

## استفاده از معادلات دینامیکی کاپل ترموالاستیسیته در تحلیل جداره موتور راکت‌های سوخت جامد

ناصر رهبر<sup>1</sup>

تهران - دانشگاه صنعتی مالک اشتر  
(تاریخ وصول: 90/1/22، تاریخ پذیرش: 90/5/1)

### چکیده

انتقال حرارت بیش از حد موجب نقایص مهمی در راکت‌ها خواهد شد. از جمله این نقایص می‌توان به کاهش خواص مکانیکی مواد و یا ذوب شدن جداره در اثر بالا رفتن دما اشاره نمود. از سوی دیگر در اثر توزیع غیریکنواخت درجه حرارت به خصوص در موتورهای سوخت جامد، تنش‌های حرارتی علاوه بر تنش‌های مکانیکی به وجود خواهند آمد. محاسبه توزیع دما و تنش‌های مکانیکی و حرارتی در جداره موتور راکت‌ها مورد توجه طراحان بوده است. در این مقاله نحوه محاسبه تنش‌های مکانیکی و حرارتی جداره موتور راکت‌های سوخت جامد با استفاده از روابط دینامیکی کاپل ترموالاستیسیته ارائه شده است. بدین منظور ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله بدست آمده و برای حل این معادلات از روش المان‌های محدود کمک گرفته شده است. سپس روش ارائه شده بر روی یک راکت واقعی مورد آزمایش قرار گرفته و اثر عایق حرارتی در کاهش دمای جداره و تنش‌های مکانیکی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع دما، تنش‌های حرارتی، ترموالاستیسیته، موتور راکت سوخت جامد، روش المان‌های محدود.

### 1- مقدمه

تنش‌های حرارتی علاوه بر تنش‌های مکانیکی به وجود خواهند آمد. محاسبه توزیع دما و تنش‌های مکانیکی و حرارتی در جداره استوانه‌های جدار نازک و ضخیم مورد توجه طراحان بوده است [5-10]. طی تحقیقات سلطانی و همکارانش، معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته حاکم بر استوانه جدار نازک به شکل دستگاه معادلات استاندارد مرتبه دوم از زمان تبدیل گردیده تا بتوان با استفاده از روش‌های موجود مانند روش نیومارک به حل آن پرداخت، ولی حل عددی انجام نشده است [5]. فرشیدیان و همکارانش نیز، نتایج حل عددی را برای استوانه‌های جدار نازک و

در هنگام اشتعال راکت‌ها، مقدار قابل ملاحظه‌ای از حرارت گازهای ناشی از احتراق به جداره موتور و سایر اجزای آنها منتقل می‌شود. هدف اصلی طراحی آن است که این انتقال حرارت منجر به نقص در عملکرد موتور و مجموعه کل راکت نگردد [1-4]. انتقال حرارت بیش از حد، موجب نقایص مهمی در راکت‌ها خواهد شد از جمله این نقایص می‌توان به کاهش خواص مکانیکی مواد و یا ذوب شدن جداره در اثر بالا رفتن دما اشاره نمود. از سوی دیگر در اثر توزیع غیریکنواخت درجه حرارت به خصوص در موتورهای سوخت جامد،

\* E-mail: rahbar.nas@gmail.com

جداره‌ها استفاده گردد و با اینکه معادلات ترموالاستیسیته معمولی نیز می‌توانند با دقت خوب جهت تحلیل تنش و درجه حرارت مورد استفاده قرار گیرند.

## 2- حالت کلی معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته

روابط حاکم بر اجسام و قطعاتی که در معرض بارهای دینامیکی، مکانیکی و حرارتی با تغییرات شدید نسبت به زمان قرار دارند بنام معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته<sup>1</sup> نامیده می‌شوند و شامل معادلات تعادل دینامیکی، معادلات سازگاری (روابط تغییر مکان - کرنش)، معادلات بنیادی یا هوک (روابط بین تنش و کرنش) و معادله انرژی (اصل اول ترمودینامیک) می‌باشند. حالت تانسوری این معادلات در مختصات دکارتی به صورت زیر بیان می‌شوند [11]:

$$\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

(3) معادلات بنیادی

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha^*(T - T_0)\delta_{ij}$$

$$\bar{T}_{,ii} - \frac{1}{a}\dot{T} - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha^*T_0}{k}\dot{\varepsilon}_{ii} = -\frac{Q}{a} \quad (4)$$

