، ρ چگالی لوله است. با استفاده از اصل همپلتون می توان معادله حرکت و شرایط مرزی برای یک نانولوله که به صورت زیر فرمول بندی شده است را استخراج کرد (۲۱):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U - V) dt = 0 \quad (7)$$

با جایگزینی معادله (۳) و (۶) در رابطه (۷)، معادله زیر حاصل می شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(M \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \sigma_0 A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx dt = 0 \quad (8)$$

با استفاده از لم اساسی وردش و انتگرال گیری جزء به جزء، همچنین با قدری محاسبات جبری، رابطه (۸) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left[\left[M \delta w' - \frac{\partial M}{\partial x} \delta w + \sigma_0 A \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \right]_0^L + \int_0^L \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx = 0 \quad (9)$$

با استفاده از رابطه (۹) می توان معادلات حاکم بر حرکت را به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10)$$

همچنین شرایط مرزی به دست آمده از اصل همپلتون و معادله (۹) در $x=0$ یا $x=L$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ or } M = 0 \quad (11)$$

$$w = 0 \text{ or } -\frac{\partial M}{\partial x} + \sigma_0 A \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

طبق تئوری الاستیسیته غیرمحل ارینگن [۲۲]، میدان تنش در نقطه x ، هم وابسته به میدان کرنش در همان نقطه و نیز وابسته به میدان کرنش در سایر نقاط جسم، $x' \neq x$ می باشد، به بیانی دیگر تانسور تنش در یک نقطه، تابعی انتگرالی از تانسور کرنش در تمام نقاط دامنه همان ناحیه می باشد. بر این اساس، رابطه ساختاری تنش- کرنش برای یک ماده همگن الاستیک خطی می توان به صورت زیر بیان شود. بر اساس تئوری غیرمحل ارینگن [۲۲]، رابطه ساختاری تنش- کرنش به شکل زیر تعریف می شود:

$$\lambda_A = \frac{\sin(\theta_2) \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{4\sin(\theta_2) \cot\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \cot(\theta_2) \cos\left(\frac{\pi}{n+m}\right)} \quad (24)$$

که در رابطه فوق، ضریب θ_2 مربوط به زاویه بین مولکولی است. رابطه شعاع و زاویه ساختار به ترتیب به صورت روابط زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۳]:

$$R = \frac{r_0 \sqrt{3(n^2 + nm + m^2)}}{2\pi} \quad (25)$$

$$\Theta = \arccos\left(\frac{(2n+m)}{2\sqrt{(n^2 + nm + m^2)}}\right)$$

که r_0 طول پیوند برن نیتريد می‌باشد. با استفاده از معادله (۲۱) و پارامترهای بدون بعد (۲۲)، معادلات حاکم بر حرکت را می‌توان به فرم بی‌بعد شده به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Delta_1 \frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} + \Delta_2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} + \Delta_3 \bar{w} = 0 \quad (26)$$

در رابطه فوق ضرایب پارامتر $\Delta_i, i=1,2,3$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\Delta_1 = \eta - \alpha^2 \tau, \quad \Delta_2 = \alpha^2 \lambda^2 + \tau, \quad \Delta_3 = -\lambda^2 \quad (27)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه چهار به صورت زیر به دست آمده است:

$$\bar{w} = C_1 \cosh(\beta \bar{x}) + C_2 \sinh(\beta \bar{x}) + C_3 \cos(\gamma \bar{x}) + C_4 \sin(\gamma \bar{x}) \quad (28)$$

به طوری که:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta_2 + \sqrt{\Delta_2^2 - 4\Delta_1 \Delta_3} \\ 2\Delta_1 \end{pmatrix}^{1/2} \quad (29)$$

ثوابت C_i با توجه به شرایط مرزی نانولوله که در وضعیت‌های مختلفی قرار دارد مشخص می‌شوند. در این مقاله برای اجتناب از محاسبات بیش از حد و غیر قابل نیاز، فرایند حل تنها برای شرایط مرزی دوسر مفصل توضیح داده می‌شود. برای نانولوله با شرایط مرزی دوسر مفصل، فرم بی‌بعد معادله (۱۷) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + \sigma_0 A \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = L$$

$$M = (e_0 a)^2 \left(\sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (20)$$

$$-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x = L$$

۲-۱-۱-۲ روش حل

جهت تحلیل ارتعاشات آزاد نانولوله مورد بررسی می‌توان تغییر مکان نانولوله را به فرم هارمونیک زیر در نظر گرفت.

$$w(x, t) = w_0(x) e^{i\omega t} \quad (21)$$

در رابطه فوق، ω فرکانس طبیعی و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. با جایگزینی معادله (۲۱) در معادله حرکت و شرایط مرزی و استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر می‌توان معادلات حاکم را بدون بعد نمود.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w_0}{L}, \quad \lambda^2 = \omega^2 \frac{\rho A L^4}{E_0 I}, \quad \eta = \frac{E}{E_0} \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{e_0 a}{L}, \quad \tau = \frac{\sigma_0 A L^2}{E_0 I}$$

λ, α, τ به ترتیب پارامترهای فرکانس بی‌بعد سامانه، پارامتر اثر مقیاس و پارامتر تنش اولیه است. همچنین E مدول الاستیسیته می‌باشد که تابعی از شعاع و ساختار مختلف نانولوله برن نیتريد است و به صورت زیر به دست می‌آید [۲۳]:

$$E = \frac{1}{2\pi R} (n+m) K_\rho r_1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{3} + \Theta\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \left(\frac{\lambda_A K_\rho r_1^2}{C_\theta \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)} + 1 \right) \right] \quad (23)$$

$\Theta, C_\theta, K_\rho, r_1$ و θ_3 مربوط به مشخصات پیوند بین مولکولی و ساختار هندسی نانولوله برن نیتريد می‌باشد که از طریق تجربی به دست می‌آیند و مقادیر آنها براساس مرجع [۳۶] در جدول ۱ گردآوری شده است. همچنین R شعاع نانولوله و (n, m) ضرایب ساختار هستند که به وسیله آن نوع ساختار نانولوله مشخص می‌شود. ضریب λ_A را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت [۲۳]:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (38)$$

$$\gamma_{xz} = \phi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (39)$$

که در آن کرنش برشی و ϕ چرخش خمشی است. انرژی کرنشی و انرژی جنبشی به ترتیب طبق روابط زیر حاصل می شود.

