فصلنامه‌ی علمی و پژوهشی شریف
تابستان ۱۳۸۵، شماره‌ی سی و چهارم، ص. ۱۱-۲۰

تخصیص سرمایه با روش فضای احتمالی تفکیک شده

پیام حنفی‌زاده (دانشجوی دکتری)
عباس سیفی (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
کوماراسامی پونومبالام (استاد)
دانشکده‌ی طراحی سیستم‌ها، دانشگاه واترلو، اونتاریو، کانادا

بهینه‌سازی تخصیص سرمایه تحت توزیع نامتقارن و وابسته به نرخ بازده سهام، از مسائل کاربردی دنیای واقعی است. تاکنون روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر مونت کارلو یا سناریو، موفق‌ترین روش‌ها برای حل چنین مسائلی بوده‌اند، اگرچه از لحاظ محاسباتی هزینه‌برند. استفاده از روش‌های دیگری که از داده‌های شبیه‌سازی استفاده نمی‌کنند مشروط به‌نرمال بودن توزیع نرخ بازده می‌باشند. در این نوشتار یک روش جدید محاسباتی به‌نام «فضای احتمالی تفکیک شده» پیشنهاد شده است که مبتنی بر سناریو نیست و مستقیماً از بیشینه‌کردن نرخ بازده کل سرمایه‌گذاری براساس احتمال وقوع شکست (ریسک) که اصطلاحاً «سرمایه‌ی در معرض خطر» (VaR) نام دارد، استفاده می‌کند. نتیجه‌ی فرعی این روش «سرمایه در معرض خطر شرطی» (CVaR) است.

همچنین روشی برای تخصیص سرمایه با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو پیشنهاد شده است. مزیت روش پیشنهادی این است که ابعاد مسئله‌ی اصلی را برخلاف روش‌های مبتنی بر سناریو، بزرگ نمی‌کند. کاپولا برای مدل‌سازی توزیع توأمان نرخ‌های بازده وابسته و نامتقارن به‌کار رفته است.

دو روش جدید پیشنهادی با قیمت‌های واقعی در بازار سهام بین المللی مورد آزمایش قرارگرفته و با بهترین جواب‌های موجود (شیوه‌های رقیب) از طریق معیار سرمایه‌ی در معرض خطر (VaR)، مورد مقایسه قرارگرفته‌اند.

مقدمه

خبرگان حوزه‌ی سرمایه‌گذاری علاقه‌مند به ارائه‌ی مشاوره در خصوص دو نوع اطلاعات مهم به مشتریان خود هستند: نرخ بازده کل سرمایه‌گذاری براساس در اختیار داشتن احتمال وقوع سرمایه‌ی در معرض خطر[۱] (ریسک)[۱] و تخصیص سرمایه‌ی متناظر به آن.[۲] روش‌های زیادی برای بهینه‌سازی تخصیص سرمایه وجود دارند. در این روش‌ها فرض می‌شود که توزیع نرخ‌های بازده سهام نرمال هستند. در حالی که در مسائل واقعی، توزیع نرخ های بازده اغلب نرمال نیستند و وابسته‌اند، به‌خصوص در افق‌های زمانی بلندمدت[۳] (یا در حالت داشتن توزیع نرمال، هم‌بسته‌اند[۴]). در این نوشتار مثال‌هایی از دنیای واقعی ارائه شده که نشان‌دهنده‌ی این ویژگی‌هاست. آن دسته از روش‌های بهینه‌سازی تخصیص سرمایه که داده‌ها را به‌صورت وابسته و غیرنرمال در نظر بگیرند بسیار کم‌یاب‌اند (نظیر[۵-۷]).

در این نوشتار دو روش جدید برای تخصیص سرمایه پیشنهاد می‌شود. این دو روش از این جهت اهمیت دارند که اولاً در شرایطی که نرخ‌های بازده سهام به‌طور غیرنرمال و نامتقارن توزیع یافته‌اند کاربرد دارند، ثانیاً اعمال محاسبات در آنها هزینه‌بر نیستند و ثالثاً کارایی جواب‌های این دو روش با شیوه‌ی «سرمایه در معرض خطر شرطی»[۲] (CVaR) اوریاسوف و راکیفلر[۵] به‌عنوان روش رقیب مقایسه و ارزیابی، و صحه‌گذاری می‌شوند. در این تحقیق ساختار وابسته و توزیع نامتقارن نرخ‌های بازده از طریق به‌کارگیری کاپولا[۳] به دست آمده است. روش اول پیشنهادی، نیازی به شبیه‌سازی ندارد و از مفهومِ جدیدِ جداسازی فضای متغیرهای تصمیم از فضای پارامترهای تصادفی (نرخ بازده سهام) استفاده می‌کند. معیار سرمایه در معرض خطر (VaR) در فضای نرخ بازده تصادفی تخمین زده می‌شود و این مقدار تخمینی وارد فضای متغیرهای تصمیم می‌شود تا در تخصیص سرمایه به‌کار رود. این مراحل به‌صورت تکراری صورت می‌پذیرد تا همگرایی حاصل شود. دومین روش پیشنهادی مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو است با این تمایز که ابعاد مسئله‌ی اصلی را نظیر روش‌های مبتنی بر سناریو افزایش نمی‌دهد. روش‌های پیشنهادی را می‌توان به‌صورت بیشینه‌سازی VaR نیز در نظرگرفت، اما در اینجا از مفهوم عکس آن، یعنی احتمال «فراتر رفتن از مقدار هدف» استفاده می‌شود (منظور از «مقدار هدف» همان سرمایه در معرض خطری است که سرمایه‌گذار با احتمال داده شده انتظار حفظ آن را بعد از سرمایه‌گذاری دارد). معیار CVaR نیز نتیجه‌ی فرعی روش‌های پیشنهادی در این مقاله است.

تخصیص سرمایه‌ی استوار[۴]

در این تحقیق عدم قطعیت در مسئله‌ی تخصیص سرمایه‌ی استوار برای نرخ‌های بازده به‌صورت احتمالی مورد ملاحظه قرار می‌گیرد. مسئله‌ی تخصیص سرمایه‌ی تک دوره‌یی (۱) را در نظر بگیرید، به‌طوری که در آن c_j نرخ بازده سهم j ام و x_j نسبت تخصیص سرمایه در آن سهم است.

$$\max_x \; c^T x \quad Subject\ to: \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x \geq 0 \qquad (1)$$

