

## حل تحلیلی کمانش ورق‌های قطاعی حلقوی متخلخل

ابوصالح نادری<sup>۳</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک  
مجتمع آموزش عالی بام

محمد رضا کامران فرد<sup>۱</sup> و علیرضا سعیدی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه شهید باهنر کرمان

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۴/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۲۱)

### چکیده

در این مقاله، یک حل تحلیلی برای کمانش ورق‌های قطاعی حلقوی متخلخل ارائه شده است. ابتدا معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق، طبق فرضیات تئوری برشی مرتبه اول ورق و با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل به دست آمده‌اند. سپس معادلات پایداری ورق برحسب جایجایی‌های بسیار کوچک و با استفاده از معیار تعادل همسایگی استخراج شده‌اند. به دلیل وابستگی شدید در معادلات دیفرانسیل پایداری حاصله، ارائه حل تحلیلی برای آن‌ها به آسانی امکان‌پذیر نیست. از این رو، با تعریف چهار تابع کمکی و انجام یک‌سری عملیات ریاضی، معادلات به هم وابسته پایداری از هم جدا شده و به دو معادله دیفرانسیل مستقل از هم تبدیل شده‌اند. پس از حل این معادلات مستقل، با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و شرایط مرزی دلخواه در لبه‌های محیطی بار بحرانی کمانش محاسبه شده است. در بخش نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی نظیر زاویه قطاع، ضخامت و شعاع داخلی ورق، همچنین تأثیر میزان تخلخل ورق بر بار بحرانی کمانش آن به‌ازای شرایط مرزی دلخواه روی لبه‌های محیطی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل شده نشان می‌دهد که اثر افزایش میزان تخلخل موجود در ورق در کاهش بار بحرانی کمانش، به مراتب کمتر از اثر پارامترهای هندسی و شرایط مرزی است.

**واژه‌های کلیدی:** کمانش، ورق قطاعی حلقوی، تئوری برشی مرتبه اول، معیار تعادل همسایگی، تخلخل

## Analytical Solution for Buckling of Annular Sectorial Porous Plates

M.R. Kamranfard and A.R. Saidi

Mechanical Engineering Department  
Shahid Bahonar University of Kerman

A. Naderi

Mechanical Engineering Department,  
School of Engineering, Higher Education Complex of Bam

(Received: 07/July/2016; Accepted: 11/June/2017)

### ABSTRACT

In this article, an analytical solution for buckling of annular sectorial porous plates, is presented. At first, based on first order shear deformation plate theory, the governing equilibrium equations and boundary conditions are obtained using minimum total potential energy principle. Then, the stability equations of the plate, are derived in terms of infinitesimal displacements using adjacent equilibrium criterion. Since these equations are highly coupled, it is so difficult to find an analytical solution for them. So, by introducing four auxiliary functions and doing some mathematical manipulations, the stability equations are decoupled and converted to two independent differential equation which can be solved analytically. For this purpose, it has been assumed the simply supported boundary conditions for the radial edges and desired boundary conditions for the circumferential edges of the plate. Finally, the critical buckling load has been calculated for different conditions of the plate. In section of numerical results, the effect of different geometrical parameters, such as sector angle, thickness and inner radius of the plate, also effect of porosity of the plate upon the critical buckling load has been studied for different arbitrary boundary conditions on circumferential edges. The result show that the effect of increase in porosity of the plate upon decrease of the critical buckling load is significantly fewer than the effect of geometrical parameters and the boundary conditions.

**Keywords:** Buckling, Annular Sectorial Plate, First order Shear Deformation Plate Theory, Adjacent Equilibrium Criterion, Porosity

۱- دانشجوی دکتری: mohammadrezakamranfard@gmail.com

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): Saidi@uk.ac.ir

۳- استادپار: abusaleh\_naderi@yahoo.com

## ۱- مقدمه

غیرآلاینده بودن بازیافت آن‌ها را نیز می‌توان بر برتری‌های دیگر این مواد افزود. همه این ویژگی‌ها سبب شده است که این ماده برای استفاده در بخش‌های گوناگون صنعتی بسیار مناسب باشد.

ورق‌ها از لحاظ هندسی، بسته به نوع کاربرد، به شکل‌های متفاوتی ساخته می‌شوند؛ که شکل‌های مستطیلی، دایروی و قطاعی از یک دایره کاربرد بیشتری دارند. نسبت به سایر اشکال ذکر شده برای ورق، کماتش ورق‌های قطاعی حلقوی متخلخل به دلیل پیچیدگی بیشتر مختصات قطبی، کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. حل‌های محدود ارائه شده برای بار بحرانی کماتش آن نیز تا کنون برای حالاتی خاص و به صورت عددی و نیمه تحلیلی به دست آمده‌اند. در اینجا به تعدادی از این کارهای محدود انجام گرفته اشاره می‌شود: رایین<sup>۲</sup> [۱] در سال ۱۹۷۸ مسأله پایداری ورق‌های قطاعی همگن را مورد بررسی قرار داد. سرینیواسان<sup>۳</sup> و تیروونکاتاجاری<sup>۴</sup> [۲] در سال ۱۹۸۲ به تحلیل یک مسأله پایداری مربوط به یک ورق حلقوی تحت بار شعاعی یکنواخت در ضخامت‌های متغیر پرداخته و بار بحرانی کماتش را با استفاده از یک روش عددی به دست آوردند. هریک<sup>۵</sup> [۳] در سال ۱۹۸۵ با یک روش نیمه تحلیلی به مطالعه مسأله پایداری یک ورق قطاعی برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار در جهت شعاعی پرداخت. لیو<sup>۶</sup> و چن<sup>۷</sup> [۴] در سال ۱۹۸۹ یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی پایداری یک ورق حلقوی که تحت بارهای شعاعی و مماسی به‌طور همزمان قرار دارند ارائه دادند. ژئو<sup>۸</sup> و همکاران [۵] در سال ۱۹۹۴ به کمک یک روش نیمه تحلیلی- نیمه عددی به حل مسأله کماتش یک ورق قطاعی برای شرایط تکیه‌گاهی ساده تحت فشار صفحه‌ای پرداختند. آن‌ها معادلات دیفرانسیل معمولی خود را به وسیله یک روش عددی یک‌بعدی حل کردند. وانگ<sup>۹</sup> و ژیانگ<sup>۱۰</sup> [۶] در سال ۱۹۹۹ یک ارتباط دقیق بین بار بحرانی به دست آمده از تئوری کلاسیک ورق و تئوری برشی مرتبه اول برای ورق

امروزه با پیشرفت صنایع، محققین در پی استفاده از سازه‌های سبک و مقاوم جهت تحمل بارگذاری‌های متنوع و در شرایط مختلف می‌باشند. ورق‌ها سازه‌های سبکی هستند که به دلیل دارا بودن ظرفیت تحمل بار بالا (استاتیکی و دینامیکی)، تاکنون در کاربردهای متنوع صنعتی مورد توجه قرار گرفته‌اند. از این رو تحلیل و پیش‌بینی رفتار آن‌ها تحت شرایط مختلف امری الزامی است. یکی از این تحلیل‌های ضروری، تحلیل ناپایداری ورق‌ها تحت بارگذاری فشاری درون صفحه‌ای است که به کماتش آن منجر خواهد شد. پدیده کماتش، به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ در سازه، کارآیی آن را تا حدود زیادی از بین می‌برد. از این رو، تحلیل کماتش ورق‌ها امری الزامی به نظر می‌رسد.

امروزه با گسترش کاربردهای ورق در سازه‌های مهندسی، ساختار مواد سازنده آن‌ها نیز دست‌خوش تغییر شده است. استفاده اجتناب‌ناپذیر از سازه‌های سبک در محیط‌های با درجه حرارت بسیار بالا، محیط‌های شیمیایی و خورنده همراه با انواع مختلف بارگذاری، محققین را بر آن داشت که مواد و ساختارهای جایگزینی به جای استفاده از ساختارهای سنتی پیشنهاد دهند. مواد متخلخل<sup>۱</sup> از جمله مواد جدیدی هستند که امروزه به دلیل امکان کنترل خواص آن‌ها بر حسب نوع کاربرد مورد توجه خاص قرار گرفته‌اند. این مواد، شامل یک شبکه به هم پیوسته از خلل و فرج می‌باشند که توسط آب یا سیال دیگری پر شده‌اند. بسیاری از مواد در طبیعت مثل خاک یا بافت‌های بدن مثل غضروف، استخوان و ماهیچه مثال‌هایی از مواد متخلخل می‌باشند. این مواد به دلیل استحکام بالا و وزن کم در صنعت حمل و نقل بسیار مورد توجه هستند و به دلیل قابلیت جذب انرژی بالا به‌عنوان عایق صوت مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد متخلخل فلزی به دلیل جاذب انرژی بودن در ساخت سپر اتومبیل مورد استفاده قرار می‌گیرند و علاوه بر کاربردهای اشاره شده، در صنایع هوافضا و سایر صنایع کاربرد دارند. طبیعت فلزی این مواد نیز سبب می‌شود که به‌عنوان پوشش‌های الکترومغناطیسی که در دماهای بالا پایداری دارند، مورد استفاده قرار گیرند. افزون بر خواص مناسب مکانیکی، گرمایی، فیزیکی و صوتی این مواد،

