

استفاده از روش عناصر مرزی متقابل دوگانه در پهنه‌بندی شوری آب‌های زیرزمینی منطقه نوق رفسنجان

عیسی اسفندیارپور بروجنی^۱، مهدی سویزی^۲

(دریافت ۹۲/۱۰/۶ پذیرش ۹۳/۶/۲۷)

چکیده

در این مقاله، یک روش عددی جدید بر پایه روش عناصر مرزی متقابل دوگانه برای درونیابی داده‌های پراکنده ارائه شد. برای این منظور، از ۱۲۰ حلقه چاه موجود در منطقه نوق رفسنجان نمونه‌برداری و شوری آب آن‌ها اندازه‌گیری شد. ضمن پهنه‌بندی مکانی وضعیت شوری آب‌های زیرزمینی منطقه مورد مطالعه، دقت تخمینگر پیشنهادی با تخمینگرهای معمول (کریجینگ معمولی و معکوس فاصله وزندار) مقایسه شد. به علاوه، کارآمدترین روش درونیابی از طریق تعیین میانگین رتبه‌ای هر کدام از سه تخمینگر مزبور تعیین شد. نتایج نشان داد که دقت روش عناصر مرزی متقابل دوگانه، به‌علت دارا بودن مقادیر کمتر شاخص‌های اعتبارسنجی جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) و جذر میانگین مربعات خطای نسبی (RMSE%) و نیز مقدار بیشتر شاخص نیکویی تخمین (G)، نسبت به تخمینگرهای کریجینگ و معکوس فاصله وزندار برتری نسبی دارد. همچنین، استفاده از میانگین رتبه‌ای و انحراف استاندارد رتبه‌ها به‌منظور دوری جستن از اثرات داده‌های پرت نشان داد که روش عناصر مرزی متقابل دوگانه از کارایی تخمین بالاتری نسبت به دو تخمینگر دیگر برخوردار است. با این وجود، ترکیب روش عناصر مرزی متقابل دوگانه با متغیرهای کمکی در راستای بهبود کارایی درونیابی و توسعه یک الگوریتم کاربرپسند با قابلیت کاربرد در یک بسته نرم‌افزاری سامانه اطلاعات جغرافیایی، نیازمند پژوهش‌های بیشتری است.

واژه‌های کلیدی: روش‌های عددی، روش عناصر مرزی متقابل دوگانه، درونیابی، اعتبارسنجی، داده‌های پیوسته‌ی مکانی

Mapping of Groundwater Salinity Using Dual Reciprocity Boundary Element Method in Nuq Region, Rafsanjan

I. Esfandiarpour Borujeni¹, M. Sovizi²

(Received Dec. 27, 2013 Accepted Sep. 18, 2014)

Abstract

In this study, a new numerical method based on Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM) is presented to interpolate scattered data. For this purpose, water samples were taken from 120 wells in Nuq region, Rafsanjan, for salinity measurements. The proposed estimator was compared with respect to its precision with the conventional ones, i.e., ordinary kriging and inverse distance weighting (IDW) while the spatial mapping of ground water salinity was performed in the study area. Besides, a more revealing measure of performance was obtained by computing the mean rank of each interpolation method. Results revealed the superiority of DRBEM over the kriging and IDW methods due to its lower root mean square error (RMSE) and relative root mean square error (RMSE%) as well as its higher goodness of prediction index (G). It was also found that DRBEM is

1. Assoc. Prof., Dept. of Soil Sciences., College of Agriculture, Vali-e-Asr University of Rafsanjan (Corresponding Author) (+98 34) 31312019 iesfandiarpour@yahoo.com
2. Ass. Prof., Dept. of Physics, Faculty of Sciences, Vali-e-Asr University of Rafsanjan

۱- دانشیار گروه علوم خاک، دانشکده کشاورزی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
iesfandiarpour@yahoo.com (۰۳۴) ۳۱۳۱۲۰۱۹ (نویسنده مسئول)
۲- استادیار گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

the most accurate one when the mean rank and standard deviations of the ranks are used to avoid the outlier effects in assessing the prediction performance of the three methods. Nevertheless, further research is required before DRBEM could be properly combined with ancillary variables to improve the interpolation performance and to develop a user-friendly algorithm that can be implemented in a GIS package.

Keywords: Numerical Methods, Dual Reciprocity Boundary Element Method, Interpolation, Validation, Spatial Continuous Data.

۱- مقدمه

به طور معمول، داده‌های محیطی از طریق منابع نقطه‌ای در مطالعات صحرایی جمع‌آوری می‌شوند. این در حالی است که مدیران و برنامه‌ریزان محیطی، اغلب نیازمند داده‌های پیوسته مکانی به منظور اتخاذ تصمیم‌های مؤثر و قابل اطمینان برای منطقه مورد نظر خود می‌باشند. هرچند داده‌های پیوسته مکانی، نقش مهمی در برنامه‌ریزی، ارزیابی خطر و تصمیم‌گیری‌های مربوط به مدیریت محیطی بازی می‌کنند؛ لیکن این داده‌ها همواره به سهولت در دسترس نمی‌باشند و اغلب به دست آوردن آن‌ها مشکل و یا همراه با صرف هزینه زیاد است.

با ورود سامانه اطلاعات جغرافیایی^۱ و فناوری‌های مدل‌سازی به عنوان ابزاری قدرتمند در مدیریت و حفاظت منابع طبیعی، نیاز به داده‌های پیوسته مکانی حاصل از متغیرهای محیطی دوچندان شده است [۱ و ۲]. در چنین شرایطی، روش‌های درون‌یابی مکانی^۲، ابزاری را فراهم می‌کنند تا با به‌کارگیری داده‌های نقطه‌ای و تخمین مقادیر یک متغیر محیطی در محل‌هایی که نمونه‌برداری نشده است، داده‌های پیوسته مکانی را به ارمغان آورند.

روش‌های متعددی به منظور انجام تخمین مکانی در علوم مختلف توسعه یافته‌اند [۳]. لی و هیپ در سال ۲۰۰۸ با بررسی ۴۲ شیوه درون‌یابی مکانی، آن‌ها را در سه گروه کلی "روش‌های غیر زمین‌آماری"^۳، "روش‌های زمین‌آماری"^۴ و "روش‌های ترکیبی"^۵ طبقه‌بندی نمودند و بیان داشتند که انتخاب یک روش خاص، در گرو توجه به الگوی نمونه‌برداری، تعداد نمونه‌ها، کیفیت داده‌ها، برهمکنش موجود بین ویژگی‌های مختلف و مواردی از این قبیل است [۴].

