مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
شهریور ۱۳۸۷، شماره‌ی چهل و سوم، ص. ۴۷-۵۲

طراحی اقتصادی نمونه‌گیری پذیرش متغیر با خطای بازرسی

علیرضا ارشدی‌خمسه (استادیار)
دانشکده‌ی فنی، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت معلم تهران
سیدمحمدتقی فاطمی‌قمی (استاد)
مجید امین‌نیری (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

در این نوشتار مدلی برای طراحی اقتصادی نمونه‌گیری پذیرش درحالتی که خطای بازرسی موجود است ارائه شده است. تابع هزینه‌ی کیفیت تاگوچی در حالتی که توزیع جامعه‌ی مورد بررسی نرمال باشد به‌عنوان مدلی برای هزینه‌های ناشی از کیفیت مورد استفاده قرار گرفته است. در این نوشتار مدل اقتصادی بهینه‌یی در راستای طراحی نمونه‌گیری‌های پذیرش در حالتی که خطای بازرسی ثابت یا متغیر باشد ارائه شده است و در ادامه درخصوص شرایط جواب بحث شده و مدل هزینه‌ی تاگوچی (نگرش جدید به هزینه‌های کیفیت) با مدل پله‌یی آن (نگرش سنتی) مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: نمونه‌گیری پذیرش، طراحی اقتصادی، بهینه‌سازی، تابع تاگوچی، خطای بازرسی.

ar_arshadi@yahoo.com
fatemi@aut.ac.ir
aminnayeri@ikido.org

۱. مقدمه

اگرچه در سال‌های اخیر تأکید و اهمیت فوق‌العاده‌یی در زمینه‌ی کنترل فرایندها برای دست‌یابی به تولید بهتر صورت پذیرفته، نمونه‌گیری پذیرش همچنان به‌عنوان بخش مهمی از کنترل کیفیت باقی مانده است. این امر درخصوص تولیدکنندگانی که در مسافت‌های دور جغرافیایی دارای پیمان‌کارانی هستند از اهمیت بیشتری برخوردار است چراکه وقتی شرکت اصلی از کیفیت تولید محصولات توسط شرکت‌های پیمان‌کار خود اطمینان کامل نداشته باشد از روش‌های نمونه‌گیری برای پذیرش محصولات خود استفاده خواهد کرد.

بیشتر فعالیت‌های انجام‌شده در زمینه‌ی نمونه‌گیری پذیرش در حالت وصفی بوده است. ودرایل و چیو[۱] نیز مشخصاً به این مسئله اشاره کرده‌اند. مقالات متعددی در زمینه نمونه‌گیری پذیرش نوشته شده است که مراجع بیشتر آنها در مقاله‌یی که هالد نوشته، ذکر شده است.[۲] اگرچه اولین بار لیبرمن و رسنیکوف[۳] نظریه‌ی آماری نمونه‌گیری پذیرش را مطرح کردند، طراحی اقتصادی نمونه‌گیری پذیرش بنت و کیس و اشمیت[۴] ارائه شد. آنان همچنین در سال ۱۹۸۰ مدل دیگری برای نمونه‌گیری پذیرش یک متغیری ارائه کردند[۵] که در آن مدل پله‌یی به‌منظور هزینه‌های کیفیت بیان شده است. در مدل پله‌یی تا زمانی که متغیر مورد بررسی در محدوده‌ی پذیرش مورد نظر باشد، هزینه‌ی کیفیت را برابر صفر منظور می‌کنند و در زمانی که متغیر مورد بررسی خارج از محدوده‌ی پذیرش قرارگیرد هزینه‌یی ثابت به آن تعلق خواهد گرفت.

با مطرح شدن نگرش تاگوچی[۶]، انقلابی درخصوص نگرش به هزینه‌های کیفیت پدید آمد و امروزه کاملاً پذیرفته شده است که در این نگرش باید برای متغیر مورد بررسی هدفی در نظرگرفت، و درصورت بروز هر انحرافی از این هدف، هزینه‌یی معادل kx^2 (مجذور انحراف در مقداری ثابت) به آن تعلق خواهد گرفت. این نگرش جدید سبب بررسی مجدد نمونه‌گیری پذیرش متغیر برای حالت تک‌متغیره[۷و۸] و نیز بررسی حالت چندمؤلفه‌یی[۹و۱۰] شد.

علت گرایش اصلی به بحث نمونه‌گیری پذیرش هزینه‌بر بودن روش‌های بازرسی و نیز در مواقعی غیرممکن و مخرب‌بودن آنها است و به‌همین جهت نمونه‌گیری پذیرش همچنان به‌عنوان عاملی راه‌گشا برای شرکت‌ها و کارخانجات محسوب می‌شود.

