فصلنامهٔ علمی – پژوهشی دانشگاه قم، سال نهم ، شمارهٔ سوم
Philosophical-Theological Research Vol.9, No 3

اعتبار در جهان‌های ممکن

اسداله فلاحی[1]
لطف‌اله نبوی[2]

چکیده

قضایا و قواعد منطق موجهات، در جهان‌های ممکن، معتبرند اما قضایای منطق ربط، در جهان‌های منطقی، و قواعد آن، در وضعیت‌ها اعتبار دارند. روبرت مایر، در سال ۱۹۷٤، به کمک ادات‌های صدق و کذبِ ویلهم آکرمان، نظامی در منطق ربط طراحی کرد که قضایا و قواعد آن، هر دو، در وضعیت‌ها معتبر بودند و به این وسیله، عدم تقارن موجود در منطق ربط میان قضایا و قواعد را از میان برد. در این مقاله، با معرفی نوع جدیدی از ادات‌های صدق و کذب، نظامی منطقی بر پایه منطق ربط طراحی کرده‌ایم که قضایا و قواعد آن در جهان‌های ممکن معتبرند. چنین نظامی، علاوه بر حفظ تقارن، به رفع ناسازگاری موجود میان منطق جدید و منطق ربط می‌انجامد زیرا مانند منطق جدید، جهان‌های ممکن را معیار اعتبار قرار می‌دهد.

کلید واژه‌ها: منطق ربط، صدق‌نگهداری، جهان ممکن، وضعیت، منطق PWR

---

۱. استادیار دانشگاه زنجان
۲. دانشیار دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه

مفهوم «جهان‌های ممکن»، کلید اصلی برای حل مسائل مربوط به اعتبار و عدم اعتبار و ابزار بسیار مناسبی برای بررسی نظام‌های گوناگون منطق موجهات است و ایده ابتدایی آن را لایبنیتز، در قرن هجدم، طرح کرد و کریپکی، در سال ۱۹۵۹، آن را عملیاتی ساخت. مفهوم «وضعیت‌های ممکن» را، نیز، خود کریپکی، در سال ۱۹٦۵، معرفی نمود. نهایتا، در سال ۱۹۷۳، ریچارد روتلی و روبرت مایر، مفهوم «جهان‌های ناممکن» را در حل پارادوکس‌های استلزام مادی و استلزام اکید به کار بردند. به کمک این مفاهیم جدید، منطق ربط، که خود را رقیب منطق جدید معرفی می‌کرد و برای خود، نحو و نظریه برهان گسترده‌ای فراهم آورده بود، توانست خود را به سلاح سمانتیک تجهیز کند و در کشمکش با منطق جدید به دفاع از کیان خود بپردازد.

یکی از ایرادهایی که به این سمانتیک وارد بود این است که این سمانتیک، میان قضایا و قواعد، شکافی عمیق ایجاد می‌کند: در این سمانتیک، قضایا، در جهان‌های منطقی، معتبرند اما قواعد در وضعیت‌ها اعتبار دارد. این در حالی است که در منطق موجهات، قضایا و قواعد، هر دو، در جهان‌های ممکن معتبرند. مایر در سال ۱۹۷٤ نظامی، به نام R^f، طراحی کرد که قضایا و قواعد آن، هر دو، در مجموعه وضعیت‌ها معتبر بودند. یکی از اهداف مایر در طراحی این نظام، ابطال ربط‌گرایی و نشان دادن سازگاری میان منطق جدید و منطق ربط بود. نوئل بلنپ و مایکل دان در سال‌های ۱۹۸۱ و ۱۹۹۲ تردید خود را نسبت به کامیابی مایر در سازگار نمودن دو منطق رقیب و ناخشنودی‌شان را از نظام مایر ابراز کردند.

به نظر ما، طراحی نظامی منطقی که قضایا و قواعد آن، هر دو، در جهان‌های ممکن معتبر باشند بهتر می‌تواند به سازگاری منطق جدید و منطق ربط بینجامد. در این مقاله، بر پایه منطق ربط R، نظامی منطقی به نام PWR را طراحی کرده‌ایم. نشان می‌دهیم که قضایا و قواعد PWR، هر دو، در جهان‌های ممکن معتبرند.

از آنجا که PWR بر پایه منطق ربط R ساخته می شوند لازم است که یک معرفی اجمالی در ابتدا صورت بگیرد. بخش اول مقاله را به این معرفی اختصاص داده‌ایم. اطلاعات بیشتر را می‌توان در کتاب *فلسفه منطق ربط* اثر استیون رید که در سال ۱۳۸۵ به فارسی برگردانده شده

است یافت. اهمیت منطق R در این است که دو ادات شرطی دارد: ادات استلزام ربطی $\rightarrow$ و ادات استلزام مادی $\supset$. (این تفکیک، با کمی تفاوت، مشابه تفکیک شرطی متصل لزومی و اتفاقی در منطق قدیم است). ادات $\rightarrow$، ادات اصلی و تعریف نشده است و اصول موضوعه و قواعد ویژهٔ خود را دارد و ادات $\supset$ به کمک ادات‌های $\vee$ و $\sim$ تعریف می شوند و احکام خود را از احکام آن دو ادات به دست می‌آورد.