روش عناصر مرزی^۶، یک ابزار مهم برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی^۷ در علوم کاربردی و مهندسی محسوب می‌شود. هرچند این روش در دهه ۱۹۶۰ با پژوهش‌های افرادی چون جاسون، سیم، هس و اسمیت پا به عرصه ظهور گذاشته است [۵، ۶ و

۷]: لیکن عبارت "روش عناصر مرزی"، اولین بار توسط بریبا و دومینگوئز در سال ۱۹۷۰ به‌کار گرفته شد [۸].

یکی از ویژگی‌های بسیار جذاب BEM، کم حجم بودن سیستم معادلاتی آن و تعداد داده‌های اندک مورد نیاز برای اجرای این برنامه است. به علاوه، صحت عددی این شیوه، بسیار زیاد است [۹]. امروزه BEM به عنوان یک روش عددی قدرتمند و با صحت بالا در حل مسائل مکانیک پیوسته کاربرد زیادی دارد [۱۰]. مهم‌ترین ویژگی BEM آن است که بیش از این‌که نیازمند اطلاعات درون منطقه مطالعاتی باشد، تنها نیازمند مشخص نمودن اطلاعات روی مرز منطقه است. هرچند استفاده از BEM در حل مسائل مربوط به آئرویدینامیک، الاستیسیته، تئوری پتانسیل و شرایط دمایی خاص برای پژوهشگران جذاب است [۱۱]: لیکن کاربرد این روش در رابطه با محیط‌های غیر یکنواخت و غیر خطی (مانند خاک) و نیز پدیده‌های وابسته به زمان، با برخی از مشکلات روبه‌رو است. مهم‌ترین مانع در چنین مواقعی، تفکیک ناحیه مورد مطالعه به یک سری سلول‌های داخلی همگن‌تر به منظور برقراری ارتباط با مرز منطقه است. این تفکیک‌های اضافی، تا حدودی از میزان جذابیت BEM می‌کاهد. بنابراین، نیاز به یک روش جدیدی که در ارتباط با انتگرال‌های ناحیه‌ای^۸ در عناصر مرزی هست، احساس می‌شود.

روش عناصر مرزی متقابل دوگانه^۹، یک راهکار تعمیم‌یافته از BEM محسوب می‌شود که با تبدیل انتگرال‌های ناحیه به انتگرال‌های مرزی، حل بسیاری از مسائل غیر خطی و غیر همگن را امکان‌پذیر می‌سازد. همانطور که بیان شد، استفاده متداول این روش در حل معادلات دیفرانسیل جزئی همگن و یا ناهمگن است اما گسپار در سال ۲۰۰۰ کاربرد جدیدی از این روش را در مسائل درونیابی با در نظر گرفتن شرایط مرزی معلوم ارائه نمود [۱۲]. سویزی و اسفندیارپور در سال ۲۰۱۳ نیز کاربرد جدیدی از DRBEM را برای درونیابی داده‌های پراکنده، بدون در اختیار داشتن شرایط مرزی ارائه نمودند و نتیجه گرفتند که روش مزبور از قابلیت بالایی در مسائل درونیابی برخوردار است [۱۳]. با توجه به اینکه در طبیعت تعیین شرایط مرزی دقیق برای هر پدیده محیطی (مانند خاک) امکان‌پذیر نیست؛ روش اخیر از کارایی بالاتری

¹ Geographic Information System (GIS)

² Spatial interpolation methods

³ Non-geostatistical methods

⁴ Geostatistical methods

⁵ Combined methods

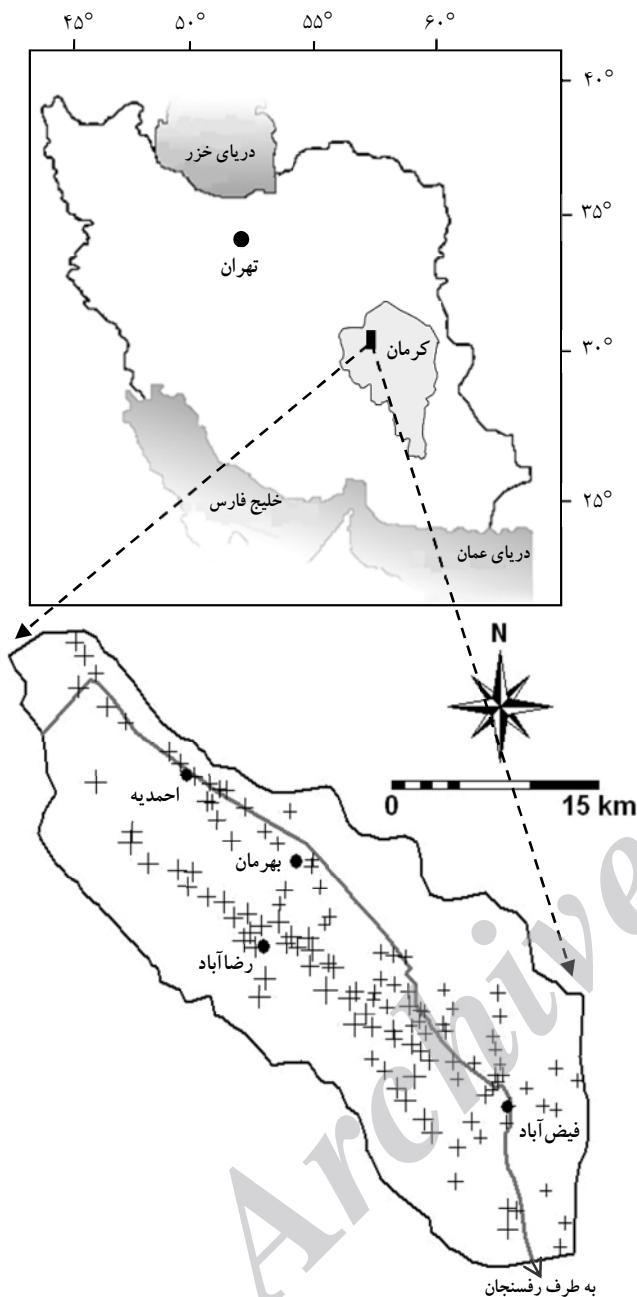
⁶ Boundary Elements Method (BEM)

⁷ Partial differential equations

⁸ Domain integrals

⁹ Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)

$$\nabla^2 U(X) = Q(X) \quad (1)$$



شکل ۱- موقعیت منطقه مورد مطالعه به همراه ۱۲۰ حلقه چاه مطالعاتی

دقت شود که در معادله ۱ علاوه بر تابع $U(X)$ ، تابع $Q(X)$ نیز مجهول است. در این معادله، تابع $Q(X)$ نقش چشمه^۳ را بازی می‌کند. در صورت معلوم بودن $Q(X)$ و شرایط مرزی مناسب، با حل معادله دیفرانسیل ۱، تابع $U(X)$ محاسبه می‌شود.

