# بررسی تأثیر توزیع نانولولههای کربنی تابعی روی فر کانسهای ورق

## قطاعي بر روى بستر الاستيك

نجاتی	محمد
-------	------

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، اراک، ایران.

محمدحسين ياس<sup>۳</sup> سید سجاد جعفری<sup>۲</sup> دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، همدان، ایران.

## حكىدە

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق گرد قطاعی سوراخدار تابعی هدفمند که با نانولولههای کربنی تقویتشدهاند بررسی شده است. توزیع نانولولههای کربنی بهصورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند در راستای ضخامت ورق، بهصورت کسر حجمی میباشد. ورق گرد قطاعی روی بستر الاستیک دو پارامتری وینکلر – پاسترناک قرار گرفته است. معادلات حرکت ورق با استفاده از اصل همیلتون و تئوری بهبودیافته استخراج گردیده است. این معادلات دیفرانسیل کویل شده با استفاده از بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکانها، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و به کمک روش عددی مربعات تفاضلی حل شدهاند. نتایج بهدست آمده با نتایج دیگران محققان مقایسه و مطابقت بسیار خوبی بین آنها مشاهده شده است. درنهایت اثرات پارامترهای مختلف هندسی، توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی در راستای ضخامت، اثر بستر الاستیک و همچنین شرایط تکیه گاهم، مختلف بر روی فرکانسهای طبیعی بررسی شده است. واژههای کلیدی: مواد هدفمند، نانولولههای کربنی، ارتعاش آزاد، ورق قطاعی، روش تفاضل مربعات، بستر الاستیک

(تاریخ دریافت:۱۳۹۵/۰۹/۲۹ ؛ تاریخ پذیرش:۱۳۹۶/۰۴/۲۸)

## Investigation of Functionally Graded Carbon Nanotube Distribution Effect on the Frequency of Annular Sector Plates on Pasternak Elastic Foundation

#### M. Nejati

فرزان براتے، <sup>۴</sup>

گروه مکانیک، دانشگاه آزاد

اسلامي، واحد همدان، ايران.

MSc, Young Researchers and Elite Club, Arak Branch Islamic Azad University, Arak, Iran

S.S. Jafari

Branch Islamic Azad

University, Hamedan, Iran

ا<u>ير</u>ان.

M.S. Yas

Professor, Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

## F. Barati

Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Hamedan Branch, Hamedan, Iran.

#### ABSTRACT

In this paper, free vibration of functionally graded carbon nanotube annular sector plates is studied. Distribution of carbon nanotubes is continuous and meaningful and gradual changes of materials in the direction of thickness are in the form of volume fraction. Annular sector plate is placed on the Winkler-Pasternak two parameters elastic foundation. The motion equations of plate are derived using the Hamilton principle and the refined plate theory. These coupled differential equations are transformed to ordinary equations using the trigonometric series expansion of space variation functions and then are solved with the help of differential quadrature method. The obtained results are compared with the other researcher's results and an excellent agreement can be observed between them. Finally, the effects of different geometric parameters, different distributions of carbon nanotubes in the thickness direction, elastic foundation, and also different boundary conditions on the natural frequencies are investigated.

(Received: 19/December/2016; Accepted: 19/July/2017)

Keywords: Functionally Graded Material, Carbon Nanotube, Free Vibration, Annular Sector Plates, Differential **Ouadrature Method**, Elastic Foundation

yas@razi.ac.ir : استاد (نویسنده پاسخگو): -۳

f.barati@iauh.ac.ir : دانشیار-۴

www.SID.ir

#### MSc, Young Researchers and Elite Club, Hamedan

bpj.nejati@iau-arak.ac.ir - کارشناس ارشد:

sjd.jafari@iauh.ac.ir - کارشناس ارشد:

مرى

بنى

فهرست علائم انگلیسی

$C_{ij}$	ماتريس سختي الاستيك
d	قطر نانولولەھاى كربنى
E	مدول یانگ کامپوزیتھای پا
$L_c$	تقویتشده با نانولولههای کربنی
$E_{CNT}$	مدول یانگ طولی نانولولههای کر
$E_m$	مدول یانگ طولی پلیمر
h	ضخامت ورق
$h_0$	$r\!=\!0$ ضخامت در
$I_i$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 7)	ثوابت تعریف شده در رابطه (۱۹)
$K_{g}$	ضريب بستر الاستيك برشي
$k_l$	پارامتر مؤثر طول (رابطه ۱–۱)
$k_o$	فاکتور مؤثر جهت نانولولدهای کر
$k_w$	پارامتر موج نانولولەھاى كربنى
$K_{_W}$	ضريب بستر الاستيك وينكلر
l	طول نانولولەھاي كربني
М	پارامتر هندسی
$M_{r}$	ممان خمشی
$M_{r heta}$	ممان پیچشی
$M_{ heta}$	ممان خمشی
m	عدد موج محيطي
P <sub>r</sub>	ممان خمشی
$P_{r heta}$	ممان پیچشی
$P_{ heta}$	ممان خمشی
q	پارامتر هندسی
$Q_r$	نيرو برشى
$Q_ heta$	نيرو برشى
$R_r$	نيرو برشى
$R_{ heta}$	نيرو برشى
Т	انرژی جنبشی سیستم
t	زمان
U	میدان جابجایی در راستای <b>۲</b>
$U_1$	انرژی پتانسیل سیستم
V	heta میدان جابجایی در راستای

کسر حجمی نانولولههای کربنی	$V_{CNT}$
كسر حجمي پليمر	U
متغیر تعریف شده در رابطه (۸)	$V_{NT}^{*}$
میدان جابجایی در راستای z	W
کسر جرمی نانولوله	W <sub>nt</sub>
لائم يونانى	فهرست عا
متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)	eta'
متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)	γ
ماتریس کرنش	$\mathcal{E}_{ij}$
متغير بىبعد	$\eta = \frac{z}{h}$
ضریب پواسون کامپوزیتھای نانولوله کربنی/پلی استیرن	v
ضريب پواسون نانولوله کربنی	$V_{CNT}$
ضريب پواسون پليمر	$V_m$
نماد تغييرات	$\delta$
چگالی کامپوزیتھای نانولولہ کربنی/پلی استیرن	ρ
چگالی جرمی نانولولەھای کربنی	$ ho_{\scriptscriptstyle CNT}$
چگالی جرمی پلیمر خالص	$ ho_m$
ماتریس تنش	$\sigma_{ij}$
متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)	φ
زاویه چرخش صفحه ۲-۲	$\psi_r$
$ heta\!-\!z$ زاویه چرخش صفحه	$\psi_{ heta}$
فرکانس ہی بعد شدہ	Ω
×	۱– مقدمه

مطالعه رفتار ورقها تحت بارگذاریهای مختلف با توجه به گسترش استفاده از آنها در صنایع مختلف از جمله سازههای ساختمانی، بالهای هواپیماها، هوافضا و ... ضروری است. از طرفی، ساخت و تولید ورقها از جنسی که ویژگیهای منحصربهفردی داشته باشند امری اجتنابناپذیر است. بدین منظور در سال ۱۸۹۴ مواد تابعی مدرج<sup>۱</sup> برای اولین بار در ژاپن ساخته شد [۱] که از دیدگاه ترموالاستیک مطالعات گستردهای بر روی آنها انجامشده است [۲]. در دهههای اخیر

<sup>1-</sup> Functionally graded materials (FGM)

با افزایش چشمگیر تقاضا برای سازههایی با مقاومت بالا در برابر حرارت، جذب انرژی و سبک، مطالعات زیادی بر روی رفتار مواد تابعی مدرج (مواد هدفمند) صورت گرفته است.

نی و ژونک [۳] ارتعاشات سهبعدی آزاد و اجباری ورقهای دایرهای هدفمند را تحت شرایط مرزی مختلف بـهصورت نیمه تحلیلی بررسی کردنـد. آنها فرکانسهای ارتعاشی و پاسخهای دینامیکی ورق را به دست آوردند و نشان دادند که با افزایش اندیس خواص مواد، کمترین فرکانس طبیعی کاهش می یابد. همچنین در مسئله ارتعاش اجباری با نزدیک تر شدن فرکانس اجباری به فرکانس طبیعی، تغییر مکانها و تـنشها افزایش می یابند.

شن [۴] برای اولین بار ایده استفاده نانولولههای کربن در مواد هدفمند را مطرح کرد. او در این مقاله خمش غیرخطی ورقهای مستطیلی هدفمند کامپوزیتی که با نانولولههای کربنی تقویتشدهاند را بررسی کرد. خصوصیات نانولوله کربن وابسته به دما فرض شده و با استفاده از شبیه سازی دینامیکی مولکولی به دست آمدهاند. لیو و همکارانش [۵] در یک مطالعه جامع، به بررسی خواص مکانیکی مواد هدفمند تقویت شده با نانولولههای کربنی پرداختند.

