

تحلیل انتقال حرارت در یک صفحه مدرج با تابع درجه دوم به روش المان مرزی مبتنی بر تبدیل متغیر

حسین اشرفی^۲
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه کاشان

سید اسداله شاکر^۱ و محمود خداداد^۲
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه یزد

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۴/۱۹)

چکیده

این پژوهش، به حل معادله دیفرانسیلی حاکم بر انتقال حرارت در یک ماده غیرهمگن مدرج تابعی، با استفاده از روش المان مرزی می‌پردازد. برای این نوع مسائل، تابع گرین یا همان حل بنیادین که برای ارائه حل المان مرزی یک مسئله لازم است، به جز در موارد محدود، شناخته شده و در دسترس نیست. در این مقاله، تابع هدایت حرارتی صفحه مدرج به صورت یک تابع درجه دوم از یک راستا، فرض می‌شود. با به کارگیری یک متغیر کمکی و تبدیل متغیر، معادله دیفرانسیلی حاکم به معادله‌ای دارای حل بنیادین شناخته شده تبدیل می‌شود و لذا می‌توان مسئله انتقال حرارت در این نوع ماده مدرج تابعی دوبعدی را با روش المان مرزی حل کرد، در صورتیکه بطور معمولی و با روشهای رایج این کار امکان‌پذیر نیست. براساس رویکرد معرفی شده، یک کد کامپیوتری در محیط متلب نوشته شده است که صحت‌گذاری آن با حل مثال‌های مختلف و متنوع و مقایسه و بررسی نتایج آنها، صورت گرفته است.

واژه‌های کلیدی: انتقال حرارت هدایتی، روش المان مرزی، مواد مدرج تابعی، تابع درجه دوم

Analysis of Heat Conduction in a Quadratic Functionally Graded Plane by Boundary Element Method Based on the Variable Transmission Approach

A. Shaker and M. Khodadad
Mechanical Engineering Department
Yazd University

H. Ashrafi
Mechanical Engineering Department
University of Kashan

(Received: 14/December/2016 ; Accepted: 10/July/2017)

ABSTRACT

In this research, the governing differential equation of heat conduction problem in a non-homogenous, functionally graded material (FGM) is solved using the boundary elements method (BEM). Except for some limited cases, there is not known Green function or fundamental singular solution for this kind of problems, which is necessary to have the boundary elements analysis. In this paper, the thermal conductivity of the functionally graded plate is considered as a quadratic function of one direction and then an auxiliary variable is introduced into the governing differential equation in order to simplify the problem to a kind with known fundamental singular solution and therefore, heat transfer is solved in a 2D functionally graded material by simple boundary elements method which is not possible by common methods. Based on the proposed approach, a computer code is developed using the MATLAB. The validity of this developed code is verified by solving and analyzing a number of heat transfer problems.

Keywords: Heat Conduction, Boundary Element Method, Functionally Graded Material, Quadratic Function

۱- دانشجوی دکتری: shaker@stu.yazd.ac.ir

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): khodadad@yazd.ac.ir

۳- استادیار: hashrafi@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

می‌کند که این دسته معادلات به صورت مجزا حل می‌شوند. نمونه دیگر، تحلیل انتقال حرارت یک ورق FGM دایروی متقارن محوری با تابع تغییرات دلخواه در راستای ضخامت، تحت بار حرارتی در سطح بالا و پایین است که در [۳] با تبدیل معادله دیفرانسیلی حاکم به صورت کوپل مشتقات شعاع و ضخامت، به دو معادله دیفرانسیلی معمولی تک‌متغیره، حل تحلیلی آن به صورت یک مجموع سری برحسب تابع بسل^۵ ارائه شده است که ضرایب آن نیز با استفاده از روش خاص سری پینو-بیکر^۶ به دست می‌آید.

در بین روش‌های عددی، روش المان محدود از پرکاربردترین روش‌های عددی در حوزه‌های مختلف مسائل مهندسی می‌باشد. در روش المان محدود معمولی، هر المان به صورت همگن در نظر گرفته می‌شود، یا به عبارتی المان مدرج وجود ندارد. بنابراین، جهت تحلیل مواد مدرج تابعی با این روش، بایستی جسم را به صورت تعدادی لایه با خواص همگن برای هر لایه، در نظر گرفت که با این کار به دلیل عدم پیوستگی خواص، از دقت مسئله کاسته می‌شود، مگر این‌که تعداد لایه‌ها بسیار زیاد در نظر گرفته شود که این کار نیز به نوبه خود باعث بالا رفتن حجم محاسبات می‌شود و البته تعداد لایه مناسب باید با آزمون و خطا به دست آید. در برخی نرم‌افزارهای رایج مبتنی بر FEM به دلیل عدم تعریف ماده FGM، باید در قالب یک زیربرنامه به نرم‌افزار معرفی شود. لذا در مجموع استفاده از FEM در تحلیل‌های FGM محدودیت‌های خاص خود را دارد.

روش‌های بدون مش که خود شامل انواع دسته‌بندی‌ها هستند، در تحلیل انتقال حرارت در مواد مدرج تابعی از فراوانی نسبتاً زیادی برخوردارند. به‌طور نمونه می‌توان به تحلیل اخیر مسائل دوبعدی این حوزه در [۴] و مسائل سه‌بعدی در [۵] اشاره کرد. روش بدون مش توسعه یافته جدیدی بنام RPIM^۷ در [۶] ارائه شده که نسبت به روش‌های متداول بدون مش یعنی EFG^۸ و MLPG^۹ ساده‌تر است و ضمن دقت بیشتر و کارایی بالاتر، همگرایی خوبی نیز دارد. البته روش توسعه یافته MLPG با ویژگی‌های خاص نیز اخیراً در [۷] مورد استفاده قرار گرفته است.

مواد مدرج تابعی (FGM^۱) موادی مرکب از دو یا چند فاز هستند که معمولاً درصد ترکیب فازها در یک راستای خاص و به تبع آن خواص ترمومکانیکی آن‌ها در آن راستا تغییر می‌کند. مزیت اصلی استفاده از این مواد به‌عنوان جایگزینی برای اتصال مستقیم دو ماده نامشابه، هموارسازی توزیع تنش‌های حرارتی در میان لایه‌ها و لذا حذف و یا کاهش تنش‌های پسماندی است که اغلب حین سرد شدن از دمای کاری و یا در حین سرویس، در اثر تفاوت ضرایب انبساط حرارتی بین فلز و پوشش متفاوت از نظر جنس به وجود می‌آیند و می‌توانند باعث بروز ترک شوند. به عبارتی این مواد راه حل ایده‌آلی برای مشکل عدم تطابق خواص ترمومکانیکی در فصل مشترک اتصالات هستند. همچنین در این مواد درجه‌بندی گسترده‌ای از خواص فیزیکی و یا شیمیایی قابل حصول است. این ویژگی‌ها سبب شده کاربرد این مواد در سال‌های اخیر به شدت مورد توجه قرار گیرد. مروری بر کارهای انجام شده در این زمینه و مدل‌سازی و تحلیل FGM در [۱] آمده است.

از آن‌جا که مواد مدرج تابعی در اغلب کاربردهایشان در معرض بارگذاری حرارتی هستند، تحلیل انتقال حرارت آن‌ها با هدف تعیین دما و شار حرارتی در نقاط مختلف جسم، در سال‌های اخیر مورد توجه واقع شده است. اغلب این تحلیل‌ها با استفاده از روش‌های عددی مختلف مانند روش المان محدود (FEM^۲)، روش‌های فاقد مش^۳ و روش المان مرزی (BEM^۴) صورت گرفته است، زیرا ارائه حل تحلیلی در این حوزه هر چند غیرممکن نیست، اما اغلب پیچیده، محدود به حالت‌های خاص و همراه با در نظر گرفتن فرضیات ساده‌کننده است. به‌طور مثال توزیع حرارت غیرپایدار یک‌بعدی در سیلندر FGM ضخیم توخالی با تولید دمای غیریکنواخت در [۲] با این فرض ارائه شده است که خواص ماده به صورت تابع توانی برحسب شعاع در یک بعد تغییر کند و نیز توزیع دما تابعی از شعاع و زمان باشد. برای حل مسئله از روشی استفاده شده است که معادله دیفرانسیلی جزئی غیرخطی مختلط را به یک سری معادلات دیفرانسیلی خطی و غیرخطی ساده‌تر تبدیل

5- Bessel

6- Peano-Baker

7- Radial Point Interpolation Method

8- Element Free Galerkin

9- Meshless Local-Petrov Galerkin

1- Functionally Graded Material

2- Finite Element Method

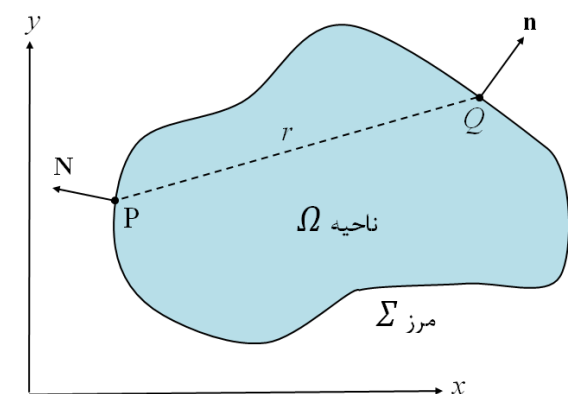
3- Meshless Methods

4- Boundary Element Method

اما در مجموع در روش‌های بدون مش، پیچیدگی خاص، محاسبات زیاد و دغدغه همگرایی وجود دارد.

