بررسی تأثیر توزیع نانولوله‌های کربنی تابعی روی فرکانس‌های ورق قطاعی بر روی بستر الاستیک

محمد نجاتی [۱]
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، اراک، ایران.

سید سجاد جعفری [۲]
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، همدان، ایران.

محمدحسین یاس [۳]
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

فرزان براتی [۴]
گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، ایران.

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۹ ؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۴/۲۸)

چکیده

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق گرد قطاعی سوراخ‌دار تابعی هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده‌اند بررسی شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی به‌صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند در راستای ضخامت ورق، به‌صورت کسر حجمی می‌باشد. ورق گرد قطاعی روی بستر الاستیک دو پارامتری وینکلر- پاسترناک قرار گرفته است. معادلات حرکت ورق با استفاده از اصل همیلتون و تئوری بهبودیافته استخراج گردیده است. این معادلات دیفرانسیل کوپل شده با استفاده از بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و به کمک روش عددی مربعات تفاضلی حل شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده با نتایج دیگران محققان مقایسه و مطابقت بسیار خوبی بین آن‌ها مشاهده شده است. درنهایت اثرات پارامترهای مختلف هندسی، توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، اثر بستر الاستیک و همچنین شرایط تکیه‌گاهی مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: مواد هدفمند، نانولوله‌های کربنی، ارتعاش آزاد، ورق قطاعی، روش تفاضل مربعات، بستر الاستیک

Investigation of Functionally Graded Carbon Nanotube Distribution Effect on the Frequency of Annular Sector Plates on Pasternak Elastic Foundation

M. Nejati
MSc, Young Researchers and Elite Club, Arak Branch Islamic Azad University, Arak, Iran

S.S. Jafari
MSc, Young Researchers and Elite Club, Hamedan Branch Islamic Azad University, Hamedan, Iran

M.S. Yas
Professor, Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

F. Barati
Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Hamedan Branch, Hamedan, Iran.

(Received: 19/December/2016; Accepted: 19/July/2017)

ABSTRACT

In this paper, free vibration of functionally graded carbon nanotube annular sector plates is studied. Distribution of carbon nanotubes is continuous and meaningful and gradual changes of materials in the direction of thickness are in the form of volume fraction. Annular sector plate is placed on the Winkler-Pasternak two parameters elastic foundation. The motion equations of plate are derived using the Hamilton principle and the refined plate theory. These coupled differential equations are transformed to ordinary equations using the trigonometric series expansion of space variation functions and then are solved with the help of differential quadrature method. The obtained results are compared with the other researcher’s results and an excellent agreement can be observed between them. Finally, the effects of different geometric parameters, different distributions of carbon nanotubes in the thickness direction, elastic foundation, and also different boundary conditions on the natural frequencies are investigated.

Keywords: Functionally Graded Material, Carbon Nanotube, Free Vibration, Annular Sector Plates, Differential Quadrature Method, Elastic Foundation

۱- کارشناس ارشد: bpj.nejati@iau-arak.ac.ir
۲- کارشناس ارشد: sjd.jafari@iauh.ac.ir
۳- استاد (نویسنده پاسخگو): yas@razi.ac.ir
۴- دانشیار: f.barati@iauh.ac.ir

فهرست علائم انگلیسی

C_{ij}	ماتریس سختی الاستیک
d	قطر نانولوله‌های کربنی
E_c	مدول یانگ کامپوزیت‌های پلیمری تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی
E_{CNT}	مدول یانگ طولی نانولوله‌های کربنی
E_m	مدول یانگ طولی پلیمر
h	ضخامت ورق
h_0	ضخامت در $r=0$
$I_i (\mathrm{i}=1,2,3,4,5,7)$	ثوابت تعریف شده در رابطه (۱۹)
K_g	ضریب بستر الاستیک برشی
k_l	پارامتر مؤثر طول (رابطه ۱-۱)
k_o	فاکتور مؤثر جهت نانولوله‌های کربنی
k_w	پارامتر موج نانولوله‌های کربنی
K_w	ضریب بستر الاستیک وینکلر
l	طول نانولوله‌های کربنی
M	پارامتر هندسی
M_r	ممان خمشی
$M_{r\theta}$	ممان پیچشی
M_θ	ممان خمشی
m	عدد موج محیطی
$\mathrm{P_r}$	ممان خمشی
$P_{r\theta}$	ممان پیچشی
P_θ	ممان خمشی
q	پارامتر هندسی
Q_r	نیرو برشی
Q_θ	نیرو برشی
R_r	نیرو برشی
R_θ	نیرو برشی
T	انرژی جنبشی سیستم
t	زمان
U	میدان جابجایی در راستای r
U_1	انرژی پتانسیل سیستم
V	میدان جابجایی در راستای θ
V_{CNT}	کسر حجمی نانولوله‌های کربنی
V_m	کسر حجمی پلیمر
$\mathrm{V_{NT}^*}$	متغیر تعریف شده در رابطه (۸)
W	میدان جابجایی در راستای z
$\mathrm{w_{nt}}$	کسر جرمی نانولوله

فهرست علائم یونانی

β'	متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)
γ	متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)
ε_{ij}	ماتریس کرنش
$\eta=\frac{z}{h}$	متغیر بی‌بعد
ν	ضریب پواسون کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/پلی استیرن
ν_{CNT}	ضریب پواسون نانولوله کربنی
ν_m	ضریب پواسون پلیمر
δ	نماد تغییرات
ρ	چگالی کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/پلی استیرن
ρ_{CNT}	چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی
ρ_m	چگالی جرمی پلیمر خالص
σ_{ij}	ماتریس تنش
φ	متغیر تعریف شده در رابطه (۲-۱)
ψ_r	زاویه چرخش صفحه $r-z$
ψ_θ	زاویه چرخش صفحه $\theta-z$
Ω	فرکانس بی بعد شده

۱- مقدمه

مطالعه رفتار ورق‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف با توجه به گسترش استفاده از آن‌ها در صنایع مختلف از جمله سازه‌های ساختمانی، بال‌های هواپیماها، هوافضا و ... ضروری است. از طرفی، ساخت و تولید ورق‌ها از جنسی که ویژگی‌های منحصربه‌فردی داشته باشند امری اجتناب‌ناپذیر است. بدین منظور در سال ۱۸۹۴ مواد تابعی مدرج[1] برای اولین بار در ژاپن ساخته شد [۱] که از دیدگاه ترموالاستیک مطالعات گسترده‌ای بر روی آن‌ها انجام‌شده است [۲]. در دهه‌های اخیر

1- Functionally graded materials (FGM)

با افزایش چشمگیر تقاضا برای سازه‌هایی با مقاومت بالا در برابر حرارت، جذب انرژی و سبک، مطالعات زیادی بر روی رفتار مواد تابعی مدرج (مواد هدفمند) صورت گرفته است.

نی و ژونگ [۳] ارتعاشات سه‌بعدی آزاد و اجباری ورق‌های دایره‌ای هدفمند را تحت شرایط مرزی مختلف به‌صورت نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها فرکانس‌های ارتعاشی و پاسخ‌های دینامیکی ورق را به‌دست آوردند و نشان دادند که با افزایش اندیس خواص مواد، کمترین فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین در مسئله ارتعاش اجباری با نزدیک‌تر شدن فرکانس اجباری به فرکانس طبیعی، تغییر مکان‌ها و تنش‌ها افزایش می‌یابند.

شن [۴] برای اولین بار ایده استفاده نانولوله‌های کربن در مواد هدفمند را مطرح کرد. او در این مقاله خمش غیرخطی ورق‌های مستطیلی هدفمند کامپوزیتی که با نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده‌اند را بررسی کرد. خصوصیات نانولوله کربن وابسته به دما فرض شده و با استفاده از شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی به‌دست آمده‌اند. لیو و همکارانش [۵] در یک مطالعه جامع، به بررسی خواص مکانیکی مواد هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی پرداختند.

کی و همکارانش [۶] ارتعاشات غیرخطی یک تیر کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله کربن را بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم را به کمک تئوری مرتبه بالاتر با سینماتیک غیرخطی ون کارمن به‌دست آورده و نشان دادند که افزایش کسر حجمی نانولوله منجر به افزایش فرکانس‌های خطی و غیرخطی می‌شود. همچنین توزیع متقارن نانولوله منجر به فرکانس‌های بالاتری نسبت به توزیع نامتقارن و یا یکنواخت می‌گردد.

نجاتی و اسلام‌پناه [۷] ارتعاش و کمانش تیر یکسر گیردار از جنس مواد هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و تحت نیروی محوری را بررسی کردند. آن‌ها توزیع تصادفی را برای نانولوله‌ها در نظر گرفتند. با حل معادلات به‌دست‌آمده به روش مربعات تفاضلی، اثرات نحوه توزیع نانولوله و نیروی محوری بر روی فرکانس طبیعی موردبررسی قرار گرفت. همچنین نجاتی و همکاران [۸] اثرات پارامترهای مختلف ازجمله شرایط تکیه‌گاهی و ضخامت را بر روی ارتعاش آزاد ورقی گرد و دوبعدی از جنس مواد هدفمند مطالعه کردند.

ملاعلی پور [۹] معادلات حاکم بر خمش دینامیکی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با تغییرات پله‌ای ضخامت را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول استخراج و به‌کمک روش نیمه‌تحلیلی حل نمود. همچنین وی [۱۰]رفتار ورق‌های دایره‌ای و حلقوی با تکیه‌گاه‌های الاستیک تحت نیروهای غیریکنواخت عمودی و برشی را بررسی نمود.

ابراهیمی و مختاری [۱۱] رفتار ارتعاشی تیر مدرج تابعی دوار را براساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی کردند و معادلات حاکم را با روش عددی تبدیل دیفرانسیل حل کردند. آن‌ها نشان دادند که با تغییر شاخص جزء حجمی می‌توان مقادیر فرکانس طبیعی را به صورت دلخواه تغییر داد.

مهرآبادی و ابراهیمی [۱۲] ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج که توسط نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده را بررسی کردند. آن‌ها اثرات توزیع چینش نانولوله‌ها، خواص ماده تابعی مدرج و مشخصات هندسی ورق مطالع نمودند. همچنین فعلی و همکاران [۱۳] معادلات حاکم بر رفتار ورق تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت ضربه‌زننده کروی را استخراج کرده و به کمک روش عددی حل کردند. آن‌ها اثرات توزیع نانولوله‌ها را بررسی کردند.

مطالعات گسترده‌ای بر روی ارتعاش آزاد ورق‌ها بر روی بسترهای الاستیک و پلاستیک انجام‌شده است [۱۴-۱۶]. این در حالی است که مطالعات محدودی بر روی رفتار ورق‌های هدفمند بر روی بستر الاستیک انجام‌شده است.