حل مسئله‌ی ۱ در حالت قطعی بسیار آسان است، اما به‌عکس، در شرایطی که بردار ضرایب نرخ بازده سهام c، در تابع هدف غیرقطعی باشد، مسئله دشوار خواهد بود. در حالتی که نرخ‌های بازده غیرقطعی است، روش میانگین ـ واریانس نمونه‌یی از رویکردهای برخورد با عدم قطعیت است. مدل میانگین ـ واریانس تابع هدف را به‌صورت کمینه‌سازی واریانس کل بازده سرمایه‌گذاری و حفظ حداقل ارزش انتظاری بازده کل از مقدار مورد هدف در محدودیت‌ها در نظر می‌گیرد. این مدل‌ها و مشتقات آن به‌وسیله‌ی هری مارکوویتز ارائه شده است.[۸] این مدل‌ها را می‌توان با به‌کارگیری واژه‌شناختی بهینه‌سازی استوار جامعیت بخشید. مدل ۲ ابتدا به‌وسیله‌ی سینگوپتا[۹] مبتنی بر رویکرد آماری مدل‌سازی شد. سویستر[۱۰] از دیدگاه برنامه‌ریزی مخروطی مدل‌سازی کرد. اما با پیشرفت‌هایی که در الگوریتم‌های نقاط درونی[۵] به‌منظور حل مسائل برنامه‌ریزی مخروطی به‌وجود آمد، مسئله‌ی تخصیص سرمایه با رویکرد جدید توسط القوی[۱۱] و بن ـ تال و نمیروسکی[۱۲و۱۳] محبوبیت یافت. حنفی‌زاده و سیفی[۱۴] این مدل را با استفاده از تعریف نرم، جامعیت بخشیدند. به‌جز سینگوپتا، هیچ یک از محققان فوق‌الذکر به‌طور روشن عدم قطعیت نامتقارن را مورد بررسی قرار نداده‌اند.

مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار را می‌توان چنین نوشت:

$$\max_{x,t} \; t \quad Subject\ to: \quad \bar{c}^T x - r\|W^{1/2}x\| \geq t, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x \geq 0 \qquad (2)$$

به‌طوری که $\bar{c}$ میانگین و W ماتریس کوواریانس نرخ‌های بازده تصادفی است. t بازده کل هدف‌گذاری شده و r پارامتر اسکالر استواری است. پارامتر استواری r را می‌توان به‌عنوان شعاع مجموعه کانتورهای توزیع نرمال مبتنی بر دو ممان اول نیز تعریف کرد. سینگوپتا، نرخ بازده غیر قطعی را با توزیع نامتقارن k^2 مدل کرده است. اما وابستگی میان نرخ‌های بازده را در نظر نگرفته است.

اوریاسوف و راکیفلر[۵] با استفاده از مفهوم VaR موفق به کمینه‌سازی CVaR، به‌عنوان نتیجه‌ی فرعی VaR شدند، به‌طوری که ویژگی‌های توسعه‌یی بیشتری را به‌همراه داشت. این روش برای داده‌های غیرنرمال و وابسته نیز مناسب است. اما در عمل، ابعاد مدل برنامه‌ریزی خطی آن بسیار بزرگ می‌شود. چراکه این روش به‌دلیل تولید جواب‌هایی که به اندازه‌ی کافی دقیق باشند، مجبور است سناریوهای زیادی را در مدل شرکت دهد. هرچند تعریف سرمایه در معرض خطر شرطی (CVaR) در زمینه مالی هنوز جدید است، اما این ارزش انتظاری قبلاً نیز به‌کار رفته است. مثلاً به‌وسیله‌ی متخصصین آب برای تخمین زیان ناشی از طغیان رودخانه‌ها و طوفان استفاده شده است.[۱۶و۱۵] این روش همچنین با به‌کارگیری الگوریتم‌های محاسباتی ژنتیک[۱۷] در بهینه‌سازی سبد سهام به‌کار گرفته شده است.

لوئیرت و همکارانش توزیع نرخ بازده وابسته‌ی غیرنرمال اما متقارن را با استفاده از کاپولای نرمال و کاپولای تی‌استیودنت برای توزیع‌هایی که دم سنگینی دارند بررسی کردند.[۶] برتسیماس و همکارانش نیز مسائل انتخاب سهام استوار را برای نرخ‌های بازده متقارن و وابسته تعمیم دادند.[۷]

در ادامه دو روش پیشنهادی را برای نرخ‌های بازده وابسته و غیر متقارن در چارچوب محدودیت‌های احتمالی ارائه می‌کنیم که حالت کلی‌تر و انعکاسی از عدم قطعیت در مسائل دنیای واقعی است.

روش فضای احتمالی تفکیک شده

این روش مشتمل بر دو مرحله‌ی بهینه‌سازی درونی و بیرونی است. بهینه‌سازی درونی در فضای نرخ‌های بازده تصادفی، و بهینه‌سازی بیرونی در فضای متغیرهای تصمیم انجام می‌گیرد. به‌طور تفصیلی روش «فضای احتمالی تفکیک شده» مراحل زیر را شامل می‌شود:

الف) احتمال فراتر نرفتن از سرمایه‌ی هدف در فضای نرخ‌های بازده تصادفی c مبتنی بر مقادیر داده شده بردار متغیرهای تصمیم $\{x,t\}$، میانگین و ماتریس کوواریانس محاسبه می‌شود. این محاسبات در مرحله‌ی بهینه‌سازی درونی انجام می‌گیرد.

ب) سرمایه در معرض خطر که در اینجا t است، تحت محدودیت‌های

ریسک، بودجه و غیرمنفی بودن متغیرهای تصمیم (تخصیص سرمایه) بیشینه‌سازی می‌شود.

ج) مراحل الف و ب تکرار می‌شوند.

به‌دلیل تناسب فرمول روش پیشنهادی در مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار ۲، محدودیت احتمالی را به‌صورت مدل ۳ ارائه می‌دهیم:

$$\max_{x,t}\ t$$
$$\begin{aligned} & Subject\ to: \\ & prob(c^T x \geq t) \geq 1-\alpha \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

این فرمول مشخصاً به بررسی مدل احتمالی برای نرخ‌های بازده می‌پردازد. برای هر مقدار t و احتمال فراتر نرفتن α (که از اینجا به بعد به آن ریسک اطلاق می‌کنیم)، محدودیت غیرقطعی در مسئله‌ی ۳ را می‌توان چنین نوشت:

$$Prob\{g(c \in U|x,t) \geq 0\} \geq 1-\alpha \qquad (4)$$

عبارت $1-\alpha$، احتمال فراتر رفتن و U به‌عنوان دامنه‌ی عدم قطعیتی تعریف می‌شود که به‌وسیله‌ی تابع چگالی احتمال توأم کاپولا شبیه‌سازی می‌شود. کاپولا ساختارهای وابسته را میان متغیرهای تصادفی مدل کرده و توزیع توأم را از طریق به‌کارگیری توزیع حاشیه‌یی به‌عنوان آرگومان توزیع توأم تعریف می‌کند.[18] در به‌کارگیری کاپولا هر نوع توزیع حاشیه‌یی اختیاری را می‌توان برای متغیرهای تصادفی فرض کرد. کاپولا همچنین می‌تواند ساختارهای وابسته غیرخطی را نیز در نظر بگیرد. (جزییات بیشتر در مورد کاپولا را در ضمیمه‌ی الف ببینید.)