در روش المان مرزی، المان‌بندی تنها روی مرز صورت می‌گیرد، لذا با کاهش یک بعد از مسئله و حجم داده‌های ورودی کمتر مورد نیاز، سبب استفاده کارآتر از رایانه می‌شود. این مزیت در حل مسائل معکوس و مسائل نیازمند مش‌بندی مجدد، کارایی خود را بیشتر نشان می‌دهد. از مزایای دیگر این روش می‌توان به توانایی مؤثر و بالا در مدل کردن انواع محیط‌های نامحدود و پیچیده، حجم اطلاعات اولیه به مراتب کمتر، سرعت عمل و دقت محاسباتی بالاتر اشاره کرد [۸]. لذا با توجه به موارد مذکور و نیز با توجه به محدودیت‌های روش المان محدود و پیچیدگی‌های روش‌های بدون مش، استفاده از روش المان مرزی در صورت امکان در اولویت قرار دارد.

مسئله اساسی در استفاده از روش المان مرزی در تحلیل یک مسئله، تعیین حل بنیادین^۱ یا تابع گرین^۲ مربوطه می‌باشد [۹]. مواد مدرج تابعی در دسته مواد غیرهمگن قرار می‌گیرند، با این ویژگی که تغییرات خواص در آن‌ها در جهت خاص و با تابع مشخصی می‌باشد. حل بنیادین یا تابع گرین در حالت کلی برای مواد غیرهمگن، وجود ندارد، لذا ارائه حل المان مرزی برای آن‌ها محدود به حالات خاص و یا مستلزم استفاده از روش‌های کمکی، می‌شود که در بخش بعدی به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. در اینجا خواص حرارتی ماده مدرج تابعی به صورت یک تابع درجه دوم از یک راستا در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۱): هندسه کلی مسئله پتانسیل دوبعدی در ناحیه Ω با مرز Σ (P نقطه چشمه با نرمال N ، Q نقطه دامنه با نرمال n).

در یک روش دیگر که برای مواد غیرهمگن به کار گرفته شده، برای غلبه بر عدم وجود تابع گرین مسئله غیرهمگن، از همان تابع گرین مسئله همگن استفاده می‌شود، اما علاوه بر گره‌های مرزی، نیازمند استفاده از تعدادی گره داخلی (جهت تعیین ضرایب مجهولی که در پروسه حل از ماهیت تکنیک

مسئله اساسی در استفاده از روش المان مرزی در تحلیل یک مسئله، تعیین حل بنیادین^۱ یا تابع گرین^۲ مربوطه می‌باشد [۹]. مواد مدرج تابعی در دسته مواد غیرهمگن قرار می‌گیرند، با این ویژگی که تغییرات خواص در آن‌ها در جهت خاص و با تابع مشخصی می‌باشد. حل بنیادین یا تابع گرین در حالت کلی برای مواد غیرهمگن، وجود ندارد، لذا ارائه حل المان مرزی برای آن‌ها محدود به حالات خاص و یا مستلزم استفاده از روش‌های کمکی، می‌شود که در بخش بعدی به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. در اینجا خواص حرارتی ماده مدرج تابعی به صورت یک تابع درجه دوم از یک راستا در نظر گرفته می‌شود.

۲- فرم کلی و حل المان مرزی هدایت حرارتی در مواد غیرهمگن

معادله حاکم برای تابع پتانسیل دما یعنی ϕ در ناحیه Ω با مرز Σ در یک ماده غیرهمگن در حالت کلی به صورت رابطه (۱-الف) است، به طوری که شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت (۱-ب) قابل بیان است [۱۰]:

$$\nabla \cdot (k(x, y, z) \nabla \phi) = 0 \quad (1-f)$$

$$\begin{cases} \phi = \bar{\phi} & \text{on } \Sigma_1 \quad (\text{Dirichlet type}) \\ q = \bar{q} & \text{on } \Sigma_2 \quad (\text{Neumann type}) \end{cases} \quad (1-b)$$

هدف این مقاله، حل مسئله دوبعدی هدایت حرارتی در ماده مدرج به روش المان مرزی، با فرض تغییرات خواص به فرم تابع درجه دوم، و با استفاده از رویکرد تبدیل متغیر می‌باشد، که قبلاً مقاله‌ای با این خصوصیات در این زمینه منتشر نشده است.

۳- ارائه حل المان مرزی هدایت حرارتی در صفحه مدرج با تابع درجه دو

ابتدا صفحه مدرج با تغییرات درجه دوم خواص در راستای y به فرم (۷) در نظر می‌گیریم:

$$k(x, y, z) = k(y) = k_0(a + by)^2 = c_0 + c_1y + c_2y^2 \quad (7)$$

معادله کلی حاکم بر مسئله همان رابطه (۱) می‌باشد. از آنجا که تابع گرین متناظر این مسئله برای ما ناشناخته است، از رویکرد تبدیل متغیر، سعی در تبدیل مسئله به فرمی ساده‌تر با تابع گرین مشخص می‌کنیم، لذا از یک متغیر کمکی به نام v استفاده می‌کنیم. با توجه به نوع تابع k در این جا یعنی تابع درجه دوم، متغیر کمکی v را به صورت رابطه (۸) (که البته مشابه متغیر انتخابی [۱۵] می‌باشد) تعریف می‌کنیم:

$$v = \sqrt{k}\phi \quad (8)$$

که البته v, k, ϕ همگی تابعی از (x, y, z) می‌باشند. با این تبدیل متغیر معادله اصلی حاکم به معادله‌ای به فرم ساده‌تر تبدیل خواهد شد. با جایگذاری ϕ از رابطه (۸) در (۱) و سپس مرتب‌سازی آن به معادله (۹) می‌رسیم:

$$\nabla^2 v + \left(\frac{\nabla k \cdot \nabla k}{4k^2} - \frac{\nabla^2 k}{2k} \right) v = 0 \quad (9)$$

اگر تابع k به فرم درجه دوم یعنی رابطه (۷)، در معادله (۹) جایگذاری شود، در نهایت رابطه ساده شده زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^2 v = 0 \quad (10)$$

معادله (۱۰) در واقع معادله لاپلاس (یا همان معادله حاکم بر انتقال حرارت در ماده همگن) است [۸]. لذا با استفاده از تبدیل متغیر، مسئله با معادله کلی (۱) با متغیر اصلی ϕ ، به معادله (۱۰) با متغیر v تبدیل شد که تابع گرین آن موجود و برای حالت دو بعدی به صورت (۱۱) است [۸]:

$$G^{2D}(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (11)$$

ناشی می‌شوند) می‌باشد و لذا همین امر باعث می‌شود که این روش علیرغم استفاده از روش المان مرزی در بطن خود، اما یک روش المان مرزی خالص محسوب نشود، زیرا در آن مزایای روش المان مرزی که مبتنی بر فقط المان‌بندی در مرزهاست، کم‌رنگ می‌شود. در [۱۱] این تکنیک برای یک مسئله با معادله حاکم و شرط مرزی به فرم کلی (۴) معرفی شده است.

$$\begin{cases} L(u) = g(x) & \text{in } x \in \Omega \\ \beta_1(x)u + \beta_2(x)q = \beta_3(x) & \text{on } x \in \Gamma \end{cases} \quad (4)$$

که در آن، $L(u)$ یک عملگر دیفرانسیلی بیضوی مرتبه دوم عمومی در نظر گرفته شده است. این تکنیک در [۱۲] برای مسئله الاستیسیته محیط غیرهمگن غیرایزوتروپ و در [۱۳] برای مسائل الاستودینامیک گذرا پیاده‌سازی شده است.