لال و همکاران [۱۷] با مطالعه ارتعاش عرضی ورق‌های مستطیلی با ضخامت متغیر که بر روی بستر الاستیک وینکلر قرار گرفته‌اند، اثرات شرایط مرزی، نوع بستر و نحوه تغییر ضخامت بر روی فرکانس طبیعی را بررسی نمودند.

هانگ و همکاران [۱۸] با استفاده از تابع گرین معادله مشخصه ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مستقر بر بستر الاستیک غیریکنواخت را به‌دست آوردند. متسوناگا [۱۹] ارتعاشات و کمانش ورق ضخیم روی بستر الاستیک را با به‌دست آوردن مؤلفه‌های جابجایی به کمک بسط سری توانی، موردبررسی قراردادند. وی فرکانس طبیعی و مؤلفه‌های تنش کمانش را برای ورق مربعی روی بستر الاستیک به‌دست آورد. ملک‌زاده [۲۰] ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم مواد هدفمند بر روی بستر

الاستیک را به‌کمک تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و روش مربعات تفاضلی بررسی کرد.

موسوی و سعیدی [۲۱] معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی هدفمند را به کمک نظریه مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی استخراج کرده و با استفاده از روش مربعات تفاضلی معادلات حاکم را حل کردند. آن‌ها نشان دادند که وقتی از تئوری مرتبه پنجم استفاده می‌شود، نتایج بسیار نزدیک به نتایج به‌دست آمده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی می‌باشد. همچنین سعیدی و موسوی [۲۲] در مقاله‌ای دیگر ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی پیزوالکتریک را تحلیل کردند. آن‌ها اثرات توان ماده هدفمند پیزوالکتریک، نسبت ضخامت به طول مشخصه و اثر پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی را بررسی کردند.

فلاح و همکاران [۲۳] ارتعاش ورق مستطیلی هدفمند بر روی بستر الاستیک را با استفاده از روش کانتروویچ توسعه‌یافته[1] و با در نظر گرفتن مدل وینکلر و تئوری ورق میدلین موردمطالعه قراردادند. آن‌ها اثرات بستر الاستیک، شرایط مرزی و جنس مواد را بر روی فرکانس طبیعی برسی کردند. یاس و نراقی [۲۴] ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی هدفمند بر روی بستر الاستیک را با استفاده از روش تفاضل مربعات و براساس تئوری سه‌بعدی الاستیسیته بررسی نمودند. آنها اثرات پارامترهای مختلف هم‌چون هندسه ورق، شرایط مرزی و ضرایب الاستیک بستر را بر روی فرکانس طبیعی مطالعه و بررسی نمودند. لازم به‌ذکر است که درزمینه ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی هدفمند مطالعات زیاد انجام شده است [۲۵-۲۷].

استفاده از ورق‌های گرد متشکل از مواد پیشرفته و مواد هدفمند در صنایع هوافضا، هسته‌ای، شیمیایی و ... روزبه‌روز بیشتر می‌شود. از سوی دیگر محصولات گوناگون نانو فناوری، همچون نانو کامپوزیت‌ها، کاربردهای وسیعی در صنایع مختلف پیداکرده‌اند. نانو کامپوزیت‌ها دارای انواع مختلفی می‌باشند. یکی از مهم‌ترین انواع نانو کامپوزیت‌ها، نانو کامپوزیت پلیمری بوده که با نانولوله کربن تقویت‌شده‌اند. نانولوله کربن به‌خاطر خواص فوق‌العاده‌ی مکانیکی، الکتریکی و حرارتی که دارد تأثیر زیادی در بهبود خواص پلیمر می‌گذارد.

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق گرد قطاعی سوراخ‌دار هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده‌اند، بررسی‌شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی به‌صورت پیوسته و تغییرات تدریجی و هدفمند مواد در راستای ضخامت ورق، به‌صورت کسر حجمی و با توزیع‌های مختلف می‌باشد. ورق گرد قطاعی روی بستر الاستیک دو پارامتری قرار گرفته است. معادلات حرکت ورق با استفاده از تئوری بهبودیافته استخراج گردیده است. این معادلات یک سری معادلات دیفرانسیل درگیر هستند که حل دقیق آن‌ها بسیار مشکل است به‌همین دلیل از روش عددی مربعات تفاضلی برای حل این معادلات استفاده شده است. در این کار تأثیر بستر الاستیک و توزیع‌های تابعی مختلف از نانولوله کربنی در راستای ضخامت ورق گرد قطاعی و همچنین پارامترهای مختلف هندسی روی فرکانس‌های طبیعی سیستم موردبررسی قرارگرفته است.

۲- استخراج معادلات

در این بخش نحوه استخراج معادلات حاکم بر اساس تئوری بهبودیافته و بر اساس اصل همیلتون و به‌کمک تئوری بهبودیافته ارائه می‌گردد.

۲-۱- اعمال اثرات نانولوله‌ها در خواص مکانیکی

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، توزیع نانولوله‌ها تأثیر بسزایی در خواص مکانیکی مخصوصاً مدول یانگ دارد. با استفاده از قانون مخلوط‌ها، می‌توان مدول یانگ کامپوزیت‌های پلیمری تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (E_c) را به‌صورت زیر تخمین زد [۲۸, ۲۹]:

$$E_c = (k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m) V_{CNT} e^{\gamma V_{CNT}} + E_m \qquad (۱)$$

که در رابطه فوق، E_{CNT} و E_m به‌ترتیب مدول یانگ طولی نانولوله‌های کربنی و پلیمر موردنظر می‌باشند. همچنین V_{CNT} کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و k_l، k_o و k_w به‌ترتیب پارامتر مؤثر طول، فاکتور مؤثر جهت نانولوله‌های کربنی و پارامتر موج نانولوله‌های کربنی می‌باشند. k_l با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$k_l = 1 - \frac{\tanh\varphi}{\varphi} \qquad (۲-۱)$$

به‌طوری‌که:

1- extended Kantorovich method

$$\varphi = \frac{2l}{d}\sqrt{\frac{-2E_m}{E_{CNT}(1-\nu_m)\ln V_{CNT}}}$$
$$\gamma = \frac{\ln(\beta')}{\widehat{V}_{CNT}} \qquad (۲-۲)$$
$$\beta' = \frac{\widehat{E}_c - E_m}{(k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m)\widehat{V}_{CNT}}$$

در رابطه فوق، l و d به‌ترتیب طول و قطر نانولوله‌های کربنی و ν_m ضریب پواسون پلیمر می‌باشد. پارامترهای که با علامت $\wedge$ مشخص‌شده‌اند به‌صورت تجربی و از طریق تست کشش برای نانولوله‌های با درصد وزنی بالا تعیین می‌شوند.
چگالی (ρ) و ضریب پواسون (ν) کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی استیرن[۱] طبق قانون خطی مخلوط‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho = V_{CNT}\rho_{CNT} + V_m\rho_m$$
$$\nu = V_{CNT}\nu_{CNT} + V_m\nu_m \qquad (۳)$$

که، ρ_{CNT} و ρ_m به‌ترتیب چگالی جرمی نانولوله‌های کربنی و پلیمر خالص می‌باشند. V_{CNT} و V_m به‌ترتیب کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و کسر حجمی پلیمر خالص می‌باشند.
در این مقاله فرض شده که ماتریس پلی‌استیرن با نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده، به‌طوری‌که برای کسر حجمی آن‌ها به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

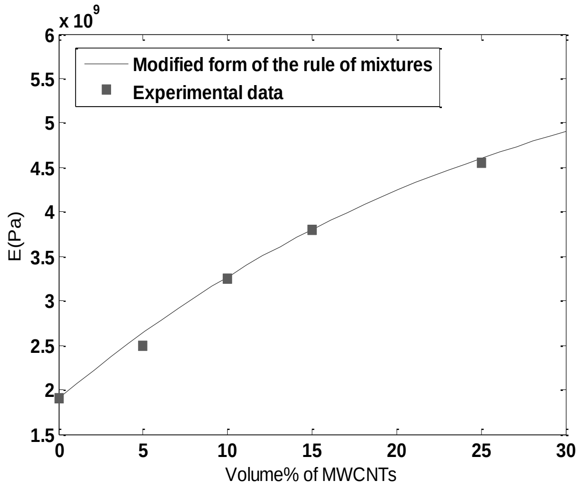
$$V_{CNT} + V_m = 1 \qquad (۴)$$

خواص مکانیکی پلی استیرن و نانولوله‌های کربنی خالص در جدول **۱** آورده شده است.

جدول (۱): خواص مکانیکی از پلی استیرن و نانولوله کربنی خالص [۲۸].

پلی‌استیرن	ν_m	$\rho_m(\mathrm{Kg/m^3})$		$E_m(GPa)$
	۰/۳۴	۱۰۵۰		۱/۹
نانولوله کربنی	ν_{CNT}	$\rho_{CNT}(\mathrm{Kg/m^3})$		$E_{CNT}(GPa)$
	۰/۲۸	۲۱۰۰		۹۰۰
ابعاد نانولوله‌های کربنی	$l(\mu m)$		$d(nm)$	
	۶۰		۲۵	
مقادیر استفاده‌شده	V_{CNT}	k_w	k_o	$E_c(GPa)$
	۰/۱۵	۰/۱	۰/۲	۳/۸

منحنی تغییرات مدول‌یانگ کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی بر اساس رابطه (۱) در شکل **۱** نشان داده‌شده و با داده‌های تجربی مرجع [۳۰] مقایسه شده است. همان‌طورکه این شکل نشان می‌دهد مطابقت خوبی بین نتایج تجربی و نتایج حاصل از رابطه (۱) وجود دارد.



شکل (۱): منحنی تغییرات مدول یانگ کامپوزیت‌های نانولوله کربنی/ پلی استیرن برحسب تغییرات کسر حجمی تغییرات و مقایسه بین داده‌های تجربی و نتایج رابطه (۱).