کی و همکارانش [۶] ارتعاشات غیرخطی یک تیر کامپوزیتی هدفمند تقویتشده با نانولوله کربن را بررسی کردند. آنها معادلات حاکم را به کمک تئوری مرتبه بالاتر با سینماتیک غیرخطی ون کارمن بهدست آورده و نشان دادند که افزایش کسر حجمی نانولوله منجر به افزایش فرکانسهای خطی و غیرخطی میشود. همچنین توزیع متقارن نانولوله منجر به فرکانسهای بالاتری نسبت به توزیع نامتقارن و یا یکنواخت می گردد.

نجاتی و اسلامپناه [۷] ارتعاش و کمانش تیر یکسر گیردار از جنس مواد هدفمند تقویتشده با نانولولههای کربنی و تحت نیروی محوری را بررسی کردند. آنها توزیع تصادفی را برای نانولولهها در نظر گرفتند. با حل معادلات بهدستآمده به روش مربعات تفاضلی، اثرات نحوه توزیع نانولوله و نیروی محوری بر روی فرکانس طبیعی موردبررسی قرار گرفت. همچنین نجاتی و همکاران [۸] اثرات پارامترهای مختلف ازجمله شرایط تکیه گاهی و ضخامت را بر روی ارتعاش آزاد ورقی گرد و دوبعدی از جنس مواد هدفمند مطالعه کردند.

ملاعلی پور [۹] معادلات حاکم بر خمش دینامیکی ورقهای دایرهای و حلقوی با تغییرات پلهای ضخامت را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول استخراج و به کمک روش نیمه تحلیلی حل نمود. همچنین وی [۱۰]رفتار ورقهای دایرهای و حلقوی با تکیه گاههای الاستیک تحت نیروهای غیریکنواخت عمودی و برشی را بررسی نمود.

ابراهیمی و مختاری [۱۱] رفتار ارتعاشی تیر مدرج تابعی دوار را براساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی کردند و معادلات حاکم را با روش عددی تبدیل دیفرانسیل حل کردند. آنها نشان دادند که با تغییر شاخص جزء حجمی میتوان مقادیر فرکانس طبیعی را به صورت دلخواه تغییر داد.

مهرآبادی و ابراهیمی [۱۲] ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج که توسط نانولولههای کربنی تقویت شده را بررسی کردند. آنها اثرات توزیع چینش نانولولهها، خواص ماده تابعی مدرج و مشخصات هندسی ورق مطالع نمودند. همچنین فعلی و همکاران [۱۳] معادلات حاکم بر رفتار ورق تقویت شده با نانولولههای کربنی تحت ضربهزننده کروی را استخراج کرده و به کمک روش عددی حل کردند. آنها اثرات توزیع نانولولهها را بررسی کردند.

مطالعات گستردهای بر روی ارتعاش آزاد ورقها بر روی بسترهای الاستیک و پلاستیک انجامشده است [۱۴–۱۶]. این در حالی است که مطالعات محدودی بر روی رفتار ورقهای هدفمند بر روی بستر الاستیک انجامشده است.

لال و همکاران [۱۷] با مطالعه ارتعاش عرضی ورقهای مستطیلی با ضخامت متغیر که بر روی بستر الاستیک وینکلر قرار گرفتهاند، اثرات شرایط مرزی، نوع بستر و نحوه تغییر ضخامت بر روی فرکانس طبیعی را بررسی نمودند.

هانگ و همکاران [۱۸] با استفاده از تابع گرین معادله مشخصه ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مستقر بر بستر الاستیک غیریکنواخت را بهدست آوردند. متسوناگا [۱۹] ارتعاشات و کمانش ورق ضخیم روی بستر الاستیک را با بهدست آوردن مؤلفههای جابجایی به کمک بسط سری توانی، موردبررسی قراردادند. وی فرکانس طبیعی و مؤلفههای تنش کمانش را برای ورق مربعی روی بستر الاستیک بهدست آورد. ملکزاده [۲۰] ارتعاش آزاد ورقهای ضخیم مواد هدفمند بر روی بستر

الاستیک را بـ مکمـک تئـوری الاستیسـیته سـ مبعـدی و روش مربعات تفاضلی بررسی کرد.

موسوی و سعیدی [۲۱] معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد ورقهای ضخیم مستطیلی هدفمند را به کمک نظریه مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی استخراج کرده و با استفاده از روش مربعات تفاضلی معادلات حاکم را حل کردند. آنها نشان دادند که وقتی از تئوری مرتبه پنجم استفاده می شود، نتایج بسیار نزدیک به نتایج بهدست آمده از تئوری الاستیسیته سهبعدی می باشد. همچنین سعیدی و موسوی [۲۲] در مقالهای دیگر ارتعاش آزاد ورقهای ضخیم مستطیلی پیزوالکتریک را تحلیل کردند. آنها اثرات توان ماده هدفمند پیزوالکتریک بر فرکانسهای طبیعی را بررسی کردند.

فلاح و همکاران [۲۳] ارتعاش ورق مستطیلی هدفمند بر روی بستر الاستیک را با استفاده از روش کانتروویچ توسعهیافته و با در نظر گرفتن مدل وینکلر و تئوری ورق میدلین موردمطالعه قراردادند. آنها اثرات بستر الاستیک، شرایط مرزی و جنس مواد را بر روی فرکانس طبیعی برسی کردند. یاس و نراقی [۲۴] ارتعاش آزاد ورقهای مستطیلی هدفمند بر روی بستر الاستیک را با استفاده از روش تفاضل مربعات و براساس تئوری سهبعدی الاستیسیته بررسی نمودند. آنها اثرات پارامترهای مختلف هم چون هندسه ورق، شرایط مرزی و ضرایب الاستیک بستر را بر روی فرکانس طبیعی مطالعه و بررسی نمودند. لازم بهذکر است که درزمینه ارتعاش آزاد ورقهای مستطیلی هدفمند مطالعات زیاد انجام شده

استفاده از ورقهای گرد متشکل از مواد پیشرفته و مواد هدفمند در صنایع هوافضا، هستهای، شیمیایی و ... روزبهروز بیشتر میشود. از سوی دیگر محصولات گوناگون نانو فناوری، همچون نانو کامپوزیتها، کاربردهای وسیعی در صنایع مختلف پیداکردهاند. نانو کامپوزیتها دارای انواع مختلفی میباشند. یکی از مهمترین انواع نانو کامپوزیتها، نانو کامپوزیت پلیمری بوده که با نانولوله کربن تقویتشدهاند. نانولوله کربن بهخاطر خواص فوقالعادهی مکانیکی، الکتریکی و حرارتی که دارد تأثیر زیادی در بهبود خواص پلیمر میگذارد.

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق گرد قطاعی سوراخدار هدفمند که با نانولولههای کربنی تقویت شده اند، بررسی شده است. توزیع نانولولههای کربنی به صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند مواد در راستای ضخامت ورق به صورت کسر حجمی و با توزیعهای مختلف می باشد. ورق گرد قطاعی روی بستر الاستیک دو پارامتری قرار گرفته است. معادلات حرکت ورق با استفاده از تئوری بهبودیافته استخراج گردیده است. این معادلات یک سری معادلات دیفرانسیل در گیر وش عددی مربعات تفاضلی برای حل این معادلات استفاده شده است. در این کار تأثیر بستر الاستیک و توزیعهای تابعی مختلف از نانولوله کربنی در راستای ضخامت ورق گرد قطاعی و همچنین پارامترهای مختلف هندسی روی فرکانس های طبیعی سیستم موردبررسی قرار گرفته است.

#### ۲- استخراج معادلات

در این بخش نحوه استخراج معادلات حاکم بر اساس تئوری بهبودیافته و بر اساس اصل همیلتون و بهکمک تئوری بهبودیافته ارائه می گردد.