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \quad (40)$$

$$\delta T = \int_0^L \left(\rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \rho I \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} \right) dx \quad (41)$$

که σ_{xz} تنش برشی است. با جایگزینی روابط (۴۰) و (۴۱) و معادله (۵) در اصل همیلتون و انجام مقداری محاسبات جبری همانند بخش قبل، در نهایت معادله حاکم به همراه شرایط مرزی استخراج می شوند [۲۴]:

معادله حاکم:

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - K_s GA \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \left[-\rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \sigma_0 A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = 0 \quad (42)$$

$$K_s GA \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (43)$$

که در آن، G مدول برشی و $K_s = \frac{5}{6}$ ضریب تصحیح برشی است. شرایط مرزی:

$$w = 0, M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} - (e_0 a)^2 \left[\sigma_0 A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} \right] = 0 \quad (44)$$

برای شرایط مرزی مفصلی

$$w = 0, \phi = 0 \quad (45)$$

برای شرایط مرزی گیردار

$$M = 0, K_s GA \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (46)$$

برای شرایط مرزی آزاد

$$\bar{w} = 0 \text{ and } \bar{M} = \left(\frac{e_0 a}{L} \right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_0 A L^2}{E_0 I} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \omega^2 \frac{\rho A L^4}{E_0 I} \bar{w} \right) - \frac{E}{E_0} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0, \text{ at } \bar{x} = 0, 1 \quad (30)$$

با توجه به صفر بودن تغییر مکان در ابتدا و انتهای نانولوله معادله (۳۰) به صورت رابطه زیر به دست می آید.

$$\bar{w} = 0 \text{ and } \bar{M} = (\alpha^2 \tau - \eta) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \text{ at } \bar{x} = 0, 1 \quad (31)$$

همچنین برای شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد رابطه زیر برقرار است:

$$\bar{w} = 0, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ at } \bar{x} = 0 \quad (32)$$

$$\bar{M} = 0, -\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{x}} + \tau \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ at } \bar{x} = 1$$

با جایگزینی معادله (۲۸) در معادله (۳۱)، ماتریس زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} \sinh \beta & \sin \gamma \\ \beta^2 \sinh \beta & -\gamma^2 \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

در اینجا برای این که معادله (۳۳) جواب داشته باشد باید دترمینان ضرایب صفر شود، که در این صورت رابطه زیر حاصل می شود:

$$\sin \gamma = 0, \gamma = s\pi, s = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

با جایگزینی معادله (۳۴) در (۲۶) و استفاده از معادله (۲۷)، معادله (۳۵) به دست می آید:

$$B_1 \lambda^2 + B_2 = 0 \quad (35)$$

که

$$B_1 = s^2 \pi^2 \alpha^2 + 1 \quad (36)$$

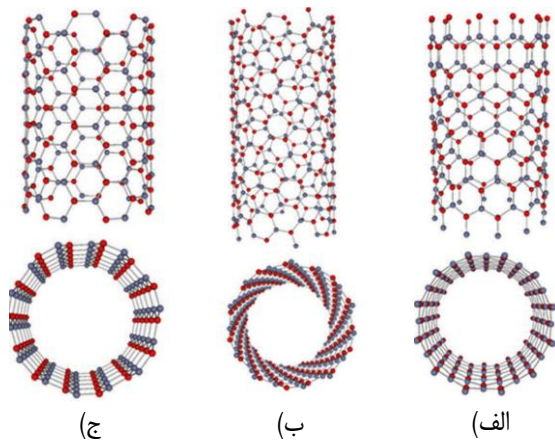
$$B_2 = s^4 \pi^4 (\alpha^2 \tau - \eta) + s^2 \pi^2 \tau$$

با توجه به معادله (۳۵) فرکانس λ به صورت زیر به دست می آید:

$$\lambda = \sqrt{\frac{-B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{s^4 \pi^4 (-\alpha^2 \tau + \eta) - s^2 \pi^2 \tau}{s^2 \pi^2 \alpha^2 + 1}} \quad (37)$$

۲-۲- تئوری تیر تیموشنکو

براساس تئوری تیر تیموشنکو رابطه کرنش جابجایی به صورت معادله زیر است [۲۴]:



شکل (۳): نمونه‌ای از ساختار: الف) زیگزگ (ب) کایرال ج) آرمچیر

برای حل معادلات حاکم و استخراج فرکانس سامانه از فرایندی که در بخش قبل توضیح داده شده؛ استفاده می‌شود.

در ادامه در این پژوهش مقادیر فرکانس بی‌بعد به‌زای مقادیر مختلف و برای ساختارهای زیگزگ، کایرال و آرمچیر (شکل ۳) و شرایط مرزی دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل - یکسر گیردار و یکسر گیردار - یکسر آزاد بررسی می‌شود.

۳- نتایج و بحث

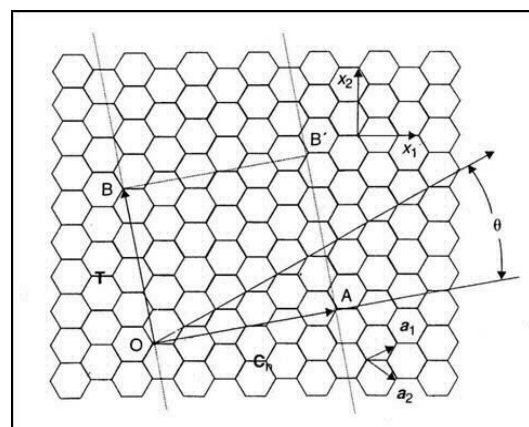
در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از تاثیر تغییرات پارامترهای مختلف مانند قطر نانولوله، طول و زاویه پیوند، ضرایب شاخص ساختارهای مختلف (n, m) ، تاثیر تنش اولیه و اثر شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی سامانه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مقادیر ثوابت هندسی، مکانیکی و ثوابت نیرویی که در استخراج نتایج مورد نیاز است در جدول ۱ آورده شده است. همچنین در جدول ۲ مقادیر مدول الاستیسیته به‌دست‌آمده برای ساختارهای مختلف آورده شده است. علاوه بر این به‌منظور اطمینان از نتایج حاصل شده، مقادیر فرکانس طبیعی به‌دست آمده برای ساختارهای مختلف با نتایج حاصل از مرجع [۲۶] در جدول ۳ مقایسه شده و بررسی گردید. با توجه به نتایج به‌دست آمده مشخص است که دقت بالایی در نتایج وجود دارد و می‌توان از صحت نتایج به‌دست‌آمده اطمینان حاصل کرد.