در این مقاله فرض شده است توزیع نانولوله‌های کربن در راستای ضخامت ورق گرد قطاعی سوراخ‌دار به‌صورت خطی باشد. ازاین‌رو چند تابع برای توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. توزیع V شکل نانولوله‌های کربن در راستای ضخامت که در این حالت از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$V_{CNT} = (1+\frac{2z}{h})V_{NT}^{*} \qquad (۵)$$

دو نوع مختلف از توزیع خطی X و O شکل از کسر حجمی نانولوله‌ها در راستای ضخامت که به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\text{X نوع} \qquad V_{CNT} = \frac{4|z|}{h}V_{NT}^{*}$$
$$(۶)$$
$$\text{O نوع} \qquad V_{CNT} = 4(\frac{1}{2}-\frac{|z|}{h})V_{NT}^{*}$$

توزیع یکنواخت نانولوله‌ها که تابع آن به‌صورت زیر است:

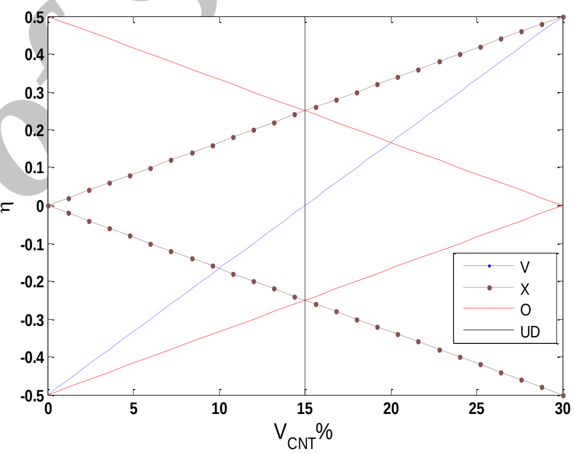
1- CNT/ Polystyrene (PS)

$$V_{CNT} = V^*_{NT} \qquad \text{نوع UD} \qquad (۷)$$

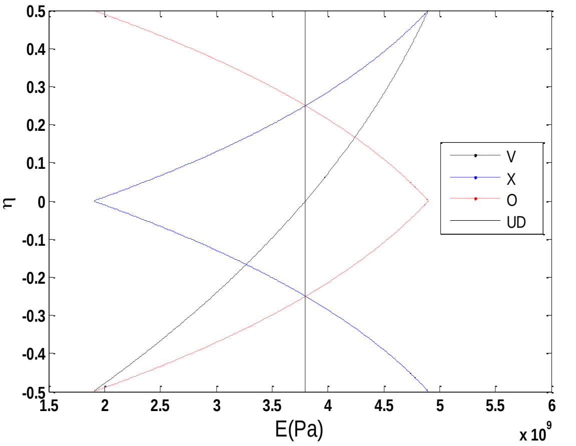
در روابط فوق h ضخامت ورق و V^*_{NT} بـه‌صـورت زیـر تعریـف می‌شود [۲۸]:

$$V^*_{NT} = \frac{w_{NT}}{w_{NT} + (\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}) - (\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m})w_{NT}} \qquad (۸)$$

که w_{NT}، ρ_{CNT} و ρ_m به‌ترتیب کسر جرمی نانولولـه، چگـالی جرمی نانولولـه‌هـای کربنـی و چگـالی جرمـی پلیمـر خـالص می‌باشند. با تعریف پارامتر بی‌بعـد $\eta = z/h$، تغییـرات کسـر حجمی نانولوله‌های کربن و همچنین مدول یانـگ در راسـتای ضخامت ورق گرد قطاعی و برای توزیع‌های مختلف بـه‌صـورت شکل‌های **۲** و **۳** و می‌باشد.



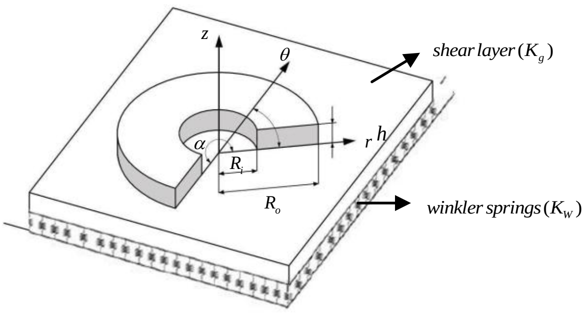
شکل (۲): تغییرات کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت به ازای توزیع مختلف.



شکل (۳): تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت به‌ازای توزیع مختلف از کسر حجمی نانولوله‌های کربنی.

۲-۲- معادلات حاکم با استفاده از تئوری بهبودیافته

در شکل **۴** شماتیکی از ورق گرد قطاعی سوراخ‌دار نشان داده‌شده است. در این شکل R_i شعاع داخلی، R_o شعاع خارجی، K_g ضریب بستر الاستیک برشی و K_w ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشند.



شکل (۴): ورق گرد قطاعی روی بستر الاستیک.

معادلات حاکم با استفاده از تئوری بهبودیافته به‌دست‌آمده‌اند. میدان جابجایی طبق تئوری بهبودیافته به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۳۱]:

$$\begin{aligned} U(r,\theta,z,t) &= u(r,\theta,t) - z\frac{\partial w_b(r,\theta,t)}{\partial r} + g(z)(\frac{\partial w_s(r,\theta,t)}{\partial r}) \\ V(r,\theta,z,t) &= v(r,\theta,t) - z\frac{\partial w_b(r,\theta,t)}{r\partial \theta} + g(z)(\frac{\partial w_s(r,\theta,t)}{r\partial \theta}) \\ W(r,\theta,z,t) &= w_b(r,\theta,t) + w_s(r,\theta,t) \end{aligned} \qquad (۹)$$

در رابطه فوق:

$$g(z) = \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}(\frac{z^3}{h^2}) \qquad (۱۰)$$

طبق تئوری تغییر شکل برشی بهبودیافته جابجایی عرضی w شامل دو مؤلفه خمشی w_b و برشی w_s می‌باشد که هر دو تابع (r,θ,t) می‌باشند.

رابطه تنش- کرنش در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

که در این رابطه، C_{ij} ماتریس سختی الاستیک، ε_{ij} کرنش و σ_{ij} تنش می‌باشند. ضرایب ماتریس الاستیک به‌صورت زیر

تعریف می‌شوند:

$$C_{11}=C_{22}=C_{33}=\frac{E(z)}{(1-\nu^2)}$$
$$C_{12}=C_{13}=C_{23}=\frac{E(z)\nu(z)}{(1-\nu(z)^2)} \quad (۱۲)$$
$$C_{44}=C_{55}=C_{66}=\frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

همچنین روابط کرنش- جابجایی در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r}\\
\varepsilon_\theta &= \frac{U}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}\\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial r}\\
\gamma_{\theta z} &= \frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{r\partial \theta}
\end{aligned} \quad (۱۳)$$

با جایگذاری رابطه (۹) در (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}-z\,\frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2}+g(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2}\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\left\{u+\frac{\partial v}{\partial \theta}-z\left(\frac{\partial w_b}{\partial r}+\frac{\partial^2 w_b}{r\partial \theta^2}\right)+ g(z)\left(\frac{\partial w_s}{\partial r}+\frac{\partial^2 w_s}{r\partial \theta^2}\right)\right\}\\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial u}{\partial \theta}-v+r\frac{\partial v}{\partial r}-2z\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial r\partial \theta}-\frac{\partial w_b}{r\partial \theta}\right) +2g(z)\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial r\partial \theta}-\frac{\partial w_s}{r\partial \theta}\right)\right\}\\
\gamma_{rz} &= (1+g'(z))\frac{\partial w_s}{\partial r}\\
\gamma_{\theta z} &= (1+g'(z))\frac{\partial w_s}{r\partial \theta}
\end{aligned} \quad (۱۴)$$

حال با توجه به اصل همیلتون می‌توان نوشت:

$$\int_0^t \delta T-\delta U+\delta U_f\,dt=0 \quad (۱۵)$$

که در آن، T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، U_f کار نیروی خارجی می‌باشد و همچنین δ نشان‌دهنده تغییرات می‌باشد. برای به‌دست آوردن δU می‌توان نوشت:

$$\delta U=\int_V(\sigma_r\delta\varepsilon_r+\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta+\sigma_{z\theta}\delta\gamma_{z\theta} +\sigma_{rz}\delta\gamma_{rz}+\sigma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta})dv \quad (۱۶)$$

با تعریف منتجه‌های تنش به‌صورت رابطه (۱۷) و با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۱۶) و انجام ساده‌سازی، رابطه (۱- الف) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}N_r\\M_r\\P_r\end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_r\begin{Bmatrix}1\\z\\g(z)\end{Bmatrix}dz\\
\begin{Bmatrix}N_\theta\\M_\theta\\P_\theta\end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\theta\begin{Bmatrix}1\\z\\g(z)\end{Bmatrix}dz,\\
\begin{Bmatrix}N_{r\theta}\\M_{r\theta}\\P_{r\theta}\end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{r\theta}\begin{Bmatrix}1\\z\\g(z)\end{Bmatrix}dz,\\
\begin{Bmatrix}Q_{rz}\\Q_{\theta z}\end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{rz}\\\sigma_{\theta z}\end{Bmatrix}(1+g'(z))dz
\end{aligned} \quad (۱۷)$$

که $M_r,M_\theta,P_r,P_\theta$ ممان‌های خمشی، $M_{r\theta},P_{r\theta}$ ممان‌های پیچشی و $Q_r,Q_\theta,R_r,R_\theta$ نیروهای برشی هستند.
با توجه به طولانی بودن، فرمول‌ها بخش ی از این فرمول‌ها در پیوست (الف) ارائه می‌گردد.

درنهایت با قرار دادن روابط (۱- الف) و (۲- الف) و (۳- الف) در رابطه (۱۵)، معادلات حرکت ورق گرد قطاعی سوراخ‌دار تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی برحسب منتجه‌های نیرو و ممان با استفاده از تئوری بهبودیافته به‌دست می‌آید:

$$\frac{N_r}{r}+\frac{\partial N_r}{\partial r}+\frac{\partial N_{r\theta}}{r\partial\theta}-\frac{N_\theta}{r}=I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^3 w_b}{\partial r\partial t^2}+I_4\frac{\partial^3 w_s}{\partial r\partial t^2} \quad (۱۸)$$

$$2\frac{N_{r\theta}}{r}+\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial N_\theta}{r\partial\theta}=I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^3 w_b}{r\partial\theta\partial t^2}+I_4\frac{\partial^3 w_s}{r\partial\theta\partial t^2} \quad (۱۹)$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 P_r}{\partial r^2}-\frac{2\partial P_r}{r\partial r}+\frac{\partial P_\theta}{r\partial r}-\frac{\partial^2 P_\theta}{r^2\partial\theta^2}+\frac{Q_{rz}}{r}+\frac{\partial Q_{rz}}{\partial r}\\
&+\frac{\partial Q_{\theta z}}{r\partial\theta}+\frac{\partial N_{\theta z}}{r\partial\theta}-2\frac{\partial^2 P_{r\theta}}{r\partial r\partial\theta}-2\frac{\partial P_{r\theta}}{r^2\partial\theta}+K_w(w_b+w_s)-\\
&K_g\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2}+\frac{\partial w_b}{r\partial r}+\frac{\partial w_s}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w_b}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 w_s}{r^2\partial\theta^2}\}=\\
&I_1\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\}-I_4\{\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial t^2}+\frac{\partial^3 v}{r\partial\theta\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{r\partial t^2}\}+\\
&I_5\{\frac{\partial^4 w_b}{\partial r^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_b}{r^2\partial\theta^2\partial t^2}+\frac{\partial^3 w_b}{r\partial r\partial t^2}\}-\\
&I_6\{\frac{\partial^4 w_s}{\partial r^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_s}{r^2\partial\theta^2\partial t^2}+\frac{\partial^3 w_s}{r\partial r\partial t^2}\}
\end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2}+\frac{2\partial M_r}{r\partial r}-\frac{\partial M_\theta}{r\partial r}+\frac{\partial^2 M_\theta}{r^2\partial\theta^2}+\\
&2\frac{\partial^2 M_{r\theta}}{r\partial r\partial\theta}+2\frac{\partial M_{r\theta}}{r^2\partial\theta}+K_w(w_b+w_s)-\\
&K_g\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial r^2}+\frac{\partial w_b}{r\partial r}+\frac{\partial w_s}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w_b}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 w_s}{r^2\partial\theta^2}\}\\
&=I_1\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}\}+I_2\{\frac{\partial^3 u}{r\partial r\partial t^2}+\frac{\partial^3 v}{r\partial\theta\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{r\partial t^2}\}-\\
&I_3\{\frac{\partial^4 w_b}{\partial r^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_b}{r^2\partial\theta^2\partial t^2}+\frac{\partial^3 w_b}{r\partial r\partial t^2}\}+\\
&I_5\{\frac{\partial^4 w_s}{\partial r^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_s}{r^2\partial\theta^2\partial t^2}+\frac{\partial^3 w_s}{r\partial r\partial t^2}\}
\end{aligned}
\qquad (۲۱)
$$

