

# شبیه‌سازی عددی سه‌بعدی پسروری گرین در موتور موشک سوخت جامد براساس روش مجموعه سطوح

سید قاسم مشیر استخاره<sup>۱</sup>، علیرضا مستوفی‌زاده<sup>۲\*</sup>، نوریخس فولادی<sup>۳</sup>

اصفهان - دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(تاریخ وصول: ۹۰/۱۱/۱۶، تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۳/۲۲)

## چکیده

در این تحقیق، شبیه‌سازی عددی پسروری گرین به‌صورت سه‌بعدی انجام گردیده است. برای تحلیل عددی پسروری گرین، یک کد کامپیوتری براساس روش مجموعه سطوح توسعه یافت و برای بالا بردن دقت جواب از روش المان برشی برای المان‌های دربرگیرنده مرز استفاده شد. دقت کد مورد نظر با گرین‌هایی که دارای حل تحلیلی هستند، صحت‌گذاری و مشاهده شد که کد از دقت بالایی برخوردار است. سپس نتایج حاصل از تحلیل پسروری برای چند شکل گرین مرسوم ارائه شد. همچنین برای پیش‌بینی فشار درون موتور یک کد بالستیک داخلی به‌صورت صفری‌عددی نوشته و با کد تحلیل پسروری گرین لینک شد. نتایج حاصل از کد با نمونه آزمایشگاهی مقایسه و دقت بالایی به‌دست آمد.

واژه‌های کلیدی: شبیه‌سازی عددی، پسروری، گرین، روش مجموعه سطوح، روش المان برشی، بالستیک داخلی.

## ۱- مقدمه

طی زمان عملکرد موتور است. در اثر سوختن سطح پیشران، هندسه گرین تغییر می‌کند و تغییر در هندسه، تغییر سطح سوزش<sup>۵</sup> را به‌دنبال دارد. به این علت یافتن سطح سوزش در هر لحظه اهمیت دارد، که با داشتن تغییرات سطح سوزش و سطح گذرگاه جریان<sup>۶</sup> در هر گام زمانی حل، می‌توان فشار درون موتور موشک را یافت. تحلیل پسروری گرین صرفاً یک تحلیل ریاضیاتی و عددی است. اطلاعات به‌دست آمده از تحلیل پسروری، برای تحلیل بالستیک داخلی موتور مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش‌های تحلیل پسروری گرین به دو دسته کلی روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی تقسیم می‌شوند [۱ و ۲]. در روش تحلیلی پارامترهای

یکی از مهم‌ترین قسمت‌های تشکیل‌دهنده موتور موشک سوخت جامد، پیشران یا همان گرین<sup>۴</sup> موتور است. براساس مأموریت پروازی موشک و نمودار تراست برحسب زمان، شکل گرین موشک طراحی می‌شود. بنابراین شکل مناسب گرین، تضمین‌کننده عملکرد صحیح‌تر موشک است و مسئله‌ای که در ادامه آن طرح می‌شود؛ تحلیل پسروری گرین در طی زمان عملکرد موتور موشک است. حل مسئله پسروری حاصل از سوزش گرین، نیازمند بررسی مرز متحرک است. تحلیل پسروری گرین، مشخص کردن تغییر در هندسه گرین پیشران جامد در

\*E-mail: armostofizadeh@mut-es.ac.ir  
5- Burning Surface  
6- Port Area

۱- کارشناس ارشد  
۲- استادیار  
۳- دانشیار

در سال ۲۰۰۸، پوسکولسیو و همکارش با استفاده از مدل‌سازی حجمی پیشران جامد، تحلیل پسروری را روی گرین موتور موشک پیشران جامد انجام دادند. آنها در مقاله خود تحلیل پسروری به‌صورت دوبعدی با نرم‌افزار اتوکد انجام دادند و برای هر گام حل، پارامترهای مورد نظر بر هندسه گرین منطبق و هندسه جدید گرین را مدل‌سازی کردند. با تحلیل این هندسه‌ها، تغییرات سطح سوزش و در نتیجه فشار موتور به‌دست آمد. نتایج کار آنها در مقایسه با تست‌های عملی موتور، از دقت خوبی برخوردار بود [۹].

در سال ۲۰۱۱، کوالینی و همکارانش یک کد عددی به‌نام "جی آر - ای جی"<sup>۱۰</sup> براساس روش مجموعه سطوح ارائه دادند و با لینک کردن این کد با کد تحلیل بالستیک داخلی موتور، به تحلیل جریان داخل موتور پرداختند و با مقایسه نتایج خود با نتایج آزمایشگاهی، جواب‌هایی با دقت بالا را به‌دست آوردند [۱۰].

با توجه به مطالب ذکر شده، بیشتر کارهای انجام شده بر روی تحلیل پسروری گرین، به‌صورت دوبعدی است. از طرفی جامعیت کارهای صورت گرفته توسط محققان، معمولاً ذکر نمی‌شود. بنابراین هدف از این تحقیق، تولید یک کد کامپیوتری جامع برای تحلیل پسروری گرین‌های مختلف در حالت سه‌بعدی است. روش عددی به‌کار گرفته شده، روش مجموعه سطوح است. این روش عددی به‌طور گسترده توسط محققان برای تحلیل عددی مسائل مختلف به‌کار گرفته شده و توانایی این روش در مسائل عملی مختلف تضمین شده است [۱۱]. نوآوری به‌کار رفته در این تحقیق، استفاده از روش المان برشی<sup>۱۱</sup> بود که دقت بالایی را در محاسبه مساحت سطح سوزش و سطح گذرگاه جریان، به ارمغان آورد.

## ۲- تئوری و معادلات حاکم

در این تحقیق شبیه‌سازی پسروری گرین در موتور موشک در سه مرحله انجام می‌شود؛ به این صورت که ابتدا حجم داخلی اولیه گرین (پورت اولیه گرین) در محیط یک نرم‌افزار تولید شبکه، ترسیم و یک شبکه بی‌سازمان در این حجم ایجاد می‌شود، سپس اطلاعات شبکه تولید شده که شامل مختصات نقاط شبکه و نحوه اتصال گره‌ها به‌هم برای ساخت المان‌های مجاور است، به داخل برنامه نوشته‌شده وارد می‌شود. در مرحله بعد برای یافتن تابع حداقل فاصله یک شبکه کارترین به دور هندسه شبکه‌بندی شده ایجاد و با استفاده از اطلاعات شبکه اولیه، فاصله هر نقطه از شبکه کارترین ثانویه با تمام نقاط شبکه

ابعادی برای هر گام سوزش، منطبق بر هندسه می‌شوند. از معروف‌ترین کدهایی که از روش‌های تحلیلی استفاده می‌کنند، کد SPP<sup>۱</sup> است که در آمریکا توسعه پیدا کرده است [۳]. روش‌های عددی برای تحلیل پسروری، عموماً مرز متحرک بین گاز و پیشران جامد را مورد بررسی قرار می‌دهند. روش‌های عددی مختلف برای بررسی مرز متحرک به دو دسته روش‌های پیگیری مرز<sup>۲</sup> و روش‌های تسخیر مرز<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند [۱]. یکی از مهم‌ترین روش‌های تسخیر مرز، روش مجموعه سطوح<sup>۴</sup> است.

در سال ۱۹۸۹، ساینوت و همکارانش یک کد کامپیوتری را برای تحلیل پسروری دوبعدی گرین به‌صورت تابعی از نرخ سوزش، ارائه دادند. روش کار به این صورت بود که ابتدا هندسه اولیه گرین را در یک نرم‌افزار مدل‌سازی، مدل نموده و سپس با استفاده از مش مثلثی سطح آن را شبکه‌بندی نمودند و برای هر گام حل با حل معادلات همیلتون-ژاکوبی در هر گام حل، پسروری گرین محاسبه شده و مساحت سطح سوزش استخراج می‌شود [۴].