³ Source

می‌تواند برخوردار باشد. بر همین اساس، پژوهش حاضر با هدف استفاده از روش عناصر مرزی متقابل دوگانه در تخمین شوری آب‌های زیرزمینی منطقه نوق رفسنجان و مقایسه نتایج آن با تخمین‌گرهای معمول (کریجینگ معمولی و معکوس فاصله وزندار) انجام گرفت.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- معرفی منطقه مطالعاتی

منطقه مورد مطالعه با مساحتی حدود ۷۷ هزار هکتار، در ۳۰ کیلومتری حومه غربی رفسنجان واقع شده است. از لحاظ موقعیت جغرافیایی، این منطقه در حد فاصل طول‌های جغرافیایی $43^{\circ} 43'$ تا $44^{\circ} 58' 26''$ شرقی و عرض‌های جغرافیایی $30^{\circ} 27' 21''$ تا $30^{\circ} 30' 46''$ شمالی قرار دارد (شکل ۱). متوسط ارتفاع منطقه از سطح دریا ۱۴۵۰ متر و متوسط بارندگی سالانه آن، ۱۰۰ میلی‌متر است. همچنین، میانگین حداقل و حداکثر دمای سالانه، به ترتیب، $11/8$ و $25/8$ درجه سلسیوس است. منطقه نوق، از یک دشت دامنه‌ای تشکیل شده است. در هر حال، مواد مادری منطقه، دارای منشأ آبرفتی می‌باشند. پوشش گیاهی ناحیه مورد مطالعه، درخت پسته است.

۲-۲- روش جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها

۱۲۰ حلقه چاه موجود در منطقه نوق رفسنجان در خرداد ماه ۱۳۹۲ به صورت تصادفی انتخاب و نمونه‌برداری شدند. در شکل ۱ نقشه پراکنش چاه‌های انتخابی آورده شده است. شوری آب با استفاده از دستگاه هدایت‌سنج مدل جنوبی^۱ اندازه‌گیری شد. در ادامه، ضمن پهنه‌بندی مکانی و وضعیت شوری آب‌های زیرزمینی منطقه مورد مطالعه با استفاده از نرم‌افزار سورفر^۲ (نسخه ۹)، دقت تخمین‌گر پیشنهادی با تخمین‌گرهای معمول (کریجینگ معمولی و معکوس فاصله وزندار) مقایسه و کارآمدترین روش درونیابی معرفی شد.

۲-۳- روش عناصر مرزی متقابل دوگانه (DRBEM)

فرض شده است در N نقطه با مختصات $X_k = (x_k, y_k)$ ، $k \in \{1, \dots, N\}$ از کمیت $\bar{U}(X)$ به عنوان تابع اولیه، نمونه‌برداری شده است. داده‌های نمونه‌برداری شده به صورت $U_k = \bar{U}(X_k)$ نشان داده شده‌اند. همچنین، تابع درونیاب $U(X)$ که تقریبی از تابع اولیه $\bar{U}(X)$ است به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که در معادله پواسون زیر صدق نماید

¹ Jenway
² Surfer

از آنجا که در رابطه ۶، $X' \in \Gamma$ است؛ این انتگرال در نقطه $X = X'$ تکینه خواهد شد و باید مقدار اصلی کوشی آن محاسبه شود [۱۱].

هر یک از انتگرال‌های رابطه ۳ را به صورت زیر است

$$I_{\Omega}(X') = \int_{\Omega} G(R)Q(X)d\Omega \quad (7)$$

$$I_{\Gamma}(X') = \int_{\Gamma} G(R)\frac{\partial U(X)}{\partial n}d\Gamma \quad (8)$$

$$I_{2\Gamma}(X') = \int_{\Gamma} U(X)\frac{\partial G(R)}{\partial n}d\Gamma \quad (9)$$

با توجه به معادله انتگرالی ۳ مشاهده می‌شود که در صورت مشخص بودن $Q(X)$ در ناحیه Ω و توابع $U(X)$ و $\partial U(X)/\partial n$ روی مرز Γ ، مقدار $U(X')$ در هر نقطه دلخواه داخل ناحیه Ω محاسبه می‌شود. در نتیجه، باید $Q(X)$ در ناحیه Ω و $U(X)$ و $\partial U(X)/\partial n$ روی مرز Γ تخمین زده شوند. در ادامه، روش محاسبه عددی این توابع بر پایه DRBEM ارائه شده است.

انتگرال بیان شده در رابطه ۷ باید روی تمامی ناحیه مورد نظر انجام شود. با فرض معلوم بودن $Q(X)$ در محاسبه عددی این انتگرال دو مشکل وجود دارد: نخست اینکه به طور معمول ناحیه Ω دارای شکل نامنظمی است و دوم اینکه اگر نقطه مشاهده‌ای X' داخل ناحیه Ω انتخاب شود این انتگرال تکینه خواهد شد. برای رفع این دو مشکل، این انتگرال با بسط تابع $Q(X)$ برحسب توابع شعاعی پایه^۳، به انتگرال مرزی تبدیل می‌شود. این بسط به صورت زیر بیان می‌شود

$$Q(X) = \sum_{k=1}^N \alpha_k Q_k^{(\beta)}(X, X_k) \quad (10)$$

که $Q_k^{(\beta)}(X, X_k)$ تابعی از R_k به صورت زیر است

$$(11)$$

$$Q_k^{(\beta)}(X, X_k) = Q_k^{(\beta)}(R_k) = R_k^{\beta}, \quad R_k = |X - X_k|$$

در این رابطه، X_k موقعیت نقاط نمونه برداری را نشان می‌دهد و جمع رابطه ۱۰ روی تمامی این نقاط انجام می‌شود. ضرایب α_k در رابطه ۱۰ مجهول هستند. از طرفی، می‌توان مشاهده نمود که توابع $Q_k^{(\beta)}(R_k)$ در معادله دیفرانسیل زیر، نقش چشمه را بازی می‌کنند

در اولین مرحله با توجه به موقعیت نقاط نمونه برداری، $\{X_k\}$ ، با اتصال بیرونی ترین نقاط به یکدیگر، مرز ناحیه مورد نظر تشکیل می‌شود. مرز بسته‌ای که از اتصال این نقاط به یکدیگر تشکیل می‌شود. با Γ و ناحیه داخل آن با Ω نشان داده می‌شود. پس از تشکیل مرز Γ و ناحیه Ω ، معادله دیفرانسیل ۱ را به معادله‌ی انتگرالی تبدیل می‌شود. برای انجام این کار، از شکل دوم قضیه گرین^۱ استفاده می‌شود [۱۴]. معادله گرین متناظر با معادله ۱ به صورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla^2 G(R) = -\delta(R), \quad R = |X - X'| \quad (2)$$