اما در حالت‌های خاصی از $k(x, y, z)$ ، که در این جا مدنظر است، با استفاده از دو رویکرد عمده می‌توان به حل المان مرزی خالص و دقیق رسید. رویکرد اول استفاده از روش‌های ریاضیاتی (مانند تبدیل لاپلاس یا فوریه و سپس مرتب‌سازی و اعمال تبدیل معکوس) و استخراج تابع گرین است که روش پیچیده و محدود به برخی از حالت‌های خاص می‌باشد. به عنوان مثال از این رویکرد در [۱۴] برای به دست آوردن تابع گرین معادله انتقال حرارت در ماده مدرج با تابع نمایی $k(z) = e^{2\beta_0 z}$ استفاده شده است. با استفاده از اعمال انتگرال فوریه روی معادلات حاکم، حل و ساده‌سازی، سپس اعمال عملگر معکوس، تابع گرین برای حالت دو بعدی و سه بعدی به ترتیب به صورت رابطه (۵) و (۶) به دست آمده است. H_0^1 در رابطه (۵)، تابع هنکل نوع اول مرتبه صفر است.

$$g^{2D}(P, Q) = \frac{i}{4} e^{-iaR_z} H_0^1(ar) \quad (5)$$

$$g^{3D}(P, Q) = \frac{e^{\beta_0(r+R_z)}}{4\pi r} \quad (6)$$

اما تاکنون با این رویکرد، کار مشابهی برای مواد مدرج تابعی با تابع درجه دوم، جهت تعیین تابع گرین انجام نشده است که می‌تواند ناشی از عدم امکان یا پیچیدگی آن باشد.

رویکرد دوم استفاده از تغییر متغیرهای خاص و تبدیل معادله حاکم بر مسئله به فرمی است که تابع گرین (یا حل بنیادین) آن شناخته شده است تا روش المان مرزی قابل اعمال بر روی مسئله شود که در [۱۵] برای مسائل پتانسیل در محیط غیرهمگن به طور کلی معرفی شده است.

به عنوان مثال برای یک مسئله دارای ۳ گره مرزی، فرم ماتریسی مسئله کمی به صورت (۱۶) می باشد:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial n} \\ \frac{\partial v_3}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

حال فرض می شود شرایط مرزی اصلی به صورت (۱۷) است:

$$\begin{cases} \bar{q}_1, \bar{\phi}_2, \bar{q}_3 & \text{known quantities} \\ \bar{\phi}_1, \bar{q}_2, \bar{\phi}_3 & \text{unknown quantities} \end{cases} \quad (17)$$

در نتیجه مجهولات مسئله کمی نیز عبارتند از: $v_1, \frac{\partial v_2}{\partial n}, v_3$ که باید همگی به سمت چپ تساوی منتقل شوند تا دستگاه معادلات مرتب شود:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} & H_{13} \\ H_{21} & -G_{22} & H_{23} \\ H_{31} & -G_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial n} \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & -H_{12} & G_{13} \\ G_{21} & -H_{22} & G_{23} \\ G_{31} & -H_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial n} \\ v_2 \\ \frac{\partial v_3}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

حال بردار سمت راست دستگاه معادلات (۱۸) با استفاده از روابط (۸) و (۱۳) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial n} v_1 - \frac{\bar{q}_1}{\sqrt{k}} \\ v_2 = \sqrt{k} \bar{\phi}_2 \\ \frac{\partial v_3}{\partial n} = \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial n} v_3 - \frac{\bar{q}_3}{\sqrt{k}} \end{cases} \quad (19)$$

با جایگذاری (۱۹) در (۱۸) و انتقال مجهولات به یک سمت و مرتب سازی، در نهایت دستگاه معادلات (۲۰) حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} (H_{11} - \frac{G_{11} \partial k}{2k \partial n}) & -G_{12} & (H_{13} - \frac{G_{13} \partial k}{2k \partial n}) \\ (H_{21} - \frac{G_{21} \partial k}{2k \partial n}) & -G_{22} & (H_{23} - \frac{G_{23} \partial k}{2k \partial n}) \\ (H_{31} - \frac{G_{31} \partial k}{2k \partial n}) & -G_{32} & (H_{33} - \frac{G_{33} \partial k}{2k \partial n}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial n} \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{q}_1}{\sqrt{k}} \\ \sqrt{k} \bar{\phi}_2 \\ -\frac{\bar{q}_3}{\sqrt{k}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

از حل این دستگاه، مقادیر مجهول کمی یعنی $v_1, \frac{\partial v_2}{\partial n}, v_3$ به دست می آید. حال به دست آوردن مجهولات اصلی به راحتی امکان پذیر است، بدین صورت که $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_3$ مستقیماً از روی

حل المان مرزی برای این معادله به فرم ماتریسی زیر قابل نمایش است:

$$[H]\{v\} = [G]\left\{\frac{\partial v}{\partial n}\right\} \quad (12)$$

ماتریس های H و G براساس خواص و هندسه جسم، شبکه بندی (محل قرارگیری گره ها و المان ها) و نوع المان ها (ثابت، خطی، درجه دو، ...) قابل محاسبه هستند. این دستگاه زمانی قابل حل است که به ازای تعداد مجهولات، شرط مرزی معلوم موجود باشد. شرط مرزی لازم برای مسئله کمی بایستی شامل v یا $\frac{\partial v}{\partial n}$ باشد، در حالی که در مسئله اصلی، شرط مرزی به صورت دما ($\bar{\phi}$) و یا شار (\bar{q}) است. بنابراین همان طور که مسئله اصلی به مسئله کمی تبدیل و متغیرهای اصلی به متغیرهای کمی تبدیل شده است، باید شرایط مرزی نیز از متغیر اصلی به متغیر کمی منتقل شود، یعنی شرایط مرزی از $\bar{\phi}$ و \bar{q} به روی v یا $\frac{\partial v}{\partial n}$ منتقل شود. v طبق رابطه (۸) داده شده است، که از روی آن $\frac{\partial v}{\partial n}$ مطابق (۱۳) به دست می آید:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial(\sqrt{k})}{\partial n} \bar{\phi} + \sqrt{k} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial n} v - \frac{\bar{q}}{\sqrt{k}} \quad (13)$$

با فرض اینکه در مسئله اصلی، شرایط مرزی به صورت دما روی مرز Σ_1 برابر $\bar{\phi}$ و شار روی مرز Σ_2 برابر \bar{q} موجود باشد، یعنی:

$$\begin{cases} \bar{\phi} = \bar{\phi} & \text{on } \Sigma_1 \\ \bar{q} = -k \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = \bar{q} & \text{on } \Sigma_2 \end{cases} \quad (14)$$

آن گاه با توجه به رابطه (۸) و (۱۳)، شرایط مرزی برای مسئله کمی، به صورت رابطه (۱۵) در می آید:

$$\begin{cases} v = \sqrt{k} \bar{\phi} & \text{on } \Sigma_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial n} v - \frac{\bar{q}}{\sqrt{k}} & \text{on } \Sigma_2 \end{cases} \quad (15)$$

ملاحظه می شود در عبارت دوم، مقدار مرزی $\frac{\partial v}{\partial n}$ به طور صریح برحسب \bar{q} داده نشده و وابسته به مجهول v در آن گره می باشد. در این حالت بایستی در دستگاه معادلات، $\frac{\partial v}{\partial n}$ برحسب مقدار معلوم \bar{q} و متغیر مجهول v جایگذاری شود. سپس دستگاه مرتب و مجهولات به یک سمت منتقل شود، به عبارتی در رابطه ماتریسی (۸)، مقادیر معلوم \bar{v} و $\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}$ بر حسب $\bar{\phi}$ و \bar{q} جایگذاری، معلومات و مجهولات هر کدام به یک سمت رابطه ماتریسی منتقل شود تا تبدیل به یک دستگاه n معادله، n مجهول و قابل حل گردد.

یعنی v و $\partial v / \partial n$ می‌رسیم که باید حل شوند و از حل آن و استفاده از روابط (۱۸) مقادیر مجهول ϕ و q به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \phi = \frac{v}{\sqrt{k}} \\ q = -\sqrt{k} \left\{ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial n} v \right\} \end{cases} \quad (22)$$

در بخش بعدی به منظور صحت‌گذاری کد المان مرزی نوشته شده، ابتدا یک مثال ساده که حل تحلیلی آن موجود است، حل و نتایج آن با نتایج حل تحلیلی مقایسه می‌شود. سپس به منظور نشان دادن کارایی روش، مثال‌های متنوع و مختلفی با این کد حل می‌شود که بررسی صحت آن‌ها از طریق مقایسه با نتایج حاصل از حل با نرم‌افزار تجاری انسیس و نیز هم‌خوانی نتایج با دید شهودی حاصل از فیزیک حاکم بر مسئله صورت می‌گیرد.