2- Rubin

3- Srinivasan

4- Thiruvengkatachari

5- Harik

6- Liu

7- Chen

8- Zhou

9- Wang

10- Xiang

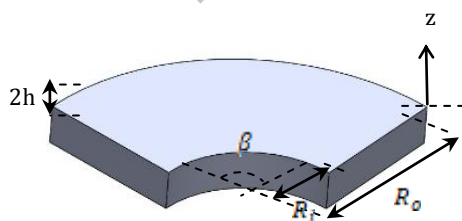
1- Porous materials

استفاده کردند. لعل و اهلاوت [۲۱] در سال ۲۰۱۵ براساس تئوری کلاسیک تحلیل ورق‌ها، به مطالعه ارتعاشات ورق‌های دایروی هدفمند (FGM) که تحت بارهای درون‌صفحه‌ای یکنواخت قرار دارد پرداختند. آن‌ها اثر بارهای درون‌صفحه‌ای را بر سه فرکانس طبیعی اول ورق‌ها بررسی کردند.

با توجه به مقدمه و تاریخچه بیان‌شده، تحلیل کمانش ورق‌های قطاعی حلقوی متخلخل و محاسبه بار بحرانی کمانش مربوطه ضروری می‌نماید. برای این‌منظور معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق طبق فرضیات تئوری برشی مرتبه اول و با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل به‌دست می‌آید. سپس معادلات پایداری ورق برحسب جابجایی‌های بسیار کوچک و با استفاده از معیار تعادل همسایگی به‌دست خواهند آمد. به دلیل وابستگی شدید در معادلات دیفرانسیل حاکم ورق ارائه حل تحلیلی برای آن‌ها به آسانی امکان‌پذیر نیست. با تعریف چهار تابع کمکی (توابع لایه‌مرزی)، معادلات پایداری از هم جدا شده و در نهایت به دو معادله دیفرانسیل مستقل تبدیل می‌شوند. معادلات حاصل با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و انواع تکیه‌گاه‌های دیگر در لبه‌های محیطی به‌طور تحلیلی حل می‌شوند. در پایان اثر پارامترهای مختلف هندسی، میزان تخلخل و شرایط مرزی ورق بر بار بحرانی کمانش مورد بررسی می‌گیرند.

## ۲- فرضیات سینیماتیکی و تعریف هندسه مسأله

ورق مورد مطالعه دارای هندسه قطاعی حلقوی به ضخامت  $2h$ ، شعاع داخلی  $R_i$ ، شعاع خارجی  $R_o$  و زاویه قطاع  $\beta$  می‌باشد (شکل ۱).



شکل (۱): هندسه و شماتیک ورق قطاعی حلقوی متخلخل.

میدان جابجایی در نظر گرفته‌شده برای این مسأله براساس تئوری برشی مرتبه اول در مختصات قطبی به‌صورت زیر می‌باشد:

قطاعی با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده روی لبه‌های ورق ارائه دادند. نجفی‌زاده و اسلامی [۷] در سال ۲۰۰۲ مسأله تحلیل کمانش را برای یک ورق دایروی توپر از جنس ماده FGM<sup>۱</sup> برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده یا گیردار حل کردند. شارما<sup>۲</sup> و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۵ به حل تحلیلی یک مسأله مقدار ویژه کمانش و ارتعاشات آزاد براساس تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. سعیدی و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۹ به تحلیل کمانش ورق‌های گرد هدفمند با استفاده از فرضیات تئوری برشی مرتبه سوم پرداختند. نادری و سعیدی [۱۰] در سال ۲۰۱۰ یک حل تحلیلی برای محاسبه بار بحرانی کمانش برای ورق‌های قطاعی توپر و توخالی ضخیم از جنس ماده FGM ارائه دادند. در سال‌های اخیر کارهای محدودی نیز در مورد کمانش ورق‌هایی از جنس ماده متخلخل انجام شده است.

مگنوکا- بلانزی<sup>۳</sup> [۱۱] در سال ۲۰۰۶ کمانش و خمش یک ورق دایروی از جنس ماده متخلخل را مورد بررسی قرار داد. او خواص ماده متخلخل را به‌صورت تابعی از میزان تخلخل ورق و در جهت ضخامت آن و به‌صورت متقارن نسبت به صفحه میانی ورق فرض کرد. جباری و همکاران [۱۵-۱۲] در سال‌های ۲۰۱۳ و ۲۰۱۴ به تحلیل کمانش و همچنین کمانش حرارتی<sup>۴</sup> ورق‌های متخلخل با و بدون در نظر گرفتن اثر لایه پیزوالکتریک پرداخته‌اند. نجفی‌زاده و عنوانی [۱۶] در سال ۲۰۱۰ کمانش مکانیکی یک ورق دایروی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک را براساس محل تار خشی و با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا مورد بررسی قرار دادند. نجفی‌زاده و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۰ به تحلیل خمش ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. لری دهرسراجی و سعیدی [۱۸] در سال ۲۰۱۶ به تحلیل کشش- خمش یک ورق مستطیلی هدفمند ضخیم براساس تئوری مرتبه بالا پرداختند. رضایی و سعیدی [۱۹ و ۲۰] در سال‌های ۲۰۱۵ و ۲۰۱۶ به حل تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی متخلخل پرداختند. آن‌ها در یکی از حل‌های خود از روش CUF<sup>۵</sup>

- 1- Functionally Graded Material
- 2- sharma
- 3- Magnucka-Blandzi
- 4- Thermal buckling
- 5- Carrera Unified Formulation

که در رابطه ماتریسی بالا مؤلفه‌های ماتریس ثوابت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ C_{33} = C_{44} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \\ C_{55} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{aligned} \quad (۴)$$

در روابط فوق،  $E(z)$  مدول الاستیسیته ورق متخلخل می‌باشد و طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 \left[ 1 - e_0 \cos \left( \left( \frac{\pi}{4h} \right) (z+h) \right) \right] \\ e_0 &= 1 - \frac{E_0}{E_1} \end{aligned} \quad (۵)$$

که در این روابط،  $E_0$  و  $E_1$  بیانگر مدول الاستیسیته ورق به ترتیب در صفحات  $z = h$  و  $z = -h$  و  $e_0$  نشان‌دهنده میزان تخلخل ورق و  $\nu$  نیز ضریب پواسون و دارای مقدار ثابت می‌باشد.

### ۳- یافتن معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق

برای به دست آوردن معادلات تعادل ورق با استفاده از اصل حداقل سازی انرژی پتانسیل خواهیم داشت:

$$\delta \Pi = 0 \quad (۶)$$

که در رابطه فوق،  $\Pi$  بیانگر انرژی پتانسیل کل ورق می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi = U + V \quad (۷)$$

که  $U$  و  $V$  به ترتیب بیانگر انرژی کرنشی ورق و کار انجام شده توسط بارهای خارجی بر روی ورق است. برای یافتن معادلات تعادل ورق بایستی ترم‌های موجود در رابطه (۷) محاسبه شده و در رابطه (۶) جایگزین شوند. برای یک جامد الاستیک خطی تغییرات انرژی کرنشی عبارت است از:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= u_0(r, \theta, t) + z \psi_r(r, \theta, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= v_0(r, \theta, t) + z \psi_\theta(r, \theta, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) &= w_0(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (۱)$$

که در رابطه فوق،  $u_r$ ،  $u_\theta$  و  $u_z$  به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی ورق در راستاهای  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  بوده و  $\psi_r$  و  $\psi_\theta$  توابع چرخش صفحه میانی در جهت  $r$  و  $\theta$  و توابع  $u_0$  و  $v_0$  و  $w_0$  جابجایی‌های صفحه میانی در راستاهای  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  و همچنین  $t$  نشان‌دهنده زمان می‌باشد. از آنجایی که پدیده کماتش در اثر تغییر شکل‌های بزرگ در جهت ضخامت ورق اتفاق می‌افتد، کرنش‌های ورق نیز بایستی با فرض بزرگ بودن تغییر شکل‌ها بیان شوند. با استفاده از تعریف میدان کرنش لاگرانژی و با توجه به رابطه (۱) و صرف نظر کردن از ترم‌های غیرخطی بر حسب جابه‌جایی‌های صفحه‌ای میدان کرنش ورق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + (1/2) \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 + z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_0 + z \psi_r}{r} + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{v_0 + z \psi_\theta}{r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} \\ \gamma_{rz} &= \psi_r + \frac{\partial w_0}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \psi_\theta + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (۲)$$

به این ترتیب کرنش‌های ورق تنها در مشتقات خیز ورق دارای عبارات غیرخطی می‌باشند.