با قرار دادن منتجه‌های نیرو و ممان برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی و جای‌گذاری در معادلات حرکت برحسب منتجه‌ها و درنهایت قرار دادن روابط (۹) در این روابط، معادلات حرکت برحسب مؤلفه‌های جابجایی برای ورق گرد قطاعی تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از تئوری بهبودیافته، استخراج می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
&U(r,\theta,t)=u(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
&V(r,\theta,t)=v(r)\cos(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
&W_s(r,\theta,t)=w_s(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
&W_b(r,\theta,t)=w_b(r)\sin(\beta_m\theta)e^{i\omega t}\\
&\beta_m=m\pi/\Theta
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

که $m=۰،۱،۲،...\infty$ در روابط بالا عدد موج محیطی می‌باشد.

۳- حل معادلات

روش‌های تحلیلی، نیمه‌تحلیلی و عددی بسیاری برای بررسی مسائل ارتعاشاتی و کمانش وجود دارد [۳۲-۳۶]. در این مقاله، به‌دلیل دشواری در حل معادلات کوپل شده از روش مربعات تفاضلی استفاده‌شده است. در ادامه نحوه اعمال این روش در معادلات آورده شده است.

۳-۱- اعمال روش مربعات تفاضلی

روش مربعات تفاضلی اولین بار توسط بلمن و کاستی در سال ۱۹۷۱ در مقاله‌ای ارائه گردید [۳۷] و بعدها توسط برت و مالیک برای حل معادلات مکانیک جامدات استفاده شد[۳۸]. از این روش می‌توان در حل معادلات مقدار مرزی و مقدار اولیه با طبیعت خطی و غیرخطی استفاده نمود (برای مطالعه جزئیات بیشتر به مرجع [۳۹] مراجعه شود).

با اعمال این روش به معادلات حرکت، آن‌ها را به فرم روش مربعات تفاضلی می‌نویسیم (با توجه به طولانی بودن روابط، این روابط در پیوست (ب) آورده شده است).

۴- نتایج و بحث

در این بخش، ابتدا نتایج به‌دست‌آمده به‌کمک مقایسه با نتایج سایر تحقیقات صحه‌گذاری می‌گردد. سپس اثرات پارامترهای مختلف هندسی، توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، اثر بستر الاستیک و همچنین شرایط تکیه‌گاهی مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است.

۴-۱- بررسی صحت نتایج

هدف اصلی این مقاله بررسی ارتعاش آزاد ورق دایره‌ای سوراخ‌دار تابعی هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند، می‌باشد. در ابتدا لازم است تا نتایج به‌دست‌آمده با نتایج سایر تحقیقات مقایسه شود تا اعتبار و صحت نتایج به‌دست‌آمده تائید شود. بدین منظور از تابع زیر برای تغییرات خواص استفاده شده است [۴۰]:

$$
\begin{aligned}
&C_{ij}(z)=C_{ij}^m e^{(\beta z/h)}\\
&\rho(z)=\rho^m e^{(\beta z/h)}
\end{aligned}
\qquad (۲۵)
$$

در جدول‌های **۲** و **۳** فرکانس طبیعی بی‌بعد اول به‌ترتیب برای حالت‌های گیردار-گیردار و گیردار- ساده به‌دست‌آمده و با نتایج مرجع [۲۴] مقایسه شده است. در این جدول‌ها $R_i=۰/۲\,m$، $R_o=۱\,m$ و $\beta=۱$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که نتایج این جدول‌ها نشان می‌دهد، مطابقت مناسبی بین داده‌های کار حاضر و نتایج مرجع [۲۴] وجود دارد. لازم به‌ذکر است تئوری استفاده‌شده در مرجع [۲۴] تئوری الاستیسیته سه‌بعدی می‌باشد و از روش عددی مربعات تفاضلی برای حل معادلات استفاده شده است.

جدول (۲): مقادیر فرکانس طبیعی اول به‌ازای ضخامت، K_W و K_g مختلف برای ورق گرد گیردار- گیردار.

h	K_W	مرجع	$K_g=۰$	$K_g=۱۰$	$K_g=۱۰۰$
۰/۱	۰	کار حاضر	۳۰/۴۷۷۰	۳۱/۹۸۸۳	۴۲/۹۶۵۸
		[۲۴]	۳۰/۴۷۷۱	۳۱/۹۹۴۴	۴۲/۹۷۳۱
	۱۰	کار حاضر	۳۰/۵۶۸۱	۳۲/۰۷۱۵	۴۳/۰۲۲۱
		[۲۴]	۳۰/۵۶۸۸	۳۲/۰۸۵۴	۴۳/۰۳۶۱
	۱۰۰	کار حاضر	۳۸/۶۵۱۷	۳۹/۸۵۸۸	۴۹/۰۶۷۵
		[۲۴]	۳۸/۶۵۷۷	۳۹/۸۶۳۱	۴۹/۰۷۸۸
۰/۲	۰	کار حاضر	۲۴/۴۰۲۰	۲۶/۰۳۹۱	۳۶/۹۸۹۳
		[۲۴]	۲۴/۴۰۲۲	۲۶/۰۴۱۱	۳۶/۹۹۸۱
	۱۰	کار حاضر	۲۴/۵۱۵۹	۲۶/۱۳۸۰	۳۷/۰۵۷۸
		[۲۴]	۲۴/۵۱۶۱	۲۶/۱۴۳۲	۳۷/۰۶۲۲
	۱۰۰	کار حاضر	۳۳/۵۳۰۸	۳۴/۶۵۹۱	۴۲/۹۳۹۹
		[۲۴]	۳۳/۵۳۱۴	۳۴/۶۶۰۹	۴۲/۹۴۳۳

جدول (۳): مقادیر فرکانس طبیعی اول به‌ازای ضخامت، K_w و K_g مختلف برای ورق گرد گیردار- ساده.

h	K_W	مرجع	$K_g=۰$	$K_g=۱۰$	$K_g=۱۰۰$
۰/۱	۰	کار حاضر	۲۴/۴۹۰۰	۲۶/۲۷۶۴	۳۸/۵۶۸۹
		[۲۴]	۲۴/۴۹۱۱	۲۶/۲۸۵۹	۳۸/۵۷۱۱
	۱۰	کار حاضر	۲۴/۶۰۶۲	۲۶/۳۸۳۸	۳۸/۶۳۵۶
		[۲۴]	۲۴/۶۰۶۸	۲۶/۳۹۴۱	۳۸/۶۴۳۷
	۱۰۰	کار حاضر	۳۴/۱۳۳۹	۳۵/۴۳۰۹	۴۵/۲۵۱۰
		[۲۴]	۳۴/۱۳۴۹	۳۵/۴۴۱۹	۴۵/۲۷۳۱
۰/۲	۰	کار حاضر	۲۱/۰۱۰۱	۲۲/۸۷۱۹	۳۴/۷۴۱۹
		[۲۴]	۲۱/۰۱۰۹	۲۲/۸۸۱۱	۳۴/۷۵۲۱
	۱۰	کار حاضر	۲۱/۱۳۵۲	۲۲/۹۸۳۹	۳۴/۸۱۰۵
		[۲۴]	۲۱/۱۳۶۹	۲۲/۹۹۷۲	۳۴/۸۲۱۸
	۱۰۰	کار حاضر	۳۱/۰۳۷۸	۳۲/۲۳۹۸	۴۰/۹۲۱۲
		[۲۴]	۳۱/۰۳۹۸	۳۲/۲۴۵۹	۴۰/۹۴۰۹

۴-۲- بررسی همگرایی

برای بررسی همگرایی نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از روش مربعات تفاضلی، به‌ازای تعداد گره‌های مختلف (N_r) یعنی ۵، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۷، ۱۹ و ۲۱ شرایط تکیه‌گاهی: گیردار- گیردار (C-C)، ساده-ساده (S-S)، گیردار- ساده (S-C) و همچنین اعداد موج محیطی $m=۱،۲،۳$ برای توزیع V شکل از نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، نتایج در جدول ۴ آورده شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد گره‌ها نرخ همگرایی افزایش‌یافته و به‌ازای تعداد گره‌های بالای ۱۹ نتایج همگرایی حاصل‌شده است.

۴-۳- بررسی اثرات تکیه‌گاهی، عدد موج طبیعی و فرکانس طبیعی بی‌بعد شده

در ادامه به بررسی تأثیر نانولوله‌های کربنی و پارامترهای هندسی پرداخته‌شده است. در جداول زیر از رابطه بی‌بعد $\Omega=\omega R_o\sqrt{2(1+\nu_m)\rho_m/E_m}$ که در آن برای فرکانس طبیعی استفاده شده است.

در جدول‌های **۵-۷** چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول به‌ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده، به‌ازای اعداد موج مختلف برای توزیع‌های مختلف از تغییرات تابعی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق گردآورده شده است. همان‌طور که در این جدول‌ها مشاهده می‌شود با افزایش عدد موج محیطی فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش‌یافته و همچنین بیشترین مقادیر فرکانس مربوط به توزیع X و کمترین مقادیر مربوط به توزیع O می‌باشد. توزیع UD دارای مقادیر فرکانس طبیعی بالاتری نسبت به توزیع V می‌باشد.

