فصلنامه‌ی علمی و پژوهشی شریف
تابستان ۱۳۸۶، شماره‌ی سی و هشتم، ص. ۷۵-۸۰

# تعیین مسیر بهینه برای پرتاب ماهواره به‌مدار زمین با استفاده از قانون هدایت تانژانت خطی

محمد مردانی (دانشجوی دکتری)
محمد موبد (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

به‌منظور بررسی پرتاب بهینه‌ی ماهواره به مدار دایره‌یی کره زمین، ابتدا مسئله‌ی پرتاب بهینه را به یک مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌یی تبدیل کرده‌ایم. سپس از حالت‌ها و هم‌حالت‌های متناظر با حل تحلیلی برای مسئله‌ی زمین مسطح بدون مقاومت هوا (قانون هدایت تانژانت خطی) به‌عنوان حدس اولیه برای حل عددی مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌یی استفاده شده است. الگوریتمی که برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی به‌کار می‌رود نسبت به حدس اولیه بسیار حساس است. مشاهده می‌شود که برای برطرف کردن واگرایی ناشی از این حساسیت، می‌توان اثر مقاومت هوا را به‌تدریج در مسئله وارد کرد. نتایج حاصله نشان می‌دهند که روش فوق علاوه بر بهینگی، از سرعت همگرایی قابل قبولی نیز برخوردار است.

## ۱. مقدمه

بهینه‌سازی در صنایع فضایی، در قالب مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت، یا کمینه‌سازی زمان سفر از دیرباز اهمیت و کاربردی ویژه داشته است. بدیهی است ملاحظات اقتصادی از مهم‌ترین دلایل اهمیت بهینه‌سازی در این بخش از صنعت است.[۱]

مرسوم است که روش‌ها و مسائل بهینه‌سازی بسته به نوع کاربرد و صورت مسئله تقسیم‌بندی یا نام‌گذاری شوند. در مبحث فعلی، یافتن مسیر پرتاب به‌گونه‌یی که به کمینه‌سازی کمیتی چون سوخت مصرفی بینجامد، به مسئله‌ی بهینه‌سازی مسیر[۱] معروف است. درمورد پرتاب فضاپیماها، روش‌های بهینه‌سازی معمولاً به دو دسته روش مستقیم[۲] و روش غیرمستقیم[۳] تقسیم می‌شوند. در روش مستقیم متغیرهای کنترل، و در مواردی متغیرهای حالت سیستم، به‌صورت توابعی از چند پارامتر نوشته می‌شوند. مثلاً کل زمان پرتاب را می‌توان به بخش‌هایی تقسیم، و در هر بخش متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت را ثابت فرض کرد؛ یا می‌توان مسیر پرتاب را به‌صورت تکه‌یی و با استفاده از توابعی ساده، مثل چندجمله‌یی، تقریب زد[۲]، و سپس مقادیر این پارامترها را طوری تنظیم کرد که کمیت مورد نظر بهینه شود. در روش مستقیم، به‌منظور یافتن مسیر بهینه‌ی پرتاب، از ابزارهایی نظیر الگوریتم ژنتیک[۳]، برنامه‌ریزی غیرخطی[۴و۵]، و شیوه‌ی تطبیقی[۶] بهره می‌برند. ایراد عمده‌ی روش‌های بهینه‌سازی مستقیم، حجم زیاد محاسبات و کُندی همگرایی الگوریتم‌های آن‌هاست.[۶]

در روش غیرمستقیم، ابتدا مسئله‌ی اصلی بهینه‌سازی مسیر به‌کمک حساب تغییرات به یک مسئله‌ی مقدار مرزی (BVP) تبدیل می‌شود. سپس این مسئله، از طریق روش‌های عددی حل می‌شود. در روش غیرمستقیم با دو مشکل مواجه هستیم: نخست این که الگوریتم‌های حل مسائل مقدار مرزی نسبت به حدس اولیه‌یی که برای شروع الگوریتم لازم است، بسیار حساس‌اند[۷و۸]؛ دوم این که علاوه بر حل معادلات دیفرانسیل حالت‌های سیستم، معادلات دیفرانسیل هم‌حالت‌ها[۴] نیز باید حل شوند، اما معمولاً به دلیل نداشتن مفهوم فیزیکی، پیداکردن حدس اولیه برای هم‌حالت‌ها دشوار است. در مرجع ۸ روش‌های عددی بهینه‌سازی مسیر به‌طور کامل معرفی شده‌اند.