اثبات اعتبار قواعد PWR در جهان‌های ممکن، که در بخش دوم بـه آن پرداختـه‌ایـم، در چهار مرحله صورت می‌گیرد:

الف: تعریف دو ادات جدید برای صدق و کذب؛

ب: تعریف نوعی شرطی ضمیر به کمک این ادات صدق و کذب؛

ج: اثبات هم‌ارزی میان قواعد PWR و قضایای این شرطی ضمیر در منطق R؛

د: اثبات هم‌ارزی میان اعتبار قضایای شرطی ضمیر در R و صدق‌نگهداری در جهان‌های ممکن.

اثبات اعتبار قضایای PWR در جهان‌های ممکن، نیز مبحثی است که در بخش سوم به آن پرداخته‌ایم.

بخش اول

زبان منطقی

واژگان: متغیرهای گزاره‌ای، $\rightarrow$، $\wedge$، $\vee$، $\sim$، $\forall$، $\exists$

قواعد ساخت:

همه متغیرهای گزاره‌ای فرمول‌اند،

اگر A و B فرمول باشند $(A\rightarrow B)$ و $(A\wedge B)$ و $(A\vee B)$ و $\sim A$ فرمول‌اند.

اگر A فرمول و p متغیر گزاره‌ای باشد $\forall pA$ و $\exists pA$ فرمول‌اند.

به جز موارد بالا، هیچ عبارتی، فرمول نیست.

در فرازبان، قرادادهایی انجام می‌دهیم که در بیان قواعد به کار می‌آیند: اگر A و B فرمول و p و q متغیر گزاره‌ای باشند $A(p)$ و $A(q/p)$ و $A(B/p)$ و $A(q//p)$ و $A(B//p)$ فرمول‌انـد. در توضیح، نکات زیر باید مورد توجه قرار بگیرد:

مقصود از $A(p)$ فرمولی است که متغیر گزاره‌ای p دست کم، یک بار، در آن به کار رفته است.

مقصود از $A(q/p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن متغیر گزاره‌ای q به جای همه موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیر q نباشد.

مقصود از $A(q//p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن متغیر گزاره‌ای q به جای همه یا بعضی موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیر q نباشد.

مقصود از $A(B/p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن فرمول B به جای همه موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیرهای موجود در B نباشد.

مقصود از $A(B//p)$ فرمولی حاصل از قرار دادن فرمول B به جای همه یا بعضی موارد p در $A(p)$ است، مشروط به اینکه p در $A(p)$ در دامنه سور با متغیرهای موجود در B نباشد.

تعاریف:

تلفیق	$(A \circ B) =_{\text{تع}} \sim (A \rightarrow \sim B)$
تفریق	$(A + B) =_{\text{تع}} (\sim A \rightarrow B)$
شرطی مادی	$(A \supset B) =_{\text{تع}} (\sim A \vee B)$
دوشرطی مادی	$(A \equiv B) =_{\text{تع}} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$
دوشرطی ربطی	$(A \leftrightarrow B) =_{\text{تع}} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

عملگر صدق چرچ	$T =_{\text{تع}} \exists p\, p$
عملگر کذب چرچ	$F =_{\text{تع}} \forall p\, p$
عملگر صدق آکرمان	$t =_{\text{تع}} \forall p\, (p \rightarrow p)$
عملگر کذب آکرمان	$f =_{\text{تع}} \sim \forall p\, (p \rightarrow p)$

به زودی، نوع دیگری از عملگر صدق و کذب را معرفی خواهیم کرد.

توجه کنید که معرفی سورهای گزاره‌ای در زبان موضوعی، به نوعی، ما را درگیر منطق مرتبه دوم می‌سازد. نه آن معرفی و نه این درگیری، برای مباحث طرح شده در این مقاله، ضرورتی ندارند. دلیل ذکر این سورها، تعریف عملگرهای صدق و کذب است که ستون خیمه

این مقاله را تشکیل می‌دهد. با این حال، همه احکام مربوط به عملگرهـای صـدق و کـذب را می‌توان به جای تعریف به کمک سورهای گزاره‌ای، با بیان اصـول موضـوعه مناسـب و بـدون استفاده از سورهای گزاره‌ای و منطق مرتبه دوم، بیان کرد. تنها حسن معرفی سورهای گـزاره‌ای در اینجا و تعریف ادات‌های صدق و کذب به کمک آنها، این است که فهم ایـن عملگرهـا بـه کمک سورهای گزاره‌ای، بسیار آسان‌تر از فهم آنها به کمک اصول موضوعه است.

نظریه برهان R

اصول موضوعه و قواعد بخش گزاره‌ها:

شرطی:	همانی	$A \to A$	I
	جایگشت	$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	C
	تعدی (پیشوند)	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	B
	انقباض	$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$	W
	قاعده وضع مقدم	$\vdash A , \vdash A \to B \Rightarrow \vdash B$	MP
عاطف:	حذف عاطف	$(A \wedge B) \to A$ $(A \wedge B) \to B$	$\wedge$E
	معرفی ضعیف عاطف	$[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$	$\wedge$I
	قاعده پیوند Adjunction	$\vdash A , \vdash B \Rightarrow \vdash A \wedge B$	Ad
فاصل:	معرفی فاصل	$A \to (A \vee B)$ $B \to (A \vee B)$	$\vee$I
	حذف ضعیف فاصل	$[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$	$\vee$E
	پخش‌پذیری ضعیف Distribution	$(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$	Dis
ناقض:	عکس نقیض (اصل بیکن)	$(\sim A \to \sim \sim \sim B) \to (B \to A)$	Con