۵- حل چند مثال و بررسی نتایج

در این بخش با استفاده از روش تشریح شده و کد تهیه شده، چند مثال حل و نتایج آن بررسی می‌شود.

۵-۱- مثال اول: صفحه مربعی شکل با شرایط مرزی ساده

الف) صورت مسئله

یک صفحه دوبعدی با ابعاد واحد را در نظر می‌گیریم (شکل ۲) که دما در مرز بالایی ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد و در مرز پایینی صفر است و مرزهای جانبی عایق کاری شده‌اند، یعنی شار حرارتی در این مرزها صفر است. فرض می‌شود جنس صفحه از یک ماده مدرج تابعی که خواص آن در راستای عمودی (۷) به صورت درجه دو تغییر می‌کند، باشد. به عبارتی دیگر ضریب هدایت حرارتی^۲ در هر نقطه با تابعی به فرم رابطه (۷) تعریف می‌شود.

در این مثال $a=1$ فرض می‌شود. b به عنوان پارامتر ناهمگنی بین ۰ تا ۲ در نظر گرفته می‌شود. حالت $b=0$ بیانگر ماده همگن است و لذا k_0 (مقدار k به ازای $b=0$) بیانگر ضریب هدایت حرارتی برای ماده همگن متناظر می‌باشد. در این مثال $k_0=5$ در نظر گرفته شده است. اگر جسم همگن باشد، ضریب هدایت حرارتی در کل جسم ثابت است.

مجهولات کمکی محاسبه شده v_1, v_3 قابل تعیین است، ولی q_2 وابسته به هر دو $v_2, \frac{\partial v_2}{\partial n}$ می‌باشد، به عبارتی:

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{k}}, \quad \phi_3 = \frac{v_3}{\sqrt{k}} \\ q_2 = -k \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -k \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{v_2}{\sqrt{k}} \right) = \\ -\sqrt{k} \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial n} - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial n} v_2 \right\} \end{cases} \quad (21)$$

برای یک مسئله در حالت کلی با n المان نیز باید پروسه مشابهی اجرا شود.

۴- کدنویسی مسئله براساس روند تشریح شده

در این پژوهش، کدنویسی روند تشریح شده در بخش قبل، با استفاده از برنامه متلب^۱ انجام شده است که امکان حل مسئله هدایت حرارتی در یک صفحه مدرج با فرض تغییرات خواص به فرم درجه دوم (رابطه ۷) با روش المان مرزی را فراهم می‌کند.

در این کد ابتدا مختصات گره‌ها و شرایط مرزی در گره‌ها در قالب دما و یا شار گرفته می‌شود. به دلیل پیوستگی دما، برای دما در هر گره یک مقدار وجود دارد. از آنجا که شرط پیوستگی برای شار در یک نقطه ضروری نیست و ممکن است شرایط مرزی قبل و بعد از یک گره متفاوت باشد (که اغلب در گره‌های لبه‌ای رخ می‌دهد)، برای هر گره دو مقدار شار، یکی برای قبل از گره و دیگری برای بعد از گره، در محاسبات لحاظ می‌شود. سپس براساس تابع تغییرات k ، مقدار k و نیز $\partial k / \partial n$ در هر گره و برحسب مختصات آن محاسبه می‌شود.

برای حل مسئله در کد تهیه شده، المان‌ها به صورت خطی فرض شده‌اند. ماتریسهای H و G براساس روابط معمول المان مرزی، تشکیل می‌شود. با استفاده از رویکرد تغییرمتغیر تشریح شده در بالا، متغیرها و شرایط مرزی مسئله اصلی همگی به روی معادله کمکی در قالب معادله لاپلاس (به فرم $\nabla^2 v = 0$) منتقل می‌شوند. لذا ابتدا با انتقال شرایط مرزی از متغیر اصلی به متغیر کمکی و مرتب‌سازی دستگاه و انتقال تمامی مجهولات به سمت چپ و معلومات به راست، در نهایت به دستگاه معادلات برحسب متغیرهای کمکی و مشتقات آن‌ها

به صورت خطی بین ۰ تا ۱۰۰ تغییر می کند. مقدار تحلیلی شار نیز طبق (۲۴) به دست می آید.

$$q = k \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow q = 100k_0 a(a + bL)/L \quad (24)$$

ملاحظه می شود که شار تنها به پارامترهای ثابت b ، a ، k_0 و L وابسته است و لذا در این مثال مقدار شار در راستای y در تمام نقاط جسم ثابت است. همچنین شار نسبت به پارامتر b رابطه خطی دارد.

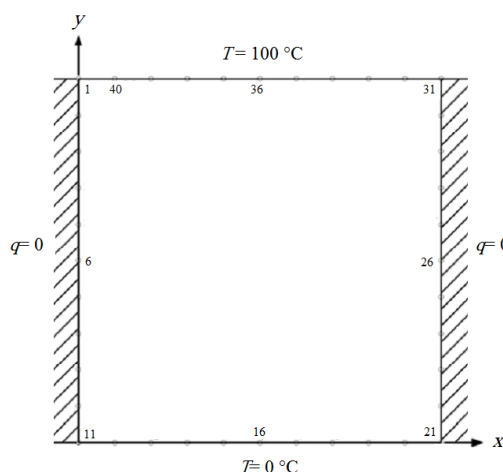
ج) حل مسئله به روش المان مرزی و صحنه گذاری نتایج

در کد نوشته شده، ابتدا فایل حاوی ورودی ها شامل مختصات و شرایط مرزی هر گره و ضرایب تابع درجه دوم تغییرات خواص شامل k_0 ، a و b (یا c_0 ، c_1 ، c_2 در صورت استفاده از فرم دیگر رابطه (۷) به برنامه داده می شود. در این مثال $a=1$ و $k_0=5$ فرض شده است و مقدار b بین صفر تا ۲ تغییر می کند. حالت $b=0$ معادل ماده همگن می باشد. لذا مقدار تابع k در هر گره از روی ضرایب ثابت و مختصات y آن گره طبق تابع مفروض (۷) محاسبه می شود.

با اجرای برنامه، نتایج شامل مقدار دما در گره های جانبی (و لذا تغییرات دما در راستای y) و شار در گره های وجوه بالا و پایین صفحه به دست می آید.

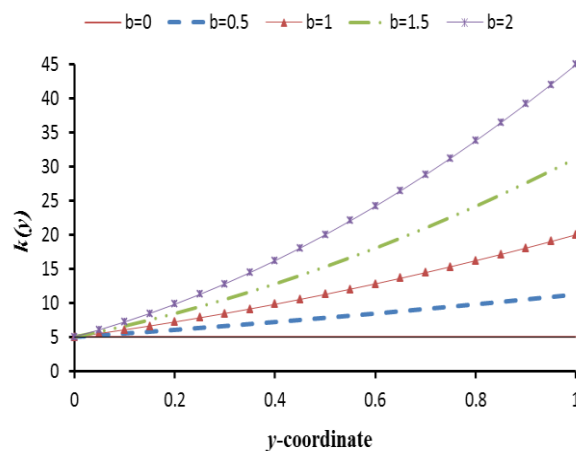
برای بررسی روش و مقایسه، مسئله با ۱۶، ۲۴، ۳۲ و ۴۰ گره مرزی حل می شود. ملاحظه می شود به دلیل ساده بودن مسئله، حتی با ۱۶ گره مرزی (۴ المان در هر وجه) نیز نتایج از دقت بسیار بالایی برخوردار است، به طوری که بر نتایج تحلیلی انطباق خوبی دارد. افزایش بیشتر تعداد گره ها تأثیر زیادی بر نتایج ندارد، و این از مزایای روش المان مرزی محسوب می شود که با تعداد المان کم، نتایج مناسب و با دقت بالایی به دست می دهد.

در این مسئله، به خاطر هندسه، شرایط مرزی و نوع تابع تغییرات خواص، دمای نقاط مختلف جسم تنها در راستای y تغییر می کند، لذا نمودار دمای گره های جانبی به عنوان نمودار تغییرات دما در راستای y به ازای b های مختلف در مقایسه با حل تحلیلی در شکل ۴ ترسیم شده است. در این جا جهت دقت بالاتر و داشتن تعداد نقاط بیشتر برای مقایسه و ترسیم نمودار، از نتایج حل به ازای ۱۰ المان مرزی در هر وجه استفاده شده است.



شکل (۲): هندسه (صفحه مربعی به ابعاد واحد) و شرایط مرزی مثال اول.