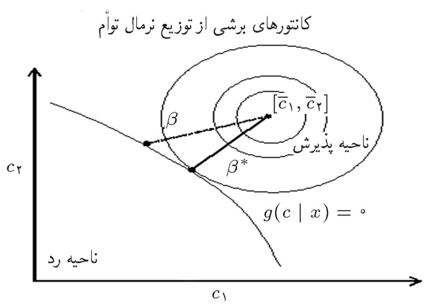
در رابطه‌ی ۴ در فضای نرخ‌های بازده تصادفی، تابع g نقش تابع عملکرد را بازی می‌کند و اصطلاحاً «تابع شکست» نامیده می‌شود. این تابع فضای نرخ‌های بازده تصادفی را به دو ناحیه‌ی «پذیرش» و «رد» تقسیم می‌کند. ناحیه‌ی پذیرش در مسئله‌ی تخصیص سرمایه‌ی ۳ عبارت است از این‌که نرخ بازده کل سرمایه فراتر از هدف برنامه‌ریزی شده‌ی t شود (شکل ۱). تابع g ممکن است همچون تابع هدفِ مسئله خطی یا به‌صورت تابعِ هدفِ مطلوبیتِ سرمایه‌گذار، غیرخطی باشد.

در رابطه‌ی ۴، x و t به‌عنوان داده و ضرایب غیرقطعی c به‌عنوان متغیر فرض می‌شوند. این تمایز بسیار مهم مدل پیشنهادی با روش‌های سنتی بهینه‌سازی تخصیص سرمایه است. ما روش حل کارایی مبتنی بر روش‌های تشریح شده‌ی محققان که روش مذکور را در مسائل مهندسی به‌کار گرفته‌اند[19و20] مطرح می‌کنیم. در مسائل مهندسی متغیرهای طراحی، تصادفی نیز هستند ـــ برخلاف آن چه در مسئله‌ی انتخاب سهام داریم. در مسئله‌ی انتخاب سهام متغیرهای تصمیم (درصد تخصیص سرمایه) قطعی‌اند، اما بعضی یا همه‌ی پارامترها (برای مثال نرخ‌های بازده) تصادفی‌اند. این وجه تمایز اساسی میان مسائل طراحی مهندسی با مسئله‌ی انتخاب سهام است.

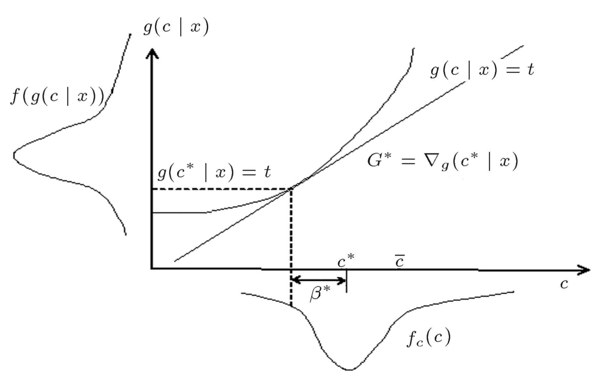
در ادامه «معکوس احتمال فراتر نرفتن از هدف t» را در رابطه‌ی ۴ چنین تشریح می‌کنیم:

$$\beta^*(x,t) = \{ \min_c [(c-\overline{c})^T W^{-1}(c-\overline{c})]^{1/2} \ | \quad g(c|x,t)=0 \ \} \qquad (5)$$

تابع هدف در رابطه‌ی ۵ معرف منحنی‌های تراز تعریف شده به‌وسیله $\overline{c}$ میانگین و W ماتریس کوواریانس نرخ‌های بازده است، به‌طوری که g معرف تابع شکست باشد. شکل‌های ۱ و ۲ تعبیر هندسیِ β^* هستند. در شرایطی که نرخ‌های بازده مستقل‌اند و توزیع یکسانی (iid) با انحراف معیار استاندارد دارند (W ماتریسِ واحد باشد)، مقدار β^* به‌طور ساده عبارت‌است از کوتاه‌ترین فاصله از میانگین ضرایب غیر قطعی به نزدیک‌ترین نقطه روی تابع شکست.



شکل ۱. حداقل فاصله از میانگین $\overline{c}$ تا محدودیت $g(c|x) = 0$ محاسبه شده به‌وسیله (۵) در فضای نرخ‌های بازده تصادفی.



شکل ۲. نمایش انتقال تابع چگالی احتمال بردار نرخ‌های بازده با به‌کارگیری مماس بر تابع شکست غیرخطی (در حالت تابع شکست خطی یعنی $c^T x$، خط مماس بر تابع شکست منطبق است).

وقتی تابع شکست خطی است (همانند مدل ۳)، این نقطه به‌آسانی و بدون نیاز به بهینه‌سازی (رابطه‌ی ۵) محاسبه می‌شود (ضمیمه ب). اما از آنجا که هدف ما ارائه‌ی روشی برای حل حالت کلی تابع شکست غیرخطی است، رابطه‌ی ۵ را نگه می‌داریم. مسئله‌ی بهینه‌سازی ۳ با توجه به به‌کارگیری رابطه‌ی ۵ قابل بازنویسی است:

$$\max_{x} t$$
$$Subject\,to:$$
$$\beta^*(x, t\,|c) \geq \Phi^{-۱}(۱-\alpha)$$
$$\sum_{j=۱}^{n} x_j = ۱$$
$$x \geq ۰. \qquad (۶)$$

Φ بر تابع چگالی تجمعی (CDF) نرمال دلالت دارد، و این در حالی است که متغیر تصادفی نرخ بازده کل توسط دو ممان $\overline{c}$ میانگین و W ماتریس کوواریانس نرخ‌های بازده، تخمین زده شده است. جامعیت کاربرد این روش برای متغیرهای تصادفی که به‌طور نامتقارن و وابسته توزیع شده‌اند به‌طور جزئی در ضمیمه‌ی ج بررسی شده است. مجدداً یادآور می‌شویم که مسئله‌ی تخمین β را با به‌کارگیری رابطه‌ی ۵ از بهینه‌سازی تخصیص سرمایه در مدل ۶ جدا کرده‌ایم. نظر به این که توزیع تجمعی نرخ بازده کل سرمایه‌گذاری را با توزیع تجمعی نرمال تقریب زده‌ایم، مدل ۶ بهینه‌سازی محدب است. و اگر $r = \Phi^{-۱}(۱-\alpha)$ آنگاه مدل‌های ۲ و ۶ معادل‌اند (ضمیمه د).