اصول موضوعه و قواعد بخش سورهای گزاره‌ای:

حذف $\forall$		$\forall p\, A \to A(B/p)$	1
معرفی $\forall$	مشروط به این‌که A فاقد p آزاد باشد	$\forall p\,(A \to B) \to (A \to \forall p\, B)$	2
معرفی مـادی $\forall$	مشروط به این‌که A فاقد p آزاد باشد	$\forall p\,(A \supset B) \to (A \supset \forall p\, B)$	3
تحدید	مشروط به این‌که A فاقد p آزاد باشد	$\forall p\,(A \vee B) \to (A \vee \forall p\, B)$	3

قاعده تعمیم		$\dfrac{\vdash A(q/p)}{\vdash \forall p\, A}$	
معرفی $\exists$		$A(B/p) \rightarrow \exists p\, A$	1
حذف $\exists$	مشروط به این‌که B فاقد p آزاد باشد	$\forall p\,(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists p\, A \rightarrow B)$	2
	مشروط به این‌که B فاقد p آزاد باشد	$\forall p\,(A \supset B) \rightarrow (\exists p\, A \supset B)$	3
تحدید	مشروط به این‌که A فاقد p آزاد باشد	$(A \wedge \exists p\, B) \rightarrow \exists p\,(A \wedge B)$	3

سمانتیک R

ساختار

در سمانتیک منطق ربط R، ساختار (Frame) یک چهارتایی مرتب (S,g,R,*) است که آن را غالبا با F نشان می‌دهند. اکنون به توضیح هر یک از اجزای ساختار می‌پردازیم:

S، مجموعه وضعیت‌ها

S عبارت است از تعدادی وضعیت یا موقعیت (situation, set-up) که می‌توانند ممکن یا غیر ممکن، و جهان یا جزء جهان باشند. مجموعه وضعیت‌ها را غالبا با K نشان می‌دهند ولی ما برای هماهنگی اسم با مسما آن را S نامیده‌ایم.

g، یک جهان منطقی

در این سمانتیک، وجود حداقل یک جهان منطقی لازم است تا بتوان قضایای منطقی را در آن اثبات کرد. این جهان را غالبا g می‌نامند. (در سمانتیک‌های دارای چند جهان منطقی، یکی از آن‌ها را به دلخواه می‌توان برگزید و g نامید.) واضح است که g نیز یک وضعیت است و لذا $g \in S$.

R، یک رابطه سه موضعی

R رابطه‌ای سه موضعی است که رابطه استنتاج میان وضعیت‌ها را نشان می‌دهد. وضعیت‌های x و y و z رابطه R را دارند اگر و تنها اگر x و y، با هم، مستلزم z باشند.

برای بیان قواعد ساختار، غالبا، یک رابطه چهارموضعی R را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$Rabcd =_{\text{تع}} \exists x \, (Rabx \wedge Rxcd)$$

مفهوم این رابطه چهارموضعی این است که سه موضع اول، با هم، موضع چهارم را نتیجه می‌دهند: وضعیت‌های x و y و z و w رابطه R را دارنـد اگـر و تنهـا اگـر x و y و z، بـا هـم، مستلزم w باشند. بنا به تعریف، Rxyzw یعنی x و y، با هم، نتیجه‌ای می‌دهد و آن نتیجه z، بـا هم، w را نتیجه می‌دهند. آشکار است که این تعریف، معادل است با این عبارت ساده‌تر کـه x و y و z، با هم، مستلزم w هستند. (به همین صورت، می‌تـوان R هـای چندموضـعی دیگـر را تعریف کرد.)

*، ستاره روتلی

ستاره روتلی رابطه‌ای است میـان وضـعیت‌هـا و همتاهایـشان. (همتـای یـک وضـعیت، بزرگ‌ترین وضعیتی است که هیچ یک از گزاره‌های آن وضعیت را انکار نمی‌کند). هر وضعیت یک و فقط یک وضعیت همتا دارد و به همین دلیل، ستاره روتلی یک تابع اسـت. اگـر a یـک وضعیت باشد *a همتای آن است. چنان که خواهیم دید a نیز همتای *a است (یعنی a=a**).

در منطق کلاسیک وجهی، برای تعیین ارزش نقیض یـک فرمـول از قاعـده زیـر اسـتفاده می‌کنیم:

نقیض یک فرمول در یک جهان ممکن صادق است اگر و تنها اگر
خود آن فرمول در آن جهان صادق نباشد (یعنی کاذب باشد).

در منطق ربط نیز همین قانون برقرار است جز این‌که به جـای یکـی از دو مـورد «جهـان ممکن» همتای آن را باید قرار داد:

نقیض یک فرمول در یک وضعیت صادق است اگر و تنها اگر
خود آن فرمول در همتای آن وضعیت صادق نباشد (یعنی کاذب باشد).

از آن‌جا که همتا یک تابع دو سویه است شرط صدق فوق را به صورت زیر نیز می‌تـوان نوشت:

نقیض یک فرمول در همتای یک وضعیت صادق است اگر و تنها اگر
خود آن فرمول در آن وضعیت صادق نباشد (یعنی کاذب باشد).