روابط تنش-کرنش برای مواد ساخته شده از مواد متخلخل طبق قانون هوک به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} (N_r, N_{\theta\theta}, N_{r\theta}) &= \int_{-h}^h (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}) dz \\ (M_r, M_{\theta\theta}, M_{r\theta}) &= \int_{-h}^h z (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}) dz \\ (Q_r, Q_\theta) &= k^2 \int_{-h}^h (\tau_{rz}, \tau_{\theta z}) dz \end{aligned} \quad (12)$$

که  $n_1$  و  $n_2$  بردارهای نرمال در هر لبه و  $k^2$  ضریب تصحیح برشی می‌باشد. با استفاده از روابط (۴-۲) منته‌های نیرو و گشتاور را که در روابط (۱۲) تعریف شدند، می‌توان برحسب مؤلفه‌های جابجایی به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_{\theta\theta} \\ N_{r\theta} \\ M_r \\ M_{\theta\theta} \\ M_{r\theta} \\ Q_r \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & 0 & B_{11} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{11} & 0 & B_{22} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{22} & 0 & C_{11} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ B_{22} & B_{11} & 0 & C_{22} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} * \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial r} + (1/2) \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \\ \frac{u_0}{r} + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \theta}{r} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{\psi_\theta}{r} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} \\ k^2 \left( \psi_r + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \\ k^2 \left( \psi_\theta + \frac{\partial \theta}{r} \right) \end{bmatrix}$$

که در این رابطه، ثوابت  $A_{ii}$  و  $B_{ii}$  و  $C_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) از انتگرال‌های زیر در امتداد ضخامت به دست می‌آیند:

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (8)$$

همچنین انرژی پتانسیل ناشی از بارهای خارجی روی ورق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{N}{2h} \iint \int_{-h}^h \left( \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) dz dA \\ &- \frac{Ne}{2h} \iint \int_{-h}^h \left( \frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) dz dA \end{aligned} \quad (9)$$

با ترکیب روابط (۱) تا (۹) و استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و همچنین به کارگیری قضیه دیورژانس معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق به شکل زیر به دست می‌آیند:

معادلات تعادل:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{N_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_{\theta\theta}}{r} - Q_r &= 0 \\ \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{M_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta &= 0 \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + N_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ + N_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) + \\ 2N_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

شرایط مرزی:

شرایط مرزی اساسی	شرایط مرزی طبیعی
$\delta u_0 = 0$	یا $N_r n_1 + N_{r\theta} n_2 = 0$
$\delta v_0 = 0$	یا $N_{r\theta} n_1 + N_{\theta\theta} n_2 = 0$
$\delta \psi_r = 0$	یا $M_r n_1 + M_{r\theta} n_2 = 0$
$\delta \psi_\theta = 0$	یا $M_{r\theta} n_1 + M_{\theta\theta} n_2 = 0$
$\delta w_0 = 0$	یا $Q_r n_1 + Q_\theta n_2 = 0$

(۱۱)

که در روابط فوق داریم:

همسایگی وضعیت تعادل و  $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, \psi_r^1, \psi_\theta^1)$  یک میدان جابجایی بسیار کوچک می‌باشد. با ترکیب روابط (۲)، (۳)، (۴)، (۱۲) و (۱۵) به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} N_{rr} &= N_{rr}^0 + N_{rr}^1 & M_{rr} &= M_{rr}^0 + M_{rr}^1 \\ N_{\theta\theta} &= N_{\theta\theta}^0 + N_{\theta\theta}^1 & M_{\theta\theta} &= M_{\theta\theta}^0 + M_{\theta\theta}^1 \\ N_{r\theta} &= N_{r\theta}^0 + N_{r\theta}^1 & M_{r\theta} &= M_{r\theta}^0 + M_{r\theta}^1 \\ Q_r &= Q_r^0 + Q_r^1 & Q_\theta &= Q_\theta^0 + Q_\theta^1 \end{aligned} \quad (16)$$

باجایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در معادلات (۱۰) و صرف نظر از ترم‌های بسیار کوچک ناشی از حاصل ضرب جابجایی‌های بسیار کوچک، معادلات پایداری ورق مورد مطالعه به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{rr}^1}{\partial r} + \frac{N_{rr}^1 - N_{\theta\theta}^1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\theta}^1}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial N_{r\theta}^1}{\partial r} + 2 \frac{N_{r\theta}^1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta\theta}^1}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial M_{rr}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}^1}{\partial \theta} + \frac{M_{rr}^1 - M_{\theta\theta}^1}{r} - Q_r^1 &= 0 \\ \frac{\partial M_{r\theta}^1}{\partial r} + 2 \frac{M_{r\theta}^1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}^1}{\partial \theta} - Q_\theta^1 &= 0 \\ \frac{\partial Q_r^1}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta^1}{\partial \theta} + N_{rr}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial r^2} &+ N_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0^1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial \theta^2} \right) + \\ 2N_{r\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0^1}{\partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

روابط (۱۳) نیز به شکل زیر در خواهند آمد:

$$\begin{bmatrix} N_{rr}^1 \\ N_{\theta\theta}^1 \\ N_{r\theta}^1 \\ M_{rr}^1 \\ M_{\theta\theta}^1 \\ M_{r\theta}^1 \\ Q_r^1 \\ Q_\theta^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} & 0 & B_{11} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{11} & 0 & B_{22} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{22} & 0 & C_{11} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ B_{22} & B_{11} & 0 & C_{22} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} * \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (A_{11}, B_{11}, C_{11}) &= \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h}^h E(z) (1, z, z^2) dz \\ (A_{22}, B_{22}, C_{22}) &= \frac{\nu}{1-\nu^2} \int_{-h}^h E(z) (1, z, z^2) dz \\ (A_{33}, B_{33}, C_{33}) &= \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-h}^h E(z) (1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (14)$$

#### ۴- تئوری پایداری

ورق در وضعیت تعادل، تحت اثر بارهای خارجی (مکانیکی یا حرارتی) بسته به مقدار آن ممکن است، در حالت پایدار یا ناپایدار قرار داشته باشد. برای تحلیل کمانش، از آنجایی که ورق تحت بارهای درون صفحه‌ای قرار گرفته است، نیاز به تحلیل پایداری دارد. با توجه به تئوری پایداری هر گاه متغیر تغییرات دوم انرژی پتانسیل ( $\delta^2 U$ )، به ازای هر جابه‌جایی مجازی کوچک و دلخواه، مادامی که مقداری مثبت و معین باشد، جسم در حالت تعادل قرار دارد و اگر  $\delta^2 U$  مقداری منفی داشته باشد جسم در وضعیت ناپایدار قرار خواهد گرفت. در مورد بررسی پایداری معیارهای متفاوتی ارائه شده است که در اینجا از معیار تعادل همسایگی جهت یافتن معادلات پایداری ورق استفاده شده است. براساس این معیار هرگاه ورق تحت اثر بار بحرانی خارجی باشد، آن‌گاه حداقل یک میدان جابجایی بسیار کوچک  $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, \psi_r^1, \psi_\theta^1)$  وجود دارد که اگر به ازای آن ورق را از حالت تعادل خارج کرده، در وضعیت جدید باز هم در حالت تعادل قرار خواهد گرفت [۲۲]. این وضعیت متناظر با وضعیت تعادل خنثی ورق و صفر شدن  $\delta^2 U$  به ازای یک جابجایی بسیار کوچک  $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, \psi_r^1, \psi_\theta^1)$  می‌باشد. به منظور بررسی امکان وجود یک وضعیت تعادل همسایگی یک میدان جابجایی در همسایگی وضعیت تعادل به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^0 + u_0^1 \\ v_0 &= v_0^0 + v_0^1 \\ w_0 &= w_0^0 + w_0^1 \\ \psi_r &= \psi_r^0 + \psi_r^1 \\ \psi_\theta &= \psi_\theta^0 + \psi_\theta^1 \end{aligned} \quad (15)$$

در این رابطه  $(u_0^0, v_0^0, w_0^0, \psi_r^0, \psi_\theta^0)$  در واقع مربوط به وضعیت تعادل می‌باشد که پایداری در آن، مورد بررسی است. همچنین  $(u_0, v_0, w_0, \psi_r, \psi_\theta)$  یک میدان جابجایی در

در معادلات (۲۰) تا (۲۴)،  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  چهار تابع کمکی جدید نامبرده هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \\ \Phi_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \\ \Phi_3 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \\ \Phi_4 &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (25)$$

همچنین عبارت  $q(r, \theta)$  در معادله (۲۴) نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}q(r, \theta) &= N_{rr}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + N_{\theta\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ 2N_{r\theta}^0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (26)$$