جدول (۴): همگرایی فرکانس طبیعی اول به‌ازای اعداد موج و شرایط مرزی و تعداد گره مختلف، برای توزیع V و $R_i/R_o=۰/۲$، $h_o/R_o=۰/۲$

شرایط تکیه‌گاهی	عدد موج	N_r: ۵	۲۱	۱۱	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
گیردار- ساده	۱	۲/۷۶۴۱	۲/۷۶۶۲	۲/۷۶۹۰	۲/۷۶۹۷	۲/۷۷۰۷	۲/۷۸۰۲	۲/۷۸۰۲
	۲	۲/۸۵۵۴	۲/۸۷۸۶	۲/۸۸۳۲	۲/۸۸۴۲	۲/۸۸۵۲	۲/۸۹۴۹	۲/۸۹۴۹
	۳	۳/۰۹۱۱	۳/۱۳۹۶	۳/۱۴۷۲	۳/۱۴۸۷	۳/۱۴۹۹	۳/۱۶۰۱	۳/۱۶۰۱
ساده- ساده	۱	۱/۹۱۸۶	۱/۹۶۵۸	۱/۹۶۵۳	۱/۹۶۵۴	۱/۹۶۵۶	۱/۹۶۷۷	۱/۹۶۷۷
	۲	۲/۰۵۱۰	۲/۱۱۱۶	۲/۱۰۹۰	۲/۱۰۸۸	۲/۱۰۹۰	۲/۱۱۱۵	۲/۱۱۱۵
	۳	۲/۳۵۰۵	۲/۴۲۲۳	۲/۴۱۸۶	۲/۴۱۸۱	۲/۴۱۸۴	۲/۴۲۱۵	۲/۴۲۱۵
گیردار- گیردار	۱	۳/۰۹۵۱	۳/۱۲۴۲	۲/۱۳۰۱	۳/۱۳۰۵	۳/۱۳۰۵	۳/۱۳۰۵	۳/۱۳۰۵
	۲	۳/۲۰۵۴	۳/۲۳۰۵	۳/۲۳۴۷	۳/۲۳۴۳	۳/۲۳۴۳	۳/۲۳۴۲	۳/۲۳۴۲
	۳	۳/۴۳۷۱	۳/۴۵۰۷	۳/۴۵۳۳	۳/۴۵۲۳	۳/۴۵۲۱	۳/۴۵۱۹	۳/۴۵۱۹

جدول (۵): مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول به‌ازای توزیع مختلف از نانولوله برای ورق گرد گیردار- گیردار $R_i / R_o = ۰/۲$ و $h_o / R_o = ۰/۲$.

نحوه	عدد موج	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
V	۱	۳/۱۳۰۵	۶/۹۶۵۴	۱۱/۵۷۰۹	۱۶/۵۷۹۰
	۲	۳/۲۳۴۲	۷/۱۳۵۴	۱۱/۷۳۶۰	۱۶/۷۲۷۱
	۳	۳/۴۵۱۹	۷/۴۲۵۲	۱۲/۰۱۱۷	۱۶/۹۷۲۸
X	۱	۴/۱۰۴۲	۹/۳۹۴۱	۱۵/۶۹۴۰	۲۲/۵۴۴۲
	۲	۴/۴۱۱۷	۹/۸۳۹۶	۱۶/۰۹۷۴	۲۲/۸۶۹۸
	۳	۴/۸۹۲۷	۱۰/۵۱۸۸	۱۶/۷۳۴۹	۲۳/۴۰۰۵
O	۱	۳/۰۵۵۰	۶/۸۸۷۷	۱۱/۴۷۹۷	۱۶/۴۷۴۸
	۲	۳/۱۵۰۲	۷/۰۴۵۲	۱۱/۶۳۷۲	۱۶/۶۱۹۶
	۳	۳/۳۵۲۲	۷/۳۱۶۹	۱۱/۹۰۱۸	۱۶/۸۶۰۵
UD	۱	۳/۲۸۳۵	۷/۲۷۲۰	۱۲/۰۷۲۵	۱۷/۲۹۰۴
	۲	۳/۳۹۶۴	۷/۴۵۵۳	۱۲/۲۴۷۵	۱۷/۴۴۵۲
	۳	۳/۶۳۱۵	۷/۷۶۵۹	۱۲/۵۳۹۴	۱۷/۷۰۱۸

جدول (۶): مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول به‌ازای توزیع مختلف از نانولوله برای ورق گرد ساده- ساده $R_i / R_o = ۰/۲$ و $h_o / R_o = ۰/۲$.

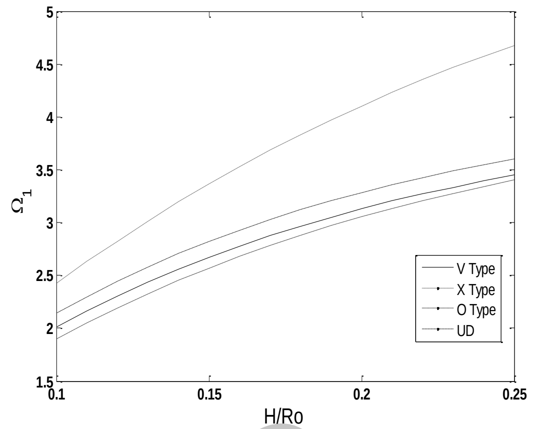
نحوه توزیع	عدد موج	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
V	۱	۱/۹۶۷۷	۶/۱۵۱۵	۱۱/۶۲۸۹	۱۳/۳۲۱۰
	۲	۲/۱۱۱۵	۶/۳۱۶۶	۱۱/۸۲۶۰	۱۳/۲۹۲۹
	۳	۲/۴۲۱۵	۶/۶۲۳۹	۱۲/۲۰۹۲	۱۳/۲۰۸۶
X	۱	۲/۲۳۰۳	۷/۴۳۸۱	۱۴/۲۰۷۸	۲۱/۶۴۷۷
	۲	۲/۷۸۹۸	۸/۰۱۱۱	۱۴/۶۴۹۵	۲۱/۹۶۲۸
	۳	۳/۵۱۱۵	۸/۸۶۰۷	۱۵/۳۵۱۹	۲۲/۴۷۷۸
O	۱	۱/۸۵۳۳	۵/۹۰۰۴	۱۰/۹۶۱۷	۱۶/۳۰۹۱
	۲	۱/۹۹۳۰	۶/۰۶۳۵	۱۱/۱۰۷۷	۱۶/۴۳۰۵
	۳	۲/۲۸۹۲	۶/۳۶۵۵	۱۱/۳۶۶۳	۱۶/۶۴۰۷
UD	۱	۲/۱۰۲۱	۶/۵۱۸۲	۲۲/۳۶۶۵	۲۲/۸۵۷۵
	۲	۲/۲۵۵۴	۶/۶۹۳۰	۲۲/۵۹۹۶	۲۲/۸۷۶۶
	۳	۲/۵۸۶۶	۷/۰۱۷۴	۲۳/۵۳۲۰	۲۵/۲۵۸۰

جدول (۷): مقادیر چهار فرکانس طبیعی اول به‌ازای توزیع مختلف از نانولوله برای ورق گرد گیردار- ساده $R_i / R_o = ۰/۲$ و $h_o / R_o = ۰/۲$.

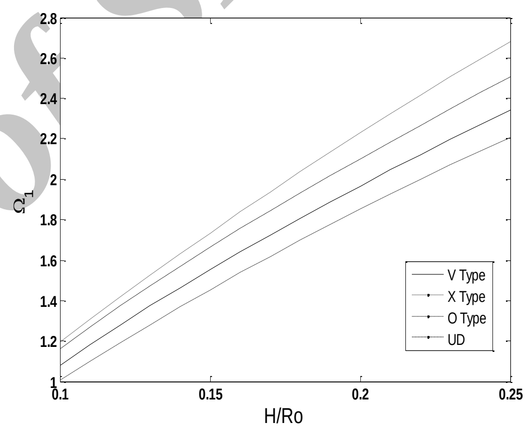
نحوه توزیع	عدد موج	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
V	۱	۲/۷۸۰۲	۶/۶۹۷۲	۱۱/۶۸۴۲	۱۶/۰۲۹۸
	۲	۲/۸۹۴۹	۶/۸۴۶۵	۱۱/۸۳۴۰	۱۶/۰۷۵۵
	۳	۳/۱۶۰۱	۷/۱۲۱۶	۱۲/۰۹۵۲	۱۶/۲۰۰۲
X	۱	۳/۱۹۰۱	۸/۵۲۱۲	۱۵/۱۳۳۰	۲۲/۰۴۷۵
	۲	۳/۷۱۶۳	۹/۰۴۷۲	۱۵/۵۳۹۶	۲۲/۳۴۰۴
	۳	۴/۴۲۰۰	۹/۸۴۶۱	۱۶/۱۹۰۰	۲۲/۸۲۲۰
O	۱	۲/۶۵۹۶	۶/۵۷۲۰	۱۱/۳۸۶۲	۱۶/۳۸۱۰
	۲	۲/۷۷۴۹	۶/۷۲۰۱	۱۱/۵۲۲۲	۱۶/۴۹۵۴
	۳	۳/۰۳۳۷	۶/۹۹۲۲	۱۱/۷۶۳۳	۱۶/۶۹۴۵
UD	۱	۲/۹۴۳۷	۷/۰۱۱۸	۱۲/۳۳۴۰	۱۴/۸۶۹۱
	۲	۳/۰۶۴۴	۷/۱۶۸۹	۱۲/۵۱۵۷	۱۴/۹۵۹۲
	۳	۳/۳۴۵۱	۷/۴۵۸۲	۱۲/۸۲۴۹	۱۵/۱۳۲۷

در شکل‌های **۷-۵** تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، $R_i / R_o = ۰/۲$ و $m = ۱$ به‌ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده نشان داده شده است. مطابق این شکل‌ها، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش یافته است. این نتیجه برای تمامی شرایط تکیه‌گاهی صادق است. بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی مربوط به توزیع X و کمترین مقادیر مربوط به توزیع O بوده و توزیع UD دارای مقادیر فرکانس طبیعی بیشتری نسبت به توزیع V می‌باشد.

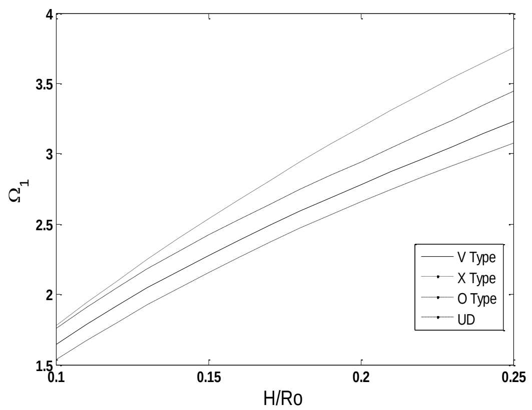
تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق گرد و به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، $h / R_o = ۰/۲$ و $m = ۱$ به‌ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده در شکل‌های **۱۱-۸** نشان داده‌شده است. همان‌طورکه از این شکل‌ها مشخص است، با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد. لازم به‌ذکر است، این نتیجه برای تمامی شرایط تکیه‌گاهی صادق است. همچنین، در شرایط توزیع یکسان، فرکانس طبیعی بی‌بعد در حالت گیردار-گیردار از دو حالت دیگر بیشتر است.