در هر دو روش مستقیم و غیرمستقیم، مسئله‌ی بهینه‌سازی معمولاً با قیدهایی[۵] همراه است. این قیدها درمورد قراردادن ماهواره در مدار زمین، به‌صورت معادلات حاکم بر مقادیر پارامترهای ماهواره در مدار، نامعادلات حاکم بر متغیرهای حالت[۹]، یا به‌صورت محدودیت‌هایی بر نیروی قائم وارد بربدنه و زاویه‌ی حمله[۱۰]، و امثالهم در نظر گرفته می‌شوند.

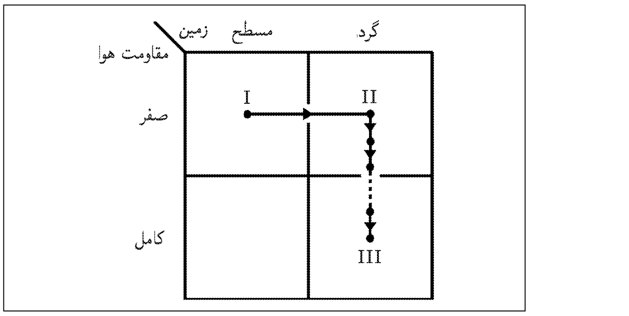
مسئله‌ی پرتاب بهینه‌ی ماهواره به مدار زمین در صورتی‌که بردار جاذبه ثابت نباشد یا نیروی مقاومت هوا قابل اغماض نباشد حل تحلیلی ندارد. اما اگر شرایط ایده‌ال باشد یعنی اگر بردار جاذبه ثابت فرض شود (که آن‌هم معادل با فرض زمین مسطح است) و از مقاومت هوا نیز صرف‌نظر شود آنگاه مسئله‌ی پرتاب بهینه‌ی یک جسم صُلب به ارتفاعی مشخص به نحوی‌که بردار سرعت در زمان نهایی (یعنی در لحظه‌ی قرار گرفتن جسم در ارتفاع مورد نظر) موازی سطح زمین باشد، دارای حل تحلیلی خواهد بود. منظور از پرتاب بهینه در اینجا، پرتاب با مقدار معین سوخت برای بیشینه شدن اندازه‌ی سرعت در

زمان نهایی است. پاسخ این مسئله به «قانون هدایت تانژنت خطی»[۶] معروف است.[۱۱و۱۲] حتی در بسیاری از شرایط غیر ایده‌ال، ابتدا قانون هدایت تانژنت خطی به‌عنوان قانون پرتاب تقریباً بهینه در نظر گرفته می‌شود و سپس با اعمال تصحیحاتی از قبیل روش اختلال[۷] سعی می‌شود مسیر تقریباً بهینه به مسیر کاملاً بهینه نزدیک‌تر شود.[۲]

در این نوشتار به‌جای استفاده از چنین تقریب‌هایی، مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌یی حاصل از برقراری شرایط لازم بهینگی در حساب تغییرات، مستقیماً با استفاده از روش شوتینگ[۸] حل می‌شود. چنان که اشاره شد، به‌منظور دست‌یابی به یک حدس اولیه‌ی مناسب برای متغیرهای حالت و هم‌حالت، از پاسخ قانون هدایت تانژنت خطی مربوط به زمین مسطح استفاده می‌شود. لذا در اینجا نیز قانون هدایت تانژنت خطی نقشی قاطع و مؤثر، هرچند غیرمستقیم، دارد. به‌عبارت دیگر، از قانون هدایت تانژنت خطی نه به‌عنوان جواب نهایی، بلکه به‌عنوان وسیله‌یی برای رسیدن به جواب نهایی استفاده می‌شود.

شکل ۱ روش ابتکاری به‌کارگرفته شده برای رسیدن به جواب نهایی را نمایش می‌دهد. مربع بالایی در سمت چپ که با علامت Iمشخص شده، با وضعیت ایده‌ال ـ یعنی زمین مسطح و مقاومت قابل اغماض هوا ـ متناظر است. پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی مسیر برای مسئله‌ی I چیزی جز قانون هدایت تانژنت خطی نیست. حال در یک گام، با قرار دادن فرض زمین گرد به‌جای زمین مسطح، مسئله‌ی II متناظر با مربع بالایی در سمت راست حاصل می‌شود. جواب مسئله‌ی II که در آن مقاومت هوا همچنان صفر است، به‌طور غیرمستقیم یعنی از حل یک مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌یی با استفاده از روش شوتینگ به دست می‌آید. حدس‌های اولیه‌ی لازم برای متغیرهای حالت و هم‌حالت در مسئله‌ی II، متغیرهای حالت و هم‌حالت پاسخ مسئله‌ی I هستند. در این مرحله، الگوریتم عددی مورد استفاده در روش شوتینگ به‌خوبی همگرا است.