که $G(R)$ تابع گرین و $\delta(R)$ تابع دلتای دیراک^۲ است. در مسایل دو بُعدی، تابع گرین به شکل $G(R) = -\ln R/2\pi$ در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، با استفاده از شکل دوم قضیه گرین برای توابع $G(R)$ و $U(X)$ ، رابطه ۳ ایجاد می‌شود [۱۱]

$$C(X')U(X') = \int_{\Omega} G(R)Q(X)d\Omega + \int_{\Omega} G(R)\frac{\partial U(X)}{\partial n} - U(X)\frac{\partial G(R)}{\partial n}d\Gamma \quad (3)$$

منظور از $\partial/\partial n$ ، مشتق نرمال کمیت مورد نظر است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\partial(\cdot)/\partial n = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}(\cdot) \quad (4)$$

که \hat{n} بردار نرمال عمود بر مرز Γ و رو به بیرون ناحیه Ω در نظر گرفته می‌شود. ضریب $C(X')$ برای نواحی داخلی و خارجی مرز Γ برابر است با [۱۱]

$$C(X') = \begin{cases} 1 & X \in \Omega \text{ and } X' \notin \Gamma \\ 0 & X' \notin \Omega \text{ and } X' \notin \Gamma \end{cases} \quad (5)$$

و در صورتی که نقطه X' روی مرز Γ قرار گیرد؛ $C(X')$ از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۱]

$$C(X') = -\int_{\Gamma} \frac{\partial G(R)}{\partial n}d\Gamma, \quad X' \in \Gamma \quad (6)$$

¹ Green's theorem
² Dirac Delta Function

³ Radial Basic Functions

$$I_{1\Gamma}(X') = \sum_{i=1}^{N_B} \int_{\Gamma_i} G(R) \frac{\partial U(X)}{\partial n} d\Gamma \quad (19)$$

$$I_{2\Gamma}(X') = \sum_{i=1}^{N_B} \int_{\Gamma_i} U(X) \frac{\partial G(R)}{\partial n} d\Gamma \quad (20)$$

که N_B تعداد عناصر مرزی را بیان می‌کند. تابع $U(X)$ روی عنصر مرزی Γ_i به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$U(X) \Big|_{\Gamma_i} \approx \frac{1-\alpha}{2} U_{i-1} + \frac{1+\alpha}{2} U_i \quad (21)$$

پارامتر α در بازه $[-1,1]$ تغییر می‌کند. با استفاده از این پارامتر، معادله پارامتری عنصر مرزی Γ_i را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$x(\alpha) \Big|_{\Gamma_i} \approx \frac{1-\alpha}{2} x_{i-1} + \frac{1+\alpha}{2} x_i \quad (22)$$

$$y(\alpha) \Big|_{\Gamma_i} \approx \frac{1-\alpha}{2} y_{i-1} + \frac{1+\alpha}{2} y_i \quad (23)$$

با توجه به روابط ۲۲ و ۲۳

$$d\Gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{L_i}{2} d\alpha \quad (24)$$

که L_i طول عنصر مرزی Γ_i است. با استفاده از روابط ۲۱ تا ۲۴ می‌توان انتگرال‌های رابطه ۲۰ را محاسبه نمود.

برای محاسبه هر یک از انتگرال‌های رابطه ۱۹ روی عنصر مرزی Γ_i ، تعدادی نقطه (به جز نقاط ابتدایی و انتهایی) به عنوان گره در نظر گرفته می‌شود و تابع $\partial U(X)/\partial n$ با توجه به تعداد گره‌های در نظر گرفته شده روی هر عنصر، تخمین زده می‌شود. در این مقاله از تقریب عناصر ثابت استفاده شد. در این تقریب، یک گره روی هر عنصر در نظر گرفته می‌شود. مختصات این گره با $X_i^{(c)}$ و مقادیر $\partial U(X_i^{(c)})/\partial n$ با q_i نشان داده می‌شود.

در نتیجه

$$\frac{\partial U(X)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} \approx q_i \quad (25)$$

با قرار دادن رابطه‌ی ۲۵ در رابطه ۱۹

$$I_{1\Gamma}(X') = \sum_{i=1}^{N_B} \int_{-1}^1 G(R) q_i \frac{L_i}{2} d\alpha \quad (26)$$

$$\nabla^2 U_k^{(\beta)}(R_k) = Q_k^{(\beta)}(R_k) \quad (12)$$

که در آن

$$U_k^{(\beta)}(R_k) = \frac{R_k^{\beta+2}}{(\beta+2)^2} \quad (13)$$

با استفاده از روابط ۱۰ و ۱۲، انتگرال ۷ به صورت زیر تبدیل

می‌شود

$$I_{\Omega}(X') = \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_{\Omega} G(R) (\nabla^2 U_k^{(\beta)}(R_k)) d\Omega \quad (14)$$

می‌توان انتگرال ناحیه در رابطه ۱۴ را با استفاده مجدد از شکل دوم قضیه گرین، به انتگرال مرزی به صورت زیر تبدیل نمود

$$\int_{\Omega} G(R) (\nabla^2 U_k^{(\beta)}(R_k)) d\Omega = -C(X') U_k^{(\beta)}(R'_k) + \int_{\Gamma} G(R) \frac{\partial U_k^{(\beta)}(R_k)}{\partial n} - U_k^{(\beta)}(R_k) \frac{\partial G(R)}{\partial n} d\Gamma \quad (15)$$

که در آن

$$R'_k = |X' - X_k| \quad (16)$$

با قرار دادن رابطه ۱۵ در رابطه ۱۴

$$I_{\Omega}(X') = \sum_{k=1}^N \alpha_k F_k(X') \quad (17)$$

که در آن

$$(18)$$

$$F_k(X') = -C(X') U_k^{(\beta)}(R'_k) + \int_{\Gamma} G(R) \frac{\partial U_k^{(\beta)}(R_k)}{\partial n} - U_k^{(\beta)}(R_k) \frac{\partial G(R)}{\partial n} d\Gamma$$

مشاهده می‌شود که $F_k(X')$ به ازای هر نقطه دلخواه، X' داخل ناحیه Ω قابل محاسبه است و انتگرال ناحیه (انتگرال شماره ۷) به یک سری از انتگرال‌های مرزی تبدیل شده است.