در سال ۱۹۹۴، هجل و همکارش با استفاده از روش شبکه انطباقی<sup>۵</sup>، تحلیل پسروری را روی یک هندسه دوبعدی و متقارن محوری گرین انجام دادند. مهم‌ترین ویژگی این روش، سهولت به‌کارگیری و قابلیت تعمیم دادن در حالت سرعت سوزش متغیر است. در این مقاله خطای این روش با خطای سایر روش‌ها مقایسه شد و مشخص شد که با استفاده از این روش، خطا در محاسبه سطح سوزش کاهش یافته است [۵].

در سال ۱۹۹۷، کاسالینو و همکارانش با استفاده از یک شبکه نقطه‌ای ثابت روی گرین پیشران، تحلیل پسروری دوبعدی را با استفاده از پیگیری مرز گاز-جامد در داخل موتور، انجام دادند. این روش قابلیت استفاده از شبکه‌های مستطیلی و قطبی را داشته و هیچ‌گونه محدودیتی را روی هندسه گرین ایجاد نمی‌کند [۶].

در سال ۲۰۰۴، تاکر و همکارانش تحلیل پسروری گرین را با استفاده از روش پسروری سریع<sup>۶</sup> انجام دادند و معادلات ایکونال<sup>۷</sup> را روی یک شبکه سه‌بعدی با مش‌های چهاروجهی<sup>۸</sup> حل کردند و نتایج محاسبات خود را با مقادیر تست‌های عملی اعتبارسنجی نمودند [۷].

در سال ۲۰۰۷، ویلکاکس و همکارانش با استفاده از روش تابع فاصله حداقل<sup>۹</sup> شبیه‌سازی پسروری سطح سوزش گرین را انجام دادند. نتایج نشان داد که این روش دارای دقت کافی و زمان محاسبات قابل قبول در اندازه موتور واقعی هستند [۸].

10-Greg: Grain Regression Model  
11- Cut Cell Method

1-Solid Propellant Rocket Motor Performance  
2-Interface Tracking  
3-Interface Capturing  
4-Level Set  
5-Adaptive Grid  
6-Fast Marching  
7-Eikonal  
8-Tetrahedral  
9- Minimum Distance Function

در رابطه‌های (۵۰۶)،  $D^+$  و  $D^-$  به ترتیب مشتق پیشرو و پسرو را برای کمیت‌های مختلف و در جهات مربوطه نشان می‌دهد و  $i$ ،  $j$  و  $k$  اندیس‌های شبکه کارترین هستند؛ همچنین  $\varphi$  که تحت عنوان تابع فاصله یا تابع مجموعه سطوح نامیده می‌شود، به صورت حداقل فاصله نقاط شبکه کارترین ثانویه از مرز، تعریف می‌شود.

نقاطی از شبکه که درون مرز قرار گرفته‌اند، دارای تابع فاصله منفی، نقاط روی مرز دارای تابع فاصله صفر و نقاطی که بیرون از مرز قرار دارند دارای تابع فاصله مثبت هستند.

برای یافتن سطح سوزش و همچنین سطح گذرگاه جریان، علاوه بر پیگیری سطح سوزش، باید روشی برای محاسبه سطح مرزی که در داخل المان‌های مکعبی شبکه کارترین قرار گرفته، به کار گرفت. روشی که در این تحقیق استفاده شد؛ روش برش المان است که در بخش بعد توضیح داده می‌شود. استفاده از این روش باعث شد که نتایج تحلیل پسروی از دقت بالایی برخوردار باشد.

## ۲-۲- روش برش المان در حالت سه بعدی

از آنجایی که در روش مجموعه سطوح، مرز تسخیر می‌شود؛ یعنی مرز در داخل یک شبکه کارترین قرار گرفته است (در اینجا منظور از مرز، سطح داخلی اولیه گرین است) وقتی مرز، المان‌های شبکه را قطع می‌کند، در اثر برش المان توسط مرز در سه بعد، سطوحی به وجود می‌آید و علامت تابع فاصله در گوشه‌های المان، در دو طرف مرز متفاوت است (زیرا وقتی مرز، یک وجه المان برش می‌دهد؛ یک طرف وجه المان، داخل مرز و وجه دیگر، خارج مرز قرار می‌گیرد). برای به دست آوردن سطح برش خورده المان، توسط مرز، ناگزیر به استفاده از فرضیاتی هستیم:

۱- مرز، هر المان را در وجوهش قطع می‌کند.

۲- فصل مشترک مرز و المان به صورت سطوح صاف فرض می‌شود (منحنی نیستند).

۳- مرز المان را در چهار وجه قطع می‌کند و از آنجایی که المان به صورت مکعب مستطیل است؛ فصل مشترک مرز و المان، دو مثلث قائم‌الزاویه چسبیده به هم است.

در این روش در اثر برش المان توسط مرز، حالات مختلفی به وجود می‌آید. حالاتی را که در فرضیات ذکر شده می‌گنجد را به عنوان شکل‌های قابل قبول در نظر گرفته نام حالت معتبر روی آن نهاده می‌شود و در مجموع ۱۵ حالت ممکن به وجود می‌آید. شکل (۱) یک المان برش خورده توسط مرز را نشان می‌دهد.

در شکل (۱) المان مکعبی به رئوس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ توسط مرز ABCD، برش خورده است. در این المان تغییر علامت در گره‌ها به این صورت است:

$$\varphi_1\varphi_2 < 0, \varphi_1\varphi_3 < 0, \varphi_7\varphi_6 < 0, \varphi_7\varphi_8 < 0 \quad (7)$$

اولیه بررسی و کم‌ترین فاصله به عنوان تابع فاصله ( $\varphi$ ) برای گره مورد نظر در شبکه ثانویه در نظر گرفته می‌شود؛ سپس در مرحله سوم با استفاده از روش مجموعه سطوح، پیگیری مرز در زمان‌های دیگر انجام می‌شود و مرز عبارت است از سطحی از گرین که در معرض اشتعال قرار دارد.

## ۲-۱- روش مجموعه سطوح

مطابق این روش، مجموعه نقاطی که روی مرز قرار دارند دارای تابع فاصله صفر هستند که این مسئله در رابطه (۱) نشان داده شده است. بنابراین مسئله به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad (1)$$

در رابطه فوق  $\varphi$ ، تابع فاصله و  $x(t)$  موقعیت مرز را در لحظه  $t$ ، نشان می‌دهد. با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای:

$$\varphi_t + \nabla\varphi(x(t), t) \cdot x'(t) = 0 \quad (2)$$

$F$  سرعت حرکت مرز در جهت عمود بر آن و به سمت بیرون است و  $x'(t) \cdot n = F$  و  $n = \nabla\varphi / |\nabla\varphi|$  بنابراین معادله توسعه مرز  $\varphi$  به صورت رابطه (۳) به دست می‌آید:

$$\varphi_t + F|\nabla\varphi| = 0, \varphi(x, t = 0) \quad (3)$$

رابطه فوق معادله مجموعه سطوح است که توسط آشور<sup>۱</sup> و ستیان<sup>۲</sup> ارائه شده است. معادله (۳) توسعه زمانی تابع مجموعه سطوح را نشان می‌دهد؛ به گونه‌ای که مجموعه سطوح صفر این تابع در حال توسعه، همیشه با مرز در حال گسترش، مشخص می‌شود. با تابع سرعت معلوم  $F$ ، ستیان حل مسئله (۳) را به صورت رابطه (۴) ارائه داد [۱۱]:

$$\varphi_{i,j,k}^{n+1} = \varphi_{i,j,k}^n - \Delta t (\max(F_{i,j,k}, 0)\nabla^+ + \min(F_{i,j,k}, 0)\nabla^-) \quad (4)$$