با انجام یکسری عملیات ریاضی و ساده‌سازی معادلات (۲۰) تا (۲۴) به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$B_{33} (\nabla^2 \Phi_3) + A_{33} (\nabla^2 \Phi_2) = 0 \quad (27)$$

$$C_{33} (\nabla^2 \Phi_3) + B_{33} (\nabla^2 \Phi_2) - k^2 \Phi_3 A_{33} = 0 \quad (28)$$

$$B_{11} (\nabla^2 \Phi_4) + A_{11} (\nabla^2 \Phi_1) = 0 \quad (29)$$

$$-k^2 A_{33} (\Phi_4 + \nabla^2 w_0) + C_{11} (\nabla^2 \Phi_4) + B_{11} (\nabla^2 \Phi_1) = 0 \quad (30)$$

$$k^2 A_{33} (\Phi_4 + \nabla^2 w_0) + q(r, \theta) = 0 \quad (31)$$

حال دو دسته معادلات به هم وابسته (۲۹-۲۷) و (۳۱-۳۰) به دست آمد. با انجام یکسری عملیات ریاضی به جداسازی معادلات فوق پرداخته و پنج معادله به هم وابسته فوق به دو معادله مستقل از هم زیر تبدیل می‌شوند:

$$\left( D_{11} - \frac{PD_{11}}{k^2 A_{33}} \right) \nabla^4 w_0 + P \nabla^2 w_0 = 0 \quad (32)$$

$$D_{22} \nabla^2 \Phi_3 - k^2 \Phi_3 A_{33} = 0 \quad (33)$$

که در عبارات فوق داریم:

$$D_{11} = C_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_0^1}{\partial r} \\ \frac{1}{r} u_0^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0^1}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_0^1}{\partial \theta} - \frac{v_0^1}{r} + \frac{\partial v_0^1}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_r^1}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \psi_r^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta^1}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r^1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_\theta^1 + \frac{\partial \psi_\theta^1}{\partial r} \\ k^2 \left( \psi_r^1 + \frac{\partial w_0^1}{\partial r} \right) \\ k^2 \left( \psi_\theta^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0^1}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}$$

نیروهای صفحه‌ای منتجه برای ورقی تحت بار فشاری یکنواخت در وضعیت قبل از کمانش ورق به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N_{rr}^0 = -P \quad N_{\theta\theta}^0 = -P \quad N_{r\theta}^0 = 0 \quad (19)$$

در ادامه برای سادگی بالانویس "۱" از معادلات حذف شده است.

## ۵- یافتن معادلات حاکم پایداری

در این بخش با معرفی چهار تابع کمکی جدید، معادلات پایداری ورق بر حسب مؤلفه‌های جابجایی بازنویسی می‌شوند. این معادلات که معادلات حاکمه پایداری ورق نامیده می‌شوند عبارتند از:

$$A_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + A_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} + B_{11} \frac{\partial \Phi_4}{\partial r} + B_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} = 0 \quad (20)$$

$$A_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - A_{33} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + B_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} - B_{33} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = 0 \quad (21)$$

$$B_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + B_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} + C_{11} \frac{\partial \Phi_4}{\partial r} + \quad (22)$$

$$C_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} - k^2 A_{33} \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} + \psi_r \right) = 0$$

$$B_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - B_{33} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + C_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} - \quad (23)$$

$$C_{33} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} - k^2 A_{33} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \psi_\theta \right) = 0$$

$$k^2 A_{33} (\Phi_4 + \nabla^2 w_0) + q(r, \theta) = 0 \quad (24)$$

معادلات (۴۱) و (۴۲) را به فرم زیر نیز می توان نوشت:

$$\nabla^2 w_0 = 0 \quad (44)$$

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right] w_0 = 0 \quad (45)$$

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \right] \Phi_3 = 0 \quad (46)$$

حال به منظور حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مستقل از هم (۴۴) و (۴۵) و (۴۶)، فرض شده است که دو لبه شعاعی از ورق قطاعی حلقوی دارای تکیه‌گاه ساده باشند. این درحالی است که شرایط مرزی ورق در دو لبه محیطی دلخواه می‌باشند. برای ارضای شرایط مرزی گفته‌شده در لبه‌های شعاعی توابع  $w_0$  و  $\Phi_3$  به شکل زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} w_{0m}(r) \sin(\gamma_m \theta) \quad (47)$$

$$\Phi_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{3m}(r) \cos(\gamma_m \theta) \quad (48)$$

که در روابط فوق داریم،  $\gamma_m = m\pi/\beta$  و در این رابطه  $\beta$  بیانگر زاویه قطاع و  $m$  نشان‌دهنده نیمه موج مربوطه در راستای مختصه محیطی است. با جای‌گذاری رابطه (۴۷) در معادلات (۴۴) و (۴۵) و رابطه (۴۸) در معادله (۴۶)، دستگاه معادلات حاکم بر سیستم به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2 w_{0m}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{0m}(r)}{dr} - \frac{\gamma_m^2}{r^2} w_{0m}(r) = 0 \quad (49)$$

$$\frac{d^2 w_{0m}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{0m}(r)}{dr} + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\gamma_m^2}{r^2} \right) w_{0m}(r) = 0 \quad (50)$$

$$\frac{d^2 \Phi_{3m}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_{3m}(r)}{dr} + \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_4} - \frac{\gamma_m^2}{r^2} \right) \Phi_{3m}(r) = 0 \quad (51)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادلات (۴۹)، (۵۰) و (۵۱) سه معادله دیفرانسیل معمولی هستند، که با حل آن‌ها پاسخی تحلیلی می‌باشند و هم‌چنین از آنجایی که بار بحرانی کماتش ورق کمیتی حقیقی است، پاسخ معادلات دیفرانسیل (۴۹)، (۵۰) و (۵۱) نیز باید حقیقی باشند.

جواب عمومی معادله مربوط به  $w_{0m}$  که شامل مجموع جواب معادلات (۴۹) و (۵۰) می‌باشد، بسته به این که ضریب

$$D_{22} = C_{33} - \frac{B_{33}^2}{A_{33}} \quad (35)$$

که  $D_{11}$  معرفی شده در رابطه (۳۴) را سفتی خمشی نامند. در ادامه با ترکیب معادلات (۲۰) تا (۲۴)، توابع چرخشی  $\psi_r$  و  $\psi_\theta$  به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\psi_r = -\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{k^2 A_{33}} \left[ D_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} + D_{11} \frac{\partial \Phi_4}{\partial r} \right] \quad (36)$$

$$\psi_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{1}{k^2 A_{33}} \left[ -D_{22} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + D_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} \right] \quad (37)$$

با توجه به معادله (۲۷) و با استفاده از روابط (۲۵) داریم:

$$u = -\frac{B_{11}}{A_{11}} \psi_r \quad (38)$$

$$v = \frac{B_{11}}{A_{11}} \psi_\theta \quad (39)$$

با ترکیب روابط (۱۸)، (۳۸) و (۳۹) روابطی برای مؤلفه‌های نیرو و ممان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_r^1 &= N_{\theta\theta}^1 = N_{r\theta}^1 = 0 \\ M_r^1 &= D_{11} \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \\ &\quad - 2D_{22} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

$$M_{\theta\theta}^1 = D_{11} \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) - 2D_{22} \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right)$$

$$M_{r\theta}^1 = -D_{22} \left( -\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\psi_\theta}{r} \right)$$

## ۶- حل تحلیلی

معادلات دیفرانسیل حاکم پایداری (۳۲) و (۳۳) را به صورت ساده‌تر زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lambda_1 \nabla^4 w_0 + \lambda_2 \nabla^2 w_0 = 0 \quad (41)$$

$$\lambda_3 \nabla^2 \Phi_3 + \lambda_4 \Phi_3 = 0 \quad (42)$$

که در معادلات فوق داریم:

$$\lambda_1 = \left( D_{11} - \frac{PD_{11}}{k^2 A_{33}} \right), \quad \lambda_2 = P \quad (43)$$

$$\lambda_3 = D_{22}, \quad \lambda_4 = -k^2 A_{33}$$



همچنین برای شرط مرزی گیردار نتیجه می‌شود:

$$w_0^1 = \psi_r^1 = \psi_\theta^1 = 0 \quad \text{at } r = R_i, R_o \quad (58)$$

و در پایان، در مورد شرط مرزی آزاد بر روی لبه‌های دایروی نتیجه می‌شود:

$$M_{r\theta}^1 = M_{r\theta}^1 = V_r^1 = 0 \quad \text{at } r = R_i, R_o \quad (59)$$