در معادلات فوق  $u_i$  تانسور تغییر مکان بوده و  $\lambda, \mu$  بنام ضرایب لامه<sup>2</sup> نامیده شده و از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{\nu E}{(1 - \nu - 2\nu^2)} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6)$$

با جایگزین نمودن معادلات (2) در (3) و سپس در (1) معادلات تعادل دینامیکی بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان و درجه حرارت به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu)u_{k,ki} - (3\lambda + 2\mu)\alpha^*T_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (7)$$

با جایگزینی  $\varepsilon_{ii}$  از رابطه (2) در (4)، معادله انرژی بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان و درجه حرارت به صورت زیر درمی‌آید:

$$T_{,ii} - \frac{1}{a}\dot{T} - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha^*T_0}{k}\dot{u}_{i,i} = -\frac{Q}{a} \quad (8)$$

جدار ضخیم بدست آورده و با هم مقایسه نمودند. در این پژوهش نتیجه گرفته شده که در حالت اعمال فشار داخلی پاسخ دینامیکی دارای نوسان حول پاسخ استاتیکی است و حداکثر تنش مماسی در حالت دینامیکی بیش از دو برابر استاتیکی است و برای استوانه‌های جدار ضخیم اختلاف میان پاسخ به حل دینامیکی وابسته و غیروابسته ناچیز بوده و این اختلاف کمتر از 2% است [6]. در تحقیقات رحیمیان و همکارانش، بجای استفاده از روش المان‌های محدود، از روش تبدیل معکوس لاپلاس به روش عددی جهت دستیابی به تغییرات درجه حرارت و تنش‌ها استفاده شده و نتیجه‌گیری شده که به ازای نیروی دینامیکی اعمال شده تغییرات درجه حرارت جسم زیاد نیست در حالی که به ازای تغییرات درجه حرارت دینامیکی اندک، تنش‌های به وجود آمده در استوانه نسبتاً زیاد هستند [7]. حکیم الهی و همکارانش توزیع درجه حرارت در جداره استوانه جدارنازک بصورت سهموی را تخمین زده و اظهار نموده اند هنگامی که ثابت زمانی اغتشاشات حرارتی قابل قیاس با ثابت زمانی اغتشاشات مکانیکی سیستم باشد، احتیاج به حل همزمان میدان توزیع تنش و درجه حرارت در قطعه می‌باشد [8]. باهتویی و همکارش هم نمونه‌هایی از استوانه‌های چندلایه با مواد فلزی و سرامیکی تحت صرفاً شوک حرارتی رامورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [9 و 10].

از آنجائی که موتور راکت‌ها تا هدف از راکت جدا نمی‌شود لذا سبک‌بودن آن در فرآیند طراحی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله نحوه محاسبه تنش‌های مکانیکی و حرارتی همچنین توزیع دما در جداره موتور راکت‌های سوخت جامد با استفاده از روابط دینامیکی کاپل ترموالاستیسیته ارائه شده است. بدین منظور ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله بدست آمده و برای حل این معادلات از روش المان‌های محدود کمک گرفته شده است. سپس روش ارائه شده بر روی یک راکت واقعی پیاده شده و اثر عایق حرارتی در کاهش دمای جداره و تنش‌های مکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. هدف اصلی مقاله این است که در کاربردهای عملی، آیا شوک و فشار و حرارتی در محفظه احتراق راکت‌ها در حدی است که لازم باشد از معادلات دینامیکی کاپل ترموالاستیسیته برای تحلیل تنش در

1-Dynamic Thermoelastic Equations  
2- Lamé

شرایط اولیه روی  $u$  و  $T$  عبارتند از  $u(r,0) = 0, T(r,0) = 0$  و در این صورت شرایط مرزی در مرز داخلی  $r = r_i$  به صورت زیر در می‌آید:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma(T - T_0) - f^*(t) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} - \beta_1^*[T - g^*(t)] = 0 \quad (19)$$

و در مرز بیرونی  $r = r_o$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma(T - T_0) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} - \beta_2^* T = 0 \quad (21)$$

که در آن  $\beta_1^* = h_1 / K$ ,  $\beta_2^* = h_2 / K$  می‌باشند. همچنین توابع  $f^*, g^*$  به ترتیب دما و فشار اعمال شده روی جداره داخلی استوانه بوده و در زمان اولیه پیوسته می‌باشند. حال مجموعه متغیرهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_i}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r_i}, \quad \bar{u} = \frac{u}{r_i} \quad (22)$$