۲-۱- ۱عمال اثرات نانولوله در خواص مکانیکی همان طور که در مقدمه اشاره شد، توزیع نانولوله ها تأثیر بسزایی در خواص مکانیکی مخصوصاً مدول یانگ دارد. با استفاده از قانون مخلوطها، می توان مدول یانگ کامپوزیتهای پلیمری تقویت شده با نانولوله های کربنی ( E<sub>c</sub>) را به صورت زیر تخمین زد [۲۹, ۲۹]:

$$E_{c} = (k_{l}k_{o}k_{w}E_{CNT} - E_{m})V_{CNT}e^{\gamma V_{CNT}} + E_{m}$$
(1)

که در رابطه فوق،  $E_{cNT}$  و  $E_m$  بهترتیب مدول یانگ طولی نانولولههای کربنی و پلیمر موردنظر میباشند. همچنین  $V_{CNT}$ نانولولههای کربنی و پلیمر موردنظر میباشند. همچنین بیترتیب کسر حجمی نانولولههای کربنی و  $k_o, k_l$  و  $k_m$  به ترتیب پارامتر مؤثر طول، فاکتور مؤثر جهت نانولولههای کربنی و پارامتر موج نانولولههای کربنی میباشند.  $k_l$  با استفاده از رابطه زیر بهدست میآید:

$$k_{l} = 1 - \frac{\tanh \varphi}{\varphi} \tag{1-Y}$$

بەطورىكە:

<sup>1-</sup> extended Kantorovich method

$$\varphi = \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{-2E_m}{E_{CNT}(1 - v_m) \ln V_{CNT}}}$$

$$\gamma = \frac{\ln(\beta')}{\hat{V}_{CNT}}$$

$$\beta' = \frac{\hat{E}_c - E_m}{(k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m) \hat{V}_{CNT}}$$
(Y-Y)

در رابطه فوق، l و b بهترتیب طول و قطر نانولولههای کربنی و  $w_m$  فریب پواسون پلیمر می،باشد. پارامترهای که با علامت  $\wedge$  مشخص شدهاند به صورت تجربی و از طریق تست کشش برای نانولولههای با درصد وزنی بالا تعیین می شوند. چگالی ( $\rho$ ) و ضریب پواسون (v) کامپوزیتهای نانولوله کربنی/ پلی استیرن<sup>1</sup> طبق قانون خطی مخلوطها به صورت زیر محاسبه می شود:  $\rho = V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m$  $v = V_{CNT} v_{CNT} + V_m v_m$ 

که،  $\rho_{CNT}$  و  $\rho_m$  بهترتیب چگالی جرمی نانولولههای کربنی و پلیمر خالص میباشند.  $V_{CNT}$  و  $W_m$  بهترتیب کسر حجمی نانولولههای کربنی و کسر حجمی پلیمر خالص میباشند. در این مقاله فرض شده که ماتریس پلیاستیرن با نانولولههای کربنی تقویتشده، بهطوری که برای کسر حجمی آنها بهصورت زیر میتوان نوشت: (4)

$E_m(GPa)$	$\rho_m($	$Kg/m^3$ )	$\mathcal{V}_m$	1
١/٩		۱۰۵۰	•/٣۴	پلىاسىيرن
$E_{CNT}(GPa)$	$\rho_{CNT}$	$(Kg/m^3)$	$V_{CNT}$	نانولوله
٩٠٠		71	• / ۲ ٨	كربني
d(nm)		$l(\mu m)$		ابعاد نانولوله-
٢۵		۶.		های کربنی
$E_c(GPa)$	k <sub>o</sub>	$k_w$	V <sub>CNT</sub>	مقادير
٣/٨	۰/۲	٠/١	•/10	استفادهشده

1- CNT/ Polystyrene (PS)

منحنی تغییرات مدولیانگ کامپوزیتهای نانولوله کربنی/ پلی استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی بر اساس رابطـه (۱) در شـکل ۱ نشـان دادهشـده و بـا دادهـای تجربـی مرجـع [۳۰] مقایسه شده است. همانطـورکـه ایـن شـکل نشـان مـیدهـد مطابقت خوبی بین نتایج تجربی و نتـایج حاصـل از رابطـه (۱) وجود دارد.



شکل (۱): منحنی تغییرات مدول یانگ کامپوزیتهای نانولوله کربنی/ پلی استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی تغییرات و مقایسه بین دادههای تجربی و نتایج رابطه (۱).

در این مقاله فرض شده است توزیع نانولوله های کربن در راستای ضخامت ورق گرد قطاعی سوراخدار به صورت خطی باشد. ازاین رو چند تابع برای توزیع نانولوله ها در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. توزیع ۷ شکل نانولوله های کربن در راستای ضخامت که در این حالت از رابطه زیر استفاده می شود:

$$V_{CNT} = (1 + \frac{2z}{h})V_{NT}^*$$

دو نوع مختلف از توزیع خطی X و O شـکل از کسـر حجمـی نانولولهها در راستای ضخامت که بهصورت زیر در نظـر گرفتـه شدهاند:

X نوع 
$$V_{CNT} = \frac{4|z|}{h} V_{NT}^{*}$$
 (۶)

O نوع 
$$V_{CNT} = 4(\frac{1}{2} - \frac{|z|}{h})V_{NT}^{*}$$

UD نوع 
$$V_{CNT} = V_{NT}^{*}$$
 (Y)

در روابط فوق h ضخامت ورق و  $V_{\scriptscriptstyle NT}^{*}$  به صورت زیر تعریف  $a_{\scriptscriptstyle 2}$ می شود [17]:

$$V_{NT}^{*} = \frac{W_{NT}}{W_{NT} + (\frac{\rho_{CNT}}{\rho_{m}}) - (\frac{\rho_{CNT}}{\rho_{m}})W_{NT}}$$
( $\lambda$ )

که  $\rho_{CNT}$ ،  $w_{NT}$  و  $\rho_m$  بهترتیب کسر جرمی نانولوله، چگالی جرمی نانولولههای کربنی و چگالی جرمی پلیمر خالص میباشند. با تعریف پارامتر بیبعد n = z / h، تغییرات کسر حجمی نانولولههای کربن و همچنین مدول یانگ در راستای ضخامت ورق گرد قطاعی و برای توزیعهای مختلف به صورت شکلهای **۲** و **۳** و میباشد.



۲-۲- معادلات حاکم با استفاده از تئوری بهبودیافته

در شکل  $\mathbf{f}$  شماتیکی از ورق گرد قطاعی سوراخدار نشان دادهشده است. در این شکل  $R_i$  شعاع داخلی،  $R_o$  شعاع خارجی،  $K_w$  ضریب بستر الاستیک برشی و  $K_w$  ضریب بستر الاستیک وینکلر میباشند.



شکل (۴): ورق گرد قطاعی روی بستر الاستیک.

معادلات حاکم با استفاده از تئوری بهبودیافته بهدستآمدهاند. میدان جابجایی طبق تئوری بهبودیافته بهصورت زیر نوشته می شود [۳۱]:

$$U(r,\theta,z,t) = u(r,\theta,t) - z \frac{\partial w_b(r,\theta,t)}{\partial r} + g(z)(\frac{\partial w_s(r,\theta,t)}{\partial r})$$

$$V(r,\theta,z,t) = v(r,\theta,t) - z \frac{\partial w_b(r,\theta,t)}{r\partial \theta} + g(z)(\frac{\partial w_s(r,\theta,t)}{r\partial \theta})$$

$$W(r,\theta,z,t) = w_b(r,\theta,t) + w_s(r,\theta,t)$$

$$(9)$$

$$g(z) = \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}(\frac{z^3}{h^2})$$
 (1.

طبق تئوری تغییر شکل برشی بهبودیافته جابجایی عرضی w شامل دو مؤلفه خمشی $w_b$ و برشی  $w_s$ میباشد که هر دو r,heta,t ابع (r, heta,t) میباشند.

رابطه تنش- کرنش در مختصات استوانهای بهصورت زیر است:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\sigma_{\theta}} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix}$$
 (11)

که در این رابطه،  $C_{ij}$  ماتریس سختی الاستیک،  $\varepsilon_{ij}$  کرنش و  $\sigma_{ij}$  تنش میباشند. ضرایب ماتریس الاستیک بهصورت زیر  $\sigma_{ij}$ 

تعريف مي شوند:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(z)}{(1 - v^2)}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{E(z)v(z)}{(1 - v(z)^2)}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + v(z))}$$
(17)

همچنین روابط کرنش- جابجایی در مختصات استوانهای بهصورت زیر بیان می شوند:

$$\varepsilon_{r} = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{z} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{r \partial \theta}$$
(17)

با جایگذاری رابطه (۹) در (۱۳) می توان نوشت:  