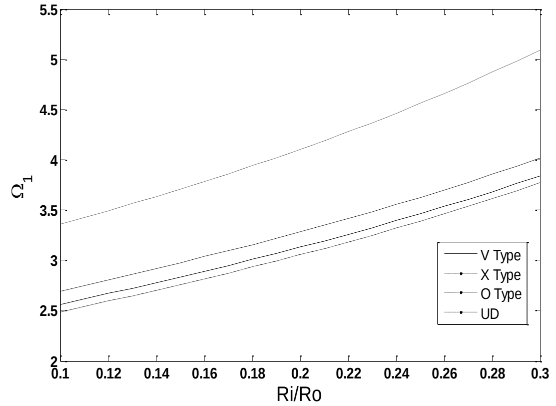
شکل (۵): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار.



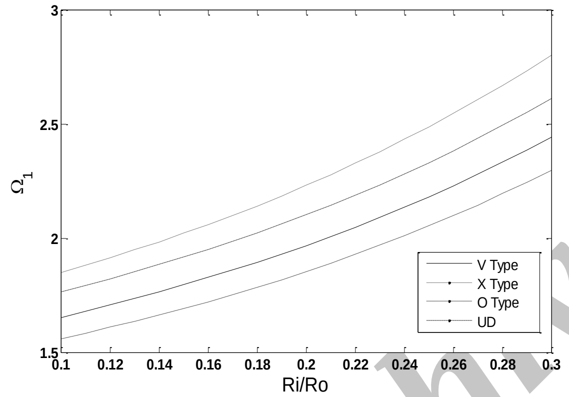
شکل (۶): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده.



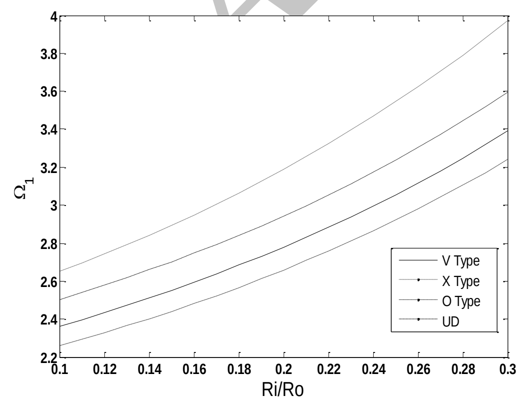
شکل (۷): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی گیردار- ساده.



شکل (۸): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار.



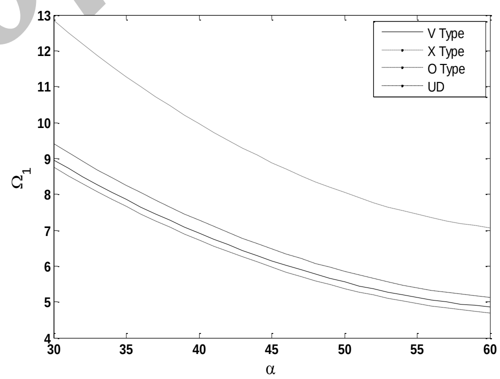
شکل (۹): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده.



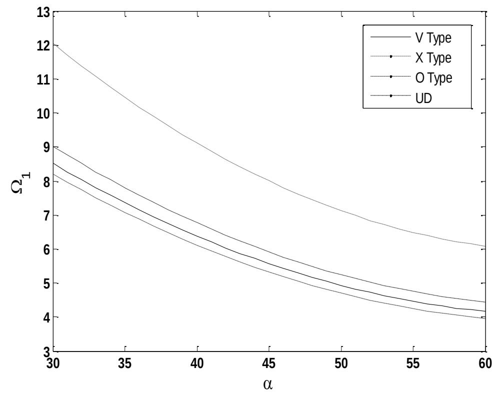
شکل (۱۰): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق گرد به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی گیردار- ساده.

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب زاویه قطاع ورق به‌ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، $R_i / R_o = ۰/۲$، $h / R_o = .۰/۲$ و $m = ۱$ برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده و گیردار- ساده به‌ترتیب در شکل‌های **۱۳-۱۱** نشان داده شده است. مطابق این شکل‌ها، برای تمامی شرایط تکیه‌گاهی با افزایش زاویه قطاع ورق فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

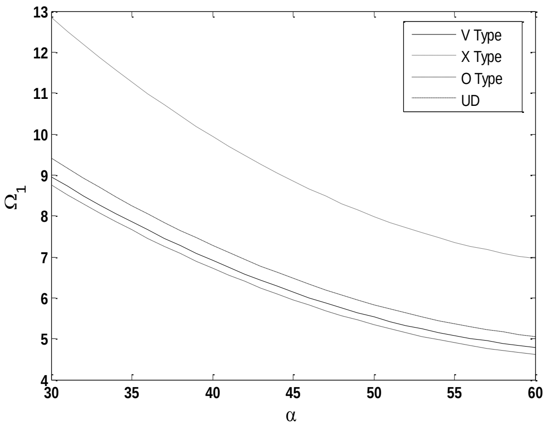
تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول ورق گرد برحسب ضریب بستر الاستیک K_W، به‌ازای مقادیر مختلف K_G، شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار و برای توزیع‌های X،V، O و UD نانولوله‌های کربنی به‌ترتیب در شکل‌های **۱۷-۱۴** نشان داده‌شده است. این شکل‌ها برای مقادیر $R_i / R_o = ۰/۲$، $h / R_o = ۰/۲$ و $m = ۱$ رسم شده‌اند. مطابق این شکل‌ها، برای کلیه توزیع‌های مختلف، با افزایش K_G و K_W فرکانس طبیعی بی‌بعد اول افزایش می‌یابد ولی به‌ازای $K_W>۱۰^۶$ و $K_G>۱۰^۳$ تغییراتی در مقادیر فرکانس مشاهده نمی‌شود و نتایج برای مقادیر مختلف K_G و K_W برابر و ثابت می‌باشد.



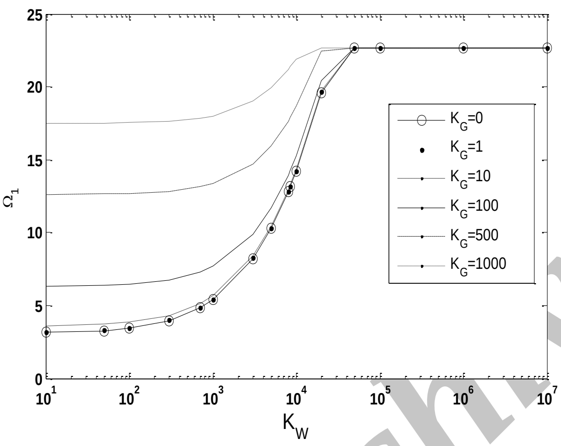
شکل (۱۱): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب زاویه قطاع ورق به‌ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار.



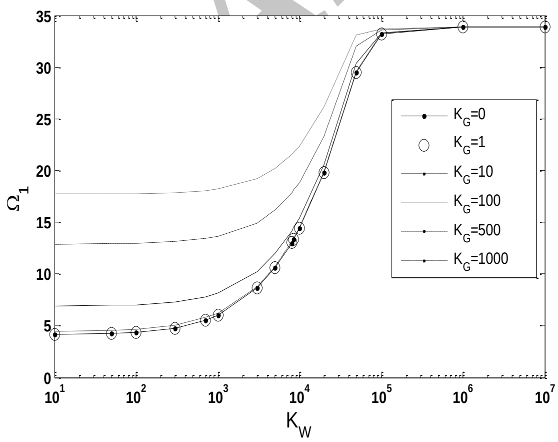
شکل (۱۲): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب زاویه قطاع ورق به‌ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده.



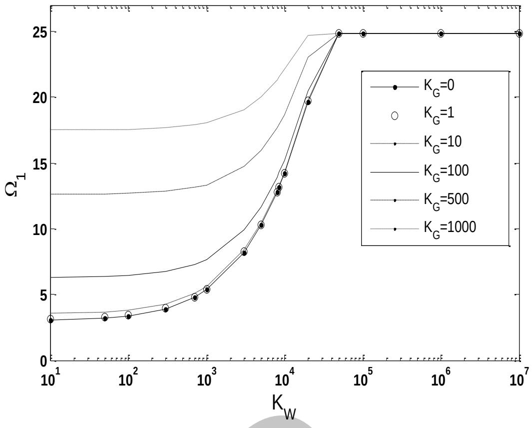
شکل (۱۳): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برحسب زاویه قطاع ورق به‌ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی، شرایط تکیه‌گاهی گیردار-ساده.



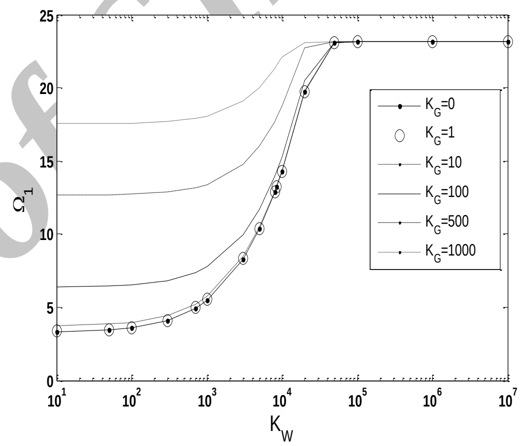
شکل (۱۴): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول ورق گرد برحسب ضریب بستر الاستیک K_w به‌ازای توزیع V از نانولوله‌های کربنی.



شکل (۱۵): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول ورق گرد برحسب ضریب بستر الاستیک K_w به‌ازای توزیع X از نانولوله‌های کربنی.



شکل (۱۶): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول ورق گرد برحسب ضریب بستر الاستیک K_w به‌ازای توزیع O از نانولوله‌های کربنی.



شکل (۱۷): تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول ورق گرد برحسب ضریب بستر الاستیک K_w به‌ازای توزیع UD از نانولوله‌های کربنی.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی تأثیر توزیع نانولوله‌های کربنی به‌صورت تابعی و پیوسته روی فرکانس‌های طبیعی ورق گرد قطاعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی پرداخته شده است. توزیع‌های مختلف از نانولوله‌ها مورد بررسی قرار گرفته و با بررسی نتایج مشاهده شد بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع X و کمترین آن مربوط به توزیع O می‌باشد. همچنین مقادیر فرکانس به‌ازای توزیع UD از مقادیر فرکانس طبیعی به‌ازای توزیع V بیشتر می‌باشد. پارامترهای هندسی مختلف ازجمله نسبت ضخامت به شعاع خارجی، شعاع داخلی به شعاع خارجی، زاویه قطاع ورق گرد و همچنین ضرایب بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفتند. در این کار شرایط تکیه‌گاهی مختلف گیردار-گیردار، گیردار-ساده و ساده-ساده در شعاع داخلی و خارجی ورق گرد در نظر گرفته شده و مشاهده شد بیشترین مقادیر فرکانسی مربوط به شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار و کمترین مقادیر مربوط به ساده- ساده می‌باشد.