شرایط ساختار

۱.	انعکاس	Raaa
۲.	تقارن ۱	$Rabc \equiv Rbac$
۳.	تقارن ۲	$Rabcd \equiv Racbd$
٤.	تقارن ۳	$a = a^{**}$
۵.	تقارن ٤	$Rabc \equiv Rac^{*}b^{*}$

تقارن ۱ و ۲ بیانگر جابجایی موضع‌های غیر آخر R و معادل اصل C و B هستند. تقارن ۳ و ٤ نیز برای نقض مضاعف و عکس نقیض است.

تابع ارزش‌دهی به متغیرها

تابع ارزش‌دهی به متغیرها، در هر وضعیت، به هر متغیر، یکی (و تنها یکی) از دو ارزش صدق و کذب را نسبت می‌دهد و لذا این سمانتیک، سمانتیکی دو ارزشی است و هر فرمول در یک وضعیت یا صادق است یا کاذب.

تابع ارزش‌دهی را با V نشان می‌دهند که به هر متغیر در هر وضعیت یکی از دو ارزش {1,0} را اسناد می‌دهد. به عبارت دیگر، V مجموعه متغیرها و مجموعه وضعیت‌ها را به مجموعه ارزش‌ها می‌نگارد. به زبان صوری:

$V: Var \times S \to Val$

$V: Var(iables) \times S(ituations) \to Val(ues)$

$V: \{P, Q, \dots\} \times \{a, b, c, \dots\} \to \{1,0\}.$

اگر مجموعه متغیرهای صادق در وضعیت x با ارزش‌دهی V را با نماد V(x) نشان دهیم آنگاه شرط زیر، که «شرط توارث» نامیده می شوند، برای برخی اهداف مورد نیاز است:

Rgxy اتا $V(x) \subseteq V(y)$

الگو

الگو یا مدل برابر است با یک ساختار به همراه تابع ارزش‌دهی به متغیرها. به زبان صوری:

Model = (Frame , Valuation)

M = (F , V) = (S, g, R, *, V)

برای این‌که بتوان فرمول‌های مرکب را در الگو ارزش‌دهی کرد، باید تـابع ارزش‌دهـی بـه متغیرها را به نحوی گسترش داد که شرایط صدق عملگرها تعیین گردد. این شرایط ارزش‌دهی را قواعد ارزش‌دهی نیز می‌نامند و ما ذیلا به آن می‌پردازیم.

قواعد ارزش‌دهی به فرمول‌ها

قواعد ارزش‌دهی یا شرایط صدق T و F و عملگرهای دو موضعی غیر ربطـیماننـد $\wedge$ و $\vee$ در وضعیت‌ها به همان صورت هستند که در منطق کلاسیک بودند:

$\forall w V(T,w)=1$

$\forall w V(F,w)=0$

$V(A\wedge B,w)=1$	اتا	$V(A,w)=1 \wedge V(B,w)=1$
$V(A\vee B,w)=1$	اتا	$V(A,w)=1 \vee V(B,w)=1$

اما قواعد ارزش‌دهی t و f نیازمند جهان منطقی g است و قواعد ارزش‌دهـی عملگرهـای ربطی مانند $\circ$، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ به رابطه R نیاز دارند:

Vt	$V(t,w)=1$	اتا	$w = g$
Vf	$V(f,w)=0$	اتا	$w = g^*$
$V\circ$	$V(A\circ B,w)=1$	اتا	$\exists x\exists y(Rxyw \wedge V(A,x)=1 \wedge V(B,y)=1)$
$V\rightarrow$**g**	$V(A\rightarrow B,g)=1$	اتا	$\forall x\ [V(A,x)=1 \supset V(B,x)=1]$
$V\rightarrow$	$V(A\rightarrow B,w)=1$	اتا	$\forall x\forall y\{Rwxy \supset [V(A,x)=1 \supset V(B,y)=1]\}$
$V\leftrightarrow$	$V(A\leftrightarrow B,w)=1$	اتا	$\forall x\forall y\{Rwxy \supset [V(A,x)=1 \supset V(B,y)=1] \wedge [V(B,x) \supset V(A,y)]=1]\}$

قواعد ارزش‌دهی f، $\sim$ و $\supset$ نیز نیازمند * است:

Vf	$V(f,w)=0$	اتا	$w = g^*$
$V\sim$	$V(\sim A, w) = 1$	اتا	$V(A, w^*) = 0$
$V\sim$	$V(\sim A, w^*) = 1$	اتا	$V(A, w) = 0$
$V\supset$	$V(A\supset B,w)=1$ $V(A\supset B,w)=1$	اتا	$V(A,w^*)=1 \supset V(B,w)=1$ $V(A,w^*)= 0 \vee V(B,w)=1$

تعریف اعتبار در الگوی M :

فرمول A **معتبر است** اتا A در g از آن الگو صادق باشد

استدلال B⊨A **معتبر است** اتا $B\rightarrow A$ در g از آن الگو صادق باشد

یعنی $\forall x[V(B,x)=1 \supset V(A,x)=1]$

استدلال **$B_1;\ldots;B_n\vDash A$** **معتبر است** اتا $B_1\circ\ldots\circ B_n\rightarrow A$ در g از آن الگو صادق باشد

یعنی $\forall x[V(B_1\circ\ldots\circ B_n,x)=1 \supset V(A,x)=1]$

یعنی برای هر x_1، ...، x_n و x

$[Rx_1\ldots x_nx \ \wedge\ V(B_1,x_1)=1 \ \wedge\ldots\wedge\ V(B_n,x_n)=1] \ \supset V(A,x)=1$