پس از انجام عملیات جبری، معادلات (12) و (13) به دو معادله بی‌بعد زیر تبدیل می‌شوند:

$$-\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( r \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \bar{r} \bar{u} + \lambda_2 \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (23)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \bar{c} \bar{r} \bar{T} + \bar{c} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{u}) = 0 \quad (24)$$

که در آن  $\bar{c} = c_1 r_i / a$ ,  $\lambda_1 = \eta a / T_0$ ,  $\lambda_2 = m T_0$  می‌باشند. با انتخاب متغیرهای بی‌بعد، شرایط مرزی نیز در مرز داخلی  $\bar{r} = 1$  به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \alpha \frac{\bar{u}}{\bar{r}} - \lambda_2 \bar{T} - f(\tau) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} - \beta_1 \bar{T} + \beta_1 g(\tau) = 0 \quad (26)$$

و شرایط مرزی در مرز بیرونی  $\bar{r} = r_o / r_i$  به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \alpha \frac{\bar{u}}{\bar{r}} - \lambda_2 \bar{T} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \beta_2 \bar{T} = 0 \quad (28)$$

که در آن:

معادلات (7) و (8) معادلات حاکم بر مسائل دینامیکی ترموالاستیسیته هستند و همانطوری که ملاحظه می‌شود به جهت همگیر (کوپله) بودن، روش حل تحلیلی برای این معادلات وجود ندارد. صورت دیگر این معادلات که از حالت تانسوری خارج شده است به صورت زیر نمایش داده می‌شود [12-13]:

$$\mu \nabla^2 \underline{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \underline{u} + \underline{F} - \gamma \text{grad } T = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (9)$$

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \dot{T} - \eta \text{div } \underline{u} = -\frac{Q}{a} \quad (10)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha^* \\ \eta = \frac{\gamma T_0}{\rho c a} = \frac{\gamma T_0}{k} \end{cases} \quad (11)$$

از آنجائی که لوله موتور راکت‌ها به شکل استوانه‌ای بوده و در یک استوانه تقارن وجود دارد، لذا بردار تغییر مکان  $\underline{u}$  به تغییر مکان شعاعی  $u$  کاهش می‌یابد و مولفه مماسی آن مساوی صفر در نظر گرفته خواهد شد. همچنین  $\underline{F} = 0, Q = 0$  فرض می‌شود. در صورتی که توابع درجه حرارت و فشار اعمال شده مستقل از زاویه  $\theta$  و طول استوانه باشند آنگاه معادلات (9) و (10) با فرض صفحه‌ای بودن تنش‌ها ( $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ ) در یک استوانه به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{u}{r^2} + \frac{\ddot{u}}{c_1^2} + m \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{T}}{a} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{u}) = 0 \quad (13)$$

در معادلات (12) و (13) متغیرهای  $m, c_1$  از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$m = \frac{\gamma}{(\lambda + 2\mu)} \quad (14)$$

$$c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad (15)$$

از سوی دیگر تنش‌های شعاعی و مماسی در استوانه از رابطه (3) و به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma(T - T_0) \quad (16)$$

$$\sigma_\theta = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} - \gamma(T - T_0) \quad (17)$$

$$[CT1]\underline{\dot{T}} + \frac{1}{c}[KT1]\underline{T} + \lambda_1[CU1]\underline{\dot{U}} = \underline{F}^{(1)} \quad (33)$$

که در آن  $[MU2]$ ,  $[KU2]$ , ... ماتریس‌های سه قطری  $N \times N$  هستند. جزئیات بدست آوردن این ماتریس‌ها در مرجع [13] آورده شده است.