۶- مراجع

1. Rao, S.S. and Sunar, M.“Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey”, App. Mech. Rev. Vol. 47, No. 4, pp. 113-123, 1994.
2. Zhong, Z. and Shang, E.T. “Three-Dimensional Exact Analysis of a Simply Supported Functionally Gradient Piezoelectric Plate”, Int. J. Sol. Stru.Vol. 40, No. 20, pp. 5335-5352, 2003.
3. Nie, G.J. and Zhong, Z.“Semi-Analytical Solution for Three-Dimensional Vibration of Functionally Graded Circular Plates”, Com. Meth. App. Mech. Eng. Vol. 196, No's. 49–52, pp. 4901-4910, 2007.
4. Han, Y. and Elliott, J. “Molecular Dynamics Simulations of The Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites”, Comput. Mat. Sci. Vol. 39, No. 2, pp. 315-323, 2007.
5. Liew, K.M., Lei, Z.X., and Zhang, L.W.“Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites: A Review”, Compos. Stru. Vol. 120, pp. 90-97, 2015.
6. Ke, L. L., Yang, J. and Kitipornchai, S.“Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beams”, Compos. Stru. Vol. 92, No. 3, pp. 676-683, 2010.
7. Nejati, M., Eslampanah, A., and Najafizadeh, M. “Buckling and Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Beam Under Axial Load”, Int. J. App. Mech. Vol. 8, No. 1, pp. 165-178, 2016.
8. Nejati, M., Mohsenimonfared, H., and Asanjarani, A. “Free Vibration Analysis of 2D Functionally Graded Annular Plate Considering the Effect of Material Composition via 2D Differential Quadrature Method”, Mech. Adv. Compos. Stru. Vol. 2, No. 2, pp. 95-111, 2015.
9. Molla-Alipour, M.“ Dynamic Behavior Analysis of FG Circular and Annular Plates with Stepped Variations of Thickness under Various Load”, Modares Mech. Eng. Vol. 16, No. 7, pp. 251-260, 2016.
10. Molla-Alipour, M. “Closed-Form Solution of Circular and Annular Plateswith Elastic Boundary Conditions under Non-Uniform Normal and Shear Loads”, Modares Mech. Eng. Vol. 16, No. 6, pp. 29-40, 2016.

11. ebrahimi, f.,"Free Vibration Analysis Of Thick Functionally Graded Rotating Beam By Differential Transform Method", Aero. Mech. J. Vol.12, No.4, pp. 49-61, 2017.

12. Jafari Mehrabadi, s.,"Free Vibration Analysis of FGM Plate Reinforced with Single Wall Carbon Nanotubes Using 3-D Elasticity Theory", Aero. Mech. J. Vol.11, No.4, pp. 1-14, 2015.

13. Feli, S., L. Karami and S.S. JAFARI,"Analytical Modeling of Low Velocity Impact on Carbon Nanotube-Reinforced Composite (CNTRC) Plates", Mech. Adv. Mat. Stru. Vol., pp. 1-13, 2017.

14. Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H. Carnicer, R., and Sanzi, H.C. "Free Vibrations of a Solid Circular Plate of Linearly Varying Thickness and Attached to a Winkler Foundation", J. Sou. Vib. Vol. 144, No. 1, pp. 149-161, 1991.

15. Ju, F., Lee, H.P., and Lee, K.H. "Free Vibration of Plates with Stepped Variations in Thickness on Non-Homogeneous Elastic Foundations", J. of Sou. Vib. Vol. 183, No. 3, pp. 533-545, 1995.

16. Gupta, U.S., Ansari, A.H. and Sharma, S. "Buckling and Vibration of Polar Orthotropic Circular Plate Resting on Winkler Foundation", J. Sou. Vib. Vol. 297, No's. 3–5, pp. 457-476, 2006.

17. Lal, R., Gupta, U.S., and Reena, "Quintic Splines In The Study of Transverse Vibrations of Non-Uniform Orthotropic Rectangular Plates", J. Sou. Vib. Vol. 207, No. 1, pp. 1-13, 1997.

18. Huang, M., Sakiyama, T., Matsuda, H., and Morita, C. "Free Vibration Analysis of Stepped Rectangular Plates Resting on Non-Homogeneous Elastic Foundations", Eng. Analys. Bound. Elem. Vol. 50, pp. 180-187, 2015.

19. Matsunaga, H.,"Vibration and Stability of Thick Plates on Elastic Foundations", J. Eng. Mech. Vol.126, No.1, pp. 27-34, 2000.

20. Malekzadeh, P.,"Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations", Compos. Stru. Vol. 89, No. 3, pp. 367-373, 2009.

21. mousavi, Z. and A.R. Saidi,"Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Based on The Higher-Order Shear and Normal Deformable", Aero. Mech. J. Vol.12, No.1, pp. 1-12, 2016.

22. Saidi, A.R. and Z. mousavi,"Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Piezoelectric Rectangular Plates in Closed Circuit Condition", Aero. Mech. J. Vol.12, No.1, pp. 67-78, 2016.

23. Fallah, A., M.M. Aghdam and Kargarnovin, M.H. "Free Vibration Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundation Using the Extended Kantorovich Method", Arch. App. Mech. Vol. 83, No. 2, pp. 177-191, 2013.

24. Yas, M.H. and Aragh, B.S."Free Vibration Analysis of Continuous Grading Fiber Reinforced Plates on Elastic Foundation", Int. J. Eng. Sci. Vol. 48, No. 12, pp. 1881-1895, 2010.

25. Malekzadeh, P. and Karami, G. "Vibration of Non-Uniform Thick Plates on Elastic Foundation by Differential Quadrature Method", Eng. Stru. Vol. 26, No. 10, pp. 1473-1482, 2004.

26. Xiang, Y."Vibration of Rectangular Mindlin Plates Resting on Non-Homogenous Elastic Foundations", Int. J. Mech. Sci. Vol. 45, No's. 6–7, pp. 1229-1244, 2003.

27. Zhou, D., Cheung, Y.K. Lo, S.H. and Au, F.T.K. "Three-Dimensional Vibration Analysis of Rectangular Thick Plates on Pasternak Foundation", Int. J. Num.Meth. Eng. Vol. 59, No. 10, pp. 1313-1334, 2004.

28. Heshmati, M. and Yas, M.H."Dynamic Analysis of Functionally Graded Multi-Walled Carbon Nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads", Mat. Des. Vol. 49, pp. 894-904, 2013.

29. Omidi, M., Rokni D.T, H., Milani, A.S., Seethaler R.J., and Arasteh, R. "Prediction of the Mechanical Characteristics of Multi-Walled Carbon Nanotube/Epoxy Composites Using a New Form of the rule of Mixtures", Carb. Vol. 48, No. 11, pp. 3218-3228, 2010.

30. Andrews, R., Jacques, D., Minot, M., and Rantell, T. "Fabrication of Carbon Multiwall Nanotube/Polymer Composites by Shear Mixing", Mac. Mat. Eng. Vol. 287, No. 6, pp. 395-403, 2002.

31. Najafizadeh, M.M. and Heydari, H.R. "An Exact Solution For Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory under Uniform Radial Compression", International J. Mech. Sci. Vol. 50, No. 3, pp. 603-612, 2008.

32. Razavi, S. and Shooshtari, A. "Nonlinear Free Vibration of Magneto-Electro-Elastic Rectangular Plates", Compos. Stru. Vol. 119, pp. 377-384, 2015.

33. Alireza, S., Seyedeh Marzieh, H., Mahmoodi, S.N., and Hamed, K. "Analytical Solution for Nonlinear Free Vibrations of Viscoelastic Microcantilevers Covered with a Piezoelectric Layer", Sma. Mat. Stru. Vol. 21, No. 7, pp. 075015, 2012.

34. Jafari, S.S., Rashidi, M.M., and Johnson, S. "Analytical Approximation of Nonlinear Vibration of Euler-Bernoulli Beams", Lat. Ame. J. Sol. Stru. ABCM J. Vol. 13, No. 7, pp. 1250-1264, 2016.

35. Ebrahimia, F. and Mokhtaria, M. "Semi-analytical Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko

38. Bert, C.W. and Malik, M. "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", App. Mech. Rev. Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.

39. Shu, C., "Differential quadrature and its application in engineering" Springer Science & Business Media, 2012.

40. Jodaei, A., Jalal, M., and Yas, M.H. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates by State-Space Based Differential Quadrature Method and Comparative Modeling by ANN", Compos. Part B: Eng. Vol. 43, No. 2, pp. 340-353, 2012.

Beams Made of Functionally Graded Materials", Lat. Ame. J. Sol. Stru. Vol. 12, No. 7, pp. 1319-1339, 2015.

36. Zafarmand, H., Salehi, M. and Asemi, K."Three Dimensional Free Vibration and Transient Analysis of Two Directional Functionally Graded Thick Cylindrical Panels under Impact Loading", Lat. Ame. J. Sol. Stru. Vol. 12, No. 2, pp. 205-225, 2015.

37. Bellman, R. and Casti, J. "Differential Quadrature and Long-Term Integration", J. of Math. Analy. App. Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.