به هر حال یاد آور می‌شویم که روش تشریح شده در مدل ۵ از روش هازوفر و لیند[۱۹] متفاوت است چرا که آنها با به‌کارگیری نرمال‌سازی، تابع شکست را به فضای متغیرهای نرمال انتقال دادند. در اینجا ما هزینه‌ی انتقال را نداریم.[۲۱]

مزایای روش فضای احتمالی تفکیک شده عبارت است از: الف) توانایی بررسی نرخ‌های بازده وابسته و غیرنرمال؛ ب) توانایی بررسی توابع شکست یا زیان غیرخطی؛ ج) جلوگیری از به‌کارگیری سناریوها در مرحله‌ی بهینه‌سازی؛ د) سریع بودن زمان محاسبات.

مونت‌کارلو تطبیق یافته برای تخصیص سرمایه

روش مونت کارلو برای تخمین احتمال فراتر رفتن محدودیت غیرقطعی در مدل ۳ به‌کار برده می‌شود و ما این روش را برای حل مسئله‌ی بیشینه‌سازی سرمایه‌ی در معرض خطر (VaR)، به‌کار می‌بریم. روش مونت‌کارلو تطبیق یافته شامل مراحل زیر است:

الف) تولید سناریوها برای بردار تصادفی c و ذخیره‌ی آن برای به‌کارگیری در مرحله‌ی بهینه‌سازی؛

ب) با استفاده از داده‌های بردار تصمیم x (از یک تخصیص سرمایه‌ی اولیه شروع می‌کنیم) احتمال ریسک α، و با به‌کارگیری سناریوهای c مقدار VaR، که t نامیده شده، محاسبه می‌شود؛

ج) بیشینه‌سازی t تحت محدودیت بودجه و محدودیت‌های غیرمنفی متغیرهای تصمیم. گرادیانت‌های مورد نیاز به‌صورت عددی محاسبه می‌شوند؛

د) مراحل ب و ج تکرار می‌شوند.

در مونت‌کارلو تطبیق یافته، بیشینه‌سازی تابع هدف اصلی $\{\, t \;|prob(c^T x \geq t) \geq ۱-\alpha\}$ یعنی سرمایه در معرض خطر (VaR) برای ریسک داده شده α حفظ می‌شود. محدودیت بودجه و محدودیت‌های غیرمنفی همان‌طور که در مدل ۳ آمده است باقی می‌ماند. در نگاه اول ارزیابی تابع هدف بالا سخت به نظر می‌رسد، در حالی که برای هر x داده شده، تابع $z = c^T x$ برای هر سناریو از بردار نرخ بازده تصادفی محاسبه می‌شود. مقادیر z برای همه سناریوها گردآوری شده و با استفاده از تابع توزیع تجمعی تجربی مقدار VaR برای α داده شده تخمین زده می‌شود. برای مثال ما تابع prctile در نرم‌افزار MATLAB® را برای این منظور استفاده کرده‌ایم. نظر به این که تعداد سناریوها برای محاسبه‌ی z بزرگ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع توزیع تجمعی تجربی به‌اندازه‌ی کافی دقیق است. از آنجا که مونت‌کارلو تطبیق یافته ابعاد مسئله‌ی بهینه‌سازی اصلی را با اضافه شدن سناریوها برخلاف روش‌های مبتنی بر سناریو (نظیر برنامه‌ریزی خطی تصادفی و روش سرمایه در معرض خطر شرطی) بزرگ نمی‌کند، از کارایی قابل قبولی برخوردار است.

بنابراین مزیت اصلی مونت کارلو تطبیق یافته این است که ابعاد محدودیت‌ها و مسئله‌ی اصلی را حفظ می‌کند و می‌توان تابع بازده خطی و غیرخطی را در این مدل پیاده‌سازی کرد. نقاط ضعف این روش عبارت است از: ۱. تعداد زیاد مقادیر شبیه‌سازی باعث افزایش زمان پردازشگر رایانه (CPU) می‌شود؛ ۲. نتایج به تعداد سناریوها حساس است؛ ۳. اطلاعات تاریخی قیمت سهام یا نرخ‌های بازده را با توزیعی ایستا در نظر می‌گیرد (این فرض تقریباً برای تمام روش‌های مشابه در نظر گرفته می‌شود).

مثال‌های کاربردی

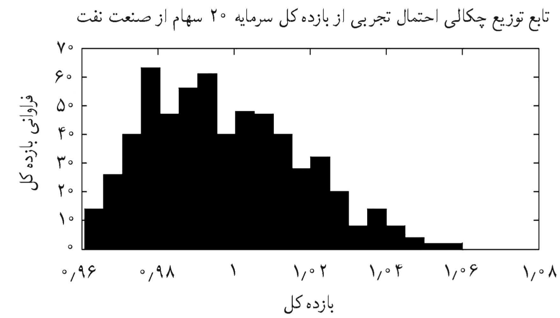
در این قسمت دو مثال عددی مورد بررسی قرار خواهد گرفت، یکی ۲۰ سهم متفاوت از صنعت نفت است و دیگری ۱۰۰ سهم متفاوت از صنایع متفاوت است. در هر دو مثال نتایج روش فضای احتمالی تفکیک شده و مونت‌کارلو تطبیق یافته با روش سرمایه در معرض خطر شرطی (CVaR) مورد مقایسه قرار می‌گیرد:

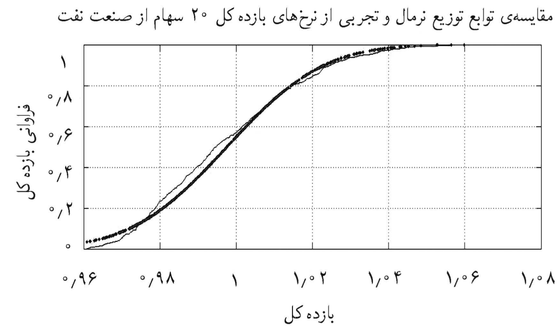
جدول ۱. نتایج تخصیص سرمایه در صنعت نفت (ریسک ۱۰٪، ۲۰ سهم صنعت نفت برای مقادیر قیمت روزانه برای سال‌های ۲۰۰۲ - ۲۰۰۳ میلادی).