در شکل ۲، هندسه یک صفحه گرافیتی دوبعدی که شامل دو محور x_1 و x_2 است، نمایش داده شده است. در این شکل محورهای x_1 و x_2 به ترتیب نشان‌دهنده محور آرمچیر و محور زیگزگ و نقطه O بیانگر مرکز صفحه می‌باشد. همچنین دو نقطه معادل از صفحه مانند O و A به واسطه بردار C_h به هم وصل می‌شود، که به آن بردار مشخصه می‌گویند. دو سر این بردار باید بر روی دو رأس از شش ضلعی‌ها قرار گیرد. این بردار به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$C_h = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 \quad (47)$$

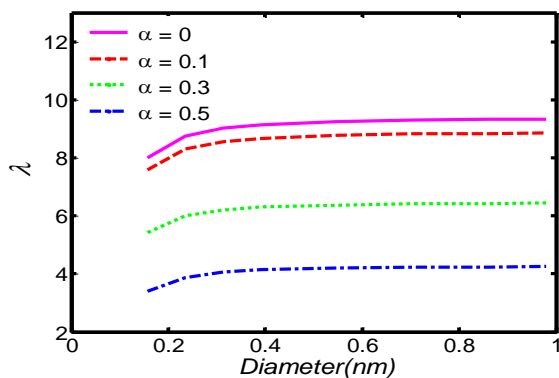
در رابطه فوق a_1 و a_2 بردارهای پایه در شبکه لانه‌زنبوری گرافن^۱ می‌باشند. همچنین زوج مرتب (m, n) را اندیس‌های بردار C_h می‌نامند.

هندسه نانولوله کربنی تک‌دیواره را می‌توان با پیچیدن یک ورق مستطیل شکل از ورق گرافن حول یک محور خاص مدل کرد تا در نهایت یک نانولوله توخالی به‌دست آید. نانولوله‌های کربنی تک‌دیواره به سه نوع؛ زیگزگ، آرمچیر و کایرال تقسیم‌بندی می‌شوند. اگر چرخش بردار C_h در امتداد محور $\theta = 0$ صورت گیرد، نانولوله زیگزگ تشکیل می‌شود. همچنین از چرخش بردار C_h در امتداد محور $\theta = \pi/6$ ، نانولوله آرمچیر ایجاد می‌شود و با چرخش بردار C_h حول هر محوری که در آن زاویه بین صفر تا $\theta = \pi/6$ باشد نانولوله کایرال تشکیل می‌شود [۲۵]. ساختار نانولوله زیگزگ، کایرال و آرمچیر به ترتیب به صورت (m, n) ، (m, m) و (m, m) همانند شکل ۳ نشان داده می‌شوند.



شکل (۲): نمایش صفحه گرافیتی دوبعدی.

شکل ۴ اثر پارامتر غیرمحل (α) بر فرکانس طبیعی سامانه نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش پارامتر غیرمحل منجر به آن می‌شود که فرکانس طبیعی کاهش یافته و در نتیجه سامانه در پارامتر غیرمحل پایین‌تر، افزایش فرکانس طبیعی را تجربه می‌کند. این رفتار به این دلیل است که با افزایش این پارامتر، انعطاف‌پذیری نانولوله بیشتر شده و در نتیجه فرکانس طبیعی کمتر می‌گردد. بنابراین، تئوری ارینگن نسبت به تئوری الاستیسیته کلاسیک رفتار نرم‌تری از ماده را پیش‌بینی می‌کند. همچنین با کاهش مقدار پارامتر غیرمحل، نتایج تئوری غیرکلاسیک به تئوری الاستیسیته کلاسیک ($\alpha=0$) نزدیک می‌شود. شکل ۵ نمودار فرکانس بی‌بعد سامانه برای ساختار زیگزاگ و به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد تنش اولیه را نشان می‌دهد، که در آن محور افقی قطر نانولوله و محور عمودی فرکانس بی‌بعد سامانه را بیان می‌کند. با توجه به شکل مشخص است که با افزایش پارامتر بی‌بعد تنش اولیه، فرکانس سامانه کاهش می‌یابد. دلیل فیزیکی آن نیز روشن است که با افزایش مقادیر مختلف اثرات تنش اولیه، در نتیجه فرکانس سامانه کمتر می‌شود. همچنین توجه به نتایج مشخص است که با افزایش تا حدی مشخص قطر نانولوله، فرکانس افزایش یافته و بعد از آن نتایج تغییرات چندانی ندارد. زیرا با افزایش قطر نانولوله، تغییرات مدول الاستیک کاهش یافته و در قطرهای بالا مدول الاستیک به عددی مشخصی همگرا شده، لذا فرکانس طبیعی بدون بعد در قطرهای بالا بدون تغییر باقی می‌ماند.



شکل (۴): مقادیر فرکانس بی‌بعد نانولوله برنیتريد بر حسب

قطر نانولوله برای ساختار زیگزاگ با شرایط مرزی دوسر

مفصل به‌ازای $\tau=1$.

جدول (۱): خواص هندسی، مکانیکی و ثوابت نیرویی نانولوله برنیتريد [۲۳].

E_0 Gpa	θ_2, θ_3 rad	r_1 nm	r_0 nm	C_θ nN nm	K_ρ nN/nm	ثوابت نیرویی
۲۸۰	$2\pi/3$	۰/۲۳	۰/۱۴۲	۶۲۰/۴۷	۱/۰۵	مفصل

جدول (۲): مقایسه نتایج مقادیر مدول الاستیسیته

ساختارهای مختلف.

ساختار	رابطه (۲۱) (گیگاپاسکال)	مرجع [۲۳] (گیگاپاسکال)	مرجع [۲۷] (گیگاپاسکال)
(۰ و ۳۰)	۸۲۵	۸۲۷	-----
(۱۵ و ۱۵)	۸۲۶	۸۲۸	۱۰۲۰
(۵ و ۵)	۸۱۳	۸۱۵	۸۲۶