در رابطه (۴)،  $\varphi$  تابع فاصله است و  $F$  نیز سرعت حرکت مرز است که برای مسئله مورد بررسی، همان سرعت سوزش گرین می‌باشد و  $\nabla^+$  و  $\nabla^-$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla^+ = & [\max(D_{i,j,k}^{-x}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{+x}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \\ & \max(D_{i,j,k}^{-y}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{+y}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \\ & \max(D_{i,j,k}^{-z}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{+z}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2]^{0.5} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^- = & [\max(D_{i,j,k}^{+x}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-x}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \\ & \max(D_{i,j,k}^{+y}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-y}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \\ & \max(D_{i,j,k}^{+z}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2 + \min(D_{i,j,k}^{-z}\varphi_{i,j,k}^n, 0)^2]^{0.5} \end{aligned} \quad (6)$$

به‌صورت دوبعدی قابل تحلیل هستند. اما بعضی از شکل‌های گرین به‌صورت متقارن محوری نیستند و به هیچ‌وجه نمی‌توان شکل آنها را به‌صورت دوبعدی متصور شد. گرین‌های که از چند مقطع با گرین‌های مختلف تشکیل شده‌اند، به این صورت هستند.

به دلایل فوق باید تحلیل پسروری گرین را برای داشتن نتایج بهتر و دقیق‌تر به‌صورت سه‌بعدی انجام داد. در این روش علاوه بر ۱۵ حالت معتبری که ذکر شد، حالات دیگر نیز بررسی می‌شود. با توجه به اینکه المان مورد نظر مکعبی است و دارای ۸ وجه می‌باشد. تعداد کل حالاتی که مرز می‌تواند این وجوه را قطع کند  $2^8 = ۲۵۶$  می‌باشد. استخراج این حالات امری وقت گیر است اما عملی است. برای این که زمان محاسبات نیز دست خوش تغییر جدی نشود، حالات مورد نظر در یک فایل متن<sup>۱</sup> جمع‌آوری و به داخل برنامه وارد شد.

### ۳-۲- بالستیک داخلی

در این تحقیق برای تحلیل پسروری گرین درحالی که فشار متغیر است، از حل صفربعدی بالستیک داخلی استفاده شد. به این صورت که فرض می‌شود که فشار در کلیه نقاط موتور در یک لحظه یکسان است؛ در واقع برای فشار فقط تغییرات زمانی در نظر گرفته می‌شود. تغییر فشار درون موتور برحسب زمان برای یک موتور سوخت جامد با در نظر گرفتن معادله پیوستگی درون موتور به‌دست می‌آید. دبی جرمی تولیدی در اثر سوختن پیشران با رابطه (۸) محاسبه می‌شود [۱۲]:

$$\dot{m}_g = \rho_p A_b r_b = \rho_p A_b a P^n \quad (۸)$$

در رابطه فوق  $\rho_p$  چگالی پیشران و  $A_b$  سطح سوزش سوخت در گام زمانی مربوطه است؛ همچنین  $a$  ضریب دمایی نرخ سوزش،  $P$  فشار محفظه و  $n$  نیز نمای فشار است. دبی جرمی خروجی از نازل نیز با رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

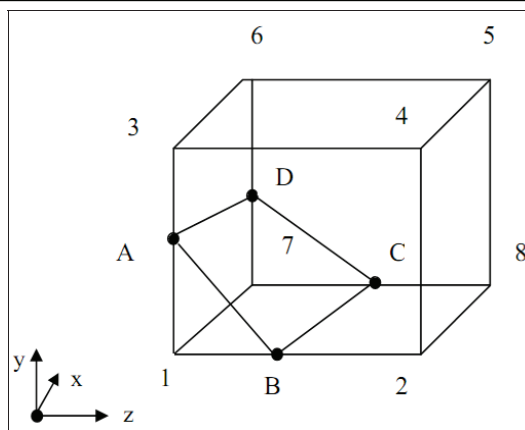
$$\dot{m}_n = \frac{P A_{th}}{C^*} \quad (۹)$$

در رابطه فوق  $A_{th}$  مساحت گلوگاه و  $C^*$  سرعت مشخصه پیشران است. با استفاده از قانون پیوستگی درون موتور تغییرات فشار درون موتور برحسب زمان از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

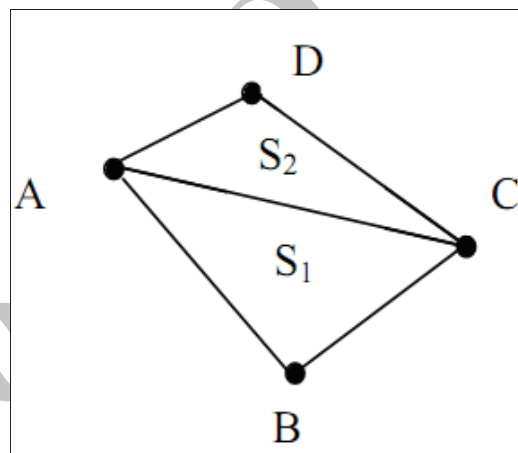
$$P = \left( \frac{a \rho_p C^* A_b}{A_{th}} \right)^{\frac{1}{(1-n)}} \quad (۱۰)$$

### ۳- صحت عملکرد کد تحلیل پسروری گرین

برای یک کار عددی بهترین نوع صحت‌گذاری، مقایسه نتایج کار با حل تحلیلی و نتایج تجربی است. از طرفی برای تحلیل پسروری گرین نتایج تجربی وجود ندارد و نتیجه تست یک موتور سوخت جامد، پارامترهای



شکل ۱- المان مکعبی برش خورده توسط مرز.

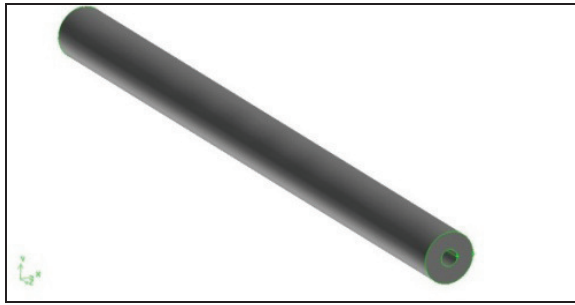


شکل ۲- فصل مشترک مرز و المان مکعبی.

همان‌طور که قبلاً در فرضیات ذکر شد، فصل مشترک مرز و المان را به‌صورت یک سطح در نظر گرفتیم. از آنجایی که سطح مورد نظر وجوه المان را قطع کرده است، فصل مشترک، از دو مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده است (شکل ۲). حاصل جمع دو سطح  $S_1$  و  $S_2$  در شکل (۲)، سطح چهاروجهی ABCD را می‌دهد که همان سطح سوزش قسمتی از گرین است که المان مکعبی را قطع نموده است. با در نظر گرفتن سطح برش خورده برای تمامی المان‌ها، می‌توان سطح سوزش را یافت. تحلیل پسروری گرین در اصل باید به دو دلیل به‌صورت سه‌بعدی انجام پذیرد:

۱- چون در حالت کلی سرعت سوزش گرین (که همان سرعت پسروری مرز مورد نظر است) تابع فشار است و در داخل موتور، فشار در قسمت‌های مختلف موتور، متغیر است و بنابراین سرعت پسروری مرز نیز در قسمت‌های مختلف گرین در راستای محور موتور، متفاوت خواهد بود. پس باید تحلیل پسروری گرین را به‌صورت سه‌بعدی انجام داد.