که در رابطه (۵۹) داریم:

$$M_{r\theta}^1 = -D_{22} \left( -\frac{\partial \psi_\theta^1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r^1}{\partial \theta} + \frac{\psi_\theta^1}{r} \right) \quad (60)$$

$$V_r^1 = Q_r^1 + N_{r\theta}^0 \frac{\partial w_0^1}{\partial r} \quad (61)$$

## ۸- ارائه و تحلیل نتایج

در این بخش به ارائه و تحلیل نتایج عددی مربوط به تحلیل کمانش ورق‌های قطاعی حلقوی متخلخل در قالب جداول و نمودارهایی پرداخته شده است. در ابتدا برای بررسی صحت روش حل انجام شده، نتایج و داده‌های حاصل از این کار با مراجع معتبر مقایسه شده‌اند. این اعتبارسنجی در قالب جداولی برای داده‌های مربوط به تحلیل کمانش ورق‌های قطاعی حلقوی همگن انجام شده است. سپس با معرفی پارامترهای بی‌بعد مربوط به بار بحرانی کمانش به ارائه نتایج عددی پرداخته شده است. این نتایج برای بررسی اثر پارامترهای مختلفی بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد ارائه شده‌اند. پارامترهایی که اثر آن‌ها بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد ورق متخلخل مورد بررسی قرار گرفته‌اند عبارت‌اند از: هندسه ورق (شامل: زاویه قطاع  $(\beta)$ ، نسبت شعاع داخلی به خارجی ورق  $(\alpha)$ ، نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق  $(\lambda)$ ، میزان تخلخل موجود در ورق  $(e_0)$  و شرایط مرزی ورق. در بررسی اثر شرایط مرزی مختلف از نمادهای  $C$ ،  $S$  و  $F$  به ترتیب برای تکیه‌گاه‌های گیردار، ساده و آزاد استفاده شده است. به‌طور مثال نماد  $SCSF$  بیانگر شرایط مرزی برای ورقی است که دو لبه شعاعی آن دارای تکیه‌گاه ساده، لبه محیطی داخلی آن دارای تکیه‌گاه گیردار و لبه محیطی خارجی آن دارای تکیه‌گاه آزاد می‌باشد. همچنین وجود عباراتی به فرم  $(m)$  در کنار بعضی از اعداد بیانگر این مطلب است که بار بحرانی کمانش در مود  $m$  رخ می‌دهد.

ترم  $w_0$  در معادله (۵۰) مثبت یا منفی باشد به شکل زیر می‌باشد:

$$w_{0m}(r) = C_3 r^{\gamma_m} + C_4 r^{-\gamma_m} + C_5 J_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} r \right) + C_6 Y_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} r \right) \quad (52)$$

$$w_{0m}(r) = C_3 r^{\gamma_m} + C_4 r^{-\gamma_m} + C_5 I_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} r \right) + C_6 K_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} r \right) \quad (53)$$

همچنین جواب عمومی معادله مربوط به  $\Phi_{3m}$  بسته به این که ضریب ترم  $\Phi_3$  در معادله (۵۱) مثبت یا منفی باشد به شکل زیر می‌باشد:

$$\Phi_{3m}(r) = C_1 J_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_4}} r \right) + C_2 Y_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_4}} r \right) \quad (54)$$

$$\Phi_{3m}(r) = C_1 I_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_4}} r \right) + C_2 K_{\gamma_m} \left( \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_4}} r \right) \quad (55)$$

پس از یافتن  $w_{0m}$  و  $\Phi_{3m}$  و با استفاده از روابط (۳۶) و (۳۷) و (۴۰) که برحسب  $w_{0m}$  و  $\Phi_{3m}$  به دست آمده‌اند، توابع چرخش  $\psi_r$  و  $\psi_\theta$  و مؤلفه‌های نیرو و ممان را به دست می‌آید. با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بر روی لبه‌های شعاعی و پس از اعمال نه شرط مرزی ممکن بر روی لبه‌های محیطی، که از ترکیب شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده  $(S)$ ، آزاد  $(F)$  و گیردار  $(C)$  حاصل می‌شوند، به دستگاه معادلاتی با شش معادله خواهیم رسید که برای حل آن باید دترمینان ضرایب آن دستگاه را مساوی صفر قرار داده که با انجام این کار بار بحرانی کمانش به دست می‌آید.

## ۷- شرایط مرزی

بر روی لبه‌های دایروی شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد در نظر گرفته شده است. در مورد شرط مرزی تکیه‌گاه ساده بر روی لبه‌های دایروی می‌توان گفت:

$$w_0^1 = M_{r\theta}^1 = \psi_\theta^1 = 0 \quad \text{at } r = R_i, R_o \quad (56)$$

به طوری که:

$$M_{r\theta}^1 = D_{11} \left( \frac{\partial \psi_r^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta^1}{\partial \theta} + \frac{\psi_r^1}{r} \right) - 2D_{22} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta^1}{\partial \theta} + \frac{\psi_r^1}{r} \right) \quad (57)$$

## ۸-۱- معرفی پارامترهای بی بعد و خواص ماده

برای ارائه نتایج و به منظور مقایسه بارهای بحرانی کمانش بی بعد با مراجع، پارامترهای بی بعدی تعریف شده اند که عبارتند از:

$$N_{cr} = \frac{PR_o^2}{D_{11}} \quad (۶۲)$$

$$\alpha = \frac{R_i}{R_o} \quad (۶۳)$$

$$\lambda = \frac{2h}{R_o} \quad (۶۴)$$

در عبارات فوق،  $N_{cr}$  بار بحرانی کمانش بی بعد و  $P$  بار بحرانی کمانش با بعد حاصل از حل معادلات مربوطه می باشد. همچنین  $R_o$  بیانگر شعاع خارجی ورق قطاعی حلقوی و  $D_{11}$  سفتی خمشی ورق است که  $D_{11}$  به وسیله رابطه (۳۴) تعریف می شود. همچنین  $\alpha$  بیانگر نسبت شعاع داخلی به شعاع

خارجی ورق و  $\lambda$  نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق می باشد. جنس ورق مورد مطالعه، آلومینیوم متخلخل می باشد که خواص مکانیکی آن عبارتند از:

$$E_1 = 70(\text{Gpa})$$

$$\rho_1 = 2707(\text{Kg/m}^3) \quad (۶۵)$$

$$\nu = 0.3$$

ضریب تصحیح برشی ( $k^2$ ) نیز  $\frac{5}{6}$  [۱۹] در نظر گرفته شده است.

## ۸-۲- بررسی صحت نتایج ارائه شده

برای صحت سنجی، نتایج حاصل از روابط ارائه شده، آن ها را با نتایج موجود در مرجع [۸] مقایسه شده و نتایج حاصل در جدول ۱ آمده است.

جدول (۱): مقایسه بار بحرانی کمانش  $N_{cr} = \frac{PR_o^2}{D_{11}}$  برای ورق قطاعی حلقوی ساخته شده از مواد همگن و

همسانگرد برای دو شرط مرزی مختلف ( $\lambda = 0.01$ ).

شرایط مرزی		روش حل	$\alpha$	$\beta(\text{deg})$
SSSC	SSSS			
۱۲۲/۴۳۶۵	۹۶/۹۸۴۱	کار حاضر	۰/۱	۳۰
۱۲۲/۹۰۸۰	۹۷/۲۵۴۸	مرجع [۸]		
۰/۳۸	۰/۲۸	درصد خطا		
۱۳۷/۰۲۳۵	۱۰۲/۷۱۸۸	کار حاضر	۰/۵	
۱۳۷/۶۲۵۰	۱۰۳/۰۲۲۰	مرجع [۸]		
۰/۴۴	۰/۲۹	درصد خطا		
۵۷/۵۶۸۲	۳۹/۱۹۲۲	کار حاضر	۰/۱	۶۰
۵۷/۶۵۲۶	۳۹/۲۵۶۲	مرجع [۸]		
۰/۱۵	۰/۱۶	درصد خطا		
۹۶/۷۳۱۳	۵۶/۱۱۸۹	کار حاضر	۰/۵	
۹۷/۰۲۷۹	۵۶/۲۱۰۰	مرجع [۸]		
۰/۳۱	۰/۱۶	درصد خطا		
۳۷/۰۸۵۳	۲۰/۴۱۳۷	کار حاضر	۰/۱	۱۲۰
۳۶/۹۶۸۰	۲۰/۴۰۸۱	مرجع [۸]		
۰/۳۲	۰/۰۳	درصد خطا		
۸۹/۹۳۱۲	۴۴/۶۴۵۵	کار حاضر	۰/۵	
۹۰/۱۷۷۲	۴۴/۷۰۳۶	مرجع [۸]		
۰/۲۷	۰/۱۳	درصد خطا		

روش حل مورد استفاده در مرجع [۸] روش عددی DQM می‌باشد اما در این مقاله از روش حل تحلیلی و دقیق استفاده شده است.

### ۸-۳- بحث و ارائه نتایج عددی

در این بخش به ارائه نتایج عددی در مورد تحلیل کمانش ورق قطاعی حلقوی پرداخته می‌شود. در جدول ۲ به بررسی اثر زاویه قطاع، نسبت ضخامت و میزان تخلخل بر بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی متقارن پرداخته شده است.