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2} + g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2}$$
 $\varepsilon_a = \frac{1}{2} \left\{ u + \frac{\partial v}{\partial r} - z(\frac{\partial w_b}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2}) + \right\}$ 

$$g(z)\left(\frac{\partial w_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_s}{r\partial \theta^2}\right)$$

$$g(z)\left(\frac{\partial w_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_s}{r\partial \theta^2}\right)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} - v + r \frac{\partial v}{\partial r} - 2z \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial r\partial \theta} - \frac{\partial w_b}{r\partial \theta}\right) \quad (1\%)$$

$$+ 2g(z) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial r\partial \theta} - \frac{\partial w_s}{r\partial \theta}\right)$$

$$\begin{split} \gamma_{rz} &= (1 + g'(z)) \frac{\partial w_s}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= (1 + g'(z)) \frac{\partial w_s}{r \partial \theta} \\ &= \mathrm{substands} \end{split}$$

$$\int_{0}^{t} \delta T - \delta U + \delta U_{f} dt = 0 \tag{10}$$

که در آن، T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، 
$$U_f$$
 کار  
نیروی خارجی میباشد و همچنین  $\delta$  نشاندهنده تغییرات  
میباشد. برای بهدست آوردن  $\delta U$  میتوان نوشت:  
$$\delta U = \int_{V} (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta} + \sigma_r \delta \gamma_{rg}) dv$$
(۱۶)

www.SID.ir

با تعریف منتجههای تنش بهصورت رابطه (۱۷) و با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۱۶) و انجام سادهسازی، رابطه (۱- الف) بهدست میآید:

$$\begin{cases}
N_{r} \\
M_{r} \\
P_{r}
\end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r} \begin{cases}
1 \\
z \\
g(z)
\end{cases} dz$$

$$\begin{cases}
N_{\theta} \\
M_{\theta} \\
P_{\theta}
\end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta} \begin{cases}
1 \\
z \\
g(z)
\end{cases} dz,$$

$$\begin{cases}
N_{r\theta} \\
M_{r\theta} \\
P_{r\theta}
\end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} \begin{cases}
1 \\
z \\
g(z)
\end{cases} dz,$$

$$\begin{cases}
Q_{rz} \\
Q_{\theta z}
\end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{cases}
\sigma_{rz} \\
\sigma_{\theta z}
\end{cases} (1 + g'(z)) dz$$
(14)

که  $M_{r,\theta}, P_{r,\theta}$  ممانهای خمشی،  $M_{r,\theta}, P_{r,\theta}$  ممانهای پیچشی و  $Q_r, Q_{\theta}, R_r, R_{\theta}$  نیروهای برشی هستند. با توجه به طولانی بودن، فرمولها بخش ی از این فرمولها در پیوست (الف) ارائه می گردد.

درنهایت با قرار دادن روابط (۱- الف) و (۲- الف) و (۳- الف) در رابطه (۱۵)، معادلات حرکت ورق گرد قطاعی سوراخدار تابعی تقویتشده با نانولولههای کربنی برحسب منتجههای نیرو و ممان با استفاده از تئوری بهبودیافته بهدست میآید:

$$\frac{N_r}{r} + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{r\partial \theta} - \frac{N_{\theta}}{r} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial r \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial r \partial t^2} \quad (\Lambda \Lambda)$$

$$2\frac{N_{r\theta}}{r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial N_{\theta}}{r\partial \theta} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{r\partial \theta \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{r\partial \theta \partial t^2}$$
(19)

$$\begin{split} &-\frac{\partial^2 P_r}{\partial r^2} - \frac{2\partial P_r}{r\partial r} + \frac{\partial P_{\theta}}{r\partial r} - \frac{\partial^2 P_{\theta}}{r^2\partial \theta^2} + \frac{Q_{rz}}{r} + \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} \\ &+ \frac{\partial Q_{\theta z}}{r\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta z}}{r\partial \theta} - 2\frac{\partial^2 P_{r\theta}}{r\partial r\partial \theta} - 2\frac{\partial P_{r\theta}}{r^2\partial \theta} + K_w(w_b + w_s) - \\ &K_s\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2} + \frac{\partial w_b}{r\partial r} + \frac{\partial w_s}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w_b}{r^2\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w_s}{r^2\partial \theta^2}\} = \\ &I_1\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\} - I_4\{\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{r\partial \theta\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{r\partial t^2}\} + \\ &I_5\{\frac{\partial^4 w_b}{\partial r^2\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{r^2\partial \theta^2\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_b}{r\partial r\partial t^2}\} - \\ &I_6\{\frac{\partial^4 w_s}{\partial r^2\partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{r^2\partial \theta^2\partial t^2} + \frac{\partial^3 w_s}{r\partial r\partial t^2}\} \end{split}$$

$$\frac{\partial^{2}M_{r}}{\partial r^{2}} + \frac{2\partial M_{r}}{r\partial r} - \frac{\partial M_{\theta}}{r\partial r} + \frac{\partial^{2}M_{\theta}}{r^{2}\partial\theta^{2}} + 2\frac{\partial^{2}M_{r\theta}}{r\partial r\partial\theta} + 2\frac{\partial M_{r\theta}}{r^{2}\partial\theta} + K_{w}(w_{b} + w_{s}) - K_{s}\left\{\frac{\partial^{2}w_{b}}{\partial r^{2}} + \frac{\partial^{2}w_{s}}{\partial r^{2}} + \frac{\partial w_{b}}{r\partial r^{2}} + \frac{\partial w_{s}}{r\partial r} + \frac{\partial^{2}w_{b}}{r^{2}\partial\theta^{2}} + \frac{\partial^{2}w_{s}}{r^{2}\partial\theta^{2}}\right\} = I_{1}\left\{\frac{\partial^{2}w_{b}}{\partial r^{2}} + \frac{\partial^{2}w_{s}}{\partial t^{2}}\right\} + I_{2}\left\{\frac{\partial^{3}u}{\partial r\partial t^{2}} + \frac{\partial^{3}v}{r\partial\partial\theta \partial t^{2}} + \frac{\partial^{2}u}{r\partial t^{2}}\right\} - I_{3}\left\{\frac{\partial^{4}w_{b}}{\partial r^{2}\partial t^{2}} + \frac{\partial^{4}w_{b}}{r^{2}\partial\theta^{2}\partial t^{2}} + \frac{\partial^{3}w_{b}}{r\partial\sigma\partial t^{2}}\right\} + I_{5}\left\{\frac{\partial^{4}w_{s}}{\partial r^{2}\partial t^{2}} + \frac{\partial^{4}w_{s}}{r^{2}\partial\theta^{2}\partial t^{2}} + \frac{\partial^{3}w_{s}}{r\partial\sigma\partial t^{2}}\right\}$$

ب فرار عامی مسابقات میرو و مسی بر عسب موسیاتی جابهجایی و جای گذاری در معادلات حرکت برحسب منتجهها و درنهایت قرار دادن روابط (۹) در این روابط، معادلات حرکت برحسب مؤلفههای جابجایی برای ورق گرد قطاعی تابعی تقویتشده با نانولولههای کربنی با استفاده از تئوری بهبودیافته، استخراج می گردد:

$$\begin{split} U(r,\theta,t) &= u(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t} \\ V(r,\theta,t) &= v(r)\cos(\beta_m\theta)e^{i\omega t} \\ W_s(r,\theta,t) &= w_s(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t} \\ W_b(r,\theta,t) &= w_b(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t} \\ \beta_m &= m\pi / \Theta \\ \mathcal{S}_b(r,\theta,t) &= v_{0} + \frac{1}{2} \\ \mathcal{S}_b(r,\theta,t) &= w_b(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t} \\ \mathcal{$$

#### ۳- حل معادلات

روشهای تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی بسیاری برای بررسی مسائل ارتعاشاتی و کمانش وجود دارد [۳۲-۳۶]. در این مقاله، به دلیل دشواری در حل معادلات کوپل شده از روش مربعات تفاضلی استفاده شده است. در ادامه نحوه اعمال این روش در معادلات آورده شده است.

#### ۳-۱- اعمال روش مربعات تفاضلی

روش مربعات تفاضلی اولین بار توسط بلمن و کاستی در سال ۱۹۷۱ در مقالهای ارائه گردید [۳۷] و بعدها توسط برت و مالیک برای حل معادلات مکانیک جامدات استفاده شد[۳۸]. از این روش میتوان در حل معادلات مقدار مرزی و مقدار اولیه با طبیعت خطی و غیرخطی استفاده نمود (برای مطالعه جزئیات بیشتر به مرجع [۳۹] مراجعه شود).

با اعمال این روش به معادلات حرکت، آنها را به فرم روش مربعات تفاضلی مینویسیم (با توجه به طولانی بودن روابط، این روابط در پیوست (ب) آورده شده است). www.SID.ir

#### ۴- نتایج و بحث

در این بخش، ابتدا نتایج بهدست آمده به کمک مقایسه با نتایج سایر تحقیقات صحه گذاری می گردد. سپس اثرات پارامترهای مختلف هندسی، توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی در راستای ضخامت، اثر بستر الاستیک و همچنین شرایط تکیه گاهی مختلف بر روی فرکانسهای طبیعی بررسی شده است.