مقدار ضریب هدایت حرارتی در نقاط مختلف جسم که به عنوان ورودی مسئله عددی لازم است، از روی تابع k یعنی رابطه (۷) قابل محاسبه است که نمودار آن بر حسب y به ازای مقادیر مختلف b شامل ۰، ۰/۵، ۱، ۱/۵، ۲ در شکل ۳ رسم شده است.



شکل (۳): نمودار تغییرات k (تابع درجه دو) بر حسب y به ازای b های مختلف به عنوان ورودی مسئله.

ب) حل تحلیلی مثال

برای هندسه فوق با طول ضلع L ، به دلیل عدم پیچیدگی، مسئله دارای حل تحلیلی به فرم (۲۳) است:

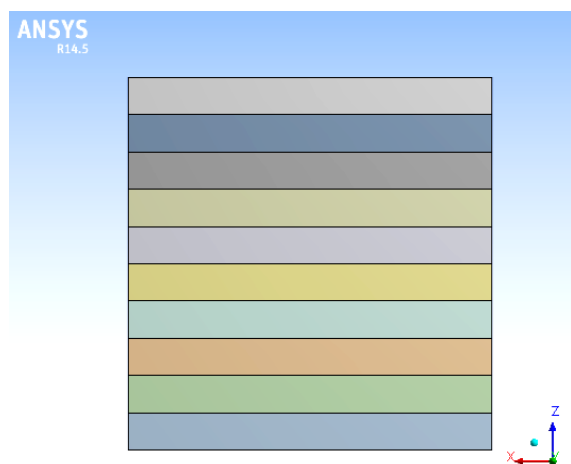
$$T(y) = 100 \frac{(a+bL)y}{(a+by)L} \xrightarrow{L=1} T(y) = 100 \frac{(a+b)y}{(a+by)} \quad (23)$$

$T(y)$ نشان دهنده دما در هر نقطه بر حسب y می باشد. همان طور که انتظار می رود، برای یک ماده همگن، دما

مبنا مقایسه و بررسی نتایج قرار خواهد گرفت. قبل از بررسی مثال‌های پیچیده، امکان استفاده از انسیس و نیز نحوه مدل‌سازی و حل مسئله هدایت حرارتی در یک ماده مدرج تابعی با آن، طی حل مجدد همین مثال ساده، به‌طور خلاصه در زیر نشان داده می‌شود.

د) حل مثال اول با نرم‌افزار انسیس

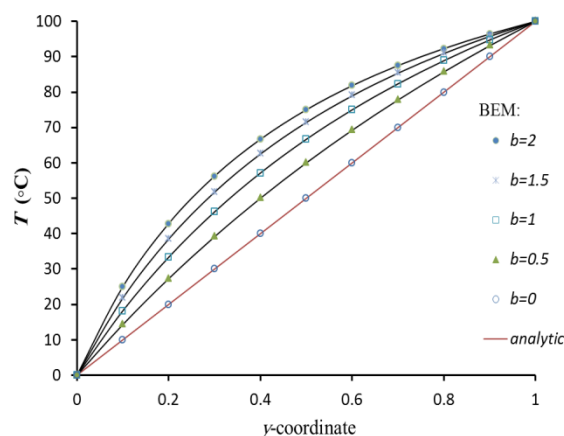
ابتدا نوع تحلیل در نرم‌افزار به‌صورت انتقال حرارت پایا^۲ انتخاب می‌شود. از آن‌جا که ماده مدرج در پیش‌فرض نرم‌افزار انسیس تعریف نشده است، برای مدل‌سازی اجسام بایستی آن‌ها را با تعدادی لایه از ماده همگن با یک مقدار ثابت خواص، جایگزین کرد (شکل ۶). تعداد لایه مناسب برای مدل‌سازی با آزمون و خطا به‌دست می‌آید که در این‌جا پس از آزمون و خطا بین ۵، ۱۰ و ۲۰ لایه، در نظر گرفتن تعداد ۱۰ لایه در راستای y ، به‌عنوان مناسب‌ترین انتخاب تشخیص داده شد. زیرا نتایج تحلیل با ۱۰ لایه دقت بیشتر و مشهودتری نسبت به حالت ۵ لایه دارد، اما افزایش لایه‌ها به ۲۰ لایه ضمن بالا بردن زمان مدل‌سازی و تحلیل، تأثیر چندانی بر دقت ندارد.



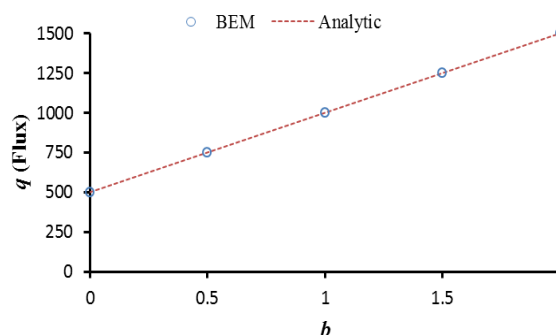
شکل ۶: مدل‌سازی ماده مدرج به‌صورت لایه لایه در انسیس.

پس از مدل‌سازی هندسی، نیاز به تعریف مشخصات هر لایه و اعمال شرایط مرزی است. در این‌جا مقدار k در نقطه وسط هر لایه به‌عنوان مقدار ضریب هدایت حرارتی آن لایه داده شده است. با اعمال شرایط مرزی و حل مسئله، مقادیر دما در راستای y به‌ازای b های مختلف استخراج و در شکل ۷

نمودار شار بر حسب b نیز در شکل ۵ نشان داده شده است و همان‌گونه که ملاحظه می‌شود مقدار حاصل از حل المان مرزی کاملاً بر مقدار تحلیلی آن منطبق است. شکل‌های ۴ و ۵ اثر b بر توزیع دما و مقدار شار را نشان می‌دهند. در این مثال مقدار k_0 تأثیری بر دمای گره‌های جانبی ندارد، ولی مقدار ثابت شار به‌صورت خطی با آن تغییر می‌کند.



شکل ۴: نمودار دما در راستای y به‌ازای b های مختلف برای مثال اول (نتایج حل المان مرزی در مقایسه با نتایج تحلیلی).



شکل ۵: نمودار شار حرارتی در راستای y بر حسب b صفحه مدرج با تابع درجه دوم.

نتایج حاصل از حل این مثال، کارایی روش المان مرزی و صحت کد مورد استفاده را در تحلیل هدایت حرارتی در ماده مدرج درجه دوم، به‌خوبی نشان می‌دهد. با این وجود، حل مثال‌های متنوع و مختلف دیگر به اعتبار پژوهش حاصل می‌افزاید که در ادامه آورده می‌شود.

مقایسه مثال فوق به‌دلیل سادگی، با نتایج تحلیلی امکان‌پذیر بود، اما در مسائل پیچیده‌تر بعدی، نتایج حل با نرم‌افزار انسیس^۱ و نیز درک شهودی حاکم بر فیزیک مسئله،

مشابه مثال قبل، با تبدیل صفحه به ۱۰ لایه در راستا y ، مسئله را با نرم افزار انسیس حل می کنیم. جدول ۱ مقدار دمای گره های ۱ تا ۱۴ حاصل از حل المان مرزی را در مقایسه با حل انسیس نشان می دهد و همان طور که ملاحظه می شود با المان بندی مذکور، نتایج تقریباً بر یکدیگر منطبق هستند، به طوری که اختلاف دماها با یکدیگر در تمام گره ها بسیار کم و زیر ۱٪ است. به خاطر تقارن، دمای گره های ۳۱ تا ۱۸ مساوی گره های ۱ تا ۱۴ می باشد و دما در مابقی گره ها نیز به عنوان شرط مرزی داده شده است.

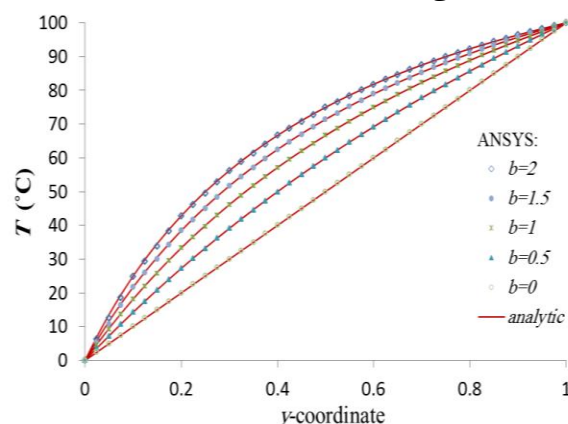
جهت ملاحظه اثر تغییر در هندسه بر توزیع دما در مرزها، نتایج حاصل از حل این مثال در مقایسه با نتایج مثال اول (با فرض یکسان بودن تابع تغییرات k) در قالب نمودار مقدار دما بر حسب شماره گره در شکل ۹ ترسیم شده است.