۲- شکل‌هایی از گرین مثل استوانه‌ای، ستاره‌ای و غیره شکل‌های دوبعدی هستند؛ که دارای طول واحد در جهت محور موتور هستند و



شکل ۳- گرین استوانه‌ای.

جدول ۲- مقایسه اندازه شبکه در دقت حل برای گرین استوانه‌ای.

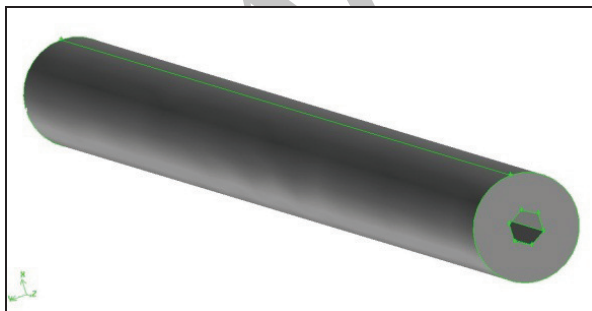
اندازه شبکه	بیشترین درصد خطا در محاسبه سطح سوزش $S_b$
۶۴×۶۴×۱۶۷	۱/۱۳
۱۲۸×۱۲۸×۱۶۷	۰/۳۸
۲۵۶×۲۵۶×۱۶۷	۰/۲

### ۳-۲- گرین استوانه‌ای با مقطع شش ضلعی

گرین استوانه‌ای با مقطع شش ضلعی، جزء گرین‌های مرسوم و مورد استفاده نیست و هدف از تحلیل آن در این قسمت، سنجش دقت در تحلیل پسروری اشکالی است که دارای نقاط گوشه هستند. در صورتی که پسروری این شکل با دقت مناسبی انجام پذیرد می‌توان ادعا کرد که کد عددی تهیه شده از دقت بالایی برخوردار است. هندسه گرین در شکل (۴) و مشخصات آن در جدول (۳) آمده است.

جدول ۳- مشخصات گرین استوانه‌ای با مقطع شش ضلعی.

طول ضلع شش ضلعی L(m)	۰/۰۱۰۵
شعاع خارجی R(m)	۰/۰۳۱۷۵
ضخامت جان w(m)	۰/۰۲۱۲۵
طول گرین $L_{grain}(m)$	۰/۸۳۵



شکل ۴- گرین استوانه‌ای با مقطع شش ضلعی.

در جدول (۴) نتایج، با حل تحلیلی مقایسه شده است. با توجه به جدول (۴)، کد تحلیل پسروری برای این نوع گرین نیز دارای دقت بالایی است، به طوری که با شبکه ۲۵۶×۲۵۶×۱۶۷، بیشترین درصد

بالستیک داخلی موتور است که تغییر سطح سوزش نسبت به ضخامت جان<sup>۱</sup> گرین، در این میان جایی ندارد. پس عملاً نمی‌توان تغییر سطح سوزش یک گرین نسبت به ضخامت جان را به صورت تجربی به دست آورد. بنابراین به علت اینکه کد سه بعدی تحلیل پسروری گرین صرفاً یک کار ریاضیاتی است؛ بنابراین صحت‌گذاری با حل تحلیلی، امکان بهترین مقایسه کد با نتایج دقیق را می‌دهد. از آنجایی که برای بیشتر شکل‌های گرین سه بعدی، حل تحلیلی وجود ندارد یعنی رابطه تغییر سطح سوزش با ضخامت جان سوخت موجود نیست، بنابراین از دو شکل استوانه با مقطع دایره و مقطع شش ضلعی استفاده نمودیم تا بتوانیم صحت‌گذاری را انجام دهیم. برای حل جریان در داخل موتور باید بتوان سطح داخلی یا همان سطح گذرگاه جریان را نیز محاسبه نمود. بنابراین کار دیگری که در این تحقیق انجام شده و در واقع کار تکمیلی است، محاسبه سطح داخل مرز می‌باشد. محاسبه این سطح نیز به کمک روش برش المان انجام شد. علت انتخاب شکل استوانه با مقاطع دایره و شش ضلعی این بود که شکل اکثر گرین‌های موجود تلفیقی از سطوح صاف و کماتی است. بنابراین در صورتی که تحلیل پسروری این اشکال به خوبی انجام شود می‌توان گفت که کد نوشته شده برای اشکال دیگر نیز با دقت بالایی عمل می‌کند.

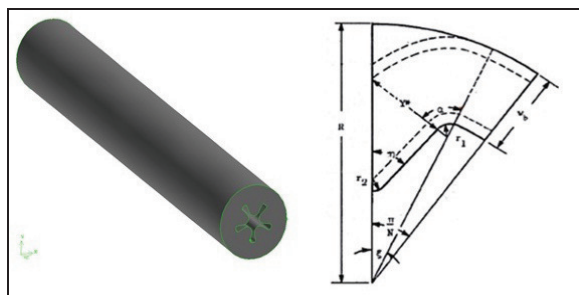
### ۳-۱- گرین استوانه‌ای

گرین استوانه‌ای به طور گسترده در موتورهای موشک سوخت جامد به کار می‌رود. در شکل (۳) گرین استوانه‌ای و مشخصات آن در جدول (۱) آمده است. گرین استوانه‌ای با مشخصات جدول (۱) به صورت عددی مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج، با حل تحلیلی مقایسه شد. جدول (۲) مقایسه نتایج و همچنین تأثیر اندازه شبکه در دقت حل را نشان می‌دهد.

جدول ۱- مشخصات گرین استوانه‌ای.

شعاع داخلی r(m)	۰/۰۱۰۵
شعاع خارجی R(m)	۰/۰۳۱۷۵
ضخامت جان w(m)	۰/۰۲۱۲۵
طول گرین $L_{grain}(m)$	۰/۸۳۵

همان طور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود، تحلیل عددی از دقت بالایی برخوردار است. با اندازه شبکه ۶۴×۶۴×۱۶۷ که شبکه درستی محسوب می‌شود بیشترین درصد خطا ۱/۱۳ است و با ریزتر شدن شبکه به ۲۵۶×۲۵۶×۱۶۷، بیشترین درصد خطا به ۰/۲ کاهش می‌یابد. می‌توان نتیجه گرفت که کد عددی، گرین استوانه‌ای را با دقت بالایی تحلیل می‌کند.



شکل ۵- گرین ستاره‌ای.

جدول ۵- مشخصات گرین ستاره‌ای.

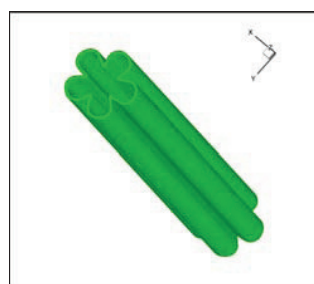
N	۵
R(mm)	۱۰۰
W(mm)	۴۵
r <sub>1</sub> (mm)	۵
r <sub>2</sub> (mm)	۱۵
η(deg)	۲۵
ε	۰/۹
Length(mm)	۱۵۰۰

### ۳-۴- گرین چرخ واگن

گرین چرخ واگن در حالت سه‌بعدی با یازده پارامتر قابل ترسیم است (شکل ۸). پارامترهای این گرین در جدول (۶) آمده است. سطح سوزش برحسب ضخامت جان برای گرین چرخ واگن شکل (۸)، در شکل (۹) رسم شده است.