#### 4- روش حل دستگاه معادلات

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی (32) و (33) از روش  $GIM^4$  استفاده می‌شود [14]. برای سهولت کار، این معادلات مجموعاً در یک معادله در نظر گرفته می‌شوند:

$$M\ddot{\underline{X}} + C\dot{\underline{X}} + K\underline{X} = \underline{F} \quad (34)$$

که در آن:

$$\underline{X} = \{\underline{U}, \underline{T}\}^T \quad (35)$$

$$M = \begin{bmatrix} MU2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$K = \begin{bmatrix} KU2 & \lambda_2 KT2 \\ 0 & \frac{1}{c} KT1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 CU1 & CT1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \left\{ \underline{F}^{(2)} \mid \underline{F}^{(1)} \right\} \quad (37)$$

معادله دیفرانسیل (34) را می‌توان از مرتبه دوم به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول از زمان کاهش داد:

$$A\dot{\underline{Y}} = B\underline{Y} + \underline{F} \quad (38)$$

که در آن:

$$\underline{Y} = \{\underline{\dot{U}}, \underline{U}, \underline{T}\}^T \quad (39)$$

$$A = \begin{bmatrix} MU2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & CT1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

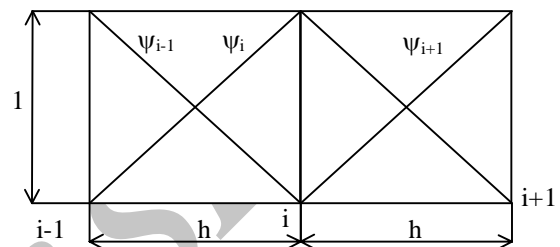
$$B = \begin{bmatrix} 0 & -KU2 & -\lambda_2 KT2 \\ I & 0 & 0 \\ -\lambda_1 CU1 & 0 & -\frac{1}{c} KT1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \left\{ \underline{F}^{(2)} \mid 0 \mid \underline{F}^{(1)} \right\}$$

$$\beta_1 = \beta_1^* r_i, \beta_2 = \beta_2^* r_i, \alpha = \lambda / (\lambda + 2\mu), g(\tau) = [g^*(t) - T_0] / T_0, f(\tau) = f^*(t) / (\lambda + 2\mu)$$

#### 3- انتخاب توابع تقریب جابجایی و دما

برای جداسازی توابع جابجایی و دما از روش گالرکین<sup>1</sup> استفاده می‌شود. در این روش توابع شکلی<sup>2</sup> بصورت خطی فرض شده و در نتیجه ماتریس‌های جرمی و هدایت به صورت سازگار<sup>3</sup> به دست خواهند آمد (شکل 1).



شکل 1- روش گالرکین.

در روش گالرکین فرض می‌شود که حل تقریبی معادلات (23) و (24) به ترتیب  $\tilde{u}$  و  $\tilde{T}$  بوده و آنها را می‌توان بر حسب تابع شکلی  $\psi_i(r)$  به صورت زیر بیان نمود:

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^n \psi_i(r) u_i(\tau) \quad (29)$$

$$\tilde{T} = \sum_{i=0}^n \psi_i(r) T_i(\tau) \quad (30)$$

که در آن  $n$  تعداد گره‌ها (شامل دو گره مرزی) است. مقادیر  $u_i$  و  $T_i$  به ترتیب مقادیر تقریبی جابجایی و دما در گره‌ها هستند. جاگذاری معادله اخیر در معادلات (23) الی (28) و ارضا نمودن شرط:

$$\int_{r_i}^{r_o} R_k \psi_j(r) dr = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2 \quad (31)$$

که در آن  $R_1$  و  $R_2$  باقیمانده‌های محاسبه شده در جاگذاری‌های بیان شده می‌باشند. با انجام انتگرال‌گیری و مقداری عملیات جبری در نهایت به دو معادله جبری زیر خواهیم رسید:

$$[MU2]\underline{\dot{U}} + [KU2]\underline{U} + \lambda_2[KT2]\underline{T} = \underline{F}^{(2)} \quad (32)$$

با استفاده از متد GIM معادله زیر به دست می‌آید:

$$[A - \Delta\tau\theta B] \underline{Y}^{i+1} = [A + \Delta\tau(1 - \theta)B] \underline{Y}^i + \Delta\tau[\theta \underline{F}^{i+1} + (1 - \theta)\underline{F}^i] \quad (41)$$

که در آن  $0 \leq \theta \leq 1$  خواهد بود انتخاب مقدار  $\theta$  بستگی به نوع مسئله مورد مطالعه، پایداری، دقت محاسبات و صرفه‌جویی در حافظه کامپیوتر دارد. نشان داده شده است که بهترین انتخاب  $\theta = 0.667$  می‌باشد [15-16]. همچنین در حل مسائل انتقال حرارت، انتخاب نمو زمانی و مکانی مستقل از یکدیگر نیستند. شرط پایداری در حل معادلات آن است که  $\frac{(\Delta r)^2}{a\Delta t} \geq 2$  باشد [17]. در انتخاب اندازه نمو زمان و مکان در این مقاله این شرط منظور شده است.