همان طور که مشاهده می شود تغییر هندسه، باعث تغییرات واضح در قسمت پله ای شکل شده است و همچنین مقدار دما در گره ها بالاتر از گره های متناظر در مثال قبل (مربع کامل) می باشد، زیرا شار ورودی برای خروج از وجه پائین باید متمرکز شود.

جدول (۱): مقایسه حل المان مرزی با انسیس در تعیین دمای گره های جانبی.

دمای گره ($^{\circ}\text{C}$)		شماره گره
انسیس	المان مرزی	
۱۰۰	۱۰۰	۱
۹۸/۶۶۵	۹۸/۶۶۲	۲
۹۷/۲۴۰	۹۷/۲۲۹	۳
۹۵/۸۵۱	۹۵/۸۳۵	۴
۹۴/۷۴۷	۹۴/۷۳۲	۵
۹۴/۲۷۷	۹۴/۳۲۵	۶
۹۳/۷۷۵	۹۳/۸۳۷	۷
۹۱/۹۸۵	۹۲/۰۲۹	۸
۸۶/۲۷۹	۸۶/۲۷۳	۹
۷۴/۵۲۲	۷۴/۹۵۹	۱۰
۶۲/۶۳۹	۶۳/۰۲۵	۱۱
۴۷/۶۵۵	۴۷/۹۷۸	۱۲
۲۷/۷۶۴	۲۷/۹۸۲	۱۳
.	.	۱۴

در مقایسه با نتایج تحلیلی ترسیم شده است، نمودارها انطباق آن ها را نشان می دهد.

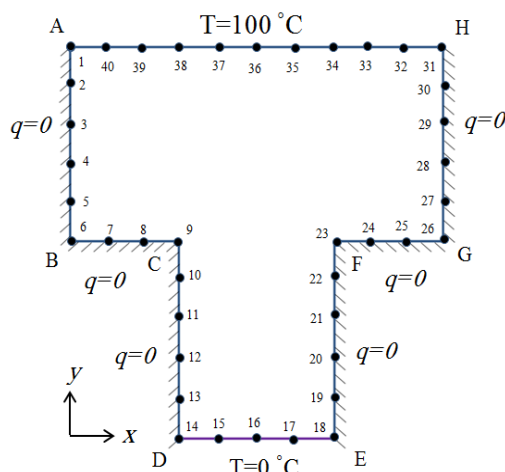


شکل (۷): نمودار دما در راستا y به ازای b های مختلف برای مثال اول (نتایج حل انسیس در مقایسه با نتایج تحلیلی).

در مثال های بعد، می توان با همین الگو به تحلیل مسئله با انسیس پرداخت و نتایج المان مرزی با نتایج آن مقایسه می شود.

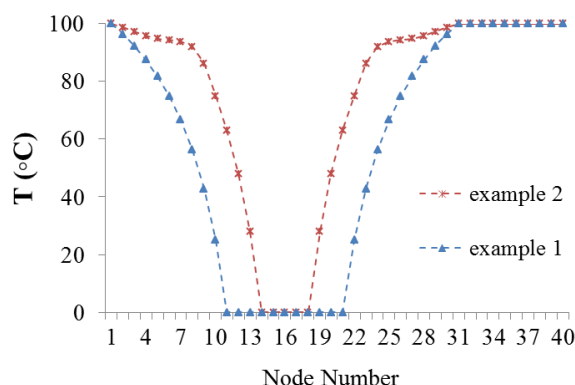
۵-۲- مثال دوم: تغییر در هندسه

مثال اول را با این تفاوت که از طرفین پائینی آن، دو پله به طور متقارن جدا شود را در نظر می گیریم و لذا هندسه و شرایط مرزی به صورت شکل ۸ درمی آید. اضلاع AB, CD, EF و GH به ۵ المان، BC و FG به ۳ المان، DE به ۴ المان و HA به ۱۰ المان تقسیم می شود، به طوری که طول همه المان ها یکسان است. ضرایب تابع هدایت حرارتی (رابطه ۷) نیز $a=1$ ، $b=2$ و $k_0=5$ فرض می شود و سپس مسئله با کد المان مرزی حل می شود.

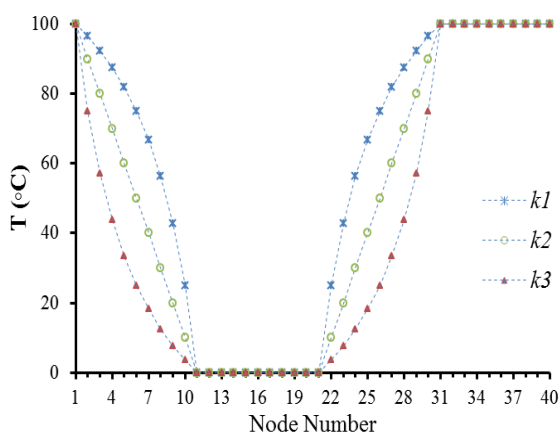


شکل (۸): هندسه و شرایط مرزی مثال دوم.

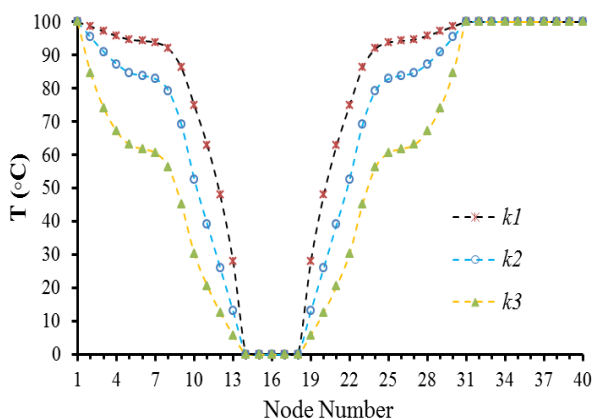
حالات، کمترین مقدار را دارا می‌باشد، یعنی حالت کمینه برای میانگین دمای کل جسم را شاهد هستیم. این تحلیل ساده می‌تواند یک دید اولیه خوبی از نحوه تغییرات دمای جسم با هر هندسه و براساس نوع تغییرات خواص، به طراح می‌دهد. هدف طراح می‌تواند سریع‌ترین یا کندترین افت دما و یا بیشترین یا کمترین میانگین دما در جسم باشد که این نوع تحلیل‌ها و موارد مشابه، می‌تواند براساس نیاز طراحی، گزینه مناسب را پیشنهاد دهد.



شکل (۹): مقایسه دمای گره‌های مرزی مثال اول و دوم.



شکل (۱۰): نمودار دمای گره‌های مرزی مثال اول در حالت‌های مختلف k



شکل (۱۱): نمودار دمای گره‌های مرزی مثال دوم در حالت‌های مختلف k

۴-۵- مثال چهارم: اعمال شرایط مرزی متفاوت و غیرمتقارن

در این مثال، مطابق شکل ۱۲، شرایط مرزی متفاوتی نسبت به مثال‌های قبل اعمال می‌شود ولی خواص حرارتی و ضرایب آن، مشابه قبل فرض می‌شود.

۵-۳- مثال سوم: بررسی اثر نحوه تغییرات k

با کد نوشته شده، می‌توان اثر نوع تغییرات k را نیز بر روند تغییرات دما در گره‌ها بررسی کرد. برای نمونه در این‌جا، برای هر دو مثال قبل، سه حالت برای k در نظر می‌گیریم: حالت اول: $k1 = k_0(a + by)^2$ ، به عبارتی ماده مدرج با تابع درجه دوم با روند تغییرات به صورت صعودی نسبت به y فرض می‌شود.

حالت دوم: $k2 = k_0$ یا همان ماده همگن.

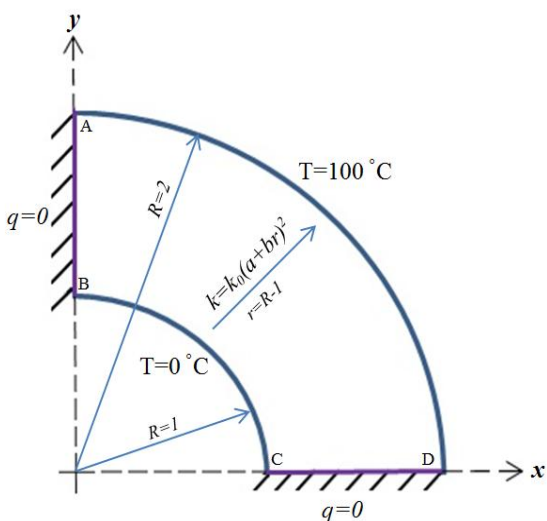
حالت سوم: $k3 = k_0(a + b(1 - y))^2$ ، به عبارتی ماده مدرج با تابع درجه دوم با روند تغییرات نزولی نسبت به y فرض می‌شود.