میانگین	ضریب تغییرات (٪)	چولگی	مونت کارلو تطبیق یافته (وابسته)	فضای احتمالی تفکیک شده (وابسته)	فضای احتمالی تفکیک شده (مستقل)	سرمایه در معرض خطر شرطی (وابسته)
۱٫۰۰۱۳	۴٫۵	۱٫۳	۰٫۰۱۹۳	۰٫۰۴۵۷	۰٫۰۳۸۳	۰٫۱۱۲۰
۰٫۹۹۸۲	۳٫۰	۰٫۸	۰٫۰۲۸۹	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۸۱۸	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۸۱	۲٫۵	۰٫۷	۰٫۲۳۹۹	۰٫۳۳۱۳	۰٫۱۳۰۱	۰٫۴۰۱۹
۰٫۹۸۹۱	۵٫۶	۰٫۵	۰٫۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۶۳	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۷۷	۲٫۸	۰٫۷	۰٫۰۴۷۱	۰٫۰۷۱۵	۰٫۰۸۴۴	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۳۴	۸٫۳	۰٫۷	۰٫۰۲۰۷	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۸۶	۳٫۰	۱٫۰	۰٫۰۶۲۳	۰٫۱۱۹۶	۰٫۰۷۹۸	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۵۸	۷٫۰	۰٫۹	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۱۳۲	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۶۲	۲٫۵	۰٫۸	۰٫۲۹۵۸	۰٫۱۹۶۶	۰٫۰۸۶۶	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۶۶۸	۱۳٫۶	۰٫۶	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۴۷	۳٫۴	۰٫۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۲۰۲	۰٫۰۳۶۶	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۷۲	۶٫۱	۰٫۵	۰٫۰۲۶۶	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۱۱۳	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۲۰	۴٫۹	۰٫۴	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۶۱	۰٫۰۲۴۳	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۷۶	۹٫۰	۱٫۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۱۰۳	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۵۴	۳٫۱	۰٫۵	۰٫۱۴۳۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۶۰۴	۰٫۰۰۰۰
۱٫۰۰۱۵	۳٫۷	۱٫۱	۰٫۰۰۵۹	۰٫۰۱۹۰	۰٫۰۷۶۸	۰٫۳۴۲۶
۰٫۹۹۹۵	۳٫۲	۰٫۹	۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۵۶	۰٫۰۷۴۵	۰٫۰۲۵۵
۰٫۹۹۶۶	۳٫۶	۰٫۹	۰٫۰۱۵۲	۰٫۰۰۳۵	۰٫۰۴۸۸	۰٫۰۰۰۰
۰٫۹۹۲۷	۳٫۲	۰٫۹	۰٫۰۵۶۵	۰٫۱۸۱۰	۰٫۰۷۵۲	۰٫۱۱۷۹
۰٫۹۹۷۶	۳٫۳	۱٫۱	۰٫۰۳۵۸	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۵۹۹	۰٫۰۰۰۰
سرمایه در معرض خطر			۰٫۹۷۴۱	۰٫۹۷۳۸	۰٫۹۷۱۳	۰٫۹۷۰۵

مثال ۱ (۲۰ سهم از صنعت نفت)

از سایت Yahoo.com قیمت‌های روزانه‌ی ۲۰ سهم از صنعت نفت برای سال‌های ۲۰۰۲ تا ۲۰۰۳ استخراج شد. از آنجاکه قیمت‌ها متعلق به صنعت یکسانی هستند، انتظار می‌رود که وابسته باشند. سپس بازده هر سهم برای هر دوره محاسبه شد. آزمون نرمال بودن نرخ‌های بازده برای فرض H_0(توزیع نرمال نرخ بازده هر سهم)، با استفاده از دستور Lillietest از نرم‌افزار MATLAB ® رد می‌شود. توزیع گاما به‌عنوان توزیع حاشیه‌یی بازده هر سهم و فرانک کاپولا[۶] (ضمیمه الف) به‌منظور برازش توزیع توأم آنها انتخاب شده است. مقادیر تصادفی به‌واسطه‌ی توزیع توأم به‌عنوان سناریو نرخ‌های بازده شبیه‌سازی شده است.[۲۳] میانگین، ضریب تغییرات (که نسبت انحراف معیار به میانگین است و نسبت عدم قطعیت را نشان می‌دهد) و ضریب چولگی (که عدم تقارن را نشان می‌دهد) برای هر یک از ۲۰ سهم در جدول ۱ نشان داده شده است. ضریب چولگی مشخصاً غیرنرمال بودن توزیع حاشیه‌یی نرخ‌های بازده را نشان می‌دهد. همچنین ما بیش از ۵۰٪ ضرایب همبستگی را بین ۰٫۲ و ۰٫۴ محاسبه کردیم که نشان‌دهنده‌ی وجود وابستگی است. جواب‌های به‌دست آمده از روش‌های فضای احتمالی تفکیک شده و مونت‌کارلو تطبیق یافته در جدول ۱ ارائه شده است. روش فضای احتمالی تفکیک شده مقادیر $\overline{c}$ و W را از ۴۰۰ مقدار شبیه‌سازی شده محاسبه کرده و در مرحله‌ی بهینه‌سازی به‌کار گرفته است. همچنین ۶۰۰ نمونه‌ی تصادفی دیگر برای مرحله‌ی ارزیابی به‌کار رفته‌اند. ستون چهارم نشان‌گر جواب بهینه‌ی بیشینه‌سازی سرمایه در معرض خطر (VaR) تحت ریسک ۱۰٪ و با استفاده از روش مونت کارلو تطبیق یافته است. در این روش VaR بزرگ‌ترین است. ستون پنجم جواب روش فضای احتمالی تفکیک شده است که به جواب روش مونت کارلو تطبیق یافته نزدیک است. جواب‌های آزمایش





شکل ۳. تابع چگالی بازده کل سرمایه و مقایسه‌ی تابع توزیع تجمعی تجربی و نرمال.

دیگر که با فرض مستقل بودن نرخ‌های بازده به‌وسیله‌ی روش فضای احتمالی تفکیک شده صورت گرفته و در ستون ششم ارائه شده است. به‌علت فرض استقلال، پراکندگی تخصیص سرمایه در روش فضای احتمالی تفکیک شده، در حالتی که داده‌ها مستقل فرض شده‌اند، بیشتر از حالتی است که داده‌ها وابسته‌اند. جواب روش سرمایه در معرض خطر شرطی (CVaR) در ستون هفتم آمده است. مقدار VaR در این روش قابل مقایسه با دیگر جواب‌ها است اما توزیع سرمایه‌ی محدودتری دارد که خاصیت جواب پایه در برنامه‌ریزی خطی است. جواب‌های پایه (گوشه) در برنامه‌ریزی خطی تعداد صفر زیادی دارند.

به منظور اثبات غیرنرمال بودن نرخ‌های بازده، تابع چگالی احتمال تجربی بازده کل سرمایه در شکل ۳ نمایش داده شده است. همان‌طور که در این شکل آمده، تخمین VaR در روش فضای احتمالی تفکیک شده (رابطه‌ی ۶) از طریق تابع توزیع تجمعی نرمال (خط هموار) صورت می‌گیرد که تخمین خوبی از توزیع تجمعی تجربی (خط معوج) است. پیامدهای بیشتر این تخمین را در ضمیمه‌ی ج مورد بحث قرار داده‌ایم.

مثال ۲ (۱۰۰ سهم از صنایع متفاوت)

نرخ بازده ۱۰۰ سهم از ۵ صنعت، ۲۰ سهم از هر صنعت که نرخ آن‌ها از بانک اطلاعات قیمت‌های سهام درآمریکای شمالی (CRSP) انتخاب شده در این مثال به‌کار گرفته شده است.) صنایع عبارت‌اند از: استخراج نفت؛ نفت خام و گاز طبیعی؛ دارویی؛ مواد دارویی؛ و تولیدات فولادی که شامل ذوب آهن و نوردهای فولادی نیز می‌شود. جواب‌های روش فضای احتمالی تفکیک شده و مونت کارلو تطبیق یافته در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲. نتایج تخصیص سرمایه برای ۵ صنعت مختلف و ۱۰۰ سهم با ریسک ۱۰٪.