پیوست الف

$$\begin{aligned}\delta U=\int\Big\{&N_r\frac{\partial\delta u}{\partial r}-M_r\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial r^2}+P_r\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial r^2}+\frac{N_{r\theta}}{r}(\frac{\partial\delta u}{\partial\theta}-\delta v+r\frac{\partial\delta v}{\partial r})-\frac{2M_{r\theta}}{r}(\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial\delta w_b}{r\partial\theta})+\frac{2P_{r\theta}}{r}(\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial\delta w_s}{r\partial\theta})+\\&\frac{N_\theta}{r}(\delta u+\frac{\partial\delta v}{\partial\theta})-\frac{M_\theta}{r}(\frac{\partial\delta w_b}{\partial r}+\frac{\partial^2\delta w_b}{r\partial\theta^2})+\frac{P_\theta}{r}(\frac{\partial\delta w_s}{\partial r}+\frac{\partial^2\delta w_s}{r\partial\theta^2})+Q_{z\theta}\left\{\frac{\partial\delta w_s}{r\partial\theta}\right\}+Q_{rz}\left\{\frac{\partial\delta w_s}{\partial r}\right\}rdrd\theta\end{aligned}\qquad\text{(الف-۱)}$$

همچنین کار نیروی خارجی حاصل از بستر الاستیک به صورت رابطه زیر نوشته می شود:

$$\delta U_f=\int_\Omega\left\{K_w(w_b+w_s)-K_g\left\{\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(w_b+w_s)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial\theta^2}\right\}\right\}\delta(w_b+w_s)rdrd\theta\qquad\text{(الف -۲)}$$

که K_w, K_g ضرایب بستر الاستیک دو پارامتری پاستر ناک می باشند. انرژی جنبشی δT به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta T=\int_\Omega\ \{&I_1\{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\delta u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\delta v}{\partial t}+\frac{\partial w_b}{\partial t}\frac{\partial\delta w_b}{\partial t}+\frac{\partial w_s}{\partial t}\frac{\partial\delta w_s}{\partial t}+\frac{\partial\delta w_b}{\partial t}\frac{\partial w_s}{\partial t}+\frac{\partial w_b}{\partial t}\frac{\partial\delta w_s}{\partial t}\}+\\&I_2\{-\frac{\partial\delta u}{\partial t}\frac{\partial^2 w_b}{\partial r\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial r\partial t}-\frac{\partial\delta v}{\partial t}\frac{\partial^2 w_b}{r\partial\theta\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w_b}{r\partial\theta\partial t}\}+I_3\{\frac{\partial^2 w_b}{\partial r\partial t}\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial r\partial t}+\frac{\partial^2 w_b}{r\partial\theta\partial t}\frac{\partial^2\delta w_b}{r\partial\theta\partial t}\}+\\&I_4\{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial r\partial t}+\frac{\partial\delta u}{\partial t}\frac{\partial^2 w_s}{\partial r\partial t}+\frac{\partial\delta v}{\partial t}\frac{\partial^2 w_s}{r\partial\theta\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w_s}{r\partial\theta\partial t}\}+\\&I_5\{-\frac{\partial^2\delta w_b}{\partial r\partial t}\frac{\partial^2 w_s}{\partial r\partial t}-\frac{\partial^2 w_b}{\partial r\partial t}\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial r\partial t}-\frac{\partial^2\delta w_b}{r\partial\theta\partial t}\frac{\partial^2 w_s}{r\partial\theta\partial t}-\frac{\partial^2 w_b}{r\partial\theta\partial t}\frac{\partial^2\delta w_s}{r\partial\theta\partial t}\}+\\&I_6\{\frac{\partial^2 w_s}{\partial r\partial t}\frac{\partial^2\delta w_s}{\partial r\partial t}+\frac{\partial^2 w_s}{r\partial\theta\partial t}\frac{\partial^2\delta w_s}{r\partial\theta\partial t}\}\}rdrd\theta\end{aligned}\qquad\text{(الف -۳)}$$

که در رابطه فوق، ثوابت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left\{1,z,z^2,g(z),zg(z),g(z)^2\right\}dz\qquad\text{(الف -۴)}$$

پیوست ب

با اعمال روش مربعات تفاضلی، معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&-\frac{A_{22}m^2}{r^3}w_{bi}+\frac{A_{33}m^2}{r^3}w_{si}+\frac{A_{11}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j+\frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j-\frac{B_{22}m^2}{r^3}w_{bi}+\\&\frac{B_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj}+\frac{B_{33}m^2}{r^3}w_{si}-\frac{B_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\frac{D_{11}m^2}{r^2}u_i+\\&\frac{2D_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{2D_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\frac{D_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j-\frac{2D_{22}m^2}{r^3}w_{bi}+\\&\frac{2D_{33}m^2}{r^3}w_{si}-\frac{D_{11}m}{r^2}v_i-\frac{A_{11}}{r^2}u_i+\frac{A_{22}}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{A_{33}}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\frac{A_{11}m}{r^2}v_i+\\&A_{11}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}u_j-A_{22}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{bj}+A_{33}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{sj}-\frac{A_{22}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj}+\\&\frac{A_{33}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{sj}=-I_4\omega^2\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj}+I_2\omega^2\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj}-I_1\omega^2u_i\end{aligned}\qquad\text{(ب-۵)}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{D_{11}m}{r^2}u_i-\frac{D_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j+\frac{2D_{22}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj}-\frac{2D_{33}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{sj}-\frac{D_{11}}{r^2}v_i+\\&\frac{D_{11}}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}v_j-\frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}u_j+\frac{B_{22}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}w_{bj}-\frac{B_{11}m}{r}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)}w_{sj}-\frac{A_{11}m}{r^2}u_i+\\&\frac{A_{22}m}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{A_{33}m}{r^2}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\frac{A_{11}m^2}{r^2}v_i-\frac{A_{22}m^3}{r^3}w_{bi}+\frac{A_{33}m^3}{r^3}w_{si}+D_{11}\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)}v_j\\&=-\frac{I_2m}{r}\omega^2w_{bi}+\frac{I_4m}{r}\omega^2w_{si}-I_1\omega^2v_i\end{aligned}\qquad\text{(ب-۶)}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2A_{66}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}w_{sj}-\frac{4D_{66}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\frac{4D_{55}m^2}{r^4}w_{bi}-A_{33}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}u_j+A_{55}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(4)}w_{bj}-\\
&K_g\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-\frac{A_{33}}{r^3}u_i+\frac{A_{33}}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j+\frac{A_{55}}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{A_{66}}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\\
&K_g\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}+\frac{4D_{66}m^2}{r^4}w_{si}-\frac{A_{55}}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}+\frac{A_{66}}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-\frac{A_{33}m}{r^3}v_i+\\
&\frac{A_{33}m}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}v_j-\frac{2A_{55}m^2}{r^4}w_{bi}+\frac{2A_{66}m^2}{r^4}w_{si}-\frac{K_g}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{K_g}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\\
&\frac{K_gm^2}{r^2}w_{bi}+\frac{K_gm^2}{r^2}w_{si}+\frac{B_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j+\frac{A_{33}m^2}{r^3}u_i+\frac{A_{33}m^3}{r^3}v_i+\frac{A_{55}m^4}{r^4}w_{bi}-\\
&\frac{A_{66}m^4}{r^4}w_{si}-\frac{2A_{33}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}u_j+\frac{2A_{55}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}w_{bj}+\frac{2B_{55}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}+\frac{D_{77}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\\
&\frac{2B_{66}m^2}{r^4}w_{si}-\frac{2B_{55}m^2}{r^4}w_{bi}-\frac{2B_{66}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\frac{D_{77}m^2}{r^2}w_{si}+\frac{2D_{33}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j+\\
&\frac{4D_{55}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}+D_{77}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}-A_{66}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(4)}w_{sj}+K_ww_{bi}+K_ww_{si}+\\
&\frac{4D_{66}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-\frac{2D_{33}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}v_j-\frac{2B_{33}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}v_j-\frac{2B_{55}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}+\\
&\frac{2B_{66}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-\frac{4D_{55}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}=I_2\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-I_5\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}-\\
&\frac{I_6m^2}{r^2}\omega^2w_{si}+\frac{I_6}{r}\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\frac{I_5m^2}{r^2}\omega^2w_{bi}-I_5\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}-I_1\omega^2w_{bi}-I_1\omega^2w_{si}+\\
&I_4\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j+\frac{I_4m}{r}\omega^2v_i+\frac{I_4}{r}\omega^2u_i
\end{aligned}
\quad \text{(ب-۷)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_{44}}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}+\frac{2A_{22}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}u_j-A_{44}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(4)}w_{bj}+A_{55}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(4)}w_{sj}+A_{22}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}u_j\\
&-\frac{2A_{55}m^2}{r^4}w_{si}+\frac{2A_{55}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}w_{sj}-\frac{A_{55}}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}+\frac{2B_{55}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}-\\
&\frac{2D_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j-\frac{4D_{44}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}+\frac{4D_{55}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\frac{4D_{44}m^2}{r^4}w_{bi}-\\
&\frac{4D_{55}m^2}{r^4}w_{si}-\frac{B_{22}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j-\frac{A_{22}m^2}{r^3}u_i+\frac{B_{22}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}v_j-K_g\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-\\
&\frac{2B_{55}m^2}{r^4}w_{si}+\frac{2B_{44}m^2}{r^4}w_{bi}-\frac{2B_{44}m^2}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{2B_{55}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-K_g\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}-\\
&\frac{2A_{44}}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(3)}w_{bj}-\frac{K_g}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}-\frac{K_g}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\frac{K_gm^2}{r^2}w_{bi}+\frac{K_gm^2}{r^2}w_{si}+\\
&\frac{4D_{44}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}-\frac{4D_{55}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}+\frac{2D_{22}m}{r}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}v_j+\frac{2B_{44}m^2}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}+\\
&K_ww_{bi}+K_ww_{si}+\frac{A_{22}}{r^3}u_i-\frac{A_{22}}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j-\frac{A_{44}}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}+\frac{A_{55}}{r^3}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}+\frac{A_{22}m}{r^3}v_i-\\
&\frac{A_{22}m}{r^2}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}v_j+\frac{2A_{44}m^2}{r^4}w_{bi}-\frac{A_{22}m^3}{r^3}v_i-\frac{A_{44}m^4}{r^4}w_{bi}+\frac{A_{55}m^4}{r^4}w_{si}=I_3\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{bj}-\\
&I_2\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}u_j-I_5\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(2)}w_{sj}-I_1\omega^2w_{bi}-I_1\omega^2w_{si}-\frac{I_2m}{r}\omega^2v_i-\frac{I_2}{r}\omega^2u_i-\\
&\frac{I_3m^2}{r^2}\omega^2w_{bi}+\frac{I_3}{r}\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{bj}+\frac{I_5m^2}{r^2}\omega^2w_{si}-\frac{I_5}{r}\omega^2\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}w_{sj}
\end{aligned}
\quad \text{(ب-۸)}
$$

c_{ij}ضرائب وزنی مربوط به روش مربعات تفاضلی می باشد

همچنین در معادلات بالا ، ثوابت آورده شده در این روابط به‌صورت زیر تعریف‌شده‌اند:

$$\{A_{11},A_{22},A_{33},A_{44},A_{55},A_{66}\}=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ij}(z)\{1,z,g(z),z^2,zg(z),g(z)^2\}dz\ ,\qquad i=j=1,2,3$$
$$\{B_{11},B_{22},B_{33},B_{44},B_{55},B_{66}\}=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ij}(z)\{1,z,g(z),z^2,zg(z),g(z)^2\}dz\ ,\qquad ij=12,13,23$$
$$\{D_{11},D_{22},D_{33},D_{44},D_{55},D_{66}\}=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ij}(z)\{1,z,g(z),z^2,zg(z),g(z)^2,1+2g'(z)+g'(z)^2\}dz\ ,$$
$$i=j=4,5,6$$
(ب-۹)