برای محاسبه انتگرال‌های مرزی در روابط ۸ و ۹، نخست مرز Γ شبکه‌بندی می‌شود. خط واصل بین هر دو نقطه از مجموعه نقاط نمونه‌برداری که روی مرز Γ قرار دارند، به عنوان یک عنصر مرزی^۱ با شاخص i در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، انتگرال‌های مرزی ۸ و ۹ به مجموع انتگرال روی هر عنصر مرزی تبدیل می‌شود

¹ Boundary Element

این رابطه را می‌توان به صورت زیر مرتب نمود

$$I_{1\Gamma}(X') = \sum_{i=1}^{NB} A_i(X')q_i \quad (27)$$

که

$$A_i(X') = \int_{-1}^1 G(R) \frac{L_i}{2} d\alpha \quad (28)$$

با قرار دادن روابط ۱۷، ۲۰ و ۲۷ در رابطه ۳

$$(29)$$

$$C(X')U(X') = -I_{2\Gamma}(X') - \sum_{k=1}^N \alpha_k F_k(X') + \sum_{i=1}^{NB} A_i(X')q_i$$

در این معادله، ضرایب α_k و q_i مجهول هستند. با انتقال نقطه مشاهده X' روی هر یک از نقاط نمونه برداری $X_{k'}$ و نقاط گره $X_{i'}^{(c)}$ ، رابطه ۲۹ به یک معادله جبری تبدیل خواهد شد و در نتیجه، یک دستگاه معادلات جبری با $N+V_B$ معادله به دست می‌آید

$$(30)$$

$$-\sum_{k=1}^N \alpha_k F_k(X_{k'}) + \sum_{i=1}^{NB} A_i(X_{k'})q_i = C(X_{k'})U(X_{k'}) + I_{2\Gamma}(X_{k'}) \quad (31)$$

$$-\sum_{k=1}^N \alpha_k F_k(X_{i'}^{(c)}) + \sum_{i=1}^{NB} A_i(X_{i'}^{(c)})q_i = C(X_{i'}^{(c)})U(X_{i'}^{(c)}) + I_{2\Gamma}(X_{i'}^{(c)}) \quad (32)$$

که

$$k' \in \{1, \dots, N\}, i' \in \{1, \dots, NB\}$$

با حل این دستگاه معادلات، ضرایب α_k و q_i به دست می‌آیند که با استفاده از این ضرایب در معادله ۲۹ می‌توان مقدار $U(X')$ را در هر نقطه دلخواه داخل ناحیه مورد نظر محاسبه نمود. لازم به ذکر است که برنامه‌های محاسباتی مذکور در این قسمت، به زبان فرترن ۹۰ نوشته شده‌اند.

۲-۴- اعتبارسنجی نتایج تخمین

تخمینگرهای کریجینگ و معکوس فاصله وزندار، دو شیوه معمول در درون‌یابی ویژگی‌های خاک محسوب می‌شوند [۱۵]. در پژوهش

حاضر، میزان کارایی این تخمینگرها با تخمینگر حاصل از روش عناصر مرزی متقابل دوگانه، از طریق محاسبه برخی از شاخص‌های اعتبارسنجی، مورد مقایسه قرار گرفت. اختلاف بین مقادیر تخمینی و مقادیر واقعی مشاهدات، با استفاده از سه آماره اعتبارسنجی شامل جذر میانگین مربعات خطا^۱، جذر میانگین مربعات خطای نسبی^۲ و شاخص نیکویی تخمین^۳ بررسی شد. به علاوه، بهینه‌ترین روش درون‌یابی از طریق تعیین میانگین رتبه‌ای هر کدام از سه تخمینگر مزبور تعیین شد.

RMSE. نشان‌دهنده خطاهای مطلق تخمین است و به صورت

زیر محاسبه می‌شود [۱۶]

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (x' - x)^2}{n}} \quad (33)$$

که x' و x ، به ترتیب، بیان‌گر مقادیر واقعی و تخمینی مشاهدات هستند. n ، تعداد مشاهدات را نشان می‌دهد. به دلیل حساسیت بیشتر RMSE به داده‌های پرت [۱۶]، آماره RMSE% نیز به طریق زیر محاسبه شد

$$RMSE\% = 100 \frac{RMSE}{\bar{x}} \quad (34)$$

که \bar{x} ، نشان‌گر میانگین مقادیر واقعی مشاهدات است. بدون بُعد بودن آماره RMSE%، امکان مقایسه صحت انواع متغیرها و با دامنه‌های تغییرپذیری متفاوت را فراهم می‌آورد [۱۷]. شاخص G ، در واقع، معیاری از درجه مفید بودن برازش مدل، در مقایسه با مدل میانگین نمونه‌ها است و به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۸]

$$G = \left(1 - \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n [x - x']^2}{\sum_{i=1}^n [x - \bar{x}]^2} \right\} \right) 100 \quad (35)$$

مقدار G برابر ۱۰۰ درصد، بیان‌گر تخمین درست و کامل است؛ در حالی که مقادیر منفی این شاخص، نشان می‌دهند که استفاده از میانگین نمونه‌ها به جای تخمین، از درجه اعتبار بالاتری برخوردار است [۱۹].

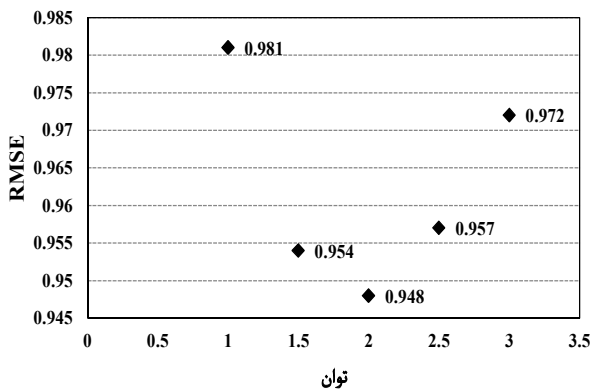
به طور کلی، مقادیر بزرگ‌تر RMSE و RMSE%، نشان‌دهنده خطاهای زیاد در تخمین متغیرها هستند؛ در حالی که مقادیر نزدیک به عدد ۱۰۰ برای شاخص G ، بیان‌گر خطاهای کم تخمین هستند.