جدول (۳): مقایسه فرکانس طبیعی به‌دست‌آمده با مرجع

(۲۶) برای شرایط مرزی مختلف و سه ساختار زیگزاگ،

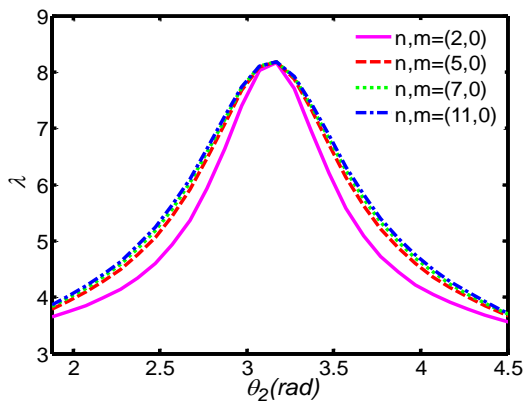
آرمچیر و کایرال به‌ازای قطر نانولوله ۱ Nm و

$$\alpha=0, \tau=0$$

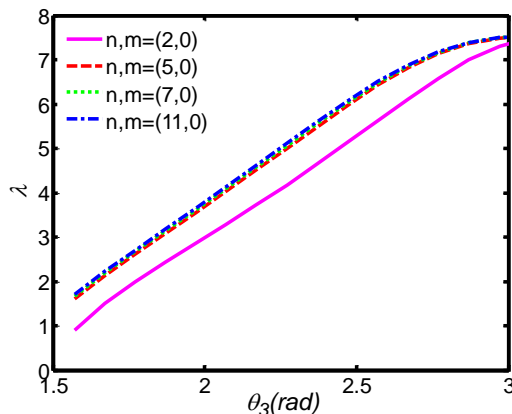
مرجع [۲۶]	نوع ساختار			شرایط مرزی
	زیگزاگ	آرمچیر	کایرال	
۹/۸۶۹۶	۹/۸۴۱۸	۹/۸۵۴۶	۹/۸۵۱۹	دوسر مفصل
۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۱۵۸	۲۲/۳۲۵۳	۲۲/۳۲۱۶	دوسر گیردار
۱۵/۴۱۸۱	۱۵/۳۷۸۶	۱۵/۳۹۴۸	۱۵/۳۹۲۳	یکسر مفصل-گیردار
۳/۵۱۶۰	۳/۵۰۱۴	۳/۵۱۰۸	۳/۵۰۹۵	یکسر گیردار-آزاد

در ادامه اثرات پارامتر غیرمحل بر فرکانس طبیعی نانولوله برنیتريد مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. در

ضریب شاخص ساختار افزایش یابد، فرکانس طبیعی تا $\theta_2 = \pi$ افزایش یافته و بعد از آن دچار کاهش می‌شود. بنابراین، حداکثر فرکانس طبیعی سامانه در $\theta_2 = \pi$ رخ می‌دهد. شکل ۸ بیانگر فرکانس طبیعی سامانه برحسب زاویه θ_3 به‌ازای مقادیر مختلف ضریب شاخص ساختار است. در این شکل محور عمودی تغییرات فرکانس طبیعی سامانه و همچنین محور افقی نیز زاویه پیوند θ_3 نانولوله برن نیتريد است. با توجه به شکل مشخص است در تمام بازه زاویه θ_3 نانولوله، فرکانس سامانه دچار افزایش می‌شود.

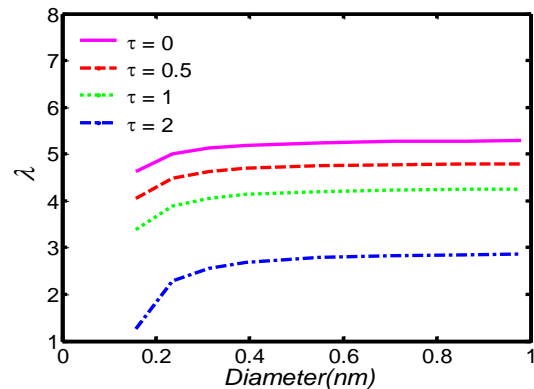


شکل (۷): تغییرات فرکانس بی‌بعد نانولوله برن نیتريد برحسب زاویه پیوند θ_2 با شرایط مرزی دوسر مفصل به‌ازای $\tau = 1$ و $\alpha = 0.5$.



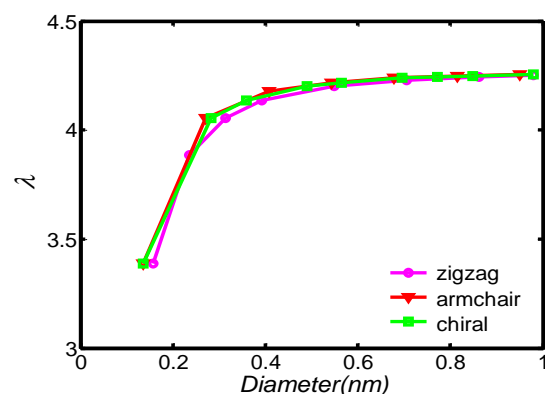
شکل (۸): تغییرات فرکانس بی‌بعد نانولوله برن نیتريد برحسب زاویه پیوند θ_3 با شرایط مرزی دوسر مفصل به‌ازای $\tau = 1$ و $\alpha = 0.5$.

جهت مطالعه تاثیر ضریب طول پیوند r_1 بر فرکانس طبیعی نانولوله برن نیتريد، شکل ۹ ترسیم شده است. در این شکل محور عمودی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده و محور



شکل (۵): مقادیر فرکانس بی‌بعد نانولوله برن نیتريد برحسب قطر نانولوله برای ساختار زیگزاگ با شرایط مرزی دوسر مفصل به‌ازای $\alpha = 0.5$.

جهت مطالعه اثر قطر نانولوله بر فرکانس طبیعی سامانه برای ساختارهای مختلف زیگزاگ، آرمچیر و کایرال و پارامترهای بی‌بعد $\tau = 1$ و $\alpha = 0.5$ شکل ۶ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در نانولوله‌هایی با قطر کوچک، افزایش قطر نانولوله موجب افزایش فرکانس سامانه شده و از قطر 0.16 نانومتر به بالا نتایج تقریباً یکسان شده و تغییری در نتایج مشاهده نمی‌شود. دلیل افزایش فرکانس طبیعی این است که اثر انحنا در نانولوله‌ها با قطر کوچک، زیاد است و پیوندهای آن اعوجاج بیشتری دارند و با افزایش قطر این اعوجاج به تدریج کاهش می‌یابد [۲۸].



شکل (۶): تغییرات فرکانس بی‌بعد نانولوله برن نیتريد برحسب قطر نانولوله برای ساختار زیگزاگ، آرمچیر و کایرال با شرایط مرزی دوسر مفصل به‌ازای $\tau = 1$ و $\alpha = 0.5$.