حال با تکرار روندی مشابه شیوه‌ی تولید مستقیم مسئله‌ی II از مسئله‌ی I، یعنی با جایگزین کردن فرض مقاومت هوای صفر توسط مقاومت هوای کامل و ابقای فرض زمین گرد، و نیز با استفاده از متغیرهای




شکل ۱. نمایش روش حل مسئله.

حالت و هم‌حالت متناظر با جواب مسئله‌ی II به‌عنوان حدس‌های اولیه‌در مسئله‌ی III، ممکن است چنین به‌نظر برسد که بتوان مستقیماً یعنی در یک گام از مسئله‌ی II به مسئله‌ی اصلی III رفت و آن را حل کرد. اما آنچه در عمل مشاهده می‌شود این است که الگوریتم عددی فوق‌الذکر همگرا نمی‌شود و بنابراین چنین رویکرد ساده‌یی متأسفانه منجر به حل مسئله‌ی III نمی‌شود. برای برطرف شدن معضل واگرایی، راه پیشنهادی این است که تحول از مسئله‌ی II به مسئله‌ی III در یک جهش یا گام بزرگ صورت نگیرد، بلکه چنان‌که در شکل ۱ توسط خط چین عمودی با پیکان‌های متعدد که به دایره‌های کوچک توپُر منتهی می‌شوند نمایش داده شده، طی چندین جهش کوچک انجام شود. به استثنای دایره‌ی کوچک در مرکز مربع متناظر با مسئله‌ی II و دایره‌ی کوچک در مرکز مربع متناظر با مسئله‌ی III، بقیه‌ی دایره‌های کوچک واقع بر خط چین عمودی نماینده‌ی مسائل میانی هستند که متوالیاً و به طریقی بازگشتی که توضیح‌اش در ادامه آمده است، حل می‌شوند.

شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که علاوه بر بهبود پاسخ نسبت به پاسخ متناظر با قانون هدایت تانژنت خطی، مشکل همگرایی الگوریتم حل مسئله‌ی مقدار مرزی که قبلاً به آن اشاره شد نیز به‌خوبی حل می‌شود. در بخش‌های بعد، ابتدا معادلات حالت و هم‌حالت مربوط به پرتاب بهینه‌ی ماهواره به مدار زمین استخراج می‌شوند و سپس چگونگی استفاده از قانون هدایت تانژنت خطی برای به دست آوردن حدس‌های اولیه شرح داده می‌شود. در مرحله‌ی بعد، ماحصل شبیه‌سازی روش پیشنهادی و مقایسه با آنچه از قانون هدایت تانژنت خطی به دست می‌آید ارائه می‌شود.

## ۲. معادلات حرکت (دینامیک سیستم)

### ۱.۲. معادلات حالت

حرکت پرتابگر[۹] ماهواره، دوبعدی و در صفحه‌ی عمودی در نظر گرفته می‌شود. معادلات ۱ نشانگر حرکت پرتابگر در دستگاه مختصات اینرسی هستند:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v_x(t)\\
\dot{y}(t) &= v_y(t)\\
\dot{v}_x &= -\mu\frac{x(t)}{r^3(t)} + \frac{T_i}{m(t)}\cos\beta(t) + \frac{d_x(t)}{m(t)}\\
\dot{v}_y &= -\mu\frac{y(t)}{r^3(t)} + \frac{T_i}{m(t)}\sin\beta(t) + \frac{d_y(t)}{m(t)}\\
\dot{m} &= -c_i
\end{aligned} \tag{۱}$$

در این معادلات، $x(t)$ و $y(t)$ مؤلفه‌های بردار موقعیت، $v_x(t)$ و $v_y(t)$ مؤلفه‌های بردار سرعت و $d_x(t)$ و $d_y(t)$ مؤلفه‌های نیروی مقاومت

هوا در دستگاه اینرسی هستند و $r(t)$ فاصله‌ی پرتابگر از مرکز زمین در لحظه‌ی $t$ است. همچنین در این معادلات $m(t)$ جرم پرتاب‌گر، و $T_i$ و $c_i$ به‌ترتیب اندازه‌ی پیشرانه و نرخ اشتعال سوخت هستند. $T_i$و $c_i$ برای هر مرحله‌ی موشک ثابت فرض می‌شوند؛ بنابراین $\beta(t)$ زاویه‌ی پیشرانه با محور $x$ تنها متغیر کنترل است. شکل ۲ هندسه‌ی مسئله را نمایش می‌دهد.