استدلال **$B_1,\ldots,B_n\vDash A$** **معتبر است** اتا $B_1\wedge\ldots\wedge B_n\rightarrow A$ در g از آن الگو صادق باشد یعنی

$\forall x\{V(B_1,x)=1 \wedge\ldots\wedge V(B_n,x)=1] \supset V(A,x)=1\}$

نکته‌ای که در این تعریف‌ها حائز اهمیت است این است که «صدق $B\longrightarrow A$ در g» معادل فرمولی است که فاقد رابطه سه موضعی R است: $\forall x[V(B,x)=1 \supset V(A,x)=1]$. با داشتن این هم‌ارزی، اثبات سمانتیکی استدلال‌ها بی‌نیاز از جهان ممکن g خواهد شد. هم‌چنین، قضیه $\vDash A\rightarrow B$ معادل استدلال $A\vDash B$ خواهد گشت و لذا برهان آن نسبتا ساده‌تر و بی‌نیاز از جهان ممکن g می‌گردد.

تعریف اعتبار در ساختار و منطق

یک فرمول یا استدلال در یک ساختار R معتبر است اتا در همه الگوهای آن معتبر باشد.

یک فرمول یا استدلال در منطق R معتبر است اتا در همه الگوها معتبر باشد.

بخش دوم

نظریه برهان PWR

$S \vdash_{PWR} B$ اتا دنباله‌ای از فرمول‌ها مانند $A_1 , \ldots , A_n$ وجود داشته باشد کـه $A_n = B$ و هر A_i یکی از موارد زیر است:

عضو S است،

W است،

با وضع مقدم، از یک فرمول قبل، و یک قضیهٔ منطق ربط، به دست آمده است،

با وضع مقدم، از فرمول‌های قبل به دست آمده است،

با معرفی عاطف، از فرمول‌های قبل به دست آمده است،

با قیاس انفصالی، از فرمول‌های قبل به دست آمده است.

با تعمیم، از یک فرمول قبل به دست آمده است.

Wکه درمورد(۲) آمده نوع جدیدی ازصدق است که دربخش بعد، به‌شرح آن پرداخته‌ایم.

انواع صدق و کذب

انواع دوگانه صدق و دو نوع کذب در برابر آنها را پیش‌تر، در بخش زبان منطقی، تعریف کردیم. دو تعریف زیر برای دو عملگر صدق و کذب از نوعی جدید، برای اولین بـار، در ایـن مقاله، معرفی می شوند:

عملگر صدق توتولوژی $\forall p\,(p \supset p)_{\text{تع}}W = \quad 010$

عملگر کذب تناقض $\forall p\,(p \wedge \sim p)_{\text{تع}}I = \quad 011$

می‌توان به جای W و I، از نمادهای آشناتر ⊤ و ⊥ که برای عملگرهای صـدق و کـذب به کار رفته‌اند استفاده کرد اما ازآنجا که این دوعملگر، چنان که خواهیم دید، رابطه تنگاتنگی با مفهوم «جهان» و مفهوم «غیرممکن» (world و impossible) دارند، در اینجا نمادهای یادآور را بر نمادهای آشنا ترجیح داده‌ایم. (افزون بر این، در نوشتار غیرتایپی، تفکیک میان T و ⊤ بسیار دشوار است.) شباهت و تفاوت میان انواع صدق و کذب را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

انواع صدق	
منطقی (صدق آکرمان)	t = تع ∀p (p → p) =تع ∀p (p + ~ p)
جهانی(صدق توتولوژی)	W = تع ∀p (p ⊃ p) =تع ∀p (p ∨ ~ p)
مادی (صدق چرچ)	T = تع ∀p (p ⊐ p) =تع ∀p (p ∨ ¬ p) =تع ∃p p

انواع کذب	
منطقی (کذب آکرمان)	$f \quad =_{\text{تع}} \quad \exists p\,(p \circ \sim p)$
جهانی (کذب توتولوژی)	$I \quad =_{\text{تع}} \quad \exists p\,(p \wedge \sim p)$
مادی (کذب چرچ)	$F \quad =_{\text{تع}} \quad \exists p\,(p \wedge \neg p) \quad = \quad \text{تع} \quad \forall p\, p$

نمادهای $\neg$ و $\sqsupset$ نوع جدیدی از نقض و شرطی مادی است که به «نقض بولی» و «شرطی مادی بولی» شناخته می‌شوند و در منطق ربط کلاسیک مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. شرح این دو ادات، فراتر از مباحث طرح شده در این مقاله است و ما آن را تنها برای نشان دادن اینکه میان این سه نوع صدق و کذب، شباهت‌ها و تفاوت‌هایی هست آورده‌ایم. برای توضیح بیشتر، به رستال ۲۰۰۰ مراجعه کنید.

اگر بخواهیم W را تعریف نشده و جزء واژگان اصلی در نظر بگیریم اصول موضوعه W عبارتند از:

$\vdash W$

$\vdash W \rightarrow p \vee \sim p$

و I را می‌توان مستقیما به نقیض W تعریف کرد یا اصل موضوع زیر:

$\vdash I \leftrightarrow \sim W$

یا دو اصل زیر:

$\vdash \sim I$

$\vdash p \wedge \sim p \rightarrow I$

را برای آن ذکر کرد.