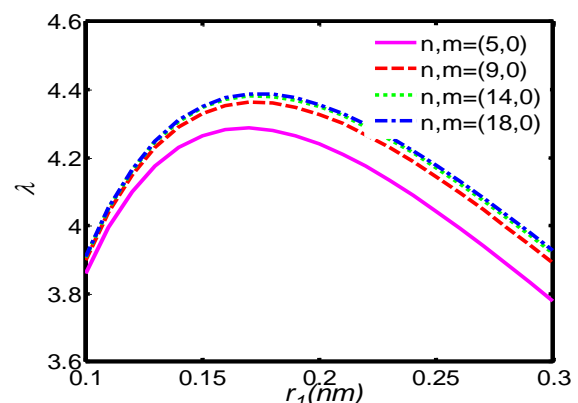
در شکل ۷ فرکانس طبیعی سامانه برحسب زاویه پیوند θ_2 به‌ازای مقادیر مختلف ضریب شاخص ساختار بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه

فرکانس طبیعی سامانه برای نانولوله دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل- یکسر گیردار و یکسر گیردار- یکسر آزاد برای سه ساختار زیگزاگ، آرمچیر و کایرال به ازای پارامتر مختلف در جدول ۴ آورده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، در شرایط مرزی بررسی شده با افزایش پارامتر غیرمحملی، مقدار فرکانس سامانه کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس با تغییر θ_2 تا $\theta_2 = \pi$ افزایش یافته و بعد از آن دچار کاهش می‌شود. بنابراین، حداکثر فرکانس طبیعی سامانه در $\theta_2 = \pi$ رخ می‌دهد. علاوه بر این برای اطمینان از نتایج به دست آمده، با قرار دادن $\alpha = 0$ و $\tau = 0$ از اثرات پارامتر غیرمحملی و پارامتر تنش اولیه در معادله فرکانسی صرف نظر می‌شود، که در این حالت فرکانس طبیعی به $\lambda = \pi^2$ کاهش می‌یابد که همان فرکانس برای تیر اوپلر برنولی با شرایط مرزی دوسر مفصل است و با مقایسه آن با نتایج جدول ۴ مشخص می‌شود که ساختار آرمچیر نسبت به ساختارهای زیگزاگ و کایرال جواب دقیقی ارائه می‌دهد. از سوی دیگر ساختار کایرال نیز نسبت به زیگزاگ جواب مناسب‌تری به دست می‌آورد. از سوی دیگر با توجه به معادله (۳۷) همان طوری که پارازات [۲۹] در مطالعات پیشین ارائه کرد، می‌توان دریافت که وجود پارامتر تنش اولیه می‌تواند باعث کاهش فرکانس طبیعی سامانه شود. علاوه بر این، وجود اثر مقیاس غیرمحملی α نیز باعث کاهش فرکانس طبیعی سامانه می‌شود.

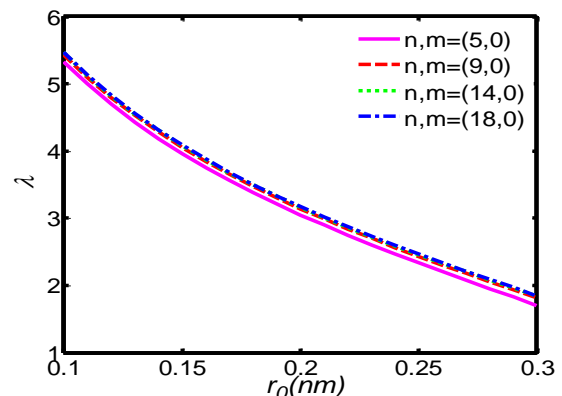
در جدول ۵ چهار فرکانس طبیعی اول نانولوله برنیتريد برای نانولوله دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل- یکسر گیردار و یکسر گیردار- یکسر آزاد آورده شده است. در این جدول نتایج برای سه ساختار زیگزاگ، آرمچیر و کایرال براساس تئوری‌های تیر اوپلر برنولی و تیر تیموشنکو به ازای قطر نانولوله ۱ نانومتر و $\tau = 0$ ، $\alpha = 0.3$ حاصل گردیده است. با توجه نتایج به دست آمده در این جدول مشخص است که تئوری تیر اوپلر برنولی فرکانس بیشتری نسبت به تئوری تیموشنکو پیش‌بینی می‌کند. لازم به ذکر است که بیشترین فرکانس سامانه به ازای مودهای مختلف مربوط به شرایط مرزی دوسر گیردار و کمترین آن مربوط به شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد است.

افقی ضریب طول پیوند r_1 است. مشاهده می‌شود که به ازای $n, m = (18, 0)$ تا مقدار عددی $r_1 = 17.012 \text{ nm}$ ، فرکانس طبیعی افزایش و با افزایش آن فرکانس کاهش می‌یابد. تفسیر چنین رفتاری می‌تواند اثر ضریب طول r_1 بر مدول الاستیسیته که بیشترین تاثیر را در مقدار $r_1 = 17.012 \text{ nm}$ دارد، باشد.

در شکل ۱۰ ملاحظه می‌شود که با افزایش طول پیوند r_0 ، فرکانس بدون بعد کاهش می‌یابد. البته مشخص است که در این حالت نیز هرچه ضرایب شاخص ساختار (n, m) افزایش یابد، فرکانس طبیعی همگرا می‌شود. این در حالی است که از لحاظ فیزیکی نیز ثابت شده است که در قطر نانولوله کمتر، اعوجاج بیشتر بوده و اثر انحنا با افزایش ضرایب شاخص کاهش می‌یابد.



شکل (۹): تغییرات فرکانس بی‌بعد نانولوله برنیتريد بر حسب طول پیوند r_1 با شرایط مرزی دوسر مفصل به ازای $\alpha = 0.5$ و $\tau = 1$.



شکل (۱۰): تغییرات فرکانس بی‌بعد نانولوله برنیتريد بر حسب طول پیوند r_0 با شرایط مرزی دوسر مفصل به ازای $\alpha = 0.5$ و $\tau = 1$.

جدول (۴): فرکانس طبیعی نانولوله برن نیتريد برای نانولوله دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل - یکسر گیردار و یکسر گیردار - یکسر آزاد برای سه ساختار زیگزاگ، آرمچیر و کایرال به‌ازای قطر نانولوله ۱ نانومتر.