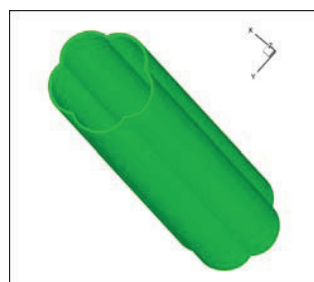
web=0.045 m



web=0.03089m



web=0.01745 m



web=0

شکل ۶- پسروری گرین ستاره‌ای بر حسب ضخامت جان در طی فرآیند سوزش.

خطا ۰/۰۵۹ است. پس از اعتبارسنجی کد عددی تحلیل پسروری برای دو شکل استوانه با مقطع دایره و شش ضلعی، حال نتایج تحلیل پسروری برای چند شکل گرین دیگر ارائه می‌شود.

جدول ۴- مقایسه اندازه شبکه در دقت حل برای گرین استوانه‌ای با مقطع شش ضلعی.

اندازه شبکه	بیشترین درصد خطا در محاسبه سطح سوزش S <sub>b</sub>
۶۴×۶۴×۱۶۷	۱/۱۲
۱۲۸×۱۲۸×۱۶۷	۰/۳۳
۲۵۶×۲۵۶×۱۶۷	۰/۰۵۹

### ۳-۳- گرین ستاره‌ای

گرین ستاره‌ای در حالت سه‌بعدی در شکل (۵) و پارامترهای لازم برای ترسیم آن در جدول (۵) رسم شده است. گرین شکل (۵) به‌صورت عددی تحلیل شد و پسروری گرین آن برحسب ضخامت جان، در شکل (۶) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۶) ملاحظه می‌شود، ضخامت جان اولیه گرین، برابر ۰/۰۴۵ است که با گذشت زمان و سوختن گرین به صفر می‌رسد و در آخرین شکل که ضخامت جان به صفر رسیده است؛ فقط پسماند گرین ستاره‌ای، باقی مانده است. سطح سوزش برحسب ضخامت جان، در شکل (۷) رسم شده است. در شکل (۷)، شروع نمودار در ضخامت جان ۰/۰۴۵ و سطح سوزش ۰/۷۳۲۱ و پایان نمودار، ضخامت جان صفر و سطح سوزش ۰/۹۳۶۵ است.

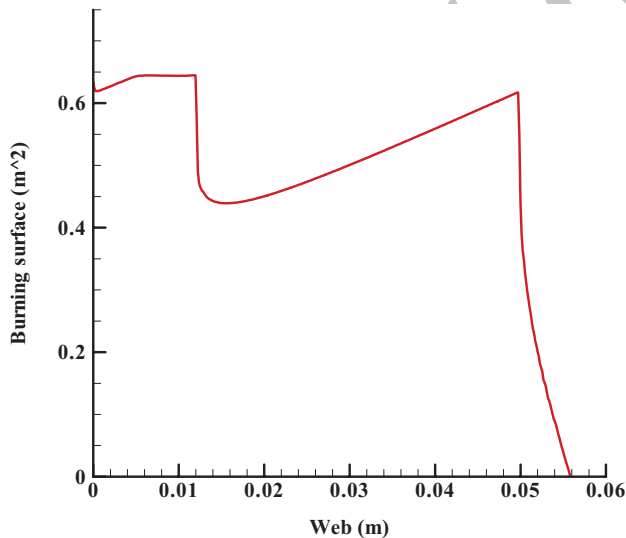
در شکل (۹) نقطه شروع نمودار در ضخامت جان  $0.05$  و سطح سوزش  $0.6182$  است و نقطه پایان نمودار، ضخامت جان صفر و سطح سوزش  $0.6231$  است. برای مشاهده بهتر روند پسروی، در شکل (۱۰) پسروی گرین چرخ واگن برحسب ضخامت جان در طی فرآیند سوزش نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل (۱۰) ملاحظه می‌شود، ضخامت جان اولیه گرین، برابر  $0.05$  است که با گذشت زمان و سوختن گرین به صفر می‌رسد و در لحظه‌ای که ضخامت جان به صفر رسیده است (آخرین شکل)، فقط پسماند گرین چرخ واگن، باقی مانده است.

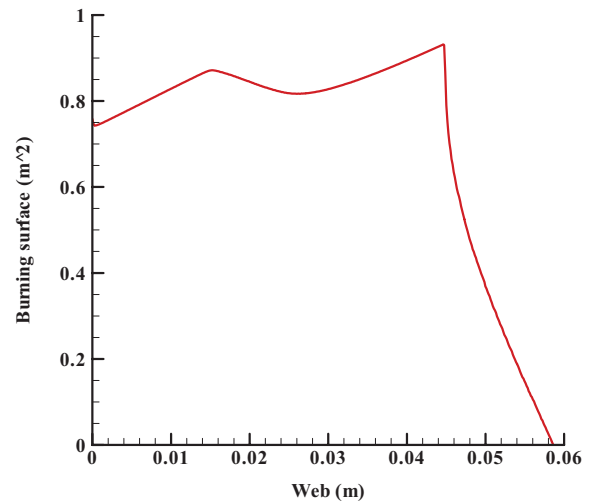
### ۳-۵- گرین ترکیبی

گرین دیگری که تحلیل شد، گرینی متشکل از مقاطع ستاره و دو استوانه با شعاع‌های متفاوت بود. طول هر سه قسمت یکسان و برابر با  $0.25$  متر است و پارامترهای مقطع ستاره مشابه جدول (۵)، استوانه با قطر بیشتر دارای شعاع  $0.1708$  و استوانه‌ی با قطر کمتر، شعاع  $0.105$  متر دارد. شکل (۱۱) نمای سه‌بعدی این گرین را نشان می‌دهد.

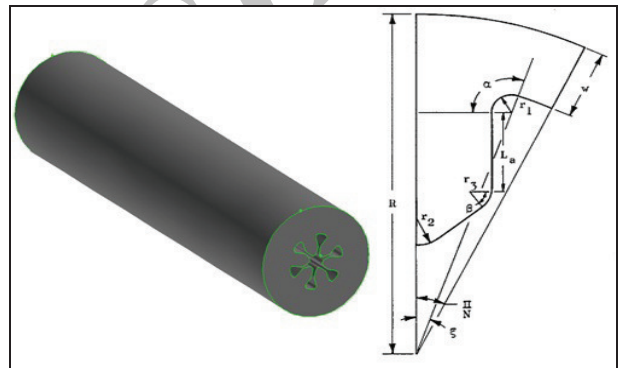
گرین ترکیبی فوق دارای سه ضخامت جان مختلف است، ضخامت جان برای مقطع ستاره‌ای  $0.045$ ، برای استوانه‌ی با قطر بزرگ‌تر برابر  $0.0829$  و برای استوانه با قطر کمتر، ضخامت جان  $0.0895$  است. در شکل (۱۲) نمودار سطح سوزش برحسب زمان رسم شده است.



شکل ۹- نمودار مساحت سطح سوزش بر حسب ضخامت جان با روش تقریبی برای گرین چرخ واگن در حالت سه‌بعدی.