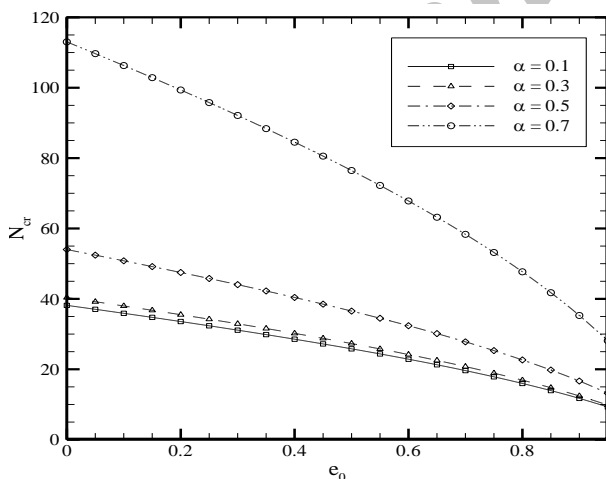
همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج تحلیل حاضر با داده‌های موجود در مرجع [۸] وجود دارد. انحراف کمی که بین نتایج تحلیل حاضر با داده‌های مرجع [۸] مشاهده می‌شود ناشی از اختلاف در تئوری مورد استفاده و همچنین روش حل است. تئوری مورد استفاده در مرجع [۸] تئوری کلاسیک ورق‌هاست که این تئوری برای ورق‌های با ضخامت کم استفاده می‌شود اما تئوری استفاده‌شده در این کار تئوری برشی مرتبه اول می‌باشد که برای ورق‌های با ضخامت بیشتر استفاده می‌شود. همچنین

**جدول (۲):** پارامتر بار بحرانی بی‌بعد کمانش  $N_{cr} = \frac{PR_o^2}{D_{11}}$  برای ورق قطاعی حلقوی متخلخل به‌ازای شرایط مرزی متقارن ( $\alpha = 0.5$ ).

SFSF	SSSS	SCSC	$e_0$	$\lambda$	$\beta(deg)$
۳۴/۷۳۲۱	۱۰۲/۷۱۹۰	۱۶۱/۲۱۲۶	۰	۰/۰۱	۳۰
۲۸/۳۲۶۷	۸۳/۷۷۶۲	۱۳۱/۴۷۹۷	۰/۳		
۲۳/۴۸۷۳	۶۹/۴۶۲۰	۱۰۹/۰۲۰۲	۰/۵		
۳۳/۰۱۷۸	۹۵/۹۴۸۱	۱۴۱/۶۱۷۷	۰	۰/۰۵	
۲۶/۹۲۰۷	۷۸/۲۱۲۱	۱۱۵/۳۸۸۵	۰/۳		
۲۲/۳۳۴۶	۶۴/۹۱۷۷	۹۵/۸۵۹۴	۰/۵		
۲۹/۸۵۳۲	۷۹/۵۶۵۴	۱۰۴/۶۰۱۲	۰	۰/۱	
۲۴/۳۲۵۱	۶۴/۷۷۴۰	۸۵/۰۷۹۵	۰/۳		
۲۰/۲۰۶۴	۵۳/۹۰۲۱	۷۰/۹۲۵۵	۰/۵		
۶/۷۳۸۵	۵۶/۱۱۸۹	۱۴۷/۵۳۲۳	۰	۰/۰۱	۶۰
۵/۴۹۵۸	۴۵/۷۷۰۴	۱۲۰/۳۲۳۴	۰/۳		
۴/۵۵۶۸	۳۷/۹۴۹۲	۹۹/۷۶۸۱	۰/۵		
۶/۵۷۸۴	۵۴/۰۱۹۱	۱۳۱/۸۲۴۶	۰	۰/۰۵	
۵/۳۶۶۷	۴۴/۰۴۴۴	۱۰۷/۴۲۰۸	۰/۳		
۴/۴۴۹۱	۳۶/۵۴۰۲	۸۹/۲۲۱۰	۰/۵		
۶/۳۲۲۸	۴۷/۳۶۹۲	۹۹/۵۰۵۷	۰	۰/۱	۱۲۰
۵/۱۵۵۱	۳۹/۴۰۵۵	۸۰/۹۴۴۷	۰/۳		
۴/۲۷۷۲	۳۲/۷۴۴۸	۶۷/۴۶۲۴	۰/۵		
۰/۴۸۶۱	۴۴/۶۴۵۵	۱۴۷/۵۳۲۳(۲)	۰	۰/۰۱	
۰/۳۹۶۵	۳۶/۴۱۲۸	۱۲۰/۳۲۳۴(۲)	۰/۳		
۰/۳۲۸۷	۳۰/۱۹۰۴	۹۹/۷۶۸۱(۲)	۰/۵		
۰/۴۷۴۹	۴۳/۲۹۶۲	۱۳۱/۵۶۷۴(۳)	۰	۰/۰۵	
۰/۳۸۷۳	۳۵/۳۰۳۷	۱۰۷/۲۰۵۶(۳)	۰/۳		
۰/۳۲۱۲	۲۹/۲۸۵۱	۸۹/۰۵۱۵(۳)	۰/۵		
۰/۴۶۰۱	۳۹/۵۶۲۲	۹۸/۳۵۳۳(۳)	۰	۰/۱	
۰/۳۷۵۱	۳۲/۲۳۷۱	۸۰/۰۰۳۹(۳)	۰/۳		
۰/۳۱۱۲	۲۶/۷۷۷۴	۶۶/۶۸۳۸(۳)	۰/۵		

گیردار به ساده و از ساده به آزاد، به ترتیب در مرزهای خارجی و داخلی این اثر کاهش می‌یابد که این موضوع در تمامی اشکال زیر مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به نمودارهای رسم شده می‌توان پی برد که مثلاً برای ورق با شرایط مرزی SSSS یا SCSS با افزایش  $\alpha$  طول لبه داخلی ورق با تکیه‌گاه ساده یا گیردار افزایش می‌یابد. بنابراین، انتظار می‌رود بار بحرانی کمانش نیز افزایش پیدا کند. اما برای ورقی که دارای شرایط مرزی SFSS و SFSC می‌باشد قضیه متفاوت است.

همان‌طور که در نمودار شکل ۶ مشاهده می‌شود، برای ورقی با شرایط مرزی SFSS با افزایش نسبت شعاع بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. توجه این اثر در مورد ورقی با این شرایط مرزی به این صورت است که با افزایش  $\alpha$  طول لبه آزاد در مرز داخلی ورق افزایش یافته و از سفتی ورق کاسته می‌شود. بنابراین ورق با بار کمتری کمانش خواهد کرد. اما برای ورقی با شرایط مرزی SFSC، با توجه به نمودار شکل ۷ مشاهده می‌شود که با افزایش  $\alpha$  از ۰/۱ به ۰/۵ بار بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند. با نزدیک شدن  $\alpha$  به یک (نزدیک شدن شعاع داخلی به خارجی ورق) به دلیل این که لبه خارجی ورق گیردار بوده، تأثیر لبه منحنی داخلی کم شده و بار بحرانی کمانش به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.



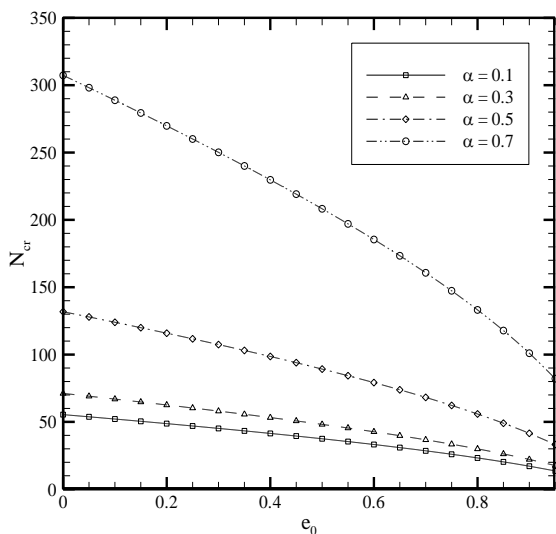
شکل (۲): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش

ضریب تخلخل ورق به‌ازای نسبت شعاع‌های مختلف تحت شرایط

مرزی SSSS ( $\beta = 60^\circ$ ,  $\lambda = 0.05$ ).