سپس با فرض $a = 1$ و $b = 2$ مسئله را حل می‌کنیم. مقدار k_0 نیز اختیاری است، زیرا دمای گره‌ها در این مثال‌ها، مستقل از آن است. دما در وجوه جانبی الزاماً از $T = 0$ در $y = 0$ تا $T = 100$ در $y = 1$ تغییر می‌کند و لذا همواره تغییر دما نسبت به y روند صعودی دارد یا به عبارتی دیگر هم‌جهت با y است. از این منظر تغییرات k در حالت اول هم‌علامت با تغییرات دماست و در حالت سوم عکس آن است. جهت مقایسه این موارد، پس از حل مجدد مثال‌های اول و دوم در هر سه حالت مختلف k ، نمودارهای مقدار دما در هر گره مرزی، در شکل ۱۰ و شکل ۱۱ به ترتیب برای مثال اول و دوم ترسیم شده است.

مقایسه حالات مختلف k نشان می‌دهد فارغ از نوع هندسه، در حالت اول (که روند تغییر k با روند تغییر دما در راستای y هم‌جهت هستند)، افت دما از سطح بالایی جسم با شیب کمتری رخ می‌دهد و بالعکس در حالت سوم افت دما از سطح بالا با بیشترین شیب رخ می‌دهد و در این حالت دمای گره‌های مرزی نسبت به گره متناظر آن در سایر

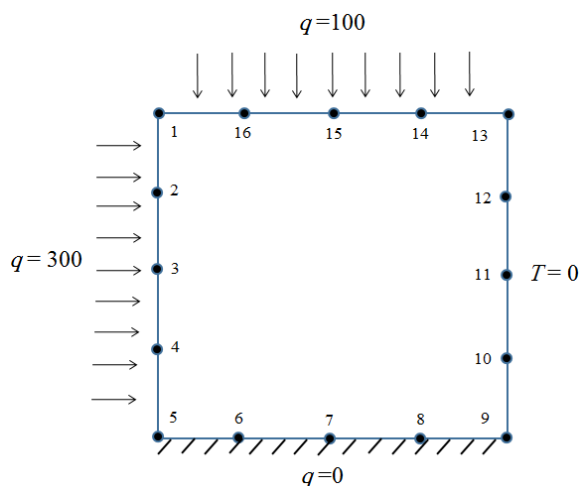
۵-۵- مثال پنجم: دیسک دایروی

در این مثال، تحلیل یک دیسک دایروی از ماده مدرج با تغییرات خواص به صورت تابع درجه دو در راستای شعاع، به طوری که سطح بیرونی آن در دمای ۱۰۰ درجه و سطح داخلی آن در دمای صفر درجه سانتی گراد ثابت نگه داشته شده است، مدنظر است. به دلیل تقارن موجود در هندسه می توان تنها یک چهارم آن را در نظر گرفت به طوری که شار در دو وجه کناری صفر است. لذا هندسه و شرایط مرزی مسئله با شکل ۱۳ قابل نمایش است که مشابهت فیزیکی نیز با مثال اول دارد.



شکل (۱۳): هندسه و شرایط مرزی مثال پنجم.

در تحلیل مسئله با کد نوشته شده، هر کدام از وجوه مرزی، به ۱۰ المان تقسیم شده است. در این مثال نیز، از آنجا که دو سمت جسم (وجوه AB و CD) عایق است، با توجه به شرایط مرزی دمایی، بایستی حرارت از وجه AD وارد و از وجه BC خارج شود. به دلیل پایا بودن^۱ مسئله، مقدار کل حرارت ورودی (Q) با مقدار کل حرارت خروجی برابر است. در مثال اول با توجه به تقارن هندسی مربع، مقدار شار در وجوه بالا و پایین در تمام نقاط مساوی است (البته شار ورودی مثبت و خروجی منفی است). اما در این مثال از آنجا که طول AD (محل ورود شار) بزرگتر از طول BC (محل خروج شار) است، لذا مقدار شار (که برابر $q=Q/L$ است در صورتی که L طول مسیر باشد) در هر گره از وجه AD، کمتر از مقدار شار در گره متناظر آن روی وجه BC می باشد.

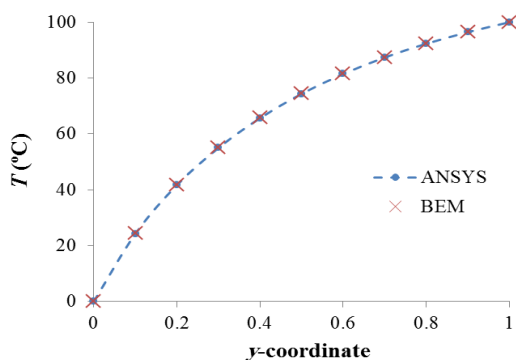


شکل (۱۲): هندسه و شرایط مرزی متفاوت در مثال چهارم.

برای حل المان مرزی ۱۶ گره لحاظ و مسئله حل می شود. جهت صحت گذاری نتایج، مشابه قبل از نرم افزار انسیس استفاده می شود که در آن جسم در راستای y به ۱۰ لایه تقسیم شده است. نتایج دما در گره های مرزی حاصل از حل المان مرزی و انسیس، در جدول ۲ آمده است. با توجه به این که حداکثر اختلاف دماهای محاسبه شده با این دو روش، کمتر از ۰.۲٪ می باشد و لذا انطباق بسیار بالا نتایج بر یکدیگر، می توان گفت روش از صحت و دقت بالایی برخوردار می باشد.

جدول (۲): دمای گره های مرزی حاصل از حل المان مرزی در مقایسه با نتایج انسیس.

شماره گره	دمای گره (°C)		درصد اختلاف نتایج (%)
	المان مرزی	انسیس	
۱	۱۴/۷۴۲	۱۴/۷۰۸	۰/۲۳
۲	۱۴/۹۷۲	۱۴/۹۲۶	۰/۳۱
۳	۱۶/۶۹۷	۱۶/۵۵۹	۰/۸۳
۴	۲۰/۱۱	۱۹/۸۶۷	۱/۲۲
۵	۲۳/۸۹۱	۲۳/۴۸۵	۱/۷۳
۶	۱۴/۶۷۸	۱۴/۷۷۱	۰/۶۳
۷	۹/۱۹	۹/۲۲۴	۰/۳۶
۸	۴/۴۸۸	۴/۵۰۳	۰/۳۳
۹-۱۳	۰	۰	۰
۱۴	۴/۷۸۶	۴/۷۸۵	۰/۰۲
۱۵	۸/۸۶۳	۸/۸۳۱	۰/۳۶
۱۶	۱۲/۳۰۷	۱۲/۲۴۵	۰/۵



شکل (۱۶): نمودار تغییرات دمای گره‌های مرز جانبی در راستای y (حل المان مرزی در مقایسه با انسیس).

۶- نتیجه‌گیری

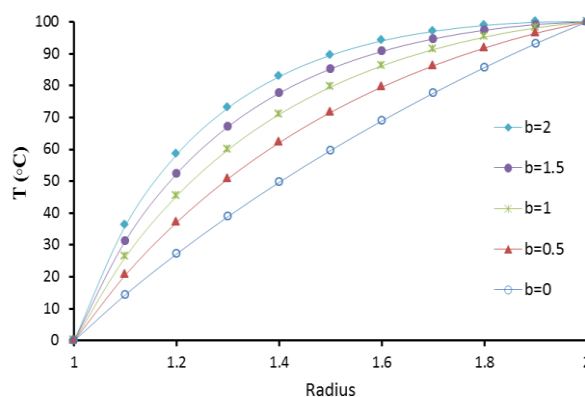
از آن‌جا که تحلیل مسئله انتقال حرارت در یک FGM به‌روشنی حل بنیادین) امکان‌پذیر نیست، در این پژوهش ابتدا فرض می‌شود تغییرات خواص در یک راستا و به فرم تابع درجه دوم است. در این حالت با استفاده از رویکرد تغییرمتغیر، سعی می‌کنیم معادلات حاکم بر مسئله به فرم دیگری تبدیل شود که تابع گرین آن موجود است. با این کار امکان فرمولاسیون و حل مسئله با المان مرزی و در نتیجه بهره‌گیری از مزایای آن فراهم می‌شود. متغیر کمکی مورد استفاده در این‌جا، باعث تبدیل معادله حاکم، به معادله لاپلاس می‌گردد. براساس رویکرد تشریح شده در مقاله، یک کد کامپیوتری بر مبنای روش المان مرزی در محیط برنامه‌نویسی متلب توسعه داده شده و با استفاده از آن مثال‌های متنوعی حل شده است.