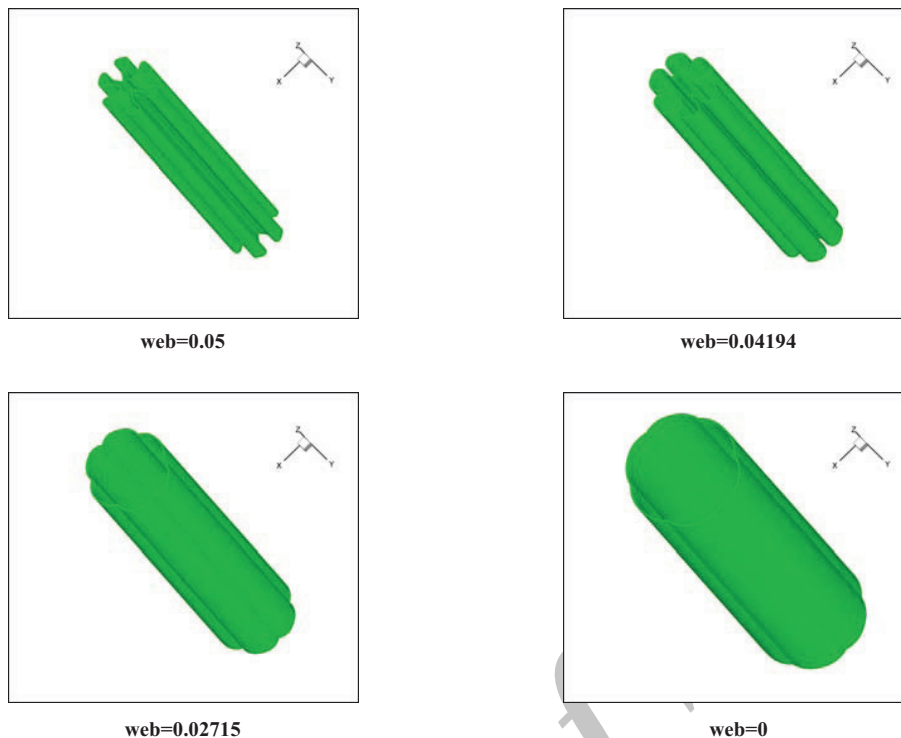
شکل ۷- نمودار مساحت سطح سوزش برحسب ضخامت جان برای گرین ستاره‌ای در حالت سه‌بعدی.



شکل ۸- گرین چرخ واگن.

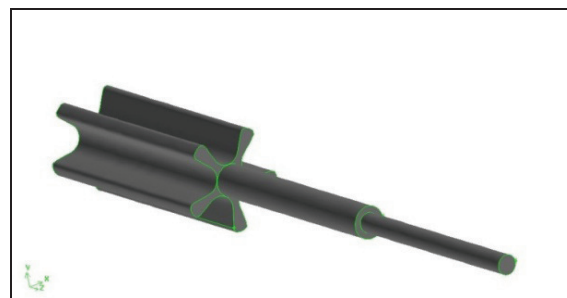
جدول ۶- پارامترهای مستقل گرین چرخ واگن.

N	۶
R(mm)	۱۰۰
W(mm)	۵۰
$r_1$ (mm)	۵
$r_2$ (mm)	۵
$r_3$ (mm)	۵
$L_a$ (mm)	۱۵
$(\text{deg})\alpha$	۳۵
$(\text{deg})\beta$	۴۰
$\epsilon$	$0.75$
Length(mm)	۱۰۰۰



شکل ۱۰- پسروری گرین چرخ واگن بر حسب ضخامت جان در طی فرآیند سوزش.

به دلیل اینکه ضخامت جان برای سه مقطع متفاوت است؛ انتظار بر این است که ابتدا ضخامت جان مقطع ستاره به صفر برسد، سپس استوانه با شعاع بیشتر و در انتها ضخامت جان استوانه با شعاع کمتر صفر شود؛ در این لحظه تمامی گرین (به غیر از پسماند) سوخته است. در شکل (۱۳)،  $web_1$  نشان‌دهنده ضخامت جان مقطع ستاره،  $web_2$  نشان‌دهنده ضخامت جان استوانه با قطر بزرگ‌تر و  $web_3$  نیز ضخامت جان استوانه‌ی با قطر کمتر است.

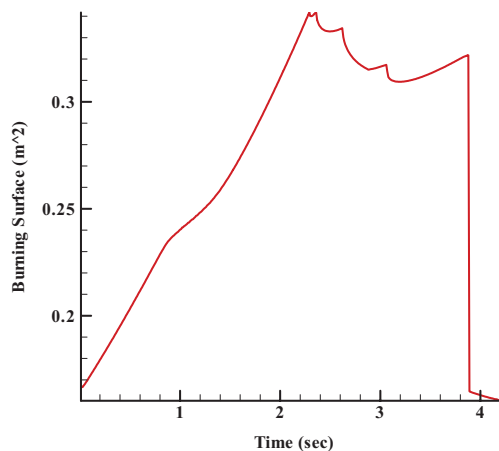


شکل ۱۱- گرین ترکیبی با مقاطع ستاره و دایره.

### ۳-۶- گرین کونوسیل

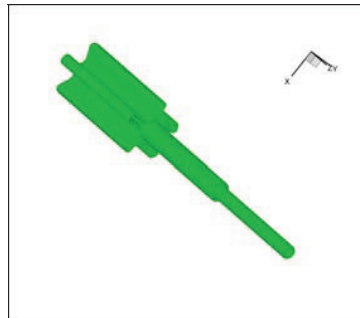
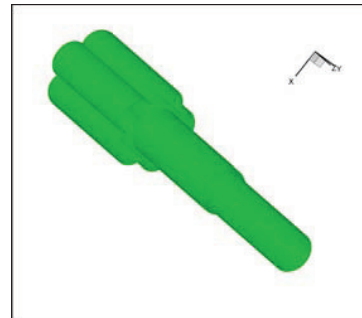
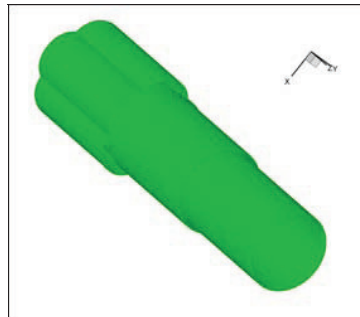
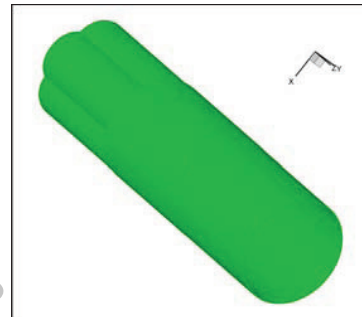
گرین کونوسیل<sup>۱</sup> یک گرین استوانه شکاف‌دار است و در واقع یک گرین سه‌بعدی است. شکل (۱۴) شماتیکی از این گرین و جدول (۷) مشخصات این گرین را نشان می‌دهد.

در گرین کونوسیل به علت وجود شیار، سوزش به گونه‌ای است که ضخامت شیار و شعاع داخلی استوانه پیوسته در حال افزایش است و انتهای سوزش، زمانی است که ضخامت جان به صفر برسد. برای مشاهده بهتر روند پسروری، پسروری گرین کونوسیل بر حسب ضخامت جان در طی فرآیند سوزش در شکل (۱۵) نشان داده شده‌اند.



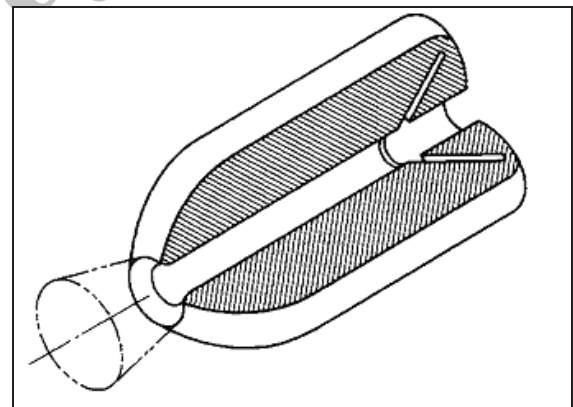
شکل ۱۲- نمودار سطح سوزش بر حسب زمان برای گرین ترکیبی.