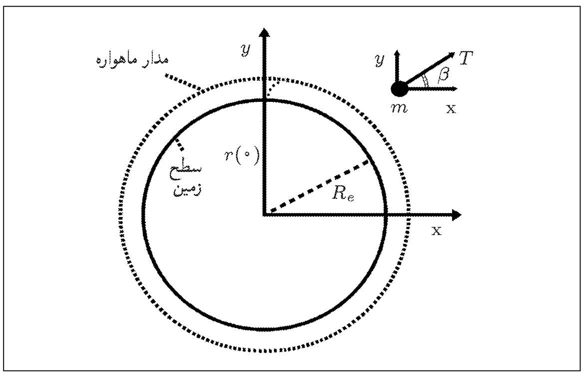
در شبیه‌سازی‌ها زمین به‌صورت کروی در نظر گرفته شده و تغییرات چگالی هوا بر اثر تغییرات ارتفاع به‌صورت نمایی با ثابت $h_0$ و ضریب $k_0$ در نظر گرفته‌می‌شود.[۱۳و۱۴] مقدار عددی این دو ضریب به‌ترتیب ۸۲۴۰m و ۰٫۵kg/m است.

با تعریف بردار حالت $x$ به‌صورت: $x = [x\ y\ v_x\ v_y\ m]^T$ معادلات حالت به‌صورت معادله‌ی ۲ ظاهر می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \underline{f}(\underline{x}, \beta) =$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\mu\frac{x_1}{r^3} + \frac{T_i}{x_5}\cos\beta - \frac{k_o x_3}{x_5}\sqrt{x_3^2+x_4^2}exp(-\frac{r-R_e}{h_o}) \\ -\mu\frac{x_2}{r^3} + \frac{T_i}{x_5}\sin\beta - \frac{k_o x_4}{x_5}\sqrt{x_3^2+x_4^2}exp(-\frac{r-R_e}{h_o}) \\ -c_i \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

به‌دلیل چند مرحله‌یی بودن پرتاب موشک، از طریق $x_5(t) = m(t)$ در معادلات حالت ناپیوستگی ایجاد می‌شود. محققان مسئله‌ی ناپیوستگی در معادلات حالت را مورد بررسی قرار داده و شرط بهینگی را برای آن به دست آورده‌اند.[۱۵] می‌توان نشان داد که اگر تابعک کارآیی فقط به مقادیر نهایی حالت‌ها بستگی داشته باشد، آن‌گاه به اعمال شرط مزبور نیازی نخواهد بود.




**شکل ۲.** نمایش هندسه‌ی مسئله.

### ۲.۲. معادلات هم‌حالت

تابعک کارایی که در این مسأله با $J$ نمایش داده می‌شود، مجذور سرعت ورود ماهواره به مدار است:

$$J = \| \underline{v}(t_f) \|^2 = x_3^2(t_f) + x_4^2(t_f) \qquad (۳)$$

که در آن $t_f$ لحظه‌ی ورود ماهواره به مدار بوده و از قبل معلوم و ثابت است و مقدار آن برابر است با مجموع زمان‌های احتراق سوخت مرحله‌ی اول و دوم پرتابگر. ملاحظه می‌شود که $J$ فقط به مقادیر حالت‌ها در زمان نهایی بستگی دارد. قیود برابری[۱۰] مسئله عبارت‌اند از عمود بودن بردار سرعت بر بردار مکان در زمان نهایی $t_f$ و نیز رسیدن به ارتفاع مشخص $h_f$ در زمان مشخص $t_f$:

$$\underline{r}(t_f).\underline{v}(t_f) = 0$$

$$h(t_f) - h_f = 0 \qquad (۴)$$

پس از تشکیل هامیلتونین و اعمال شرط بهینگی معادلات دیفرانسیل هم‌حالت‌ها به‌صورت معادلات ۵ به‌دست می‌آیند. در این معادله با عوض‌کردن اندیس ۱ و ۲ در رابطه‌ی اول معادله‌ی دیفرانسیل $p_2$ و با عوض کردن اندیس ۳ و ۴ در رابطه دوم معادله دیفرانسیل $p_4$ به دست می‌آید.

$$\dot{p}_1 = \mu\frac{p_3(x_2^2 - 2x_1^2) - 3p_4 x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$-\frac{k_0 x_1}{h_0 x_5}\left(\frac{x_3^2 + x_4^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}(p_3 x_3 + p_4 x_4)E$$
$$\dot{p}_3 = -p_1 + \frac{k_0}{x_5}\left[\frac{p_3(2x_3^2 + x_4^2) + p_4 x_3 x_4}{(x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}}\right]E$$
$$\dot{p}_5 = \frac{T_i}{x_5^2}(p_3\cos\beta + p_4\sin\beta)$$
$$-\frac{k_0}{x_5^2}(x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}(p_3 x_3 + p_4 x_4)E \qquad (۵)$$