#### ۴–۱– بررسی صحت نتایج

هدف اصلی این مقاله بررسی ارتعاش آزاد ورق دایرهای سوراخدار تابعی هدفمند که با نانولولههای کربنی تقویت شدهاند، میباشد. در ابتدا لازم است تا نتایج بهدستآمده با نتایج سایر تحقیقات مقایسه شود تا اعتبار و صحت نتایج بهدستآمده تائید شود. بدین منظور از تابع زیر برای تغییرات خواص استفاده شده است [۴۰]:

$$C_{ij}(z) = C_{ij}^{m} e^{(\beta z/h)}$$

$$\rho(z) = \rho^{m} e^{(\beta z/h)}$$
(Y\Delta)

 $\sigma m \left( \frac{\beta \pi}{h} \right)$ 

در جدولهای **۲** و **۳** فرکانس طبیعی بیبعد اول بهترتیب برای حالتهای گیردار-گیردار و گیردار- ساده بهدستآمده و با نتایج مرجع [۲۴] مقایسه شده است. در این جدولها با نتایج مرجع  $(24) = R_o = 1$  مات. در این جدولها همانطور که نتایج این جدولها نشان میدهد، مطابقت مناسبی بین دادههای کار حاضر و نتایج مرجع [۲۴] وجود دارد. لازم بهذکر است تئوری استفادهشده در مرجع [۲۴] تئوری الاستیسیته سهبعدی میباشد و از روش عددی مربعات تفاضلی برای حل معادلات استفاده شده است.

 $K_w$  بعدول (۲): مقادیر فرکانس طبیعی اول بهازای ضخامت،  $K_w$ 

				-	0 -
h	$K_{W}$	مرجع	$K_g = \cdot$	$K_g = v \cdot$	$K_g = \cdots$
		کار حاضر	۳۰/۴۷۷۰	۳۱/۹۸۸۳	42/9808
	•	[74]	3.16111	81/9944	42/9121
-		کار حاضر	30/0821	311.17	43/0221
•	-	[74]	30/0822	311.12	47/0781
	•	کار حاضر	316217	34/2016	49/0880
		[74]	31/2011	31/1831	49/0788
	•	کار حاضر	74/4.7.	४४/•८४१	36/1743
		[74]	74/4077	78/0411	۳۶/۹۹۸۱
	.,	کار حاضر	26/0109	۲۶/۱۳۸۰	37/0022
۲/۰		[74]	26/2181	78/1487	37/1822
	•	کار حاضر	۳۳/۵۳۰۸	34/8091	42/9299
		[74]	۳۳/۵۳۱۴	84/88.9	47/9488

. و  $K_{e}$  مختلف برای ورق گرد گیردار – گیردار  $K_{e}$ 

و $\mathbf{x}_{g}$ محتلف برای ورق کرد گیردار – ساده.							
h	$K_{\scriptscriptstyle W}$	مرجع	$K_g = \cdot$	$K_g = i \cdot$	$K_g = \cdots$		
		کار حاضر	74/49	78/7784	31/2684		
	•	[74]	26/6011	78/7829	34/2611		
_		کار حاضر	74/8087	26/272	31/9308		
•	-	[74]	26/8088	78/3981	31/8421		
	1	کار حاضر	34/1229	30/42.1	40/2010		
		[74]	84/1849	30/4419	40/2771		
	•	کار حاضر	51/0101	22/2019	34/1419		
		[74]	۲۱/۰۱۰۹	22/271	34/2021		
		کار حاضر	51/1825	22/9729	34/11.0		
λ/۰	1	[74]	51/1889	22/9972	347/211		
		کار حاضر	<i>۳1/• ۳</i> УЛ	37/2298	40/9212		
		[77]	۳۱/۰۳۹۸	۳۲/۲۴۵۹	4./94.9		

 $K_w$  مقادیر فرکانس طبیعی اول بهازای ضخامت،  $K_w$  مختلف دای مق $K_w$  مختلف دای مق $K_w$ 

۴–۲– بررسی همگرایی

برای بررسی همگرایی نتایج بهدست آمده با استفاده از روش مربعات تفاضلی، بهازای تعداد گرههای مختلف (N<sub>r</sub>) یعنی ۵، ۲۱، ۱۵، ۱۹ ۱۹ و ۲۱ شرایط تکیه گاهی: گیردار – گیردار (C-C)، ساده (S-C) و همچنین اعداد موج محیطی ۲۰،۳ برای توزیع V شکل از

نانولولههای کربنی در راستای ضخامت، نتایج در جدول ۴ آورده شده است. همان طور که در این جدول مشاهده می شود، با افزایش تعداد گرهها نرخ همگرایی افزایشیافته و بهازای تعداد گرههای بالای ۱۹ نتایج همگرایی حاصل شده است.

## ۴-۳- بررسی اثرات تکیهگاهی، عدد موج طبیعی و فرکانس طبیعی بیبعد شده

در ادامه به بررسی تأثیر نانولولههای کربنی و پارامترهای هندسی پرداخته است. در جداول زیر از رابطه بیبعد هندسی پرداخته مست. در جداول زیر از رابطه میبعد  $\Omega = \omega R_o \sqrt{2(1+v_m)\rho_m / E_m}$  که در آن برای فرکانس طبیعی استفاده شده است.

در جدولهای **۷**–**۵** چهار فرکانس طبیعی بیبعد اول بهترتیب برای شرایط تکیهگاهی گیردار – گیردار، ساده – ساده و گیردار – ساده، بهازای اعداد موج مختلف برای توزیعهای مختلف از تغییرات تابعی نانولولههای کربنی در راستای ضخامت ورق گردآورده شده است. همانطور که در این جدولها مشاهده میشود با افزایش عدد موج محیطی فرکانس طبیعی بیبعد افزایشیافته و همچنین بیشترین مقادیر فرکانس مربوط به توزیع X و کمترین مقادیر مربوط به توزیع O میباشد. توزیع V میباشد.

 $R_i / R_o = 1$  و ۲ (۲): همگرایی فرکانس طبیعی اول به ازای اعداد موج و شرایط مرزی و تعداد گره مختلف، برای توزیع V و  $h_o / R_o = 1$ 

				0 0				
شرايو تکيهگا عدد م	عدد مو	N <sub>r</sub>						
Y	Ň	۵	۲۱	11	۱۵	١٧	١٩	۲۱
گير	١	7/7841	7/1887	४/४७१ •	४/४७१४	۲/۷۷۰۷	۲/۷۸۰۲	۲/۷۸۰۲
- - -	٢	7/2026	۲/۸۷۸۶	۲/۸۸۳۲	۲/۸۸۴۲	۲/۸۸۵۲	۲/۸۹۴۹	٢/٨٩۴٩
ادە	٣	٣/•٩١١	٣/١٣٩۶	٣/١۴٧٢	٣/١۴٨٧	37/1499	۳/۱۶۰۱	۳/۱۶۰۱
J	١	١/٩١٨۶	١/٩۶۵٨	1/9808	1/9804	1/9808	1/9877	1/9877
	٢	۲/•۵۱۰	۲/۱۱۱۶	۲/۱・۹・	۲/۱۰۸۸	۲/۱・۹・	۲/۱۱۱۵	۲/۱۱۱۵
S	٣	۲/۳۵۰۵	۲/۴۲۲۳	۲/۴۱۸۶	۲/۴۱۸۱	۲/۴۱۸۴	2/4210	2/4210
ڲؾۯ	١	٣/• ٩۵١	311147	۲/۱۳۰۱	۳/۱۳۰۵	۳/۱۳۰۵	۳/۱۳۰۵	۳/۱۳۰۵
ار - می بار - می	٢	۳/۲ • ۵۴	٣/٢٣٠۵	٣/٢٣۴٧	٣/٢ ٣۴٣	٣/٢ ٣۴٣	٣/٢٣۴٢	٣/٢٣۴٢
يردار	٣	4/421	٣/۴۵۰۷	٣/۴۵۳۳	3/4022	3/4021	٣/۴۵۱۹	٣/۴۵۱۹

$R_i / R_o = \cdot / \Upsilon$ $h_o / R_o = \cdot / \Upsilon$							
نحوه توزيع	عدد موج	$\Omega_{_{1}}$	$\Omega_2$	$\Omega_{_3}$	$\Omega_{_4}$		
	١	۲/۷۸۰۲	8/8977	11/8888	<i>۱۶/۰۲۹</i> ۸		
>	۲	٢/٨٩۴٩	8/1480	11/8260	18/080		
	٣	۳/۱۶۰۱	۷/۱۲۱۶	17/0957	18/7 • • 7		
	١	٣/١٩٠١	٨/۵٢١٢	10/1880	22/0400		
×	٢	٣/٧١۶٣	9/0477	10/0898	22/26.6		
	٣	4/47 • •	٩/٨۴۶١	18/19	۲۲/۸۲۲۰		
	١	7/8098	۶/۵۷۲۰	11/388	18/3810		
0	۲	۲/۷۷۴۹	۶/۷۲۰۱	11/5777	18/4904		
	٣	۳/۰۳۳۷	F/9977	11/1888	18/8940		
UD	١	۲/۹۴۳۷	۷/۰۱۱۸	17/886.	14/1891		
	٢	41.24	۷/۱۶۸۹	17/2124	14/9097		
	٣	۳/۳۴۵۱	٧/۴۵۸۲	17/879	10/1888		

جدول (۷): مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول بهازای توزیع مختلف از نانولوله برای ورق گرد گیردار – ساده  $X = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} h$ 

در شکلهای  $\mathbf{V}-\mathbf{\Delta}$  تغییرات فرکانس طبیعی بیبعد اول برحسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی،  $\mathbf{N}_{o} = \mathbf{V}_{i}$  و  $\mathbf{N}_{i} / \mathbf{R}_{o} = \mathbf{V}$  به ترتیب برای شرایط تکیهگاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده نشان داده شده است. مطابق این شکلها، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق، فرکانس طبیعی بیبعد افزایش یافته است. این نتیجه برای فرکانس طبیعی بیبعد افزایش یافته است. این نتیجه برای طبیعی مربوط به توزیع X و کمترین مقادیر مربوط به توزیع O بوده و توزیع V میباشد.

تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول بر حسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق گرد و به ازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی، ۲/۰  $R_o = 1$  و N = m بهترتیب برای شرایط تکیه گاهی گیردار - گیردار، ساده - ساده و گیردار - ساده شرایط تکیه گاهی گیردار - گیردار، ساده - ساده و گیردار - ساده مشکلهای  $11 - \Lambda$  نشان داده شده است. همان طور که از این شکلها مشخص است، با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق فرکانس طبیعی بی بعد افزایش می باید. لازم بهذکر است، این نتیجه برای تمامی شرایط تکیه گاهی صادق است. همچنین، در شرایط توزیع یکسان، فرکانس طبیعی بی بعد در حالت گیردار - گیردار از دو حالت دیگر بیشتر است.

جدول (۵): مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول بهازای توزیع مختلف از نانولوله برای ورق گرد گیردار – گیردار  $R_i / R_o = \cdot / \gamma$  و  $h_o / R_o = \cdot / \gamma$ 

نحوه	عدد موج	$\Omega_{_{1}}$	$\Omega_{2}$	$\Omega_{_3}$	$\Omega_{_4}$
	١	٣/١٣٠۵	8/9824	۱۱/۵۷۰۹	18/0790
$\mathbf{>}$	۲	٣/٢٣۴٢	۷/۱۳۵۴	11/7780	18/421
	٣	٣/۴۵۱۹	٧/4257	17/•114	۱۶/۹۷۲۸
	١	4/1.47	9/8981	10/8940	22/2662
Х	۲	4/4114	٩/٨٣٩۶	18/•974	22/1281
	٣	4/2022	۱۰/۵۱۸۸	18/1369	۲۳/۴۰۰۵
	1	۳/۰۵۵۰	۶/۸۸۷۷	11/4797	18/4748
0	۲	۳/۱۵۰۲	٧/•۴۵۲	11/8875	18/8198
	٣	212021	४/९१४१	11/9.18	18/1800
D	1	٣/٢٨٣۵	٧/٢٧٢٠	17/070	17/29.6
	٢	8/898	٧/۴۵۵۳	17/2400	17/4402
)	٣	۳/۶۳۱۵	<b>٧/٧۶۵٩</b>	17/2296	17/7.18

## جدول (۶): مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول بهازای توزیع مختلف از نانولوله برای ورق گرد ساده- ساده

 $R_i / R_o = \cdot /$ و ۲ و  $h_o / R_o = \cdot /$ 

نحوه توزيع	عدد موج	$\Omega_{_{1}}$	$\Omega_{_2}$	$\Omega_{3}$	$\Omega_{_4}$
	١	1/9877	8/1010	11/8789	18/851.
>	٢	۲/۱۱۱۵	8/3188	11/8780	18/2929
	٣	2/4210	<i>۶/</i> ۶۲۳۹	17/7•97	۱۳/۲۰۸۶
	١	٣/٢٣٠٣	٧/۴۳۸۱	14/2008	21/8811
×	۲	۲/۷۸۹۸	٨/•١١١	14/8490	21/9828
	٣	۳/۵۱۱۵	٨/٨۶٠٧	10/8019	22/6018
	١	1/8542	۵/۹۰۰۴	1./9811	۱۶/۳۰۹۱
0	٢	१/९९८७	۶/•۶۳۵	11/1.44	18/4200
	٣	٢/٢٨٩٢	8/3800	11/388	18/88.1
D	١	7/1•71	۶/۵۱۸۲	22/3880	22/2010
	٢	7/2004	<i>۶</i> /۶۹۳۰	22/2998	22/228
	٣	7/0188	٧/٠١٧۴	23/222	۲۵/۲۵۸۰





نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی، شرایط تکیه گاهی ساده- ساده.



شكل (٧): تغييرات فركانس طبيعي بيبعد اول برحسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی، شرایط تکیهگاهی گیردار - ساده.

تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول بر حسب زاویه قطاع ورق بهازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی، m = 1 و  $n = n/R_o = ../Y$  ،  $R_i/R_o = ../Y$  و m = 1 برای شرایط تکیه گاهی گیردار - گیردار، ساده - ساده و گیردار - ساده به ترتیب در شکلهای **۱۳ – ۱۱** نشان داده شده است. مطابق این شکلها، برای تمامی شرایط تکیه گاهی با افزایش زاویه قطاع ورق فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می باید.

تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول ورق گرد بر حسب ضریب بستر الاستیک  $K_w$ ، بهازای مقادیر مختلف  $K_g$ ، شرایط تکیهگاهی گیردار -گیردار و برای توزیعهای X،V و UD و نانولولههای کربنی بهترتیب در شکلهای **۲**ا+۱۰ نشان دادهشده است. این شکلها برای مقادیر ۲/۰ =  $R_i/R_i$ دادهشده است. این شکلها برای مقادیر ۲/۰ =  $R_i/R_i$ کلیه توزیعهای مختلف، با افزایش K<sub>G</sub> و  $K_{\rm G}$  فرکانس طبیعی بی بعد اول افزایش می باید ولی بهازای ۲۰۰ ( $K_{\rm G}$ » برای تغییراتی در مقادیر فرکانس مشاهده نمی شود و نتایج برای مقادیر مختلف K<sub>G</sub> و ۲۱۰ می باشد.



شکل (۱۱): تغییرات فرکانس طبیعی بیبعد اول برحسب زاویه قطاع ورق بهازای توزیعهای مختلف از نانولولههای



شکل (۱۲): تغییرات فرکانس طبیعی بیبعد اول برحسب زاویه قطاع ورق بهازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی، شرایط تکیهگاهی ساده- ساده. www.SID.ir



شکل (۱۳): تغییرات فرکانس طبیعی بیبعد اول برحسب زاویه قطاع ورق بهازای توزیعهای مختلف از نانولولههای کربنی، شرایط تکیهگاهی گیردار-ساده.



نانولولەھاى كربنى.

تکیه گاهی مختلف گیردار - گیردار، گیردار - ساده و ساده - ساده در شعاع داخلی و خارجی ورق گرد در نظر گرفته شده و مشاهده شد بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به شرایط تکیه گاهی گیردار - گیردار و کمترین مقادیر مربوط به ساده - ساده می باشد.

- Rao, S.S. and Sunar, M."Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey", App. Mech. Rev. Vol. 47, No. 4, pp. 113-123, 1994.
- Zhong, Z. and Shang, E.T. "Three-Dimensional Exact Analysis of a Simply Supported Functionally Gradient Piezoelectric Plate", Int. J. Sol. Stru.Vol. 40, No. 20, pp. 5335-5352, 2003.
- Nie, G.J. and Zhong, Z. "Semi-Analytical Solution for Three-Dimensional Vibration of Functionally Graded Circular Plates", Com. Meth. App. Mech. Eng. Vol. 196, No's. 49–52, pp. 4901-4910, 2007.
- Han, Y. and Elliott, J. "Molecular Dynamics Simulations of The Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites", Comput. Mat. Sci. Vol. 39, No. 2, pp. 315-323, 2007.
- Liew, K.M., Lei, Z.X., and Zhang, L.W. "Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites: A Review", Compos. Stru. Vol. 120, pp. 90-97, 2015.
- Ke, L. L., Yang, J. and Kitipornchai, S."Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beams", Compos. Stru. Vol. 92, No. 3, pp. 676-683, 2010.
- Nejati, M., Eslampanah, A., and Najafizadeh, M. "Buckling and Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Beam Under Axial Load", Int. J. App. Mech. Vol. 8, No. 1, pp. 165-178, 2016.
- Nejati, M., Mohsenimonfared, H., and Asanjarani, A. "Free Vibration Analysis of 2D Functionally Graded Annular Plate Considering the Effect of Material Composition via 2D Differential Quadrature Method", Mech. Adv. Compos. Stru. Vol. 2, No. 2, pp. 95-111, 2015.
- Molla-Alipour, M." Dynamic Behavior Analysis of FG Circular and Annular Plates with Stepped Variations of Thickness under Various Load", Modares Mech. Eng. Vol. 16, No. 7, pp. 251-260, 2016.
- Molla-Alipour, M. "Closed-Form Solution of Circular and Annular Plateswith Elastic Boundary Conditions under Non-Uniform Normal and Shear Loads", Modares Mech. Eng. Vol. 16, No. 6, pp. 29-40, 2016.