 $web_1=0.045, web_2=0.08291, web_3=0.0895$ 

 $web_1=0.0188, web_2=0.05671, web_3=0.0633$ 

 $web_1=0, web_2=0.01841, web_3=0.025$ 

 $web_1=0, web_2=0, web_3=0$ 

شکل ۱۳- پسروری گرین ترکیبی برحسب ضخامت جان در طی فرآیند سوزش.

همان‌طور که در شکل (۱۶) مشاهده می‌شود، سطوح سوزش، نشان‌دهنده پیشرو یا پسرو بودن سوزش است. در حالت کلی گرین کونوسیل دارای سوزش افزایشی است و این مطلب در شکل فوق واضح است. اما در ابتدای نمودار سوزش تا حدودی خنثی است و این به‌خاطر تداخل سطوح سوزش پیشرو و پسرو در این نوع گرین است؛ افت سطح سوزشی که در انتهای نمودار مشاهده می‌شود به‌علت سوختن کامل (به‌جز تلفات پسماند) ابتدای گرین است و بعد از آن نیز در اثر سوزش قسمت استوانه‌ای بعد از شیار، سوزش، پیشرو است تا اینکه ضخامت جان گرین به صفر برسد. بعد از این مرحله پسماندهای گرین نیز سوخته و مساحت سطح سوزش به صفر می‌رسد. نمودار مساحت سطح سوزش برحسب ضخامت جان برای این نوع گرین، در شکل (۱۶) آمده است.



شکل ۱۴- گرین کونوسیل [۲].

### ۳-۷- صحه‌گذاری کد صفر بعدی تحلیل بالستیک داخلی و کد

#### تحلیل پسروری گرین

در این بخش صحه‌گذاری کد صفر بعدی و کد تحلیل بالستیک داخلی توأمأ ارائه می‌شود. برای صحه‌گذاری از اطلاعات موتور سوخت جامدی استفاده می‌شود که به‌طور تجربی مورد مطالعه قرار گرفته است. اطلاعات این موتور در جدول (۸) آمده است [۱۳].

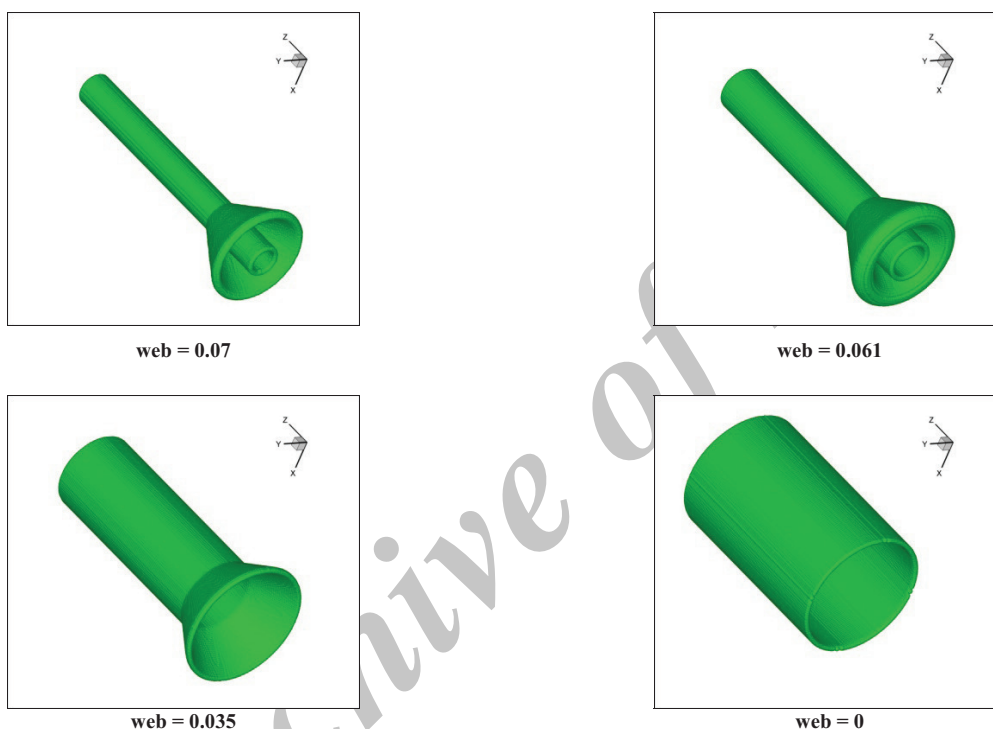
نمودارهای قسمت‌های قبل عموماً برای حالتی به‌دست آمدند که سرعت پسروری در تمامی زمان‌ها و برای کلیه نقاط یکسان فرض شد. در حالت کلی فشار در موتور متغیر است و این مسئله سرعت پسروری

جدول ۷- مشخصات گرین کونوسیل.

طول (متر)	۰/۴
شعاع داخلی (متر)	۰/۰۲
شعاع خارجی (متر)	۰/۰۹
زاویه شیار (درجه)	۳۰
طول شیار (متر)	۰/۱۲۱
ضخامت شیار (متر)	۰/۰۰۴
فاصله شیار از ابتدای گرین (متر)	۰/۱
ضخامت جان w(m)	۰/۰۷

در حالت کلی فشار در موتور متغیر است و این مسئله سرعت پسروی متغیر را به مرز تحمیل می‌کند. برای اینکه دقت کد در حالت سرعت سوزش متغیر، نیز بررسی شود؛ تحلیل پسروی گرین در یک موتور سوخت جامد مورد بررسی قرار گرفت و از معادلات صفربعدی برای تحلیل بالستیک داخلی استفاده شد. برای موتور مورد نظر منحنی فشار محفظه موتور برحسب زمان برای دو حالت تحلیل پسروی تحلیلی و تحلیل پسروی عددی به‌همراه فشار به‌دست آمده از نتایج آزمایشگاهی در شکل (۱۷) رسم شده است.

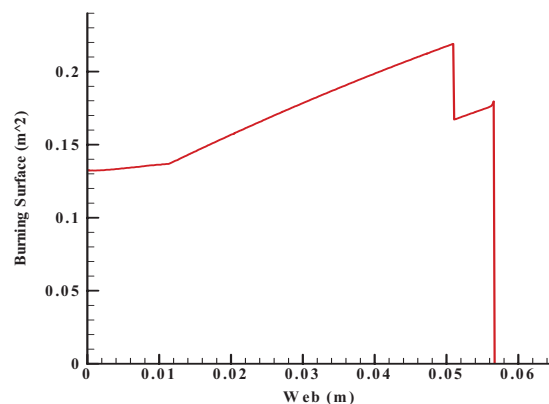
متغیر را به مرز تحمیل می‌کند. برای اینکه دقت کد در حالت سرعت سوزش متغیر، نیز بررسی شود؛ تحلیل پسروی گرین در یک موتور سوخت جامد مورد بررسی قرار گرفت و از معادلات صفربعدی برای تحلیل بالستیک داخلی استفاده شد. برای موتور مورد نظر منحنی فشار محفظه موتور برحسب زمان برای دو حالت تحلیل پسروی تحلیلی و تحلیل پسروی عددی به‌همراه فشار به‌دست آمده از نتایج آزمایشگاهی در شکل (۱۷) رسم شده است. نمودارهای قسمت‌های قبل عموماً برای حالتی به‌دست آمدند که سرعت پسروی در تمامی زمان‌ها و برای کلیه نقاط یکسان فرض شد.



شکل ۱۵- پسروی گرین کونوسیل برحسب ضخامت جان در طی فرآیند سوزش.