یکسر گیردار - یکسر آزاد			یکسر مفصل - یکسر گیردار			دوسر گیردار			دوسر مفصل			$\frac{f_n}{f_1}$	مقدار	$\frac{f_n}{f_1}$
کایرال	آرمچیر	زیگزاگ	کایرال	آرمچیر	زیگزاگ	کایرال	آرمچیر	زیگزاگ	کایرال	آرمچیر	زیگزاگ			
۳/۵۰۹	۳/۵۱۰	۳/۵۰۱	۱۵/۳۹۲	۱۵/۳۹۴	۱۵/۳۷۸	۲۲/۳۲۱	۲۲/۳۲۵	۲۲/۳۱۵	۹/۸۵۱	۹/۸۵۴	۹/۸۴۱	$\tau = 0$	۰	α
۳/۶۵۶	۳/۶۶۸	۳/۶۵۰	۱۴/۵۷۴	۱۴/۵۷۷	۱۴/۵۶۱	۲۱/۱۰۲	۲۱/۱۰۳	۲۱/۰۵۴	۹/۳۹۹	۹/۴۰۱	۹/۳۸۹		۰/۱	
۳/۹۶۹	۳/۹۹۸	۳/۹۶۸	۹/۷۷۰	۹/۷۷۱	۹/۷۵۵	۱۶/۱۶۵	۱۶/۱۶۷	۱۶/۱۶۱	۹/۲۹۰	۹/۲۹۲	۹/۲۸۵		۰/۵	
۳/۵۰۹	۳/۵۱۰	۳/۵۰۱	۱۵/۳۹۳	۱۵/۳۹۴	۱۵/۳۷۸	۲۲/۳۲۱	۲۲/۳۲۵	۲۲/۳۱۵	۹/۸۵۱	۹/۸۵۴	۹/۸۴۱	$\alpha = 0$	۰	τ
۲/۸۵۸	۲/۹۲۵	۲/۸۵۳	۱۴/۲۲۲	۱۴/۲۲۵	۱۴/۲۰۸	۲۱/۴۸۰	۲۱/۴۸۱	۲۱/۴۷۱	۸/۲۱۲	۸/۲۱۶	۸/۲۰۰		۳	
۲/۰۵۹	۲/۱۵۴	۲/۰۵۶	۱۳/۳۸۲	۱۳/۳۸۵	۱۳/۳۶۶	۲۰/۸۹۵	۲۰/۸۹۷	۲۰/۸۸۷	۶/۹۰۷	۶/۹۱۱	۶/۸۹۲		۵	
۲/۹۳۹	۲/۹۶۷	۲/۹۳۷	۱۳/۴۴۰	۱۳/۴۴۰	۱۳/۴۴۰	۱۹/۵۱۴	۱۹/۵۲۳	۱۹/۵۰۳	۸/۶۱۰	۸/۶۱۲	۸/۶۰۳	$\alpha = 0.5$	$\pi/2$	θ_2
۵/۷۰۶	۵/۷۶۸	۵/۶۹۸	۲۵/۵۲۰	۲۵/۵۲۱	۲۵/۵۱۹	۳۷/۰۳۱	۳۷/۰۳۲	۳۷/۰۳۱	۱۶/۳۴۰	۱۶/۳۴۱	۱۶/۳۳۵		π	
۳/۳۶۳	۳/۴۶۹	۳/۳۵۹	۱۵/۳۹۲	۱۵/۳۹۴	۱۵/۳۷۸	۲۲/۳۲۱	۲۲/۳۲۵	۲۲/۳۱۵	۹/۸۵۱	۹/۸۴۰	۹/۸۴۱		$2\pi/3$	

جدول (۵): فرکانس طبیعی نانولوله برن نیتريد برای نانولوله دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل - یکسر گیردار و یکسر گیردار - یکسر آزاد برای سه ساختار زیگزاگ، آرمچیر و کایرال به‌ازای قطر نانولوله ۱ نانومتر و $\tau = 0, \alpha = 0.3$.

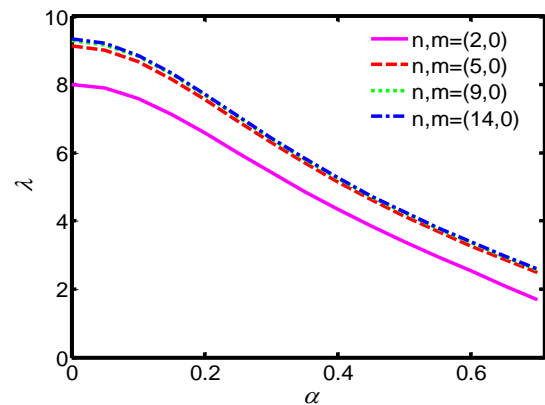
یکسر گیردار - یکسر آزاد			یکسر مفصل - یکسر گیردار			دوسر گیردار			دوسر مفصل			تئوری تیر	مورد
کایرال	آرمچیر	زیگزاگ	کایرال	آرمچیر	زیگزاگ	کایرال	آرمچیر	زیگزاگ	کایرال	آرمچیر	زیگزاگ		
۳/۶۴۵	۳/۶۴۸	۳/۶۳۶	۱۰/۷۵۵	۱۰/۷۵۸	۱۰/۷۴۷	۱۵/۲۸۴	۱۵/۲۸۸	۱۵/۲۷۶	۷/۱۷۷	۷/۱۸۰	۷/۱۷۱	اویلر برنولی	۱
۳/۵۶۹	۳/۵۷۲	۳/۵۶۰	۱۰/۳۰۰	۱۰/۳۰۴	۱۰/۲۹۳	۱۴/۲۸۵	۱۴/۲۸۸	۱۴/۲۷۷	۷/۰۳۵	۷/۰۳۹	۷/۰۲۳	تیمو شنکو	
۱۴/۱۳۳	۱۴/۱۳۷	۱۴/۱۲۶	۲۲/۶۵۳	۲۲/۶۵۷	۲۲/۶۴۸	۲۹/۹۲۳	۲۹/۹۲۶	۲۹/۹۲۵	۱۸/۴۸۷	۱۸/۴۹۰	۱۸/۴۸۳	اویلر برنولی	۲
۱۳/۳۱۸	۱۳/۳۲۲	۱۳/۳۱۶	۲۱/۱۵۹	۲۱/۱۶۰	۲۱/۱۵۱	۲۴/۴۰۱	۲۴/۴۰۳	۲۴/۳۹۱	۱۷/۶۳۹	۱۷/۶۴۲	۱۷/۶۳۶	تیمو شنکو	
۲۷/۹۸۰	۲۷/۹۸۴	۲۷/۹۷۸	۳۳/۹۸۵	۳۳/۹۸۸	۳۳/۹۷۶	۳۸/۸۰۹	۳۸/۸۱۲	۳۸/۸۰۳	۲۹/۵۹۰	۲۹/۵۹۳	۲۹/۵۸۳	اویلر برنولی	۳
۲۵/۷۰۱	۲۵/۷۰۴	۲۵/۶۹۳	۳۰/۶۸۹	۳۰/۶۹۱	۳۰/۶۸۰	۳۴/۱۰۱	۳۴/۱۰۵	۳۴/۰۹۳	۲۷/۴۵۴	۲۷/۴۵۷	۲۷/۴۴۲	تیمو شنکو	
۳۷/۵۷۲	۳۷/۵۷۶	۳۷/۵۶۵	۴۵/۰۲۱	۴۵/۰۲۴	۴۵/۰۱۰	۴۹/۵۵۹	۴۹/۵۶۱	۴۹/۵۵۸	۴۰/۴۴۵	۴۰/۴۴۹	۴۰/۴۸۶	اویلر برنولی	۴
۳۳/۴۰۳	۳۳/۴۰۸	۳۳/۳۹۶	۳۸/۹۳۳	۳۸/۹۳۷	۳۸/۹۲۵	۴۱/۸۵۹	۴۱/۸۶۰	۴۱/۸۰۳	۳۶/۲۳۶	۳۶/۲۴۰	۳۶/۲۳۶	تیمو شنکو	