	مونت کارلو تطبیق یافته	فضای احتمالی تفکیک شده	سرمایه در معرض خطر شرطی
سرمایه در معرض خطر	۰٫۹۹۰۲	۰٫۹۹۰۷	۰٫۹۹۰۲
تعداد سهام تخصیص یافته	۶۹	۵۳	۵۰

در این مثال جواب‌های حاصل از روش فضای احتمالی تفکیک شده در مقایسه با جواب‌های حاصل از دیگر روش‌ها بهینه است. آخرین سطر جدول تعداد سهام تخصیص یافته را نشان می‌دهد. همانند مثال قبل جواب اولیه تخصیص مساوی میان سهام است. نکته‌ی جالب توجه این که زمان صرف شده برای حل روش فضای احتمالی تفکیک شده و سرمایه‌ی در معرض خطر شرطی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB® و با به‌کارگیری رایانه Apple G5، کم‌تر از یک دقیقه بوده است. در روش مونت کارلو تطبیق یافته برای ۱۰۰ سهم زمانی کم‌تر از ۳ دقیقه به طول انجامیده است.

نتیجه‌گیری

تخصیص سرمایه در شرایطی که نرخ‌های بازده به‌صورت نامتقارن و وابسته توزیع یافته‌اند از مسائل مهم دنیای واقعی است. در این نوشتار روش بهینه‌سازی کارایی که مسئله را تحت شرایط بسیار کلی حل می‌کند، ارائه شده است. برای مثال بهینه‌سازی تابع هدف سرمایه در معرض خطر (VaR) برای ریسک داده شده، بهینه‌سازی سرمایه در معرض خطر شرطی (CVaR)، یا بهینه‌سازی تابع زیان غیرخطی در این روش مدل‌سازی قابل استفاده‌اند. مهم‌ترین پیامد مدل پیشنهادی در نظرگرفتن نرخ‌های بازده وابسته و غیرمتقارن است. روش بهینه‌سازی ارائه شده در این نوشتار مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب است. همچنین از لحاظ محاسباتی در مقایسه با بهینه‌سازی مبتنی بر سناریو (یا شبیه‌سازی) در حل مسئله‌ی سرمایه در معرض خطر (VaR) هزینه‌بر نیستند.

ضمائم

ضمیمه الف: کاپولا برای مدل‌سازی ساختارهای وابسته و مدل‌سازی توزیع توأم

در بسیاری از مسائل، علاوه بر توزیع‌های حاشیه‌یی، مدل‌سازی ساختار وابسته‌ی متغیرهای تصادفی الزامی است. مثلاً در بهینه‌سازی سبد سهام، نرخ‌های بازگشت سهام در محدوده‌ی صنایع، اغلب به‌طور مثبت وابسته‌اند. همچنین، بسیاری از این متغیرهای تصادفی غیرنرمال‌اند.[۳] وقتی‌که وابستگی خطی بین متغیرهای تصادفی وجود دارد و به‌طور نرمال توزیع یافته‌اند، معمولاً ضریب همبستگی پی‌یرسون[۷] برای اندازه‌گیری شدت وابستگی به‌کار برده می‌شود.

کاپولا از کاربردهای اخیر در آمار است و برای مدل‌سازی توزیع چندمتغیره‌ی توأم به‌کار برده می‌شود.[۲۴] هرکدام از متغیرها می‌توانند توزیع‌های حاشیه‌یی متفاوتی از دیگر متغیرهای تصادفی داشته باشند و حتی غیرنرمال نیز باشند. کاپولا ساختارهای وابسته میان متغیرهای تصادفی را مدل‌سازی می‌کند و توزیع توأم را به توزیع‌های حاشیه‌یی متفاوتی تجزیه می‌کند. کاپولا برای مدل‌سازی ساختارهای وابسته‌ی غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، مثلاً در بعضی موارد مقادیر پایین قیمت سهام، نسبت به مقادیر بالایی متناظرشان، هم‌بسته‌ترند.[۴]

در بازار سهام معمول است که پایین رفتن دسته جمعی قیمت سهام با شدت بالایی اتفاق می‌افتد در حالی که بالا رفتن قیمت‌ها به این شدت نیست.

برای سهولت، در اینجا دو متغیر تصادفی x و y را در نظر بگیرید. متغیر تصادفی x، تعبیر متفاوتی از متغیر x تعریف شده در مسئله‌ی بهینه‌سازی در متن نوشتار دارد. توزیع توأم $H(x,y)$ و توزیع‌های حاشیه‌یی $F(x)$ و $G(y)$ را در نظر بگیرید، کاپولا چنین تعریف می‌شود:[۱۸و۲۳]

$$C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \qquad \text{(الف ـ ۱)}$$

از طرف دیگر کاپولای $C(u,v)$ را می‌توان از طریق توابع حاشیه‌یی چنین نیز تعریف کرد:

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)), \qquad \text{(الف ـ ۲)}$$

این توزیع، CDF چندمتغیره با توابع توزیع حاشیه‌یی $F(x)$ و $G(y)$ است. تأکید می‌کنیم که کاپولا به نوع توزیع‌های حاشیه‌یی، که در اینجا آرگومان‌های u, v هستند، وابستگی ندارد. انتخاب‌های بسیار زیادی برای توزیع کاپولا در اختیار است. برای مثال در اینجا ماکاپولای فرانک[۱۸] را به‌کار می‌بریم که شکل ساده‌تری دارد و وابستگی آن از طریق یک پارامتر به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left[1+\frac{(e^{-\theta\,u}-1)(e^{-\theta\,v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right] \qquad \text{(الف ـ ۳)}$$

که در آن با داشتن پارامتر وابستگی θ و توزیع‌های حاشیه‌یی، کاپولای فرانک متغیر تصادفی همبسته‌ی توأم را برای کاربرد در شبیه‌سازی، تولید می‌کند. کاپولای فرانک می‌تواند کل حوزه‌ی همبستگی بین ۱- و ۱ را پوشش دهد.[۱۸و۲۳]

ضمیمه‌ی ب: محاسبه‌ی β بهینه براساس x و t داده شده

وقتی بردار نرخ‌های بازده c به‌صورت نرمال توأم توزیع یافته باشد، رابطه‌ی تابع لاگرانژین برای تابع شکست $g(c \mid x\ ,t) = 0$ و کمینه‌سازی β از رابطه‌ی ۵ چنین است:

$$L(c,\lambda) = [(\bar{c}-\bar{c})^T W^{-1}(c-\bar{c})^{1/2} + \lambda g(c|x,t) \qquad \text{(ب ـ ۱)}$$