در این روابط:

$$E = exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - R_e}{h_0}\right) \qquad (۶)$$

### ۳.۲. شرط بهینگی

با فرض عدم هرگونه محدودیت برای $\beta(t)$، شرط لازم برای بهینگی به‌صورت معادله‌ی ۷ است:[۱۲]

$$\tan\beta(t) = \frac{p_4(t)}{p_3(t)} \qquad (۷)$$

این رابطه با نوشتن هامیلتونین و مشتق‌گیری از آن نسبت به $\beta(t)$ و صفر قرار دادن آن به دست می‌آید.

### ۴.۲. مشخصات موشک و مدار ماهواره

پرتابگر استفاده شده یک موشک دو مرحله‌یی با سوخت مایع است. پس از تمام شدن سوخت مرحله‌ی اول، بدنه و موتور مرحله‌ی اول جدا شده و بلافاصله موتور مرحله‌ی دوم روشن می‌شود. نرخ احتراق سوخت در مراحل اول و دوم به ترتیب برابر ۱۰۲ و ۳۰ کیلوگرم بر ثانیه و سرعت خروج گازهای ناشی از احتراق برابر ۲۹۴۰ متر بر ثانیه است. بنابراین اندازه‌ی نیروی پیشرانه در مرحله‌ی اول ۲۹۹۸۰ نیوتن، و در مرحله‌ی دوم برابر ۸۸۲۰ نیوتن است. همچنین جرم پرتابگر در لحظه‌ی شلیک $27810kg$، و جرم آن بلافاصله پس از جدا شدن مرحله‌ی اول برابر $504kg$ است. سوخت مرحله‌ی اول در ۲۳۱ ثانیه، و سوخت مرحله‌ی دوم در ۱۴ ثانیه تمام می‌شود؛ بنابراین کل زمان پرتاب ۲۴۵ ثانیه است. پرتابگر از نقطه‌یی از سطح زمین، که در شبیه‌سازی‌ها محل برخورد محور $y$ با سطح زمین است (شکل ۲)، حرکت خود را آغاز کرده و ماهواره‌یی تحقیقاتی به وزن ۱۰ کیلوگرم را در یک مدار دایره‌یی LEO در ارتفاع ۱۶۱ کیلومتری سطح زمین قرار می‌دهد. ضخامت جو $100km$ در نظر گرفته می‌شود.

## ۳. شبیه‌سازی

### ۱.۳. قانون تانژانت خطی

پرتاب ابتدا برای زمین مسطح طبق قانون تانژانت خطی شبیه‌سازی می‌شود، زیرا نتایج آن به‌عنوان حدس‌های اولیه برای پرتاب واقعی طبق قانون بهینه، مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در این حالت اثر مقاومت هوا در معادلات حذف شده و جاذبه مقداری ثابت در راستای $y-$ است. در این صورت مسئله‌ی پرتاب بهینه حل تحلیلی دارد و هم‌حالت‌ها با نوشتن هامیلتونین و استخراج معادلات هم‌حالت و اعمال شرایط نهایی ۴ قابل محاسبه‌اند:

$$p_1(t) = 0$$
$$p_2(t) = -l_1$$
$$p_3(t) = l$$
$$p_4(t) = l_1(t - t_f) - l_2$$

$$p_5(t) = -\int_t^{t_f} \frac{T_i(\tau)}{x_5^2(\tau)}\left[p_4 \sin(\beta) + p_3 \cos(\beta)\right] d\tau \qquad (8)$$

همچنین $\beta(t)$ بهینه از شرط بهینگی به‌صورت معادله‌ی ۹ به دست می‌آید:

$$\tan(\beta(t)) = l_1(t - t_f) - l_2 \qquad (9)$$

در روابط فوق اعداد $l_1$ و $l_2$ با استفاده از روش نیوتن، و به‌گونه‌یی تعیین می‌شوند که شرط ارتفاع نهایی ۱۶۱ کیلومتر و سرعت نهایی به موازات افق ارضا شود. به‌این منظور، ابتدا یک حدس اولیه برای $l_1$ و $l_2$ در معادله‌ی ۹ قرار می‌دهیم. سپس با این $\beta(t)$ از معادلات حرکت زمین مسطح انتگرال‌گیری می‌کنیم و بعد با اعمال نمو کوچکی در $l_1$ و $l_2$ و انتگرال‌گیری مجدد از معادلات حرکت، مشتق‌های جزئی سمت راست معادله‌ی ۴ را نسبت به این دو پارامتر، و به‌صورت عددی محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از روش نیوتن مقادیر $l_1$ و $l_2$ تصحیح می‌شوند. در چند گام تکرار، مقادیر $l_1$ و $l_2$ و به‌مقادیر نهایی خود همگرا می‌شوند و سمت راست معادله‌ی ۴ صفر می‌شود. با جایگذاری این مقادیر در معادلات ۸، مقادیر $p_1(0)$ تا $p_5(0)$ به‌سادگی محاسبه می‌شوند:

$$p_1(0) = 0,\ p_2(0) = 0/0279,\ p_3(0) = 1$$
$$p_4(0) = 5/6941,\ p_5(0) = -32/1281 \qquad (10)$$

از مقادیر فوق به‌عنوان حدس اولیه برای مسئله‌ی مقدار مرزی در حالت واقعی استفاده خواهد شد.

چنان که پیش‌تر گفته شد، در عمل از قانون تانژانت خطی به‌عنوان قانون هدایت تقریباً بهینه برای پرتاب ماهواره به مدار استفاده می‌شود؛ لذا درگام بعد قانون هدایت تانژانت خطی برای پرتاب ماهواره در حالت واقعی شبیه‌سازی می‌شود. با استفاده از این روش، سرعت ماهواره در هنگام ورود به مدار برای هدایت پرتابگر فوق، برابر $7843\mathrm{m/s}$ است. این شبیه‌سازی صرفاً به‌منظور مقایسه‌ی نتایج با قسمت بعد انجام شده است.

### ۲.۳. بهینه‌سازی مسیر با اعمال تدریجی مقاومت هوا و استفاده از هم‌حالت‌های زمین مسطح برای حدس اولیه

در حالت واقعی به دلیل ثابت نبودن جاذبه و نیز وجود مقاومت هوا، قانون هدایت بهینه به‌صورت معادله‌ی ۹ نیست بلکه در هر زمان $t$، از رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آید. شرط اولیه‌ی حالت‌ها یا همان شرط مرزی در $t = 0$ به‌صورت معادله‌ی ۱۱ است:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0\mathrm{m} \\ 6400000\mathrm{m} \\ 0 m/\mathrm{s} \\ 0\mathrm{m/s} \\ 27810\mathrm{kg} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

با اعمال شرط نهایی معادله‌ی ۴ و شرایط بهینگی، شرط مرزی

معادله‌ی ۱۲ در $t=t_f$ به‌دست می‌آید.[۱۲]

$$\underline{\theta}(\underline{x}(t_f),\underline{p}(t_f)) = \begin{bmatrix} x_1^2+x_2^2-(6561000)^2 \\ x_1x_3+x_2x_4 \\ p_5 \\ p_4x_1-p_3x_2+2x_2x_3-2x_1x_4 \\ (p_4-2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)-x_2(p_2x_1-p_1x_2) \end{bmatrix} = 0 \qquad (12)$$

ملاحظه می‌شود که تعدادی از شرایط مرزی در $t=0$ و تعدادی در $t=t_f$ داده شده‌اند. برای حل این مسئله‌ی مقدار مرزی می‌توان مقادیر به دست آمده‌ی هم‌حالت‌ها در $t=0$ را که از حل مسئله‌ی زمین مسطح به‌دست آمده (رابطه ۱۰) به‌عنوان حدس اولیه به کار برد، و با داشتن $\underline{x}(0)$ و $\underline{p}(0)$ مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فوق را حل کرد. سپس از رابطه‌ی بازگشتی ۱۳ می‌توان $\underline{p}(0)$ را تصحیح کرد (روش نیوتون):