ادات‌های W و I، خواص بسیار مهمی دارند. مهم‌ترین ویژگی W این است که W، در منطق R، مستلزم همه توتولوژی‌های منطق کلاسیک، بلکه معادل ترکیب عطفی همه آنها است. مقصود از توتولوژی منطق کلاسیک، همه قضایای منطق ربط است که در آن، تنها عملگرهای عاطف، فاصل و ناقض، به کار رفته باشد و نیز، همه نمونه‌جانشین‌های این قضایا.

از سوی دیگر، همه تناقض‌های کلاسیک (= نقیض توتولوژی‌های کلاسیک) مستلزم I هستند بلکه I معادل ترکیب فصلی همه تناقض‌های کلاسیک است.

این در حالی است که t، در منطق R، مستلزم همه قضایای منطق ربط، بلکه معادل

ترکیب عطفی همه آنها است. از سوی دیگر، نقیض قضایای منطق ربط، مستلزم f هستند بلکه f معادل ترکیب فصلی نقیض همه قضایای منطق ربط است.

شرطی ضمیر

در R، می‌توان نوعی شرطی ضمیر تعریف کرد که ما آن را «شرطی دوضمیر» نامیده، نماد $\ggg$ را برای آن به کار می‌بریم:

شرطی دوضمیر $\quad A \ggg B =_{\text{تع}} (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I)$

این شرطی احکامی دارد که در زیر به برخی از آنها می‌پردازیم:

این شرطی، ضعیف‌تر از شرطی ربطی است، به این معنا که

$$\nvdash_R (A \ggg B) \rightarrow (A \rightarrow B) \qquad \vdash_R (A \rightarrow B) \rightarrow (A \ggg B)$$

اما با شرطی مادی نسبتی ندارد:

$$\nvdash_R (A \ggg B) \rightarrow (A \supset B) \qquad \nvdash_R (A \supset B) \rightarrow (A \ggg B)$$

و قضیه‌های دوضمیر، قوی‌تر از قضیه‌های مادی هستند، به این معنا که

$$\text{If } \vdash_R A \ggg B \text{ Then } \vdash_R A \supset B$$

استدلالِ PWR معتبر = قضیه دوضمیر

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{PWR} B \quad \text{اتا} \quad \vdash_R (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \ggg B$$

کافی است حکم زیر را اثبات کنیم:

$$\vdash_R A \ggg B \qquad \text{اتا} \qquad A \vdash_{WR} B$$

پس باید نشان دهیم که

اگر $A \ggg B$ قضیه R باشد آنگاه برهانی برای استنتاج B از A در PWR داریم و اگر برهانی برای استنتاج B از A در PWR داشته باشیم آنگاه $A \ggg B$ قضیه R است.

برهان ۱: اگر $A \ggg B$ قضیه R باشد برهانی در R دارد که با افزودن دنباله زیر به آن، به برهانی برای استنتاج B از A در PWR تبدیل می شوند:

$$A, W, A \wedge W, B \vee I, \sim I, B$$

برهان ۲: استقرا روی طول برهان در PWR:

گام نخست: اگر برهان استدلال در PWR، دنباله‌ای تک‌عضوی باشد آنگاه آن عضو برابر است با B و یکی از دو حالت زیر برای آن برقرار است:

یا B همان A است که در این صورت، $A \lll B$ به دلیل قـضیه بـودن $A \lll A$ قـضیه است زیرا ($\lll$ از $\rightarrow$ ضعیف‌تر است و از آن نتیجه می شوند).

یا B همان W است که در این صورت، $A \lll B$ قضیه است زیرا:

$\vdash A \wedge W \rightarrow W \vee I$

$\vdash A \ggg W$

$\vdash A \ggg B$

فرض استقرا: حکم برای استدلال‌های دارای برهانی به طول کمتر از n برقرار است.

اکنون، حکم را برای استدلال‌های دارای برهانی به طول n اثبـات مـی‌کنـیم: فرمـول n ام برهان، یا اصل موضوع است یا یکی از مقدمات، (که مانند آنچه در گام نخست گذشت، حکم برقرار خواهد بود،) یا با یکی از قواعد دوگانه از فرمول‌های قبل به دست آمده است:

B با وضع مقدم از یک فرمول قبلی و یک قضیه R به دست آمده است؛ در این صـورت، یکی از دو حالت زیر برقرار است:

B از یک فرمول قبلی مانند C و یک قضیه مانند $C \rightarrow B$ به دسـت آمـده اسـت؛ بنـا بـه فرض استقرا، حکم برای فرمول اول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$\vdash C \rightarrow B$

$\vdash A \ggg C$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \vee I)$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I)$

$\vdash A \ggg B$

B از یک فرمول قبلی مانند $C \rightarrow B$ و یک قضیه مانند C به دسـت آمـده اسـت؛ بنـا بـه فرض استقرا، حکم برای فرمول اول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$\vdash A \ggg (C \rightarrow B)$

$\vdash C$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \rightarrow B) \vee I$

$\vdash C \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow B)$

$\vdash (C \rightarrow B) \rightarrow B$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow B \vee I$

$\vdash A \ggg B$

B با وضع مقدم از دو فرمول قبلی، مانند C و $C \rightarrow B$ به دست آمده است؛ بنا بـه فـرض استقرا، حکم برای این دو فرمول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$\vdash A \ggg (C \rightarrow B)$

$\vdash A \ggg C$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \rightarrow B) \vee I$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow C \vee I$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [((C \rightarrow B) \vee I) \wedge (C \vee I)]$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [(C \rightarrow B) \wedge C] \vee I$