نقطه‌ی ساکن[۸] از طریق حل سیستم معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\nabla L = \beta^{-1} W^{-1}(c-\bar{c}) + \lambda G = 0 \qquad \text{(ب ـ ۲)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(c \mid x\ ,t) = 0 \qquad \text{(ب ـ ۳)}$$

به‌طوری که G بر گرادیانت $g(c \mid x\ ,t)$ دلالت دارد. با مرتب کردن دوباره‌ی عبارت (ب ـ ۲) داریم:

$$(c-\bar{c}) = -\lambda\beta\ W\,G \qquad \text{(ب ـ ۴)}$$

از تعریف β و رابطه‌ی (ب ـ ۴)، ضریب لاگرانژین λ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda = (G^T W G)^{-1/2} \qquad \text{(ب ـ ۵)}$$

مقدار حداقل β با جایگزین کردن مقدار λ در رابطه‌ی (ب ـ ۴) از رابطه‌ی (ب ـ ۵) چنین به دست می‌آید:

$$\beta^*(x\,|\,c) = \frac{(\bar{c}-c^*)^T G}{(G^T W G)^{1/2}} \qquad \text{(ب ـ ۶)}$$

که در حالت خطی $G = x$ و داریم:

$$\beta^*(x\,|\,c) = \frac{(\bar{c}-c^*)^T x}{(x^T W x)^{1/2}} = -\frac{t-\bar{c}^T x}{(x^T W x)^{1/2}} \qquad \text{(ب ـ ۷)}$$

به‌طوری که $\bar{c}^T x$ و $(x^T W x)^{1/2}$ به ترتیب عبارت‌اند از میانگین و انحراف معیار بازده کل سرمایه‌گذاری $c^T x$. عبارت سمت راست رابطه‌ی (ب ـ ۷) نرخ معروف شارپ[۹] است، در حالی که t معادل نرخ بازده بدون ریسک است.[۲۵]

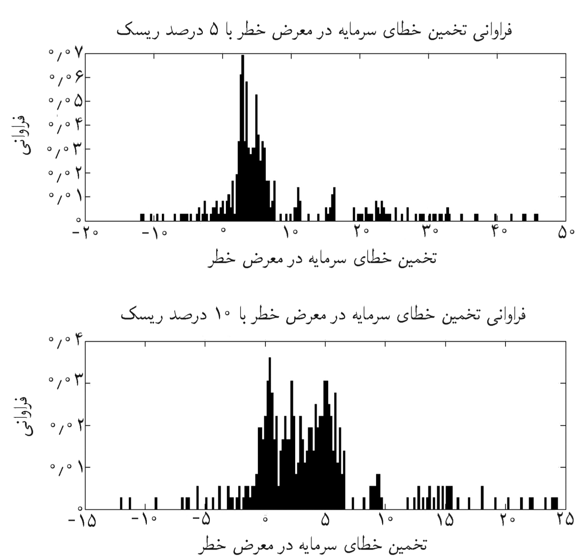
ضمیمه ج: تخمین تابع چگالی تجمعی بازده کل به‌وسیله‌ی توزیع نرمال

در رابطه‌ی ۶ تابع چگالی تجمعی نرمال را برای تخمین تابع چگالی تجمعی بازده کل سرمایه به‌کار می‌بریم. به‌طور کلی، اعتقاد بر قضیه‌ی حد مرکزی توجیه‌گر چنین کاربردی است. اما این در شرایطی درست است که نرخ‌های بازده اولیه به‌صورت نرمال توأم توزیع یافته باشند. به هر حال قضیه حد مرکزی برای حالت غیرنرمال توزیع‌های حاشیه‌یی نیز کاربرد دارد اگر و تنها اگر توزیع‌های حاشیه‌یی هم توزیع و مستقل[۱۰] باشند. بنابراین چگونه می‌توانیم در بیشتر موارد دنیای واقعی که توزیع‌های حاشیه‌یی نرخ‌های بازده غیرهمانند، غیرنرمال و وابسته‌اند چنین کاربردی را توجیه کنیم؟

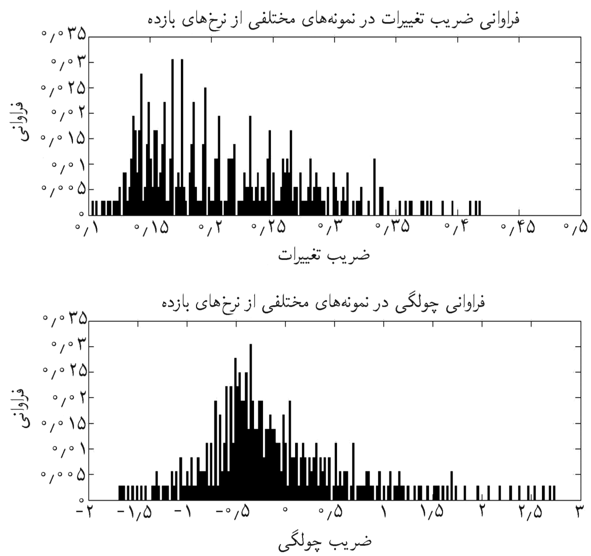
این امر در واقع هنگامی رخ می‌دهد که نظریه و عمل تا حدی از هم انحراف دارند. ما آزمایشی را مورد مطالعه قرار داده‌ایم: توزیع‌های تجمعی اختیاری متفاوتی را با توزیع تجمعی نرمال حاصل شده از میانگین و واریانس توزیع‌های تجمعی اختیاری مقایسه کرده‌ایم. سپس خطای تخمین سرمایه‌ی در معرض خطر (VaR) را برای این دو توزیع تجمعی و دو مقدار متفاوت ریسک ۵٪ و ۱۰٪ محاسبه می‌کنیم. آزمایشات برای ۱۶۰۰ توزیع تجمعی متفاوت مدل شده با توزیع تجمعی کو ماراساوامی[۲۶] به دست آمده است.

تابع توزیع توسعه یافته در طراحی احتمالی توسط پونومبالام وهمکارانش به‌کار گرفته شده است.[۲۷و۲۸] در شکل ۴ نمودار فراوانی خطاها برای دو مقدار ریسک یاد شده نمایش داده شده است.

مطابق انتظار، خطای تخمین سرمایه در معرض خطر (VaR) برای ریسک ۱۰٪ به‌بزرگی ۰٫۵ و برای ریسک ۵٪ تقریباً حدود ۰٫۷



شکل ۴. فراوانی خطای تخمینی در محاسبه‌ی سرمایه در معرض خطر (VaR) برای ریسک ۵٪ و ۱۰٪.



شکل ۵. فراوانی آماره‌های ضریب تغییرات و چولگی برای توزیع‌های تجمعی اختیاری از نرخ‌های بازده در تخمین خطاهای سرمایه در معرض خطر (VaR) در شکل ـ ۴ نمایش داده شده است.