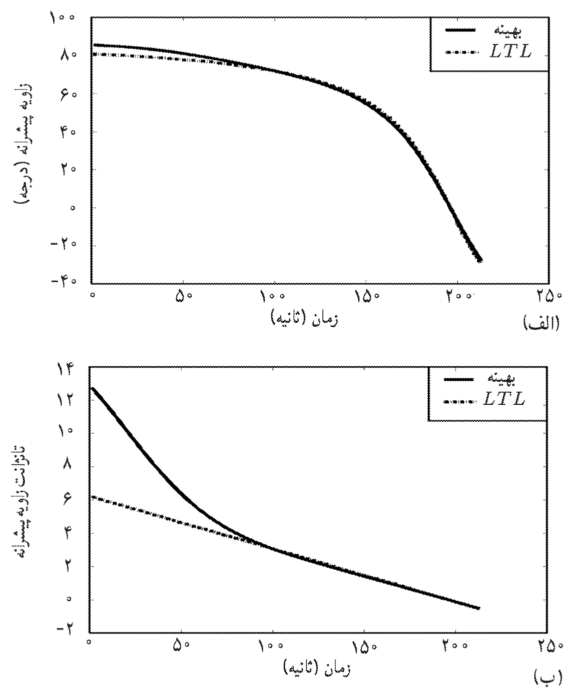
$$\underline{p}(0)^{k+1}=\underline{p}(0)^k-\left(\frac{\partial\underline{\theta}(\underline{x}(t_f),\underline{p}(t_f))}{\partial\underline{p}(0)^k}\right)^{-1}\underline{\theta}(\underline{x}(t_f),\underline{p}(t_f)) \qquad (13)$$

در رابطه‌ی فوق $\underline{\theta}$ از رابطه‌ی ۱۲ جایگزین می‌شود. در این رابطه مشتق جزیی $\underline{\theta}$ نسبت به $\underline{p}$ به روش عددی و با نمو دادن به تک‌تک درایه‌های آن و انتگرال‌گیری از معادلات حرکت به دست می‌آید.

متأسفانه الگوریتم فوق واگراست، ولی اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم و تنها کروی بودن زمین را در معادلات وارد کنیم، الگوریتم مزبور همگرا می‌شود. ابتکاری که به کار می‌بریم این است که اثر مقاومت هوا را نه دفعتاً، بلکه آن را به‌تدریج وارد می‌کنیم. برای این منظور با توجه به‌اینکه مقدار $\underline{p}(0)$ تابعی از $k_0$ است، یعنی:

$$\underline{p}(0)=\underline{p}(0,k_0) \qquad (14)$$

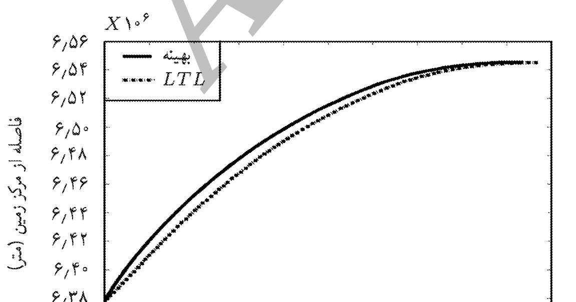
مقدار پارامتر $k_0$ مربوط به نیروی مقاومت هوا را ابتدا صفر در نظر می‌گیریم و الگوریتم فوق را اجرا می‌کنیم. با این روش $\underline{p}(0)$ جدیدی به دست می‌آید که آن را $\underline{p}(0,0)$ می‌نامیم. سپس پارامتر $k_0$ را برابر ۰٫۰۵ در نظر می‌گیریم و الگوریتم فوق را با حدس اولیه‌ی $\underline{p}(0,0)$ اجرا می‌کنیم. در این مرتبه مقدار جدیدی برای $\underline{p}(0)$ به دست می‌آید که آن را $\underline{p}(0,0/5)$ می‌نامیم. در مرحله‌ی بعد $k_0$ را برابر ۰٫۱ قرار داده و الگوریتم مزبور را با حدس اولیه‌ی $\underline{p}(0,0/5)$ اجرا می‌کنیم تا $\underline{p}(0,0/1)$ حاصل شود. به‌همین ترتیب $k_0$ را هر بار به اندازه‌ی ۰٫۰۵ افزایش داده و در هر مرحله $\underline{p}(0)$ به دست آمده در مرحله‌ی قبل را به‌عنوان حدس اولیه برای $\underline{p}(0)$ استفاده می‌کنیم تا نهایتاً به $\underline{p}(0,0/5)$




شکل ۳. الف: $\beta$ بر حسب زمان؛ ب: تانژانت $\beta$ برحسب زمان.

(یعنی حل مسئله‌ی واقعی) دست یابیم. به‌دلیل همگرایی سریع روش نیوتن، در هر مرحله با حداکثر ۸ بار رابطه‌ی بازگشتی جواب نهایی با دقت بالایی به دست می‌آید؛ لذا حداکثر ۸۸ بار اجرای الگوریتم برای پیداکردن حل بهینه کافی است که در مقایسه با روش‌های مستقیم بهینه‌سازی مسیر، خیلی کم است. با این روش سرعت ورود ماهواره به مدار ۷۸۷۸ متر بر ثانیه به‌دست آمد، در حالی که با استفاده از قانون تانژانت خطی این مقدار برابر ۷۸۴۳ متر بر ثانیه است.