$\vdash [(C \rightarrow B) \wedge C] \rightarrow B$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I)$

$\vdash A \ggg B$

B با معرفی عاطف از دو فرمول قبلی، مانند C و D به دست آمده اسـت؛ بنـا بـه فـرض استقرا، حکم برای این دو فرمول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$\vdash A \ggg C$

$\vdash A \ggg D$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow C \vee I$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow D \vee I$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \vee I) \wedge (D \vee I)$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \wedge D) \vee I$

$\vdash A \ggg (C \wedge D)$

$\vdash A \ggg B$

B با قیاس انفصالی از دو فرمول قبلی، مانند $\sim C$ و $C \vee B$ به دست آمـده اسـت؛ بنـا بـه فرض استقرا، حکم برای این دو فرمول برقرار است. بنا به فرض استقرا، خواهیم داشت:

$\vdash A \ggg (C \vee B)$

$\vdash A \ggg \sim C$

از این دو مقدمه، نتیجه را به صورت زیر می‌توان استنتاج کرد:

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (C \vee B) \vee I$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow \sim C \vee I$

$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [((C \vee B) \vee I) \wedge (\sim C \vee I)]$

$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [(C \vee B) \wedge {\sim} C] \vee I$$
$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [(B \vee C) \wedge {\sim} C] \vee I$$
$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow [B \vee (C \wedge {\sim} C)] \vee I$$
$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I \vee I)$$
$$\vdash (A \wedge W) \rightarrow (B \vee I)$$
$$\vdash A \ggg B$$

پایان برهان.

تناظر میان انواع صدق و کذب و انواع وضعیت‌ها

ازنظر سمانتیکی،قاعده‌های ساده‌ای برای صدق وکذب از نوع چرچ و آکرمان وجود دارد:

t در x صادق است اتا x جهان منطقی باشد؛

f در x صادق است اتا x همتای جهان منطقی باشد؛

T در x صادق است اتا x وضعیت باشد؛

F در x صادق است اتا x وضعیت نباشد؛

t در همه و تنها همه جهان‌های منطقی، صادق است و بنابراین، f در همه و تنها همه همتاهای جهان‌های منطقی، کاذب است. این در حالی است که T، در همه وضعیت‌ها، صادق است و F در همه وضعیت‌ها، کاذب است.

از نظر سمانتیکی، قاعده ساده‌ای برای W وجود دارد:

W در x صادق است اتا x جهان باشد؛

اکنون، با این قاعده، می‌توان قاعده I را نیز به دست آورد:

W در *x صادق است اتا *x، جهان باشد؛ پس

W در *x صادق است اتا x همتای یک جهان باشد؛ پس

W در *x صادق است اتا x یک وضعیت ممکن باشد؛ پس

W در *x صادق نیست اتا x یک وضعیت ممکن نباشد؛ پس

W در *x کاذب است اتا x یک وضعیت غیرممکن باشد؛ پس

W ~ در x صادق است اتا x یک وضعیت غیرممکن باشد؛ پس

I در x صادق است اتا x یک وضعیت غیرممکن باشد.

بنابراین، به دو خاصیت مهم I و W می‌رسیم:

W در همه و تنها همه «جهان‌ها»، صادق است و

I در همه و تنها همه «وضعیت‌های غیرممکن»، صادق است.

از این اطلاعات، می‌توان جدول زیر را به دست آورد:

نماد زیر	صادق است در همه و تنها همه	کاذب است در همه و تنها همه
t	وضعیت‌های منطقی	وضعیت‌های غیرمنطقی
W	جهان‌ها	وضعیت‌های ناقص
T	وضعیت‌ها	———
f	همتاهای وضعیت‌های غیرمنطقی	همتاهای وضعیت‌های منطقی
I	وضعیت‌های غیرممکن	وضعیت‌های ممکن
F	———	وضعیت‌ها

از آنجا که ادات T در هیچ وضعیتی کاذب نیست و ادات F در هیچ وضعیتی صادق نیست، دو بخش از جدول، معادل کذب T و صدق F، خالی مانده است. اکنون، با توجه به این جدول، می‌توانیم اعتبار یک فرمول یا استدلال را نسبت به هر یک از مفاهیم سمانتیکی ستون سمت راست، تنها به کمک قضایای R، نشان دهیم.

A قضیه منطق ربط R است اتا در همه «وضعیت‌های منطقی» از هر الگو و هر ساختار از سمانتیک مربوط، صادق باشد. همچنین، فرمول A، فرمول B را در منطق ربط R نتیجه می‌دهد (به عبارتی دیگر، شرطی $A \rightarrow B$ در R قضیه است) اتا انتقال از A به B در همه «وضعیت‌ها» از هر الگو و هر ساختار از سمانتیک مربوط، صدق‌نگهدار باشد؛ یعنی در هر «وضعیت»، اگر A صادق است B نیز در آن صادق باشد. پس قضایای R، نشانگر اعتبار در همه «وضعیت‌های منطقی» هستند در حالی که قضایای شرطی در R، نشانگر صدق‌نگهداری در همه «وضعیت‌ها» می‌باشند.