همان‌گونه که از داده‌های این جداول پیداست، افزایش زاویه قطاع به‌ازاء تمامی شرایط مرزی به کاهش بار بحرانی کمانش می‌انجامد. همچنین مطابق نتایج موجود در جداول، افزایش نسبت ضخامت ورق نیز به کاهش بار بحرانی بی‌بعد کمانش منجر می‌شود؛ اما بار بحرانی با بعد کمانش با افزایش ضخامت ورق به واسطه سفت‌تر شدن آن افزایش خواهد یافت. از آنجایی که با افزایش میزان تخلخل موجود در ورق، ورق نرم‌تر می‌شود، انتظار می‌رود که در تخلخل‌های بیشتر بار بحرانی کمانش کمتر باشد که این امر نیز به‌وضوح در جدول ۲ قابل مشاهده است. نکته دیگری که در این جدول قابل ملاحظه است، تغییر مود در زوایای قطاع بالا برای شرایط مرزی SCSC می‌باشد. این پدیده بدین شکل قابل توجیه است که هر چه ورق مقیدتر باشد سفتی آن افزایش یافته و علاوه بر این که بار بحرانی کمانش آن افزایش می‌یابد، تعداد نیم‌موج‌های ایجاد شده در آن نیز بر اثر اعمال بارهای درون‌صفحه‌ای افزایش می‌یابد. هرچند در رخ‌دادن بار بحرانی کمانش در مودهای بالا در بعضی حالات، افزایش سطح ورق ناشی از افزایش زاویه قطاع نیز تأثیر بسزایی دارد. در جدول ۲ واضح است که با افزایش قید بر شرایط مرزی، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد؛ به‌طوری که ورق دارای شرایط مرزی SCSC دارای بیشترین و ورق دارای شرایط مرزی SFSC دارای کمترین بار بحرانی کمانش می‌باشد.

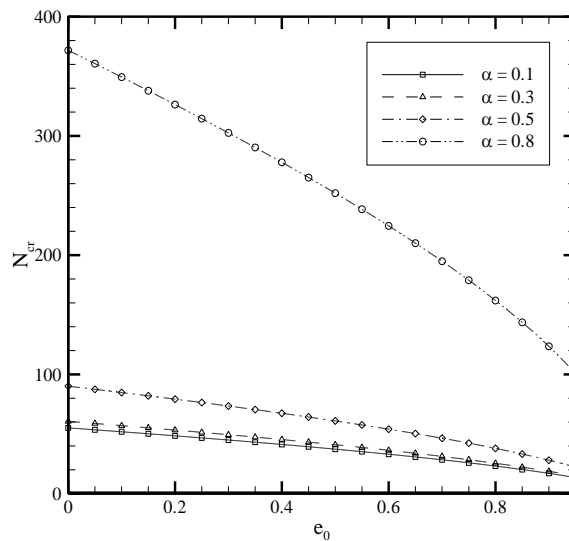
در ادامه، در نمودار شکل‌های ۲ تا ۷ به بررسی اثر همزمان نسبت شعاع ( $\alpha$ ) و میزان تخلخل ( $e_0$ ) بر بار بحرانی بی‌بعد کمانش به‌ازای شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. همان‌گونه که در تمامی این اشکال مشاهده می‌شود، با افزایش میزان تخلخل موجود در ورق، ورق نرم‌تر شده و بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. با توجه به نمودار شکل‌های ۲ تا ۵ افزایش پارامتر  $\alpha$ ، باعث افزایش طول لبه مقید ورق و در نتیجه افزایش سفتی ورق و در نهایت باعث افزایش بار بحرانی کمانش برای ورق با شرایط مرزی SSSS، SCSS و SCSC خواهد شد. این اثر (افزایش بار بحرانی کمانش به‌ازای افزایش نسبت شعاع)، برای ورقی که در مرز خارجی خود دارای تکیه‌گاه گیردار است، بسیار شدید می‌باشد. در درجه بعد برای ورقی که در مرز داخلی خود دارای تکیه‌گاه گیردار است این اثر شدید می‌باشد. با کاهش تقید شرط مرزی ورق از



شکل (۵): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش

ورق قطاعی حلقوی متخلخل نسبت به  $N_{cr} = PR_0^2/D_{11}$

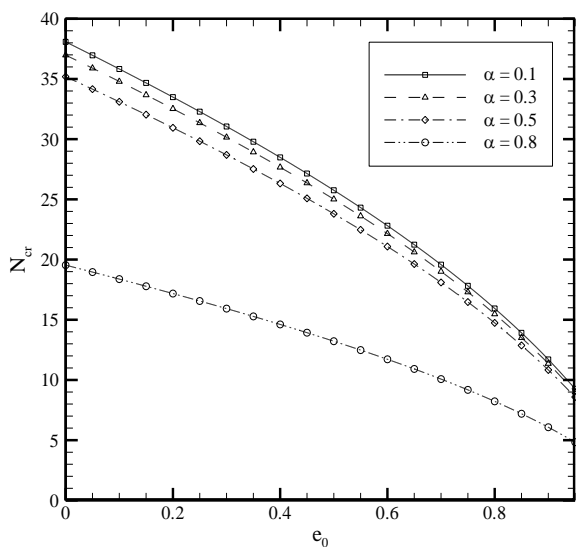
تغییرات ضریب تخلخل ورق به‌ازای نسبت شعاع‌های مختلف تحت شرایط مرزی SCSC ( $\beta = 60^\circ, \lambda = 0.05$ ).



شکل (۳): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش

ورق قطاعی حلقوی متخلخل نسبت به  $N_{cr} = PR_0^2/D_{11}$

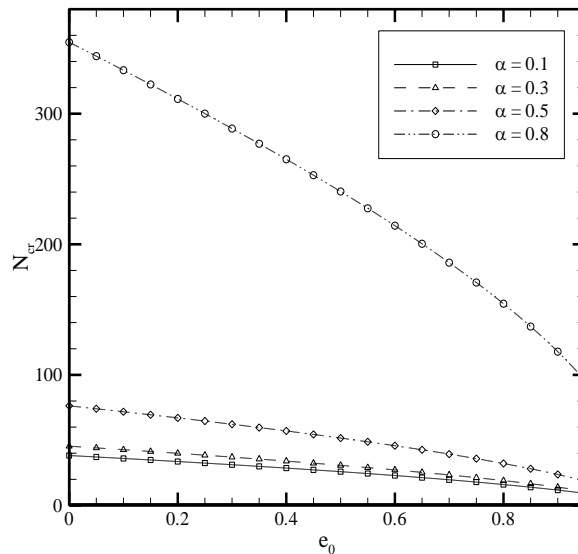
تغییرات ضریب تخلخل ورق به‌ازای نسبت شعاع‌های مختلف تحت شرایط مرزی SSSC ( $\beta = 60^\circ, \lambda = 0.05$ ).



شکل (۶): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش

ورق قطاعی حلقوی متخلخل نسبت به  $N_{cr} = PR_0^2/D_{11}$

تغییرات ضریب تخلخل ورق به‌ازای نسبت شعاع‌های مختلف تحت شرایط مرزی SFSS ( $\beta = 60^\circ, \lambda = 0.05$ ).



شکل (۴): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش

ورق قطاعی حلقوی متخلخل نسبت به  $N_{cr} = PR_0^2/D_{11}$

تغییرات ضریب تخلخل ورق به‌ازای نسبت شعاع‌های مختلف تحت شرایط مرزی SCSS ( $\beta = 60^\circ, \lambda = 0.05$ ).

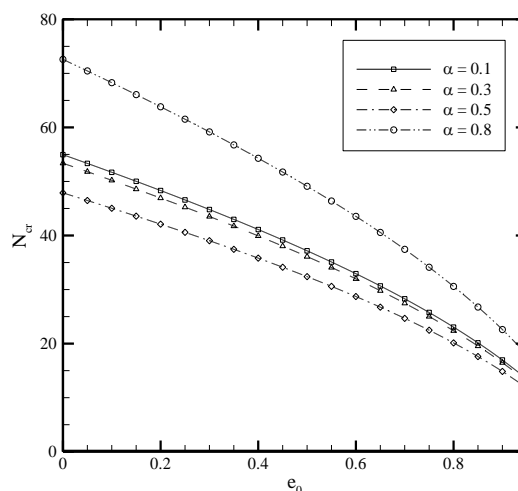
شرایط مرزی بر روی لبه‌های محیطی، دستگاه معادلاتی با شش معادله به دست آمده که برای حل آن دترمینان ضرایب آن دستگاه را مساوی صفر قرار داده و با انجام این کار بار بحرانی کمانش به دست آمد. در ادامه پس از اعتبارسنجی روش حل با داده‌های موجود در مراجع معتبر در قالب جدولی، به ارائه نتایج عددی مربوط به تحلیل کمانش ورق قطاعی حلقوی متخلخل، در قالب جدول و نمودارهایی پرداخته شد. در این جدول و نمودارها، اثر پارامترهای مختلف هندسی (زاویه قطاع  $(\beta)$ ، نسبت ضخامت  $(\lambda)$  و نسبت شعاع  $(\alpha)$ )، شرایط مرزی و میزان تخلخل ( $e_0$ ) بر بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش به ارائه نتایج کلی حاصل از تحلیل کمانش ورق مورد مطالعه خواهیم پرداخت. نتایج حاصله عبارت اند از:

۱- وجود تخلخل در ورق سبب نرم‌تر شدن آن و در نتیجه کاهش بار بحرانی بی‌بعد کمانش می‌شود. با افزایش میزان تخلخل نیز ورق نرم‌تر شده و بار بحرانی بی‌بعد کمانش به ازای تمامی حالات پیوسته کاهش می‌یابد.