به‌عنوان اولین مثال یک صفحه مربعی ساده که قابل حل به‌روشنی تحلیلی است، در نظر گرفته شده است. نتایج حل المان مرزی انطباق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی آن دارد.

مثال دوم با تغییر در هندسه مثال اول همراه است. دمای گره‌های مرزی حاصل از حل با کد المان مرزی با حل انسیس چک شده است و اختلاف زیر ۱٪ بین جواب‌های این دو روش، بیانگر انطباق بسیار خوب نتایج و لذا صحت روش و کد مورد استفاده می‌باشد.

در مثال سوم، با در نظر گرفتن سه تابع مختلف برای هدایت حرارتی و حل مجدد مثال‌های اول و دوم در تمامی این حالات، به بررسی اثر تابع هدایت حرارتی بر توزیع دماهای مرزی پرداخته شده است. مقایسه حالات مختلف k نیز نشان

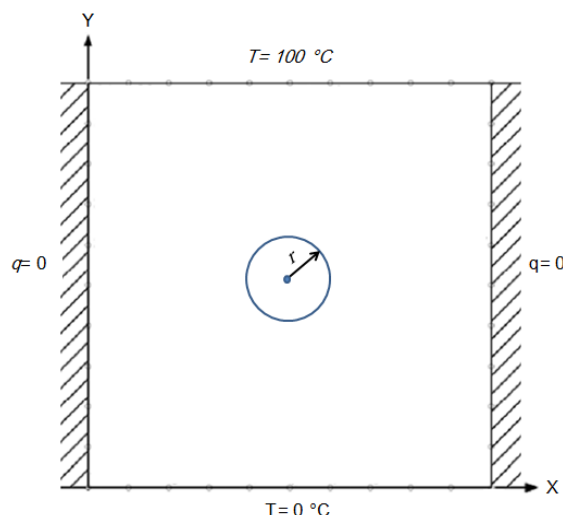
نمودار دمای گره‌ها در مرزهای جانبی برحسب شعاع و b های مختلف در شکل ۱۴ ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر دما در گره‌های دو مرز جانبی (AB و CD) یکسان و روند تغییرات مشابه مثال اول است اما مقدار دمای گره‌ها با توجه به تغییر هندسه متفاوت از مثال اول است.



شکل (۱۴): نمودار دمای گره‌های مرز جانبی برحسب شعاع و b های مختلف (مثال پنجم).

۶-۵- مثال ششم: هندسه دارای حفره

در کد نوشته شده می‌توان با اعمال تغییرات، مسائل دارای حفره را نیز حل کرد. مثال اول را با وجود یک حفره به شعاع 0.1 طول ضلع مربع، و در مرکز آن در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵).



شکل (۱۵): صفحه دارای حفره از ماده مدرج با تابع درجه دوم.

دمای گره‌های مرزی با المان مرزی و نیز با انسیس به‌طور جداگانه به‌دست آمده و جهت مقایسه با یکدیگر در شکل ۱۶ ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود نتایج بر یکدیگر منطبق‌اند.

3. Wu-Xiang, L. "Analysis of Steady Heat Conduction for 3D Axisymmetric Functionally Graded Circular Plate", J. Central South Uni. Vol. 20, No. 6, pp. 1616-1622, 2013.
4. Wang, H., Qin, Q. H., and Kang, Y. L. "A Meshless Model for Transient Heat Conduction in Functionally Graded Materials", Comput. Mech. Vol. 38, No. 1, pp. 51-60, 2005.
5. Sladek, J., Sladek, V., Tan, C. L., and Atluri, S. N. "Analysis of Transient Heat Conduction in 3D Anisotropic Functionally Graded Solids by the MLPG Method", Comput. Modell. Eng. Sci. Vol. 32, No. 3, pp. 161-174, 2008.
6. Khosravifard, A., Hematiyan, M. R., and Marin, L. "Nonlinear Transient Heat Conduction Analysis of Functionally Graded Materials in the Presence of Heat Sources Using an Improved Meshless Radial Point Interpolation Method", Appl. Math. Modell. Vol. 35, No. 9, pp. 4157-4174, 2011.
7. Dai, B., Zhang B., Liang, Q., and Wang, L. "Numerical Solution of Transient Heat Conduction Problems Using Improved Meshless Local Petrov-Galerkin Method", Appl. Math. Comput. Vol. 219, No. 19, pp. 10044-10052, 2013.
8. Brebbia, C. A., and Dominguez, J. "Boundary Elements: an Introductory Course", WIT press, Southampton, UK, 1994.
9. Khodadad, M., and Dashti, M. "Boundary Elements Method", Tehran: Mogestan, 2011. (in Persian)
10. Sutradhar, A., Reeder, J., and Gray, L. J. "Symmetric Galerkin Boundary Element Method", Springer Science & Business Media, 2008.
11. Katsikadelis, J. T. "The BEM for Nonhomogeneous Bodies", Arch. Appl. Mech. Vol. 74, No. 11-12, pp. 780-789, 2005.
12. Nerantzaki, M. S., and Kandilas, C. B. "A Boundary Element Method Solution for Anisotropic Nonhomogeneous Elasticity", Acta Mech. Vol. 200, No. 3-4, pp. 199-211, 2008.
13. Kandilas, C. B. "Transient Elastodynamic Analysis of Nonhomogeneous Anisotropic Plane Bodies", Acta Mech. Vol. 223, No. 4, pp. 861-878, 2012.
14. Gray, L. J., Kaplan, T., Richardson, J. D., and Paulino, G. H. "Green's Functions and Boundary Integral Analysis for Exponentially Graded Materials: Heat Conduction", J. Appl. Mech. Vol. 70, No. 4, pp. 543-549, 2003.
15. Sutradhar, A., and Paulino, G. H. "A Simple Boundary Element Method for Problems of Potential in Nonhomogeneous Media", Int. J. Numer. Methods Eng. Vol. 60, No. 13, pp. 2203-2230, 2004.

می‌دهد فارغ از نوع هندسه، در حالت اول که روند تغییر k با روند تغییر دما در راستای y هم‌جهت هست، افت دما از سطح بالایی جسم با شیب کمتری رخ می‌دهد و بالعکس در حالت سوم افت دما از سطح بالا با بیشترین شیب رخ می‌دهد. در حالت سوم دمای تمامی گره‌های مرزی نسبت به گره متناظر آن در سایر حالات، کمترین مقدار را دارا می‌باشد، یعنی حالت کمینه برای میانگین دمای کل جسم را در این حالت شاهد هستیم. در قالب این مثال ملاحظه می‌شود که یک طرح می‌تواند از این نوع تحلیل‌ها برای دستیابی به دید اولیه خوب از اثر پارامترهای مختلف مانند هندسه، نوع تابع و شرایط مرزی، بر توزیع دمای مرزی استفاده کند و براساس نیاز طراحی خود (مانند سریع‌ترین/کندترین افت دما، بیشترین/کمترین میانگین دما در جسم) گزینه مناسبی را انتخاب کند.

حل مسئله‌ای با شرایط مرزی متفاوت و غیرمتقارن در مثال چهارم انجام شده است. نتایج کد المان مرزی در تطابق خوبی با نتایج حل انسیس است به طوری که بیشترین اختلاف بین دماهای حاصل از این دو روش کمتر از ۰.۲٪ می‌باشد.

برای نشان دادن کارایی روش در حل مثال‌های پیچیده‌تر، حل مسئله هدایت حرارتی در یک دیسک دایروی با تغییرات هدایت حرارتی به صورت درجه دوم در راستای شعاعی در مثال پنجم و هم‌چنین تحلیل هدایت حرارتی در یک صفحه دارای حفره داخلی در مثال ششم انجام شده است.

در مجموع، با حل مثال‌های مختلف و متنوع، کارایی روش و کد توسعه یافته در تحلیل هدایت حرارتی در صفحات مدرج با هر نوع هندسه نشان داده شده است. تنها فرض اعمال شده در این موارد در نظر گرفتن تغییرات خواص به صورت درجه دوم در یک راستا می‌باشد.

۷- مراجع

1. Birman, V. and Byrd, L. W. "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", J. Appl. Mech. Rev. Vol. 60, No. 5, pp.195-216, 2007.
2. Ehsani, F., and Ehsani, F. "Transient Heat Conduction in Functionally Graded Thick Hollow Cylinders under Non-Uniform Heat Generation by Homotopy Perturbation Method", J. Basic Appl. Sci. Res. Vol. 2, No. 10, pp. 10676-10676, 2012.