شرطی دوضمیر و جهان‌های ممکن

با استفاده از سمانتیک منطق ربط، می‌توان نشان داد که معتبر بودن شرطی دوضمیر معادل صدق‌نگهداری در جهان‌های ممکن است:

$\vDash A \wedge W \rightarrow B \vee I$ اتا $\vDash A \ggg B$

در هر وضعیتی که $A \wedge W$ صادق است $B \vee I$ نیز صادق است اتا $\vDash A \ggg B$

در هر وضعیتی که A و W صادق است، یا B صادق است یا I صادق است اتا $\vDash A \ggg B$

درهرجهان که درآن، A صادق است، یا B صادق است یا صادق است اتا $\vDash A \ggg B$

در هر جهان که در آن، I، کاذب و A صادق است، B صادق است اتا $\vDash A \ggg B$

در هر جهان ممکن که A صادق است B نیز صادق است اتا $\vDash A \ggg B$

در هر جهان ممکن، انتقال از A به B صدق‌نگهدار است اتا $\vDash A \ggg B$

صدق‌نگهداری در جهان‌های ممکن اتا $\vDash A \ggg B$

منطق PWR و جهان‌های ممکن

با استفاده از سمانتیک منطق ربط، می‌توان نشان داد که قواعد PWR، در جهان‌های ممکن، صدق‌نگهدارند:

استدلالِ PWR معتبر = قضیه دوضمیر $\vdash_R A \ggg B$ اتا $A \vdash_{PWR} B$

صحت و تمامیت منطق R $\vDash A \ggg B$ اتا $A \vdash_{PWR} B$

شرطی دوضمیر و جهان‌های ممکن صدق نگهداری در جهان‌های ممکن اتا $A \vdash_{PWR} B$

بخش سوم

قضایای منطق PWR همان استدلال‌های بدون مقدمه‌ای هستند که اثبات شده‌اند. می‌توان نشان داد که قضایای PWR همان نتایج T در PWR هستند:

$\vdash_{PWR} B$ اتا $T \vdash_{PWR} B$

(برهان راست به چپ: واضح است؛

برهان چپ به راست: اگر B در PWR از T نتیجه شده باشد برهانی دارد که با افزودن W به آغاز آن، به برهانی برای B بدون مقدمه تبدیل خواهد شد زیرا $T \rightarrow W$ قضیه R است. پایان برهان.)

از آنجا که در بخش‌های پیشین، اثبات کردیم که

$$\models A \wedge W \rightarrow B \vee I \quad \text{اتا} \quad \models A \ggg B \quad \text{اتا} \quad A \vdash_{PWR} B$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\models T \wedge W \rightarrow B \vee I \quad \text{اتا} \quad \models T \ggg B \quad \text{اتا} \quad T \vdash_{PWR} B$$

$$\models W \rightarrow B \vee I \quad \text{اتا} \quad \models T \ggg B \quad \text{اتا} \quad T \vdash_{PWR} B$$

$$\models W \rightarrow B \vee I \quad \text{اتا} \quad \models T \ggg B \quad \text{اتا} \quad \vdash_{PWR} B$$

اما قبلا ثابت کردیم که

در هر جهان ممکن که A صادق است B نیز صادق است اتا $\models A \ggg B$

بنابراین، داریم:

در هر جهان ممکن که T صادق است B نیز صادق است اتا $\models T \ggg B$

در هر جهان ممکن، B صادق است اتا $\models T \ggg B$

در نتیجه،

در هر جهان ممکن، B صادق است اتا $\vdash_{PWR} B$

و این یعنی قضایای PWR، مانند قواعد آن، در جهان‌های ممکن معتبرند.

منابع

۱. رید، استیون، فلسفه منطق ربط، اسداله فلاحی، قم، انتشارات دانشگاه مفید؛ (۱۳۸۵)

2. Belnap, N. D. & J. M. Dunn, 1981, “Entailment and the Disjunctive Syllogism”, Contemporary Philosophy: a new survey, vol. I, ed. G. floistad and G. H. von Wright, The Hague ; Also: Philosophy of language/Philosophical logic, ed, G. Fløistad and G. H. von Wright, The Hague (Martinus Nijhoff),337-366.
3. Kripke, S., 1959, 'A Completeness Theorem in Modal Logic', Journal of Symbolic Logic 24 (1959), 1-14.
4. Kripke, S., 1963a, 'Semantical Analysis of Modal Logic I, Normal Propositional Calculi', Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 9 (1963), 67-96.
5. Kripke, S., 1963b, 'Semantical Considerations on Modal Logics', Acta Philosophica Fennica (1963) Modal and Many-Valued Logics, 83-94.
6. Kripke, S., 1965, 'Semantical Analysis of Modal Logic II, Non-Normal Modal Propositional Calculi', The Theory of Models ed. J. W. Addison, L. Henkin, A. Tarski, Amsterdam, 1965, 206-20.
7. Meyer, R. K., 1974, “New axiomatics for relevant logics - I”. Journal of

Philosophical Logic, 3: 53-86.
8. Read, Stephen, 1988, Relevant Logic. Basil Blackwell, Oxford.
9. Restall, Greg, 2000, An Introduction to Substructural Logics. London and New Yourk, Routledge.
10. Routley, F. R. & Meyer, 1972, "The semantics of entailment (II)", Journal of Philosophical Logic, 1
11. Routley, F. R. & Meyer, 1972, "The semantics of entailment (III)", Journal of Philosophical Logic, 1: 192–208
12. Routley, F. R. & Meyer, 1973, "Semantics of Entailment". In Hugues Leblanc, editor, Truth Syntax and Modality, pages 194–243. North Holland, 1973. Proceedings of the Temple Iniversity Conference on Alternative Semantics.