۲- هر تغییری در هندسه ورق که باعث سفت‌تر شدن آن شود به افزایش بار بحرانی کمانش منجر می‌شود. کاهش زاویه قطاع و افزایش نسبت ضخامت ورق به‌ازای تمامی حالات باعث افزایش سفتی ورق و در نتیجه افزایش بار بحرانی بی‌بعد کمانش آن می‌شود.

۳- به‌طور کلی با به‌این‌که طول لبه منحنی خارجی ورق بیشتر از طول لبه داخلی است، تأثیر شرط مرزی روی لبه خارجی، بر بار بحرانی کمانش، همواره از تأثیر شرط مرزی روی لبه منحنی داخلی بیشتر است. این تأثیر با افزایش شعاع داخلی ورق و در نتیجه آن افزایش  $\alpha$  و یا کاهش زاویه قطاع ورق که سبب نزدیک شدن طول لبه منحنی داخلی به خارجی می‌شود، کاهش می‌یابد. به‌عبارت دیگر هرگاه شکل ورق نزدیک به یک مستطیلی باشد تأثیر لبه داخلی و خارجی بر بار بحرانی کمانش تقریباً یکسان می‌باشد.

۴- درمقایسه تأثیر شرایط مرزی بر بار بحرانی کمانش، ورق قطاعی حلقوی به‌ازای شرط مرزی آزاد در لبه خارجی دارای کمترین و به‌ازای شرط مرزی گیردار دارای بیشترین بار بحرانی کمانش می‌باشد. همچنین



شکل (۷): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد کمانش

تغییرات ضریب تخلخل ورق به‌ازای نسبت شعاع‌های مختلف تحت شرایط مرزی SFSC ( $\beta = 60^\circ$ ,  $\lambda = 0.05$ )  
 $N_{cr} = PR_0^2 / D_{11}$

#### ۹- ارائه نتایج کلی

در این مقاله به‌ارائه یک حل تحلیلی برای کمانش ورق‌های قطاعی حلقوی ساخته‌شده از آلومینیوم متخلخل پرداخته شد. بدین صورت که با در نظر گرفتن میدان جابه‌جایی مربوط به تئوری برشی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی حاکم بر ورق به‌کارگیری اصل حداقل انرژی پتانسیل به‌دست آمدند. سپس با استفاده از معیار تعادل همسایگی، به نوشتن معادلات پایداری حاکم و شرایط مرزی برحسب جابه‌جایی‌های بسیار کوچک پرداخته شد. به‌علت وابستگی شدید معادلات حاکم پایداری به‌دست آمده، با تعریف چهار تابع کمکی و با انجام یک‌سری عملیات ریاضی و جبری به جداسازی معادلات حاکم پایداری پرداخته و در نهایت دو معادله دیفرانسیل مستقل، یکی برحسب خیز  $(W_0)$  و دیگری برحسب یکی از توابع کمکی  $(\Phi_3)$  به دست آمد. با نوشتن جواب عمومی این دو معادله دیفرانسیل که برحسب توابع بسل و بسل اصلاح شده بودند و با استفاده از روابط به‌دست آمده بین خیز و تابع کمکی  $\Phi_3$  با بقیه پارامترها که در روند جداسازی معادلات به‌دست آمدند، عبارات مربوط به مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی، توابع چرخش و منته‌های نیرو و گشتاور برحسب مختصات  $r$  به‌دست آمدند. سپس با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بر روی لبه‌های شعاعی و پس از اعمال انواع

- theory”, *Composite Structures*, Vol. 89, No. 1, pp. 110-119, 2009.
10. Naderi, A. and Saidi, A. R. “An analytical solution for buckling of moderately thick functionally graded sector and annular sector plates”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 6, pp. 809-828, 2011.
  11. Magnucka-Blandzi, E. “Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, pp. 333-337, 2008.
  12. Jabbari, M., Farzaneh Joubaneh, E., and Mojahedin, A. ”Thermal buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric actuators based on first order shear deformation theory”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, Vol. 83, pp. 57-64, 2014.
  13. Khorshidvand, A. R., Farzaneh Joubaneh, E., Jabbari, M., and Eslami, M. R. “Buckling analysis of a porous circular plate with piezoelectric sensor-actuator layers under uniform radial compression”, *Acta Mechanica.*, Vol. 225, No. 1, pp. 179-193, 2014.
  14. Jabbari, M., Mojahedin, A., Khorshidvand, A. R., and Eslami, M. R. “Buckling analysis of a functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials”, *Journal of Engineering Mechanics.*, Vol. 140, No. 2, pp. 287-295, 2013.
  15. Jabbari, M., Farzaneh Joubaneh, E., Khorshidvand, A. R., and Eslami, M. R. “Buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric actuator layers under uniform radial compression”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, Vol. 70, pp. 50-56, 2013.
  16. Najafizadeh, M. M. and Onvani, A. “Mechanical Buckling Analysis of a FGM Circular Plate with Actuator-Actuator Piezoelectric Layers, Based on Neutral-Axis’ Position and Using Higher-Order Shear Deformation Plate Theory”. *Aerospace Mechanics Journal.*, Vol. 6, No. 4, pp. 43-54, 2010 (In Persian).
  17. Najafizade, M. M., Azari, Sh. and Salmani, F. “Bending Analysis of Rectangular Composite Plates with Piezoelectric Layers, Based on the First Order Shear Deformation Theory, Using The Extended Kantorovich Method”, *Aerospace Mechanics Journal.*, Vol. 6, No. 4, PP. 57-69, 2010 (In Persian).
  18. Lori dehsaraji, M. and Saidi, A. R. “Bending-Stretching Analysis of Thick Functionally Graded Rectangular Plate Based on Higher Order Shear and Normal Deformable Theory”, *Aerospace Mechanics Journal.*, Vol. 12, No. 2, pp. 95-106, 2016 (In Persian).
  19. Rezaei, A. S. and Saidi, A. R. “Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of
- برای ورق قطاعی حلقوی به‌ازای شرایط مرزی آزاد در لبه‌های داخلی و خارجی ورق دارای کمترین و به‌ازای شرایط مرزی گیردار دارای بیشترین بار بحرانی کمانش می‌باشد.
- ۵- در ورقی با لبه خارجی آزاد و لبه داخلی ساده، با افزایش شعاع داخلی ورق و به‌تبع آن افزایش  $\alpha$ ، احتمال وقوع بار بحرانی کمانش در موده‌های بالاتر از یک کم است اما برای ورقی با شرط مرزی گیردار در لبه داخلی با افزایش شعاع داخلی احتمال وقوع بار بحرانی کمانش در مود دوم و بالاتر بیشتر می‌شود.
- ۱۰- مراجع**
1. Rubin, C. “Stability of polar-orthotropic sector plates”, *Journal of Applied Mechanics.*, Vol. 45, No. 2, pp. 448-450, 1978.
  2. Srinivasan, R. S. and Thiruvenkatachari, V. “Stability of annular sector plates with variable thickness”, *AIAA journal*, Vol. 22, No. 2, pp. 315-317, 1984.
  3. Harik, I. E. “Stability of annular sector plates with clamped radial edges”, *Journal of applied mechanics.*, Vol. 52, No. 4, pp. 971-973, 1985.
  4. Liu, W. C., and Chen, W. H. “Note on the stability of annular sector plates with elastically restrained edges”, *International journal of mechanical sciences.*, Vol. 31, No. 8, PP. 611-622, 1989.
  5. Zhou, Y. H., Zheng, X., and Hariky, I. E. “A seminumerical method for buckling of sector plates”, *Computers & structures*, Vol. 57, No. 5, pp. 847-854, 1995.
  6. Wang, C. M. and Xiang, Y. “Deducing buckling loads of sectorial Mindlin plates from Kirchhoff plates”, *Journal of engineering mechanics.*, Vol. 125, No. 5, pp. 596-598, 1999.
  7. Najafizadeh, M. M. and Eslami, M. R. “Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, Vol. 44, No. 12, pp. 2479-2493, 2002.
  8. Sharma, A., Sharda, H. B., and Nath, Y. “Stability and Vibration of Mindlin Sector Plates: An Analytical Approach”, *AIAA journal*, Vol. 43, No. 5, pp. 1109-1116, 2005.
  9. Saidi, A. R., Rasouli, A., and Sahraee, S. “Axisymmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate

- plates via differential transform method”, European Journal of Mechanics-A/Solids., Vol. 52, No. 31, pp. 85-94, 2015.
22. Brush, D. O. and Almroth, B. O. “Buckling of bars, plates, and shells”, New-York: Mc Graw-Hill, 1975.
- porous materials”, Composite Structures., Vol. 134, No. 15, pp. 1051-1060, 2015.
20. Rezaei, A. S. and Saidi, A. R. “Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates”, Composites Part B: Engineering., Vol. 91, No. 15, pp. 361-370, 2016.
21. Lal, R. and Ahlawat, N. “Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular

Archive of SID