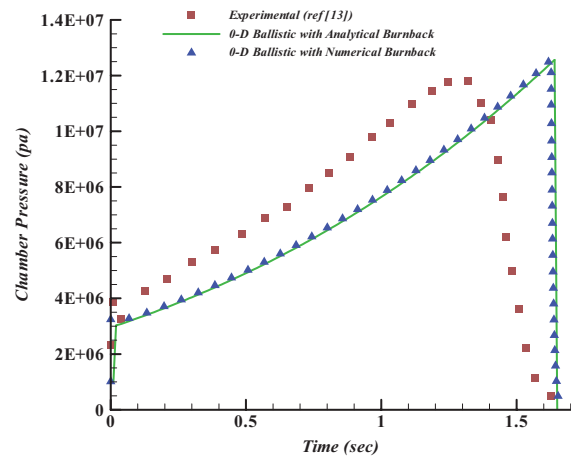
جدول ۸- اطلاعات موتور سوخت جامد

۰/۷۰۸	طول گرین (متر)
۰/۰۲۵۴	قطر اولیه گذرگاه جریان (متر)
۰/۰۶۳۵	قطر داخلی موتور (متر)
۰/۰۲۳۵	قطر گلوگاه نازل (متر)
$۰/۰۰۰۴۹۲[p(\text{kpa})]^{-۰.۳۶}$	سرعت سوزش بدون اثرات فرسایش (متر بر ثانیه)
۱۷۴۲	چگالی پیشران سوخته نشده (کیلوگرم بر مترمکعب)



شکل ۱۶- نمودار سطح سوزش برحسب ضخامت جان برای گرین کونوسیل.

صورت که کاربر می‌تواند شکلی دلخواه و نامتقارن را نیز با این روش تحلیل نماید. یکی از مهم‌ترین اهداف در تحلیل یک موتور موشک سوخت جامد، محاسبه فشار و پارامترهای جریان در موتور است و از طرفی مهم‌ترین خروجی کد عددی نوشته شده، مساحت سطح سوزش در هر لحظه است، همچنین می‌توان سطح پورت را در راستای طول گرین به‌دست آورد؛ به‌منظور تحلیل بالستیک داخلی باید تغییرات سطح پورت را در راستای طول گرین و نسبت به زمان در اختیار داشت که این اطلاعات از کد تحلیل پسروی قابل حصول است، بنابراین می‌توان کد عددی نوشته شده را با یک کد تحلیل بالستیک داخلی سه‌بعدی لینک نمود.



شکل ۱۷- منحنی فشار محفظه برحسب زمان.

## مراجع

- [1] Toker, K. A. "Three Dimensional Retarding Walls and Flow in Their Vicinity."; Ph.D. Thesis, Dep. of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkey, 2004.
- [2] Davenas, A. "Solid Rocket Propulsion Technology."; Pergamon Press: New York, 1993.
- [3] French, J. C.; Dunn, S. S. "New Capabilities in Solid Rocket Motor Grain Design Modeling (SPP 02)."; 38<sup>th</sup> JANNAF Combustion Subcommittee Meeting, Nevada. 2002, 317-331.
- [4] Saintout, E.; Ribereau, D.; Perrin, P. "ELEA: A Tool for 3D Surface Regression Analysis in Propellant Grains."; 25<sup>th</sup> AIAA, ASME, SAE, and ASEE, Joint Propulsion Conference, Monterey, 1989.
- [5] Hejl, R. J.; Heister, S. D. "Solid Rocket Motor Grain Burnback Analysis Using Adaptive Grids."; 30<sup>th</sup> AIAA, ASME, SAE, and ASEE, Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis, 1994.
- [6] Casalino, L. "Numerical Tracking of the Solid-Gas Interface in Rocket Motors."; AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Seattle, 1997.
- [7] Toker, K. A.; Aksel, H.; Tinaztepe, T. "3-Dimensional Propellant Grain Burn back Calculation on Tetrahedron Mesh by Fast Marching Method."; AIAA, 2004.
- [8] Willcox, M. A.; Quinn Brewster, C.; Tang, K. M.; Stewart, S. D. "Solid Propellant Grain Design and Burn Back Simulation Using a Minimum Distance Function."; J. Propul. Power. 2007, 23, 465-475.
- [9] Püskülcü, G. A. "Ulas, 3-D Grain Burnback Analysis of Solid Propellant Rocket Motors."; J. Aerospace Sci. Technol. 2008, 12, 585-591.
- [10] Cavallini, E.; Favini, B.; Giacinto, M. Di. "Internal Ballistics Simulation of a NAWC Tactical SRM."; J. Appl. Mech. 2011, 78, 1005-1018.
- [11] Sethian, J. A. "Level Set Methods and Fast Marching methods."; 2<sup>th</sup> Ed, Cambridge University Press: Berkeley, 1999.
- [12] NASA Space Vehicle Design Criteria (Chemical Propulsion) "Solid propellant grain design and internal ballistics."; NASA SP-8076, 1972.
- [13] Greatrix, D. R. "A Study of Combustion and Flow Behavior in Solid Propellant Rocket Motors."; Ph.D. Thesis, University of Toronto, Canada, 1987.
- [14] Sutton, G. P.; Biblarz, O. "Rocket Propulsion Elements."; 7<sup>th</sup> Ed, John Wiley & Sons Press: New York, 1992.

همان‌طور که در شکل (۱۷) مشاهده می‌شود؛ نتایج حل عددی با نتایج آزمایشگاهی تفاوت نسبتاً زیادی دارد و مهم‌ترین علت آن این است که در موتور مورد بررسی از آنجایی که نسبت سطح گذرگاه جریان<sup>۱</sup> به سطح گلوگاه نازل، کوچک‌تر از عدد ۴ است ( $Ap/At = 1/168$ ) بنابراین برای تحلیل درستی از عملکرد موتور، اثرات سوزش فرسایشی بایستی در نظر گرفته شود [۱۴]؛ از طرفی به‌علت استفاده از مدل صفر بعدی بالستیک داخلی، نمی‌توان سوزش فرسایشی را لحاظ کرد. علاوه بر دلیل ذکر شده، عدم شبیه‌سازی فرآیند گذرای اشتعال و ضربه پسماند نیز سبب اختلاف بین نتایج به‌دست آمده و نتایج آزمایشگاهی شده است.

در این قسمت هدف صحنه‌گذاری کد تحلیل پسروی در حالتی است که سرعت سوزش متغیر است. در شکل (۱۷) تطابق بسیار خوبی بین پسروی تحلیلی و پسروی عددی در حالت سرعت سوزش متغیر، مشاهده می‌شود. پس می‌توان گفت که کد تحلیل پسروی در حالتی که فشار و در پی آن سرعت سوزش، متغیر است نیز دارای جواب‌های با دقت بالا است.

## ۴- نتیجه‌گیری

با توجه به صحنه‌گذاری کد تحلیل پس روی، مشاهده شد که روش مجموعه سطوح در پیگیری مرز دارای دقت بالایی است و استفاده از روش المان برشی برای المان‌های دربرگیرنده مرز نیز، دقت نتایج را بسیار بالا برد به‌طوری که عدم استفاده از آن خطای زیادی را به مسئله اعمال می‌کند. مهم‌ترین ویژگی کد کامپیوتری تهیه شده، جامع بودن آن است به‌طوری که هر شکل دلخواهی از گرین را می‌توان با این کد تحلیل کرد و این مسئله کاربرد اشکال مختلف به‌منظور استفاده به‌عنوان گرین در موتور سوخت جامد (در صورت داشتن سطح سوزش مناسب در زمان‌های مختلف) را ممکن می‌سازد؛ به این