## 5- نتایج و بحث

قبل از بکارگیری روش المان‌های محدود<sup>1</sup> لازم است که نتایج بدست آمده از آن با نتایج حل یک مثال ساده تحلیلی مقایسه شود. بدین منظور فرض می‌شود یک استوانه توخالی طویل با شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  تحت فشار داخلی  $P_i$  قرار دارد. فشار خارجی برابر فشار محیط و دمای جداره نیز همان دمای محیط می‌باشد. در نتیجه تنش‌های حرارتی صرف‌نظر می‌گردند. تنش‌های شعاعی و مماسی در نقطه‌ای به شعاع  $r$  از مرکز سیلندر از رابطه زیر بدست می‌آیند [18]:

$$\sigma_r = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (42)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (43)$$

شبیه‌سازی با مقادیر زیر اجرا گردید:

$$a = 50\text{mm}, b = 125\text{mm}, P_i = 80 \times 10^5 \text{ Pa}, N = 100$$

مقایسه نتایج بدست آمده از حل تحلیلی و حل FEM در اشکال 2 و 3 امکان‌پذیر است. با توجه به منحنی‌های بدست آمده دقت بدست آمده از روش FEM قابل قبول بوده و به خوبی با نتایج حل تحلیلی مطابقت می‌نمایند. در این قسمت تأثیر عایق حرارتی بر روی توزیع درجه حرارت و تنش‌ها مورد

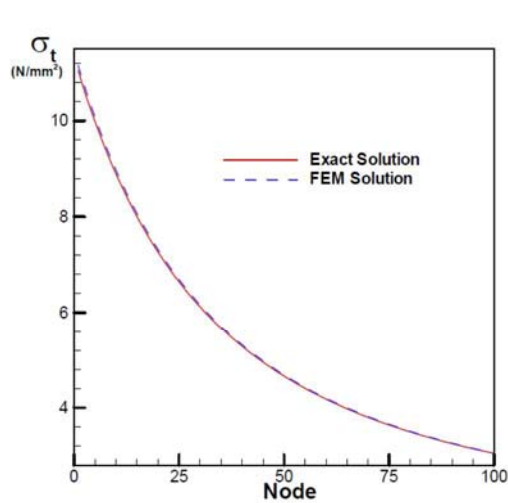
بررسی قرار می‌گیرد در این حالت فرض می‌شود که جداره داخلی بدون عایق بوده اما اثر عایق به صورت کاهش ضریب انتقال حرارت جابجایی در جداره داخلی موتور به صورت زیر ظاهر شود [17]:

$$h_{1c} = \frac{h_1 C_k}{C_k + h_1 r_i \ln \left( \left( r_i + \frac{C_t}{2} \right) / r_i \right)} \quad (44)$$

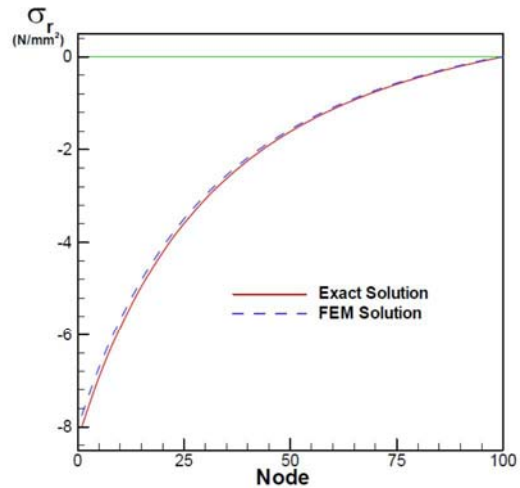
در رابطه اخیر  $h_{1c}$  ضریب جدید انتقال حرارت جابجایی می‌باشد. مثال جدیدی با داده‌های زیر شبیه‌سازی گردید:

$$\begin{aligned} a &= 1.27 \times 10^{-5}, C_k = 1, C_t = 1\text{mm}, E = 2 \times 10^{11}, h_1 = 5000 \\ h_2 &= 200, K = 54, N = 20, P_i = 80 \times 10^5 \text{ Pa}, r_i = 114\text{mm} \\ r_o &= 119\text{mm}, Bt = 4\text{sec}, T_c = 2260^\circ\text{C}, T_0 = 30^\circ\text{C} \\ \alpha^* &= 1.17 \times 10^{-5}, \rho = 7833, \nu = 0.3 \end{aligned}$$