۴- نتیجه گیری

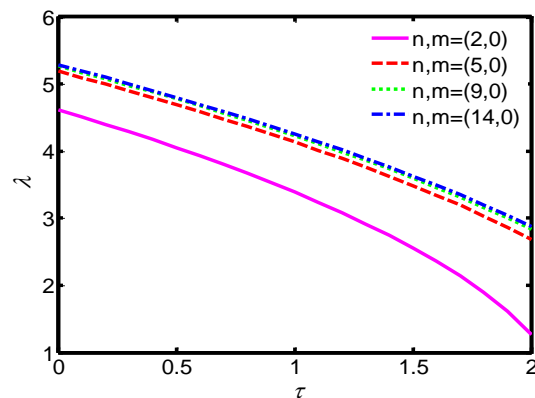
در این مقاله اثرات مدول الاستیسیته ساختارهای مختلف بر پاسخ ارتعاشی نانولوله برنیتريد تحت تاثیر تنش اولیه با شرایط مرزی مختلف بررسی شد. شرایط مرزی بررسی شده، دوسر مفصل، دوسر گیردار، یکسر مفصل- یکسر گیردار و یکسر گیردار- یکسر آزاد است. با استفاده از تئوری های تیر اویلر برنولی و تیر تیموشنکو و تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن، معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شد. در نهایت هم تاثیر تغییرات پارامتر قطر نانولوله برنیتريد و اثر تنش اولیه و پارامتر غیرمحلّی بر روی فرکانس ارتعاشی انواع ساختارها شامل آرمچیر، زیگزگاک و کایرال بررسی شد. نتایج به دست آمده با مطالعات پیشین مقایسه و نشان داده شد که نتایج استخراج شده از دقت بالایی برخوردار می باشد.

علاوه بر این، در ادامه خلاصه ای از نتایج به دست آمده ارائه می شود. مشاهده شد که افزایش پارامتر غیرمحلّی منجر به آن می شود که فرکانس طبیعی کاهش یافته و در نتیجه سامانه در پارامتر غیرمحلّی پایین تر، افزایش فرکانس طبیعی را تجربه می کند. علاوه بر این ملاحظه گردید که تئوری ارینگن نسبت به تئوری الاستیسیته کلاسیک رفتار نرم تری از ماده پیش بینی می کند. همچنین مشخص شد که با افزایش پارامتر بی بعد تنش اولیه، فرکانس طبیعی سامانه کاهش می یابد. مشاهده شد که در نانولوله هایی با قطر کوچک، افزایش قطر نانولوله موجب افزایش فرکانس سامانه شده و با افزایش قطر بیشتر از 0.6 نانومتر نتایج تقریباً یکسان شده و تغییری در نتایج مشاهده نمی شود. دلیل افزایش فرکانس طبیعی این است که اثر انحنا در نانولوله ها با قطر کوچک، زیاد است و پیوندهای آن اعوجاج بیشتری دارند و با افزایش قطر این اعوجاج به تدریج کاهش می یابد. از سویی دیگر نشان داده شد که فرکانس تا $\theta_2 = \pi$ افزایش یافته و بعد از آن دچار کاهش می شود و حداکثر فرکانس طبیعی سامانه در $\theta_2 = \pi$ رخ می دهد. همچنین مشخص شد که ساختار آرمچیر نسبت به ساختارهای زیگزگاک و کایرال جواب دقیق تری ارائه می دهد. علاوه بر این، افزایش ضرایب شاخص ساختار، به عبارتی دیگر افزایش قطر نانولوله، باعث همگرا شدن طبیعی فرکانس سامانه می شود.

شکل های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب تأثیر پارامتر غیرمحلّی و تنش اولیه بر فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف ضریب شاخص ساختار را نشان می دهد. مشاهده می شود که در تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن نسبت به تئوری کلاسیک فرکانس طبیعی کمتری پیش بینی می شود. بنابراین، تئوری ارینگن نسبت به تئوری الاستیسیته کلاسیک ($\alpha = 0$) رفتار نرم تری از ماده را پیش بینی می کند. همچنین با کاهش مقدار پارامتر غیرمحلّی نتایج تئوری غیرکلاسیک به تئوری الاستیسیته کلاسیک نزدیک می شود. علاوه بر این وجود پارامتر تنش اولیه موجب کاهش فرکانس طبیعی نانولوله می شود. همچنین افزایش ضرایب شاخص ساختار (n, m) باعث همگرا شدن فرکانس طبیعی سامانه و نتایج می شود.



شکل (۱۱): تغییرات فرکانس بی بعد نانولوله برنیتريد برحسب پارامتر غیرمحلّی با شرایط مرزی دوسر مفصل به ازای $\tau = 1$.



شکل (۱۲): تغییرات فرکانس بی بعد نانولوله برنیتريد برحسب پارامتر تنش اولیه با شرایط مرزی دوسر مفصل به ازای $\alpha = 0.5$.