است. این خطاها برای دامنه وسیعی از توابع توزیع تجمعی که ضریب انحراف و ضریب چولگی آنها در شکل ۵ آمده‌اند نسبتاً کوچک‌اند. به‌علاوه در بیشتر حالات خطاها مثبت‌اند (یعنی مقدار واقعی بزرگ‌تر از مقدار تخمینی است) بدین معنی که در مرحله‌ی بهینه‌سازی، تخمین سرمایه‌ی در معرض خطر (VaR) محافظه‌کارانه است. بنابراین وقتی تخمین‌های خوبی از میانگین و واریانس در اختیار باشند، عملاً تخمین سرمایه در معرض خطر (VaR) با به‌کارگیری توزیع تجمعی نرمال قابل قبول است.

این شرایط برای حالتی که با تابع شکست خطی در مسئله‌ی تخصیص سرمایه مواجه هستیم، به‌مراتب ساده‌تر است. علی‌رغم خطاهای تخمین جواب به دست آمده در مرحله‌ی بهینه‌سازی، وقتی جواب‌ها در مرحله‌ی ارزیابی قرار می‌گیرند به‌وضوح برتری خود را مطابق جدول‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند.

ضمیمه د: تحدب بهینه‌سازی فضای احتمالی تفکیک شده

رابطه‌ی (ب ـ ۷) را برای $\beta^*(x|c)$ در (۶) قرار می‌دهیم:

$$\frac{\bar{c}^T x - t}{(x^T W x)^{1/2}} \geq F^{-1}(1-\alpha) \qquad \text{(د ـ ۱)}$$

با بازنویسی رابطه‌ی (د ـ ۱) داریم:

$$\bar{c}^T x - F^{-1}(1-\alpha)(x^T W x)^{1/2} \geq t \qquad \text{(د ـ ۲)}$$

اما علامت $F^{-1}(1-\alpha)$ مثبت است زیرا دامنه‌ی ریسک α معمولاً برابر (۰٫۵ و ۰) است. در این حالت محدودیت (د ـ ۲) درجه دوم مخروطی است و مسئله محدب است.[۲۹]

پانوشت

1. Value-at-Risk (VaR)
2. Conditional Value at Risk (CVaR)
3. copula
4. robust investment
5. interior point algorithm
6. frank's copula
7. Pearson's correlation coefficient
8. stationary point
9. sharpe ratio
10. iid)(independent and identically distributed

منابع

1. Linsmeier, T.J., and N.D. Pearson, "Value at risk." *Financial Analysts Journal 56*, pp. 47–67 (2000).
2. Michaud, R., "Efficient asset management". *Oxford University Press*, (1998), originally published by Harvard Business School Press (1991).
3. Levy, H., and R. Duchin, "Asset return distributions and investment horizon", *The Journal of Portfolio Management*, pp. 47-62 (2004).
4. Embrechts, P., F. Lindskog, and A. McNeil, "Modeling dependence with copulas and applications to risk management, in handbook of heavy tailed distributions in finance", Elsevier Sci., New York, pp. 329 - 384 (2003).
5. Rockafellar R.T. and S. Uryasev, "Optimization of conditional Value-at-Risk." *The Journal of Risk*, **2** (3), pp. 21-41 (2000).
6. Lauprete1 G. J., A. M. Samarov, and R. E. Welsch, "Robust portfolio optimization". Metrika, 55, pp. 139–149 (2002).
7. Bertsimas, D., G.J. Lauprete, and A. Samarov, "Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications", *Journal of Economic Dynamcis and Control*, 28, pp. 1353-1381 (2004).
8. Markowitz, H.M., "The optimization of a auadratic function subject to linear constraints". *Naval Research Logistics Quarterly*, **3**, pp. 111-133 (1956).
9. Sengupta, Jati K., "A generalization of some distribution aspects of chance-constrained linear programming". *International Economic Review*, **11** (2), pp. 287-307 (1970).
10. Soyster, A.L., "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to linear programming". *Operations Research*, **21** (5), pp. 1154-57 (1973).
11. El Ghaoui, L., F. Oustry, H. Lebret, "Robust solutions to uncertain semi definite programs". *SIAM Journal of Optimization*, **9** (1), pp. 33-52 (1998).
12. Ben-Tal, A., A. Nemirovski. "Robust convex optimization". *Mathematical Operations Research*. **23** (4), pp. 769-805 (1998).
13. Ben-Tal A. and A. Nemirovski, "Robust solutions to uncertain linear programming problems". *Operations Research Letters*, **25**, pp. 1-13 (1999).
14. Hanafizadeh, P., and A. Seifi, "Unified robust model for uncertain linear programs", *Transactions on Operational Research*, **16**, pp. 25-45 (2004).
15. Asbeck E. and Y.Y. Haimes. "The partitioned multiobjective risk method", *Large Scale Systems*, **6** (1), pp. 13-38, (1984).
16. Haimes, Y.Y. "Risk modelling assessment, and management", John Wiley and Sons, New York (1998).
17. Santos, J.R. and Y.Y. Haimes, "Applying the partitioned multiobjective risk method (PMRM) to portfolio selection", *Risk Analysis*, **24** (3), pp. 697-713 (2004).
18. Nelsen, R. B., "An introduction to copulas". *Lecture Notes in Statistics*, Springer-Verlag, New York (1999).
19. Hasofer, A.M., and N.C. Lind, "Exact and invariant second-moment code format". *ASCE Journal Engineering Mechanical Division*, **100** (1), pp. 111-121 (1974).
20. Madsen, H.O., S. Krenk, and N.C. Lind, "Methods of structural safety", Prentice-Hall, NJ (1986).
21. Seifi, A., K. Ponnambalam, and J. Vlach,. "Probabilistic design of integrated circuits with correlated input parameters". *IEEE Transactions* CAD, **18** (8), pp. 1214-1219 (1999).
22. Conover, W. J. "Practical Nonparametric Statistics". New York, Wiley (1980).
23. Joe, H., "Multivariate models and dependence concepts". Chapman and Hall, New York, (1997).
24. Sklar, AS., "Fonctions de re'partition a'n dimensions et leurs marges". Publication Institute State University Paris, 8, pp. 229-231 (1959).

25. Goldfarb, D and G. Iyengar, "Robust portfolio selection problems", *Mathematics of Operations Research*, **28** (1), pp. 1-38, (2003).
26. Kumaraswamy, P., "A generalized probability density function for double-bounded random processes". *Journal of Hydrology*, **46**, pp.79-88 (1980).
27. Kontsoyiannis, D. and T. Xanthopoulos,"On the parametric approach to unit hydrograph identification". *Water Resources Management*, **3**, pp. 107-128 (1989).
28. Ponnambalam, K., A. Seifi, and J. Vlach. "Probabilistic design of systems with general distributions of parameters", *Intl' J. of Circuit Theory and Appl.*, **29** (6), pp. 527-536 (2001).
29. Boyd, S. and L. Vandenberghe, "Convex optimization". Cambridge University Press, (2003).