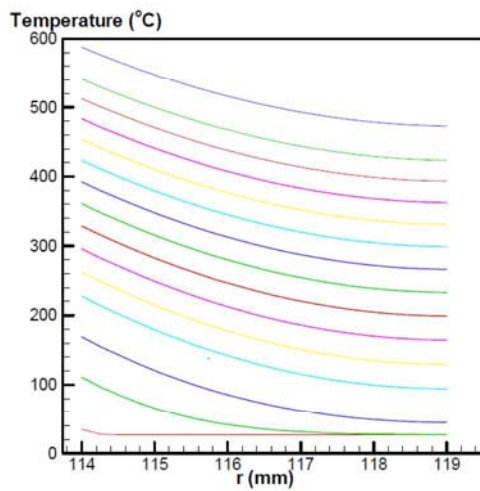
شکل 4 نشانگر کاهش دما در جداره داخلی در اثر استفاده از عایق حرارتی می‌باشد. در این شکل در پایان زمان سوزش دمای جداره داخلی در حالت بدون عایق  $1370^\circ\text{C}$  و در حالت با عایق تا  $587^\circ\text{C}$  کاهش یافته است. در شکل 5 تغییرات درجه حرارت با گذشت زمان در ضخامت جداره عایق‌دار (گره‌های مختلف) نشان داده شده است. با توجه به این شکل جداره داخلی سریعتر از جداره خارجی گرم می‌شود. اشکال 6 و 7 به ترتیب تنش مماسی و شعاعی در جداره داخلی را در دو حالت با عایق و بدون عایق نشان می‌دهند. همان‌طوری که ملاحظه می‌شود استفاده از عایق، کاهش قابل توجه‌ای در اندازه این دو تنش ایجاد نموده است لذا استفاده از عایق علاوه بر کاهش دمای جداره و تنش‌های حرارتی موجب افزایش ضریب اطمینان نیز خواهد شد. با توجه به منحنی‌های فشار و تنش ملاحظه می‌گردد عامل دینامیکی که باعث نوسان و ارتعاش تنش‌های مماسی و شعاعی باشد در منحنی‌ها مشاهده نمی‌شود از این موضوع می‌توان استفاده نمود که فشار و حرارت وارده به جداره موتورهای سوخت جامد در حدی نیست که بتواند عامل وابستگی بین معادلات تنش و انرژی را ایجاد نماید لذا نتیجه ارزشمندی که از نتایج حاصل می‌شود آن است که می‌توان معادلات را در حالت ترموالاستیسیته غیروابسته (غیرهمگیر) فرض نموده و هر کدام را جداگانه حل نمود.



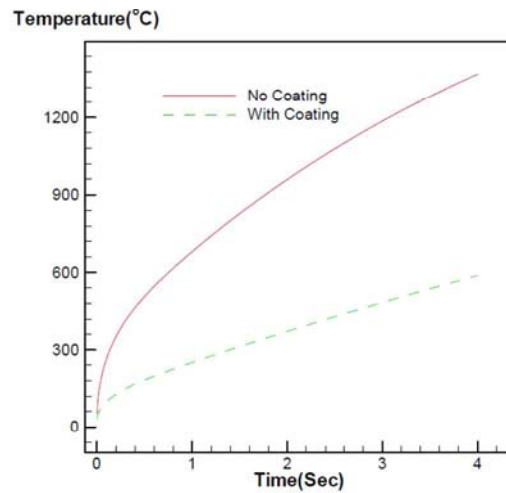
شکل 3- تنش مماسی در یک استوانه تحت فشار.



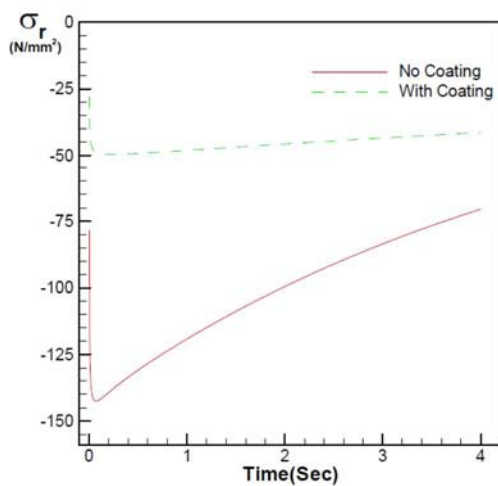
شکل 2- تنش شعاعی در یک استوانه تحت فشار.