۵- منابع

- Graphene and Carbon Nanotubes”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 30, No. 5, pp. 559-580, 2018.
13. Shokrieh, M.M. and Rafiee, R. “On the tensile Behavior of an Embedded Carbon Nanotube in Polymer Matrix with Non-bonded Interphase Region”, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 3, pp. 647-652, 2010.
 14. Lei, X., Natsuki, T., Shi, J. and Ni, Q.Q. “Analysis of Carbon Nanotubes on the Mechanical Properties at Atomic Scale”, *Journal of Nanomaterials*, Vol. 2011, No. 1, pp. 110-125, 2011.
 15. Parvaneh, V. and Shariati, M. “Effect of Defects and Loading on Prediction of Young’s Modulus of SWCNTs”, *Acta Mechanica*, Vol. 216, No. 1, pp. 281-292, 2011.
 16. Lu, X. and Hu, Z. “Mechanical Property Evaluation of Single-Walled Carbon Nanotubes by Finite Element Modeling”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 4, pp. 1902-1913, 2012.
 17. Ayatollahi, M., Shadlou, S. and Shokrieh, M. “Multiscale Modeling for Mechanical Properties of Carbon Nanotube Reinforced Nanocomposites Subjected to Different Types of Loading”, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 9, pp. 2250-2269, 2011.
 18. Kang, Z., Li, M. and Tang, Q. “Buckling Behavior of carbon Nanotube-Based Intramolecular Junctions Under Compression: Molecular Dynamics Simulation and Finite Element Analysis”, *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 1, pp. 253-259, 2010.
 19. Wang, X. and Guo, X. “Numerical Simulation for Finite Deformation of Single-Walled Carbon Nanotubes At Finite Temperature Using Temperature-Related Higher Order Cauchy-Born Rule Based Quasi-Continuum Model”, *Computational Materials Science*, Vol. 55, No. 1, pp. 273-283, 2012.
 20. Shima, H., Ghosh, S., Arroyo, M., Iiboshi, K. and Sato, M. “Thin-shell Theory Based Analysis of Radially Pressurized Multiwall Carbon Nanotubes”, *Computational Materials Science*, Vol. 52, No. 1, pp. 90-104, 2012.
 21. Paidoussis, M. and Li, G. “Pipes Conveying Fluid: a Model Dynamical Problem”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 7, No. 2, pp. 137-204, 1993.
 22. Eringen, A.C. “On differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves”, *Journal of applied physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
 23. Ansari, R., Mirnezhad, M. and Sahmani, S. “Prediction of Chirality-And Size-Dependent Elastic Properties of Single-Walled Boron Nitride Nanotubes Based on an Accurate Molecular Mechanics Model”, *Superlattices and Microstructures*, Vol. 80, No. 1, pp. 196-205, 2015.
 24. C. M. Wang, Zhang, Y. Y. and He, X. Q. “Vibration of Nonlocal Timoshenko Beams”, *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-9, 2007.
 25. Cox, B. J. and Hill, J. M. “Exact and Approximate Geometric Parameters for Carbon Nanotubes Incorporating Curvature”, *Carbon*, Vol. 45, No. 1, pp. 1453-1465, 2007.
 26. Thomson, W. “Theory of Vibration with Applications”, George Allen, Los Angeles, United States, 2012.
 1. Iglesias, D., Senokos, E., Aleman, B., Cabana, L., Navío, C., Marcilla, R., Prato, M., Vilatela, J. J. and Marchesan, S. “Gas-phase Functionalization of Macroscopic Carbon Nanotube Fiber Assemblies: Reaction Control, Electrochemical Properties, and Use for Flexible Supercapacitors”, *ACS Applied Materials & Interfaces*, Vol. 1 No. 1, 2018.
 2. Nayak, R. “Preparation and Application of Carbon Nanotubes Composites”, *Current and Future Developments in Nanomaterials and Carbon Nanotubes*, Vol. 1, No. 1, pp. 135-150, 2018.
 3. Athanassiou, C., Kavallieratos, N., Benelli, G., Losic, D., Rani, P. U. and Desneux, N. “Nanoparticles for Pest Control: Current Status and future Perspectives”, *Journal of Pest Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-15, 2018.
 4. Nguyen-Quang, K., Vo-Duy, T., Dang-Trung, H. and Nguyen-Thoi, T. “An Isogeometric Approach for Dynamic Response of laminated FG-CNT reinforced Composite Plates Integrated with Piezoelectric Layers”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 332, No. 1, pp. 25-46, 2018.
 5. Sadeghi-Goughari, M., Jeon, S. and Kwon, H.-J. “Flutter Instability of cantilevered Carbon Nanotubes Caused by Magnetic Fluid Flow Subjected to a longitudinal Magnetic Field”, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 10, No. 1, 2018.
 6. Sahmani, S., Aghdam, M. M. and Rabczuk, T. “Nonlinear Bending of Functionally Graded Porous Micro/Nano-Beams Reinforced with Graphene Platelets Based Upon Nonlocal Strain Gradient Theory”, *Composite Structures*, Vol. 186, No. 1, pp. 68-78, 2018.
 7. Rughoobur, G., Sugime, H., DeMiguel-Ramos, M., Mirea, T., Zheng, S., Robertson, J., Iborra, E. and Flewitt, A.J. “Carbon Nanotube Isolation Layer Enhancing in-liquid Quality-Factors of thin film Bulk Acoustic Wave Resonators for Gravimetric Sensing”, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 55, No. 1, 2018.
 8. Anwar, M.F., Yadav, N. and Jain, S. “Carbon Nanotubes in Drug Delivery”, *Current and Future Developments in Nanomaterials and Carbon Nanotubes*, Vol. 1, No. 1, pp. 184-202, 2018.
 9. Bahaadini, R., Saidi, A. R. and Hosseini, M. “On Dynamics of Nanotubes Conveying Nanoflow”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 123, No. 1, pp. 181-196, 2018.
 10. Saffari, S., Hashemian, M. and Toghraie, D. “Dynamic Stability of Functionally Graded Nanobeam Based on Nonlocal Timoshenko Theory Considering Surface Effects”, *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 520, No. 1, pp. 97-105, 2017.
 11. Preethi, K., Raghu, P., Rajagopal, A. and Reddy, J. “Nonlocal Nonlinear Bending and free Vibration Analysis of a Rotating Laminated Nano Cantilever Beam”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 25, No. 5, pp. 439-450, 2018.
 12. Hossain, M., Hao, T. and Silverman, B. “Stillinger-Weber Potential for Elastic and fracture Properties in

29. Prasad, B. "On the Response of a Timoshenko Beam Under Initial Stress to a Moving Load", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 19, No. 5, pp. 615-628, 1981.
27. Santosh, M., Maiti, P.K. and Sood, A. "Elastic Properties of Boron Nitride Nanotubes and Their Comparison with Carbon Nanotubes", *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, Vol. 9, No. 9, pp. 5425-5430, 2009.
28. Li, C. and Chou, T.-W. "A Structural Mechanics Approach for the Analysis of Carbon Nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 10, pp. 2487-2499, 2003.