شکل (۱۷): تغییرات فرکانس طبیعی بیبعد اول ورق گرد برحسب ضریب بستر الاستیک *K*<sub>w</sub> بهازای توزیع UD از نانولولههای کربنی.

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی تأثیر توزیع نانولولههای کربنی بهصورت تابعی و پیوسته روی فرکانسهای طبیعی ورق گرد قطاعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی پرداخته شده است. توزیعهای مختلف از نانولولهها مورد بررسی قرار گرفته و با بررسی نتایج مشاهده شد بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع X و کمترین آن مربوط به توزیع O میباشد. محینین مقادیر فرکانس بهازای توزیع UD از مقادیر فرکانس طبیعی بهازای توزیع V بیشتر میباشد. پارامترهای هندسی مختلف ازجمله نسبت ضخامت به شعاع خارجی، شعاع داخلی به شعاع خارجی، زاویه قطاع ورق گرد و همچنین ضرایب بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفتند. در این کار شرایط

Using the Extended Kantorovich Method", Arch. App. Mech. Vol. 83, No. 2, pp. 177-191, 2013.

- Yas, M.H. and Aragh, B.S. "Free Vibration Analysis of Continuous Grading Fiber Reinforced Plates on Elastic Foundation", Int. J. Eng. Sci. Vol. 48, No. 12, pp. 1881-1895, 2010.
- Malekzadeh, P. and Karami, G. "Vibration of Non-Uniform Thick Plates on Elastic Foundation by Differential Quadrature Method", Eng. Stru. Vol. 26, No. 10, pp. 1473-1482, 2004.
- Xiang, Y."Vibration of Rectangular Mindlin Plates Resting on Non-Homogenous Elastic Foundations", Int. J. Mech. Sci. Vol. 45, No's. 6–7, pp. 1229-1244, 2003.
- Zhou, D., Cheung, Y.K. Lo, S.H. and Au, F.T.K. "Three-Dimensional Vibration Analysis of Rectangular Thick Plates on Pasternak Foundation", Int. J. Num.Meth. Eng. Vol. 59, No. 10, pp. 1313-1334, 2004.
- Heshmati, M. and Yas, M.H."Dynamic Analysis of Functionally Graded Multi-Walled Carbon Nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads", Mat. Des. Vol. 49, pp. 894-904, 2013.
- 29. Omidi, M., Rokni D.T, H., Milani, A.S., Seethaler R.J., and Arasteh, R. "Prediction of the Mechanical Characteristics of Multi-Walled Carbon Nanotube/Epoxy Composites Using a New Form of the rule of Mixtures", Carb. Vol. 48, No. 11, pp. 3218-3228, 2010.
- Andrews, R., Jacques, D., Minot, M., and Rantell, T. "Fabrication of Carbon Multiwall Nanotube/Polymer Composites by Shear Mixing", Mac. Mat. Eng. Vol. 287, No. 6, pp. 395-403, 2002.
- 31. Najafizadeh, M.M. and Heydari, H.R. "An Exact Solution For Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory under Uniform Radial Compression", International J. Mech. Sci. Vol. 50, No. 3, pp. 603-612, 2008.
- Razavi, S. and Shooshtari, A. "Nonlinear Free Vibration of Magneto-Electro-Elastic Rectangular Plates", Compos. Stru. Vol. 119, pp. 377-384, 2015.
- 33. Alireza, S., Seyedeh Marzieh, H., Mahmoodi, S.N., and Hamed, K. "Analytical Solution for Nonlinear Free Vibrations of Viscoelastic Microcantilevers Covered with a Piezoelectric Layer", Sma. Mat. Stru. Vol. 21, No. 7, pp. 075015, 2012.
- Jafari, S.S., Rashidi, M.M., and Johnson, S. "Analytical Approximation of Nonlinear Vibration of Euler-Bernoulli Beams", Lat. Ame. J. Sol. Stru. ABCM J. Vol. 13, No. 7, pp. 1250-1264, 2016.
- 35. Ebrahimia, F. and Mokhtaria, M. "Semi-analytical Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko

- ebrahimi, f., "Free Vibration Analysis Of Thick Functionally Graded Rotating Beam By Differential Transform Method", Aero. Mech. J. Vol.12, No.4, pp. 49-61, 2017.
- Jafari Mehrabadi, s., "Free Vibration Analysis of FGM Plate Reinforced with Single Wall Carbon Nanotubes Using 3-D Elasticity Theory", Aero. Mech. J. Vol.11, No.4, pp. 1-14, 2015.
- Feli, S., L. Karami and S.S. JAFARI, "Analytical Modeling of Low Velocity Impact on Carbon Nanotube-Reinforced Composite (CNTRC) Plates", Mech. Adv. Mat. Stru. Vol., pp. 1-13, 2017.
- 14. Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H. Carnicer, R., and Sanzi, H.C. "Free Vibrations of a Solid Circular Plate of Linearly Varying Thickness and Attached to a Winkler Foundation", J. Sou. Vib. Vol. 144, No. 1, pp. 149-161, 1991.
- Ju, F., Lee, H.P., and Lee, K.H. "Free Vibration of Plates with Stepped Variations in Thickness on Non-Homogeneous Elastic Foundations", J. of Sou. Vib. Vol. 183, No. 3, pp. 533-545, 1995.
- Gupta, U.S., Ansari, A.H. and Sharma, S. "Buckling and Vibration of Polar Orthotropic Circular Plate Resting on Winkler Foundation", J. Sou. Vib. Vol. 297, No's. 3–5, pp. 457-476, 2006.
- Lal, R., Gupta, U.S., and Reena, "Quintic Splines In The Study of Transverse Vibrations of Non-Uniform Orthotropic Rectangular Plates", J. Sou. Vib. Vol. 207, No. 1, pp. 1-13, 1997.
- Huang, M., Sakiyama, T., Matsuda, H., and Morita, C. "Free Vibration Analysis of Stepped Rectangular Plates Resting on Non-Homogeneous Elastic Foundations", Eng. Analys. Bound. Elem. Vol. 50, pp. 180-187, 2015.
- Matsunaga, H., "Vibration and Stability of Thick Plates on Elastic Foundations", J. Eng. Mech. Vol.126, No.1, pp. 27-34, 2000.
- Malekzadeh, P., "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations", Compos. Stru. Vol. 89, No. 3, pp. 367-373, 2009.
- mousavi, Z. and A.R. Saidi, "Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on The Higher-Order Shear and Normal Deformable", Aero. Mech. J. Vol.12, No.1, pp. 1-12, 2016.
- Saidi, A.R. and Z. mousavi, "Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Piezoelectric Rectangular Plates in Closed Circuit Condition", Aero. Mech. J. Vol.12, No.1, pp. 67-78, 2016.
- Fallah, A., M.M. Aghdam and Kargarnovin, M.H. "Free Vibration Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundation

- Bert, C.W. and Malik, M. "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", App. Mech. Rev. Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.
- 39. Shu, C., "Differential quadrature and its application in engineering" Springer Science & Business Media, 2012.
- 40. Jodaei, A., Jalal, M., and Yas, M.H. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates by State-Space Based Differential Quadrature Method and Comparative Modeling by ANN", Compos. Part B: Eng. Vol. 43, No. 2, pp. 340-353, 2012.

Beams Made of Functionally Graded Materials", Lat. Ame. J. Sol. Stru. Vol. 12, No. 7, pp. 1319-1339, 2015.

- 36. Zafarmand, H., Salehi, M. and Asemi, K."Three Dimensional Free Vibration and Transient Analysis of Two Directional Functionally Graded Thick Cylindrical Panels under Impact Loading", Lat. Ame. J. Sol. Stru. Vol. 12, No. 2, pp. 205-225, 2015.
- Bellman, R. and Casti, J. "Differential Quadrature and Long-Term Integration", J. of Math. Analy. App. Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.