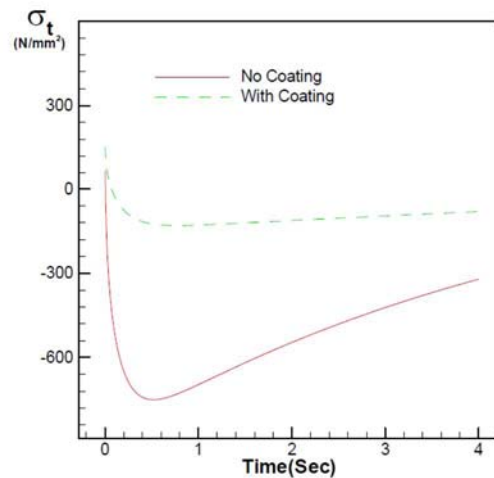
شکل 5- دمای جداره موتور در زمان های متوالی.



شکل 4- مقایسه اثر عایق بر روی دمای جداره داخلی.



شکل 7- تنش شعاعی در جداره داخلی موتور.



شکل 6- تنش مماسی در جداره داخلی موتور.

## 6- نتیجه گیری

در این مقاله نحوه محاسبه تنش‌های مکانیکی و حرارتی همچنین توزیع دما در جداره موتور راکت‌های سوخت جامد با استفاده از روابط دینامیکی کاپل ترموالاستیسیته ارائه شده است. بدین منظور ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله بدست آمده و برای حل این معادلات از روش المان‌های محدود کمک گرفته شده است. سپس روش ارائه شده بر روی یک راکت واقعی مورد آزمایش قرار گرفته و اثر عایق حرارتی در کاهش دمای جداره و تنش‌های مکانیکی نشان داده شده است. نتایج بدست آمده نشانگر آن است که استفاده از یک لایه نازک عایق حرارتی کاهش قابل ملاحظه‌ای در درجه حرارت و تنش‌های حرارتی ایجاد نموده و در نهایت ضریب اطمینان افزایش خواهد یافت. نتیجه‌گیری دیگر آن است که فشار و حرارت وارده به جداره موتورهای سوخت جامد در حدی نیست که بتواند عامل وابستگی بین معادلات تنش و انرژی را ایجاد نماید لذا می‌توان معادلات را در حالت ترموالاستیسیته غیروابسته (غیرهمگیر) فرض نموده و هر کدام را جداگانه حل نمود.

## فهرست علائم انگلیسی

- $a$  = ضریب نفوذپذیری حرارتی ( $m^2/sec$ )  
 $a, b$  = شعاع داخلی و خارجی لوله موتور ( $m$ )  
 $c$  = گرمای ویژه یا ظرفیت گرمایی ( $J/kg \text{ } ^\circ K$ )  
 $C_f$  = ضخامت عایق ( $m$ )  
 $h_1$  = ضریب انتقال حرارت جابجایی در مرز داخلی ( $J/m^2 sec \text{ } ^\circ K$ )  
 $K$  = ضریب هدایت حرارتی لوله ( $J/m \text{ sec } ^\circ K$ )  
 $P_i$  = فشار داخل لوله ( $N/m^2$ )  
 $r$  = شعاع ( $m$ )  
 $T$  = درجه حرارت ( $^\circ K$ )  
 $u$  = جابجایی یا تغییر مکان ( $m$ )  
 $Bt$  = زمان سوزش موتور سوخت جامد ( $sec$ )  
 $C_k$  = ضریب هدایت حرارتی عایق ( $J/m \text{ sec } ^\circ K$ )  
 $E$  = مدول الاستیسیته ( $N/m^2$ )  
 $h_2$  = ضریب انتقال حرارت جابجایی در مرز خارجی ( $J/m^2 sec \text{ } ^\circ K$ )  
 $N$  = تعداد گره‌ها در ضخامت استوانه  
 $Q$  = نرخ انرژی تولیدی در واحد حجم  
 $t$  = زمان ( $sec$ )  
 $T_0$  = درجه حرارت اولیه یا محیط ( $^\circ K$ )  
 $T_c$  = درجه حرارت گازهای حاصل از احتراق ( $^\circ K$ )