¹ Root Mean Square Error (RMSE)

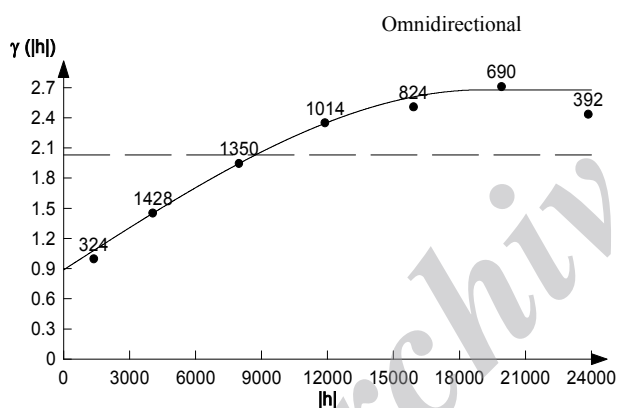
² Relative RMSE (RMSE%)

³ Goodness of prediction index (G)

عناصر مرزی، حکایت از برتری نسبی این تخمینگر دارد. شلوئدر و همکاران در سال ۲۰۰۱ و هنگل و هاسنچک در سال ۲۰۰۶ اظهار داشتند که مقدار $RMSE\%$ تا حدود ۴۰ درصد، بیانگر همبستگی بالای بین مقادیر واقعی و تخمینی متغیر مورد مطالعه است [۱۹ و ۲۳]. با توجه به اطلاعات جدول ۱، هر چند این همبستگی بالا برای هر سه تخمینگر قابل مشاهده است؛ لیکن



شکل ۲- بهینه‌سازی توان تخمینگر معکوس فاصله وزندار در ارتباط با شوری آب‌های زیرزمینی منطقه نوق رفسنجان



شکل ۳- واریوگرام بهینه برازش یافته بر داده‌های شوری آب‌های زیرزمینی منطقه نوق رفسنجان (h: فاصله بر حسب متر، $\gamma(h)$: سمی واریانس)

جدول ۱- آماره‌های اعتبارسنجی محاسبه شده برای سه تخمینگر مورد استفاده

G (%)	RMSE%	RMSE
۵۳/۷۶۸	۱۵/۳۵۷	۰/۹۴۸
۵۵/۵۳۷	۱۴/۴۷۳	۰/۹۷۱
۶۰/۷۳۵	۱۴/۴۶۹	۰/۸۹۳

برتری نسبی روش عناصر مرزی، بر اساس شاخص $RMSE\%$ کماکان به قوت خود باقی است. از طرفی، هر چند بر مبنای شاخص $RMSE$ ، دقت تخمینگر معکوس فاصله وزندار نسبت به تخمینگر

یک معیار بهتر در رابطه با تعیین کارایی تخمینگرها، محاسبه رتبه‌ی هر کدام از روش‌های درون‌یابی برای هر نقطه مشاهداتی است که این کار از طریق محاسبه مربع خطای هر نقطه امکان‌پذیر است [۳، ۲۰ و ۲۱]. بنابراین، با تعیین رتبه آمین تخمینگر برای ژامین نقطه‌ی مشاهداتی (r_{ij})، میانگین رتبه‌ای آمین روش درون‌یابی (R_i) از طریق رابطه زیر به دست خواهد آمد [۱۵]:

$$R_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k r_{ij} \quad (36)$$

و انحراف استاندارد رتبه‌های آمین روش درون‌یابی (S_i) به صورت زیر محاسبه خواهد شد [۱۵]

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k (r_{ij} - R_i)^2}{n-1}} \quad (37)$$

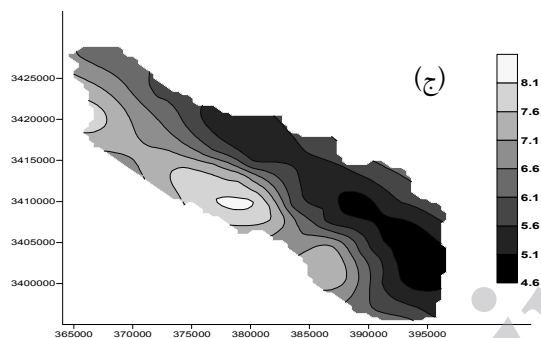
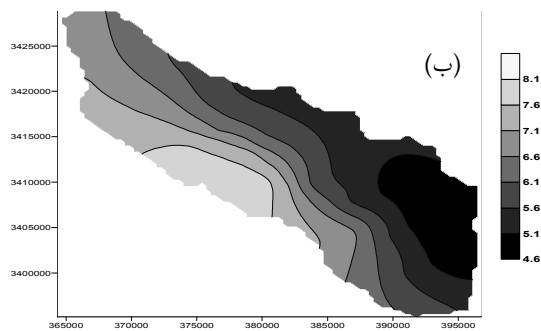
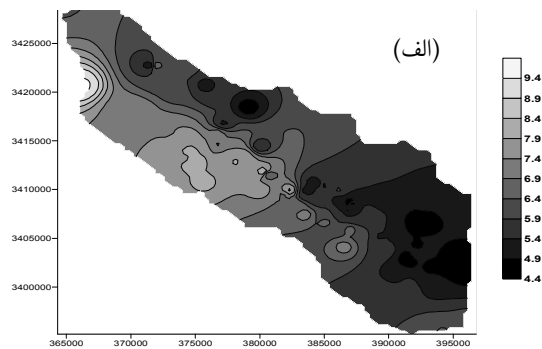
با ترسیم مقادیر میانگین رتبه‌ای (R_i) در مقابل مقادیر انحراف استاندارد رتبه‌ها (S_i)، می‌توان روش بهینه را تعیین نمود. لازم به ذکر است که ارزیابی اعتبار تخمین‌های صورت‌گرفته توسط تخمینگرهای مختلف و مقایسه مقادیر تخمینی و مقادیر واقعی مشاهدات، با استفاده از روش جک‌نایف^۱ انجام پذیرفت [۲۲].

۳- نتایج و بحث

در شکل ۲ چگونگی بهینه‌سازی تخمینگر معکوس فاصله وزندار نشان داده شده است. به این منظور، توان‌های ۱، ۱/۵، ۲، ۲/۵ و ۳ مورد بررسی قرار گرفتند و کمترین $RMSE$ به دست آمده به عنوان توان بهینه پذیرفته شد. بر این اساس، توان ۲ به عنوان توان بهینه انتخاب شد. همچنین، شکل ۳ نشانگر واریوگرام بهینه برازش یافته بر داده‌های شوری آب‌های زیرزمینی مورد مطالعه است. مقادیر اجزای واریوگرام مزبور شامل دامنه تأثیر^۲، سقف^۳ (حد آستانه) و اثر قطعه‌ای^۴، به ترتیب ۱۹۰۸۰، ۲/۶۸ و ۰/۸۹ متر به دست آمدند. به علاوه، مدل واریوگرامی برازش یافته از نوع کروی^۵ بود.