شکل ۳ الف تغییرات زاویه‌ی پیشرانه را برحسب زمان برای حالات بهینه و قانون تانژانت خطی، و شکل ۳ ب تانژانت این زاویه را نمایش می‌دهند. مطابق انتظار، در صورت استفاده از قانون تانژانت خطی، تانژانت زاویه‌ی پیشرانه با زمان به‌طور خطی تغییر می‌کند. شکل ۴ نیز




شکل ۴. مسیر پرتاب.

مسیر پرتاب را برای دو حالت پرتاب بهینه و پرتاب با قانون تانژانت خطی نمایش می‌دهد.

## نتیجه‌گیری

در این نوشتار برای به دست آوردن مسیر بهینه‌ی پرتاب ماهواره به مدار LEO از روش غیرمستقیم استفاده شد. به‌دلیل حساسیت روش غیرمستقیم به حدس اولیه و نیز دشوار بودن تعبیر فیزیکی برای هم‌حالت‌ها، پیدا کردن حدس اولیه‌یی که منجر به همگرایی الگوریتم شود مشکل است. برای حل مسئله، ابتدا مسئله‌ی مقدار مرزی برای مسئله زمین مسطح بدون هوا که جواب تحلیلی دارد حل شد و سپس مقادیر به‌دست آمده‌ی هم‌حالت‌ها به‌عنوان حدس اولیه برای حالت زمین کروی بدون هوا استفاده شد. سپس به‌تدریج در طی چند مرحله اثر مقاومت هوا وارد معادلات شد تا نهایتاً حل عددی مسئله‌ی هدایت بهینه واقعی به دست آمد. شبیه‌سازی‌ها حاکی از آن است که روش ارائه شده علاوه بر مرتفع کردن مشکل دست‌یابی به حدس اولیه برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی مربوط به پرتاب بهینه‌ی ماهواره، از سرعت اجرای بالایی نیز برخوردار است. در واقع می‌توان از این روش برای پیدا کردن سریع مسیر بهینه‌ی پرتاب ماهواره با دقتی بهتر از قانون تانژانت خطی استفاده کرد.

### پانوشت

1. trajectory optimization
2. direct
3. indirect
4. costates
5. constraints
6. linear tangent law
7. perturbation method
8. the shooting method
9. launcher
10. equality constraints

### منابع


1. V. F. Krotov and A. B. Kurzhanski, "National achievements in control theory, The aerospace perspective", *Annual Reviews in control*, **29**, pp. 13-31 (2005).
2. M.S.K. Leung and A. J. Calise, "Hybrid approach to near-optimal launch vehicle guidance", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **17**(5), pp. 881-888 (1994).
3. B.N. Pamadi, "Simple guidanec method for single stage to low earth orbit", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **18**(6), pp. 1420-1426 (1995).
4. F. Madeira and A. Rios-Neto, "Guidance and control of a launch vehicle using a stochastic gradient projection method", *Automatica*, **36**, pp. 427-438 (2000).
5. M.H. Gra$\beta$lin, J. Telaar, and U.M. Schottle, "Ascent and reentry guidance concept based on NLP-methods", *Acta Astronautica*, **55**, pp. 461-471 (2004).
6. D.J. Estep, D.H. Hodges, and M. Warner, "The solution of a launch vehicle trajectory problem by an adaptive finite-element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, pp. 4677-4690 (2001).
7. S. Park, "Launch vehicle trajectories with a dynamic pressure constraints", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **35**(6), pp. 755-773 (1998).
8. J.T. Betts, "Survey of numerical methods for trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**(2), pp. 193-207 (1998).
9. S. Park and S. R. Vadali, "Touch points in optimal ascent trajectories with first-order state inequality constraints", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**(4), pp. 603-610 (1998).
10. P. F. Gath and A. J. Calise, "Optimization of launch vehicle ascent trajectories with path constraints and coast arcs", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **24**(2), pp. 296-304 (2001).
11. Battin, R. H., An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, AIAA Education series, New York (1987).
12. Bryson, A.E. and Ho, Y.C., *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Company (1969).
13. H. Seywald and E. M. Cliff, "Neighboring optimal control based feedback law for the advanced launch system", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **17**(6), pp. 1154-1162 (1994).
14. M. J. Bayer, "Analytic performance considerations for lifting ascent trajectories of winged launch vehicles", *Acta Astronautica*, **54**, pp. 713-721 (2004).
15. D. H. Hodges, R. R. Bless, A. J. Calise, and M. Leung, "Finite element method for optimal guidance of an advanced launch vehicle", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **15**(3), pp. 664-671 (1994).