## فهرست علائم یونانی

- $\alpha^*$  = ضریب انبساط حرارتی ( $1/^\circ K$ )  
 $\epsilon_{ij}$  = تانسور کرنش  
 $\rho$  = جرم مخصوص ( $kg/m^3$ )  
 $\tau_{ij}$  = تانسور تنش ( $N/m^2$ )  
 $\mu, \lambda$  = ثابت‌های لامه ( $N/m^2$ )  
 $\nu$  = ضریب پواسون  
 $\sigma_r$  = تنش مماسی ( $N/m^2$ )  
 $\sigma_f$  = تنش شعاعی ( $N/m^2$ )

## مراجع

- [1] Fortescue, P.; Swinerd, G.; Stark, J. "Spacecraft Systems Engineering."; 4ed, Wiley, 2011.  
 [2] Cornelisse, J. W.; Schoyer, H. F. R.; Wakker, K. F. "Rocket Propulsion and Space Flight Dynamics."; Pitman Publishing, London, 1979.  
 [3] Davenas, A. "Solid Rocket Propulsion Technology."; Elsevier Science, Inc, Pergamon Press. 1992.  
 [4] Sutton, G. P.; Biblarz, O. "Rocket Propulsion Elements: An Introduction to the Engineering of Rockets."; 7ed, Wiley, 2000.  
 [5] سلطانی ناصر، "حکیم الهی بهزاد، بدست آوردن معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته در استوانه جدارنازک برای حل به روش اجزاء محدود"، مجموعه مقالات پنجمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، انجمن مهندسان مکانیک ایران، تبریز، اردیبهشت 1376، ص 887-895.  
 [6] فرشیدیان‌فر انوشیروان، شیرازی سیدکاظم، صالح رضا و اولیاء محمد، "حل عددی مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی برای مقاطع دوار استوانه‌ای تحت شوک‌های فشاری و حرارتی"، مجموعه مقالات پنجمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، انجمن مهندسان مکانیک ایران، تبریز، اردیبهشت 1376، ص 1109-1119.  
 [7] رحیمیان محمد، اسکندری قادری مرتضی و حیدرپور علیرضا، "حل تحلیلی مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در محیط استوانه‌ای (قسمت دوم: حل عددی)", نشریه دانشکده فنی، جلد 32، شماره یک، خرداد 1378 ص 57 تا 70.  
 [8] حکیم الهی بهزاد و سلطانی ناصر، "حل معادلات وابسته ترموالاستیسیته دینامیکی در استوانه جدار نازک تحت اثر شوک‌های فشار، برش و درجه حرارت با استفاده از روش اجزاء محدود"، نشریه دانشکده فنی دوره 33، شماره 3، آذر 1378، ص 73 تا 86.  
 [9] Bahtui, A.; Eslami, M. R. "Coupled Thermoelasticity of Functionally Graded Cylindrical Shells."; Mechanics Research Communications 2007, 34, 1-18.  
 [10] Bahtui, A.; Eslami M. R. "Coupled Thermoelasticity of FG Thin Shells: Effect of Temperature Field Across the Thickness."; 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8) & 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008) Venice, Italy, July 2008.

- [15] Zamal, M. "The Mathematics of Finite Element and Application(II)."; Academic Press pp. 85-104, 1975.
- [16] Zienkiewicz, O. C. "Finite Element Method."; 6ed. McGraw-Hill. 2005.
- [17] Holman, J. P. "Heat Transfer."; McGraw-Hill, 10ed 2009.
- [18] Shigley, J. E.; Mitchell, L. D. "Mechanical Engineering Design."; 8ed McGraw-Hill. 2006.
- [11] Boley, B. A.; Winner, J. H. "Theory of Thermal Stresses."; Dover Publications Incorporated, 1997.
- [12] Nowacki, W. "Thermoelasticity."; Addison-Wesley, 1962.
- [13] Ghoneim, Y. Y.; Li, H.; Chen, Y. "A Numerical Method in Solving a Coupled Thermoelasticity Equation and Some Results."; Journal of Thermal Stresses 1983, 6(25), 253–280.
- [14] Richtmeyer, R. D.; Morton, K. W. "Difference Method for Initial-Value Problems."; Krieger Publishing Company, 2ed 1994.