جدول ۱ نشانگر نتایج آماره‌های اعتبارسنجی محاسبه شده برای سه تخمینگر مورد استفاده (معکوس فاصله وزندار، کریجینگ و روش عناصر مرزی) است. کمتر بودن شاخص $RMSE$ برای روش

¹ Jackknife method
² Range
³ Sill
⁴ Nugget effect
⁵ Spherical



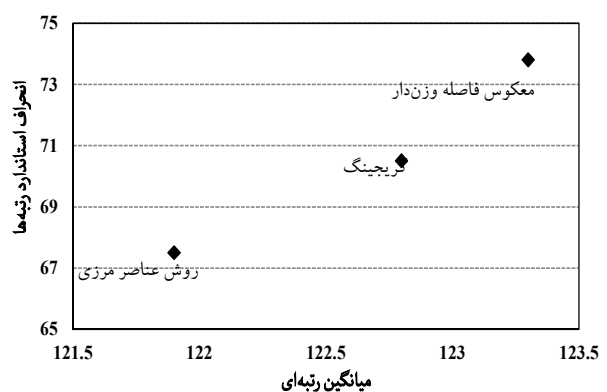
شکل ۵- نقشه شوری آب‌های زیرزمینی منطقه نوق رفسنجان با استفاده از روش‌های مختلف
 (الف: نقشه معکوس فاصله وزندار، ب: نقشه‌ی کریجینگ، ج: نقشه عناصر مرزی)

نگاه اجمالی به نقشه‌های ترسیم‌شده با استفاده از تخمینگرهای مختلف نشان می‌دهد که شوری آب‌های زیرزمینی منطقه نوق رفسنجان در دامنه تقریبی ۴/۵ تا ۹/۵ دسی‌زیمنس بر متر متغیر است که بر مبنای طبقه‌بندی کیفیت آب زیرزمینی ارائه‌شده توسط اُیفان و شریف در سال ۲۰۱۱ [۲۴]، آب‌های منطقه مزبور در کلاس خیلی شور تا فوق‌العاده شور واقع می‌شوند (شکل ۵). از طرفی، کمترین مقدار شوری در قسمت‌های شرقی منطقه و بیشترین آن در نواحی جنوب و جنوب غربی منطقه قابل مشاهده می‌باشند (شکل ۵). همچنین، ملاحظه می‌شود که الگوی تغییرات شوری ارائه‌شده توسط دو تخمینگر کریجینگ و روش عناصر مرزی، از روند نسبتاً مشابهی تبعیت می‌کنند. این در حالی است که نقشه‌های

کریجینگ، بیشتر است، اما این روند برای شاخص $RMSE\%$ حالت معکوس پیدا کرده است. دلیل احتمالی این موضوع را می‌توان به وجود برخی داده‌های پرت در تخمین‌های کریجینگ و در نتیجه حساسیت بالای شاخص $RMSE$ به این داده‌ها عنوان نمود [۱۶].

نگاهی به مقادیر شاخص نیکویی تخمین (G) محاسبه‌شده برای تمامی تخمینگرها نشان می‌دهد که هرچند میزان همخوانی بین مقادیر واقعی و تخمینی، بیشتر از ۵۰ درصد است، اما روش عناصر مرزی بر مبنای این شاخص برتری دارد و در تخمین‌های خود، از خطای نسبی کمتری برخوردار است.

شکل ۴ در ارتباط با تعیین رتبه هر کدام از روش‌های درونیابی ترسیم شده است. بر این اساس، تخمینگر بهینه، تخمینگری است که علاوه بر دارا بودن کمترین میانگین رتبه‌ای، کمترین انحراف استاندارد رتبه‌ها را نیز به خود اختصاص داده است. بنابراین، مشاهده می‌شود که روش عناصر مرزی، رتبه‌ی اول را به خود اختصاص داده است (شکل ۴). در واقع، پایین‌تر بودن میانگین رتبه‌ای، نشانگر صحت بیشتر درونیابی است و پایین‌تر بودن انحراف استاندارد رتبه‌ها، نشان‌دهنده پراکنش کمتر صحت درونیابی مزبور است. تخمینگرهای کریجینگ و معکوس فاصله وزندار نیز به ترتیب در رتبه‌های دوم و سوم قرار گرفته‌اند (شکل ۴). شی و همکاران در سال ۲۰۰۹ نیز ضمن معرفی یک تخمینگر جدید با عنوان مدل‌سازی سطحی با صحت بالا^۱، دقت این تخمینگر را با روش‌های کریجینگ، معکوس فاصله وزندار و اسپلاین^۲ از طریق ترسیم نموداری مشابه با شکل ۴ در رابطه با تعیین الگوی تغییرات مکانی pH خاک، مورد مقایسه قرار دادند و اظهار داشتند که تخمینگر پیشنهادی آن‌ها از رتبه بهتری نسبت به سه تخمینگر دیگر برخوردار است [۱۵].



شکل ۴- مقادیر میانگین رتبه‌ای (R_i) در مقابل مقادیر انحراف استاندارد رتبه‌ها (S_i) برای تخمینگرهای مختلف

¹ High Accuracy Surface Modelling (HASM)

² Spline

معکوس فاصله وزندار از یک الگوی لکه لکه‌ای^۱ (کیک کشمشی) پیروی می‌کنند. وبر و اینگلاند در سال ۱۹۹۲ تخمین نقطه‌ای یا وزن دهی بیشتر به نقاط نزدیک‌تر به نقطه تخمین را از دلایل احتمالی چنین الگویی بیان نموده است [۲۵]. به‌طور کلی، نقشه‌های ارائه شده توسط تخمینگر کریجینگ و روش عناصر مرزی، تخمین یکنواخت‌تری را نسبت به معکوس فاصله وزندار نشان می‌دهند. در هر حال، مشابهت بیشتر تخمین‌های صورت‌گرفته توسط روش عناصر مرزی به مقادیر واقعی اندازه‌گیری شده برای شوری آب‌های زیرزمینی مطالعه شده، برتری نسبی این روش را نسبت به دو تخمینگر دیگر به ارمغان آورده است.