پيوست الف

$$\delta U = \int \left\{ N_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} - M_r \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r^2} + P_r \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r^2} + \frac{N_{r\theta}}{r} (\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} - \delta v + r \frac{\partial \delta v}{\partial r}) - \frac{2M_{r\theta}}{r} (\frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \delta w_b}{r \partial \theta}) + \frac{2P_{r\theta}}{r} (\frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \delta w_s}{r \partial \theta}) + \frac{N_{r\theta}}{r} (\frac{\partial \delta w_s}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial \delta w_s}{r \partial \theta}) + \frac{N_{r\theta}}{r} (\frac{\partial \delta w_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta^2}) + Q_{z\theta} \left\{ \frac{\partial \delta w_s}{r \partial \theta} \right\} + Q_{rz} \left\{ \frac{\partial \delta w_s}{\partial r} \right\} r dr d\theta$$

$$(1-i)$$

همچنین کار نیروی خارجی حاصل از بستر الاستیک به صورت رابطه زیر نوشته می شود:  

$$\delta U_{f} = \int_{\Omega} \left\{ K_{w}(w_{b} + w_{s}) - K_{g} \left\{ \frac{\partial^{2}(w_{b} + w_{s})}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_{b} + w_{s})}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2}(w_{b} + w_{s})}{\partial \theta^{2}} \right\} \right\} \delta(w_{b} + w_{s}) r dr d\theta \qquad (1)$$
(الف -۲)
$$\delta W_{f} = \int_{\Omega} \left\{ K_{w}(w_{b} + w_{s}) - K_{g} \left\{ \frac{\partial^{2}(w_{b} + w_{s})}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_{b} + w_{s})}{\partial r} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2}(w_{b} + w_{s})}{\partial \theta^{2}} \right\} \right\}$$

$$\begin{split} \delta T &= \int_{\Omega} \left\{ I_1 \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} \right\} + I_2 \left\{ -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} - \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} \right\} + I_3 \left\{ \frac{\partial v}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 \delta w_b}{r \partial \theta \partial t} \right\} + I_3 \left\{ \frac{\partial v}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_s}{r \partial \theta \partial t} \right\} + I_3 \left\{ \frac{\partial v}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{r \partial \theta \partial t} + \frac{\partial^2$$

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ 1, z, z^2, g(z), zg(z), g(z)^2 \right\} dz$$
(f- integration of the set of the set

پيوست ب

$$\begin{split} & -\frac{A_{22}m^2}{r^3}w_{bi} + \frac{A_{33}m^2}{r^3}w_{si} + \frac{A_{11}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j + \frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j - \frac{B_{22}m^2}{r^3}w_{bi} + \\ & \frac{B_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} + \frac{B_{33}m^2}{r^3}w_{si} - \frac{B_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{D_{11}m^2}{r^2}u_i + \\ & \frac{2D_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{2D_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{D_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{jj} - \frac{2D_{22}m^2}{r^3}w_{bi} + \\ & (\Delta - \cdot) \\ & (\Delta - \cdot) \\ & (\Delta - \cdot) \\ & A_{11}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}u_j - A_{22}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{bj} + A_{33}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{sj} - \frac{A_{22}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj} + \\ & A_{33}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{sj} = -I_4\omega^2\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj} + I_2\omega^2\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj} - I_1\omega^2u_i \end{split}$$

$$-\frac{D_{11}m}{r^{2}}u_{i} - \frac{D_{11}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_{j} + \frac{2D_{22}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj} - \frac{2D_{33}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj} - \frac{D_{11}}{r^{2}}v_{i} + \frac{D_{11}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}v_{j} - \frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_{j} + \frac{B_{22}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj} - \frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}w_{sj} - \frac{A_{11}m}{r^{2}}u_{i} + \frac{A_{22}m}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{33}m}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{A_{11}m^{2}}{r^{2}}v_{i} - \frac{A_{22}m^{3}}{r^{3}}w_{bi} + \frac{A_{33}m^{3}}{r^{3}}w_{si} + D_{11}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}v_{j} = -\frac{I_{2}m}{r}\omega^{2}w_{bi} + \frac{I_{4}m}{r}\omega^{2}w_{si} - I_{1}\omega^{2}v_{i}$$

$$-\frac{2A_{66}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}w_{sj} - \frac{4D_{66}m^{2}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{4D_{55}m^{2}}{r^{4}}w_{bi} - A_{33}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}u_{j} + A_{55}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(4)}w_{bj} - K_{s}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} - \frac{A_{33}}{r^{3}}u_{i} + \frac{A_{33}}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_{j} + \frac{A_{55}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{66}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{66}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{53}m^{2}}{r^{3}}v_{i} + \frac{A_{33}m^{2}}{r^{2}}w_{si} - \frac{A_{55}}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj} + \frac{A_{66}}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{33}m}{r^{3}}v_{i} + \frac{A_{33}m^{2}}{r^{4}}w_{si} - \frac{A_{55}}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_{j} + \frac{A_{66}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} - \frac{A_{55}m^{4}}{r^{3}}w_{i} - \frac{A_{55}m^{4}}{r^{3}}w_{si} - \frac{A_{55}m^{4}}{r^{2}}w_{si} - \frac{A_{55}m^{4}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} + \frac{A_{33}m^{3}}{r}v_{i} + \frac{A_{55}m^{4}}{r^{3}}w_{bi} - \frac{A_{66}m^{2}}{r^{4}}w_{si} - \frac{2A_{55}m^{2}}{r^{2}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_{j} + \frac{A_{33}m^{3}}{r^{3}}u_{i} + \frac{A_{33}m^{3}}{r^{3}}v_{i} + \frac{A_{55}m^{4}}{r^{5}}w_{bi} - \frac{A_{66}m^{4}}{r^{4}}w_{si} - \frac{2A_{55}m^{2}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_{j} + \frac{A_{33}m^{3}}{r^{3}}u_{i} + \frac{A_{33}m^{3}}{r^{3}}v_{i} + \frac{A_{55}m^{4}}{r^{2}}w_{bi} - \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} + \frac{2B_{55}m^{2}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj} + \frac{P_{77}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{3}}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{55}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{55}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{55}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}v_{si} + \frac{2B_{55}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}v_{si} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}v_{si} + \frac{2B_{55}m^{2}}{r^{2}}\sum_{i=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}v_{si} + \frac{2B_{66}m^{2}}{r^{2}}v_{si} + \frac{2B_{66}m^$$

$$\begin{split} \frac{A_{44}}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{2A_{22}}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} u_j - A_{44} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(4)} w_{bj} + A_{55} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(4)} w_{sj} + A_{22} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(3)} u_j \\ - \frac{2A_{55}m^2}{r^4} w_{si} + \frac{2A_{55}}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(3)} w_{sj} - \frac{A_{55}}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{2B_{55}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} w_{sj} - \\ \frac{2D_{22}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} u_j - \frac{4D_{44}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(0)} w_{bj} + \frac{4D_{55}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} w_{sj} + \frac{4D_{44}m^2}{r^4} w_{bi} - \\ \frac{4D_{55}m^2}{r^4} w_{si} - \frac{B_{22}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} u_j - \frac{422m^2}{r^3} u_i + \frac{B_{22}m}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} v_j - K_g \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{sj} - \\ \frac{2B_{55}m^2}{r^4} w_{si} + \frac{2B_{44}m^2}{r^4} w_{bi} - \frac{2B_{44}m^2}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} w_{bj} + \frac{2B_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} v_{j} - K_g \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \\ \frac{2A_{44}}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(3)} w_{bj} - \frac{K_g}{r} \sum_{j=1}^{N} e_{ij}^{(1)} w_{bj} - \frac{K_g}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{2D_{22}m}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} v_j + \frac{2B_{44}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \\ K_w w_{bi} + K_w w_{si} + \frac{A_{22}}{r^3} u_i - \frac{A_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{2D_{22}m}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{4D_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{A_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{A_{55}m^2}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \\ K_w w_{bi} + K_w w_{si} + \frac{A_{22}}{r^3} u_i - \frac{A_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{sj} + \frac{2B_{44}m^2}{r} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{A_{55}}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \frac{A_{55}}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} + \\ K_w w_{bi} + K_w w_{si} + \frac{A_{22}}{r^3} u_i - \frac{A_{22}}{r^2} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \frac{A_{44}m^4}{r^4} w_{bi} + \frac{A_{55}}{r^3} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{bj} - \\ L_2 \omega^2 \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} u_j - L_5 \omega^2 \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} w_{sj} - L_1 \omega^2 w_{bi} - L_1 \omega^2 w_{si}$$

ضرائب <sup>C</sup>ij ضرائب وزنی مربوط به روش مربعات تفاضلی می باشد همچنین در معادلات بالا ، ثوابت آورده شده در این روابط بهصورت زیر تعریفشدهاند:

۱۰۵

$$\{A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(z) \{1, z, g(z), z^{2}, zg(z), g(z)^{2}\} dz , \quad i = j = 1, 2, 3$$

$$\{B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{44}, B_{55}, B_{66}\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(z) \{1, z, g(z), z^{2}, zg(z), g(z)^{2}\} dz , \quad ij = 12, 13, 23$$

$$\{D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}, D_{55}, D_{66}\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(z) \{1, z, g(z), z^{2}, zg(z), g(z)^{2}, 1 + 2g'(z) + g'(z)^{2}\} dz ,$$

$$i = j = 4, 5, 6$$