۴- نتیجه‌گیری

مطالعه موردی انجام شده در این پژوهش، نشان داد که روش عناصر مرزی در ارائه یک تخمینگر جدید به منظور درونیابی الگوی مکانی یکی از پارامترهای مورد استفاده در تعیین کیفیت آب‌های زیرزمینی از دقت بالاتری نسبت به روش‌های کلاسیک معمول (مانند تخمینگرهای کریجینگ و معکوس فاصله وزندار) برخوردار است. در هر حال، باید توجه داشت که تغییرات شوری آب‌های زیرزمینی به فاکتورهای محیطی مختلف (نظیر جنس سنگ مادری و توپوگرافی) بستگی دارد. از سوی دیگر، یکی از مزایای روش مورد استفاده در این پژوهش، آن است که مدل‌سازی مرز در این

Patchy Pattern

۵- مراجع

1. Collins, F. C., and Bolstad, P. V. (1996). "A comparison of spatial interpolation techniques in temperature estimation." *Proceedings of the 3rd International Conference/Workshop on Integrating GIS and Environmental Modeling*, Santa Fe, NM, Santa Barbara, CA: National Center for Geographic Information and Analysis, Santa Barbara.
2. Hartkamp, A. D., De Beurs, K., Stein, A., and White, J. W. (1999). *Interpolation techniques for climate variables*, CIMMYT, Mexico, D.F.
3. Laslett, G. M., McBratney, A. B., Pahl, P. J., and Hutchinson, M. F. (1987). "Comparison of several spatial prediction methods for soil pH." *Journal of Soil Science*, 38, 325-341.
4. Li, J., and Heap, A. D. (2008). *A review of spatial interpolation methods for environmental scientists*, Geoscience Australia, Record 2008/23.
5. Jaswan, M. A. (1963). "Integral equation methods in potential theory I." *Proceedings of the Royal Society*, 275, 23-32.
6. Symm, G. T. (1963). "Integral equation methods in potential theory II." *Proceedings of the Royal Society*, 275, 33-46.
7. Hess, J., and Smith, A. M. O. (1964). "Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimension bodies." *J. of Ship Research*, 8, 22-44.

روش به صورت تقریباً دلخواه قابل انجام است؛ به طوری که تنها کافی است بیرونی‌ترین نقاط مطالعاتی موجود در یک منطقه با یک خط مستقیم به یکدیگر متصل شوند. تخمینگر پیشنهادی همچنین این قابلیت را دارد که با برقراری ارتباط با برخی از متغیرهای ثانویه (مانند مدل رقومی ارتفاع^۲ یا نوع کاربری اراضی)، میزان کارایی نتایج درونیابی خود را افزایش دهد که البته این موضوع توسط نویسندگان مقاله در حال بررسی و تجزیه و تحلیل است. از طرفی، باید اذعان نمود که استفاده از روش عناصر مرزی متقابل دوگانه در تخمین متغیرهای محیطی برای افراد نا آشنا با مسائل پیشرفته ریاضیات، اندکی مشکل است. به علاوه، نتایج حاصل از روش پیشنهادی، نیازمند تبدیل فرمت از حالت آسکی^۳ به شبکه‌ای^۴ با استفاده از یک بسته نرم‌افزاری سامانه اطلاعات جغرافیایی است. در نتیجه، پژوهش‌های تکمیلی در مورد استفاده از روش عناصر مرزی متقابل دوگانه در تخمین متغیرهای محیطی، مستلزم توجه به موارد زیر است:

- ۱) ترکیب روش عناصر مرزی با متغیرهای کمکی در راستای افزایش هر چه بیشتر دقت درونیابی؛
- ۲) توسعه یک الگوریتم کاربرپسند با قابلیت کاربرد در یک بسته نرم‌افزاری سامانه اطلاعات جغرافیایی.

² Digital Elevation Model (DEM)

³ ASCII

⁴ Raster

8. Brebbia, C. A., and Dominguez, J. (1970). "Boundary element methods for potential problems." *Applied Mathematical Modelling*, 1, 7.
9. Brebbia, C. A. (1978). *The boundary element method for engineers*, Pentech Press, London, UK.
10. Becker, A. A. (1992). *The boundary element method in engineering*, Berkshire: McGraw-Hill Education in Maidenhead, New York, USA.
11. Paris, F., and Canas, J. (1997). *Boundary element method: Fundamentals and application*, Oxford University Press, London, UK.
12. Gaspar, C. (2000). "Multi-Level Biharmonic and Bi-Helmholtz interpolation with application to the boundary element method." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 559.
13. Sovizi, M., and Esfandiarpour, I. (2013). "Scattered data interpolation based on dual reciprocity boundary element method with unknown boundary conditions." *Mathematical Sciences Letters*, 2(3), 1-7.
14. Arfken, G. B., Weber, H. J., and Harris, F. E. (2012). *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide*, 7th Ed., Academic Press, Elsevier, The Netherlands.
15. Shi, W., Liu, J., Du, Z., Song, Y., Chen, C., and Yue, T. (2009). "Surface modelling of soil pH." *Geoderma*, 150, 113-119.
16. Farifteh, J., Van der Meer, F., Atzberger, C., and Carranza, E. J. M. (2007). "Quantitative analysis of salt-affected soil reflectance spectra: a comparison of two adaptive methods (PLSR and ANN)." *Remote Sensing of Environment*, 110, 59-78.
17. Park, S. J., and Vlek, P. L. G. (2002). "Environmental correlation of three-dimensional soil spatial variability: A comparison of three adaptive techniques." *Geoderma*, 109, 117-140.
18. Corstanje, R., Grunwald, S., Reddy, K. R., Osborne, T. Z., and Newman, S. (2006). "Assessment of the spatial distribution of soil properties in a Northern Everglades marsh." *J. of Environmental Quality*, 35, 938-949.
19. Schloeder, C. A., Zimmerman, N. E., and Jacobs, M. J. (2001). "Comparison of methods for interpolating soil properties using limited data." *Soil Science Society of America Journal*, 65, 470-479.
20. Odeh, I. O. A., McBratney, A. B., and Chittleborough, D. J. (1994). "Spatial prediction of soil properties from landform attributes derived from a digital elevation model." *Geoderma*, 63, 197-214.
21. Triantafilis, J., Odeh, I. O. A., and McBratney, A. B. (2001). "Five geostatistical models to predict soil salinity from electromagnetic induction data across irrigated cotton." *Soil Science Society of America Journal*, 65, 869-878.
22. Efron, B., and Stein, C. (1981). "The jackknife estimate of variance." *The Annals of Statistics*, 9(3), 586-596.
23. Hengl, T., and Husnjak, S. (2006). "Evaluating adequacy and usability of soil maps in Croatia." *Soil Science Society of America Journal*, 70, 920-929.
24. Obiefun, G. I., and Sheriff, A. (2011). "Assessment of shallow ground water quality of Pindiga Gombe Area, Yola Area, NE, Nigeria for irrigation and domestic purposes." *Research Journal of Environmental and Earth Sciences*, 3(2), 131-141.
25. Weber, D. D., and Englund, E.J. (1992). "Evaluation and comparison of spatial interpolators." *Mathematical Geology*, 24, 381-391.