در این نوشتار بر پایه‌ی مدل ارائه‌شده توسط محققین، یک مدل اقتصادی بهینه برای نمونه‌گیری پذیرش متغیر در حالتی که خطای بازرسی در آن ثابت و متغیر باشد ارائه می‌شود.[۱۱] از آنجا که در نمونه‌گیری پذیرش متغیر معلوم بودن پارامترهای جامعه و توزیع آن جامعه ضروری است، درخصوص بررسی خطای بازرسی در بحث نمونه‌گیری پذیرش متغیر کم‌تر کاری صورت پذیرفته است و ادبیات موجود در این زمینه نارسا است؛ ولی در زمینه‌ی نمونه‌گیری پذیرش وصفی به‌دلیل خصوصیات این روش و عدم نیاز به توزیع جامعه‌ی مورد بررسی، تحقیقات بیشتری صورت گرفته است که از این میان می‌توان به مطالعات انجام شده در زمینه‌ی طراحی اقتصادی نمونه‌گیری پذیرش وصفی با خطای بازرسی[۱۲و۱۳] یا در زمینه‌ی حداقل هزینه در بازرسی ۱۰۰٪ با وجود خطای بازرسی[۱۴] اشاره کرد.

در نوشتار حاضر، فرضیات و پارامترها و متغیرهای مدل در بخش دوم معرفی می‌شوند. در بخش سوم مدل هزینه‌یی با خطای ثابت بازرسی ارائه می‌شود و در بخش چهارم مدل پیشنهادی با مدل هزینه‌ی پله‌یی در قالب مثال‌هایی مقایسه می‌شود. در بخش پنجم نیز خطای بازرسی در حالت متغیر (صعودی و نزولی) مورد

بررسی قرار می‌گیرد. (در بخش‌های ۳ تا ۵ مثال‌هایی در ارتباط با کاربرد مدل ارائه شده است.) نتیجه‌گیری کلی در بخش ششم ارائه شده است.

۲. فرضیات،پارامترها و متغیرها

y= مقدار اندازه‌گیری شده

μ_0= انحراف میانگین مشخصه‌ی کیفی اندازه‌گیری شده در انباشته از مقدار هدف تعیین شده

(μ_0)= مقدار هدف برای انباشته

تابع توزیع احتمال x در حالی که انحراف میانگین انباشته مورد بازرسی از مقدار هدف، μ_0، برابر μ = $f(x|\mu)$ باشد

تابع توزیع احتمال $\overline{x}$ در حالتی که انحراف میانگین انباشته مورد بازرسی از مقدار هدف μ_0 برابر μ = $g(\overline{x}|\mu)$ باشد

$\mu = h(\mu)$ تابع توزیع احتمال

σ^2 = واریانس مقدار اندازه‌گیری شده

N = اندازه انباشته

n = اندازه نمونه

$x = y - \mu_0$: انحراف از هدف در هر بازرسی

L = حد پایین پذیرش

U = حد بالای پذیرش

ci = هزینه‌ی نمونه‌برداری و بازرسی واحد کالا

cr = هزینه‌ی رد واحد کالا

k = مقدار ثابت تابع هزینه‌ی تاگوچی، $q(x) = kx^2$

α = خطای نوع اول

β = خطای نوع دوم

فرضیات

۱. واریانس x، σ^2 ثابت و معلوم است.

۲. واریانس μ، σ_μ^2، ثابت و معلوم و برابر $\sigma_\mu^2 = \sigma^2/D, D > 0$ است.

μ مقدار معینی نیست چراکه ما اطلاع دقیقی از وضعیت انباشته نداریم تا به مقدار معین μ دست پیدا کنیم و مقدار آن درصورتی معین خواهد شد که تمامی محموله اندازه‌گیری شود.

۳. اندازه‌گیری‌ها دارای خطا هستند.

۴. توزیع x، $f(x|\mu)$ نرمال و با میانگین μ است.

۵. توزیع μ، $h(\mu)$ نرمال با میانگین صفر است.

۶. $L + U = 2\mu, L = \mu - z, U = \mu + z$

۷. آزمایشات مخرب‌اند.

۸. $\alpha + \beta \le 1$

۳. مدل هزینه‌یی

هنگامی که انباشته‌یی دریافت می‌شود، نمونه‌یی nتایی از آن به‌صورت تصادفی اخذ می‌شود و پس از اندازه‌گیری y، $(x = y - \mu_0)$ آنگاه $\overline{x}$ اندازه‌گیری می‌شود.

درصورتی که $\overline{x}$ بین z و $-z$ قرار گیرد نمونه و انباشته پذیرفته خواهد شد و در غیر این‌صورت انباشته با هزینه‌یی معادل cr رد خواهد شد. در مدل مورد بررسی بازرسی مجدد محموله‌های ردشده در نظرگرفته نمی‌شود چراکه در بعضی از مواقع این عمل امکان‌پذیر نیست. براساس فرضیات و متغیرها و پارامترهای معرفی‌شده در بالا انواع هزینه‌های مورد بررسی عبارت‌اند از:

۱. هزینه‌ی بازرسی (CI)

۲. هزینه‌ی پذیرش (CA)

۳. هزینه‌ی رد (CR)

در این مدل سه هزینه محاسبه می‌شود، و در نهایت روشی که دارای کم‌ترین هزینه است به‌عنوان روش نهایی مورد اجرا قرار خواهد گرفت:

الف) هزینه‌ی مورد انتظار برای بازرسی (ETCI)

ب) هزینه‌ی مورد انتظار برای پذیرش بدون بازرسی (ETCA)

ج) هزینه‌ی مورد انتظار برای رد محموله (ETCR)

در حالتی که خطای بازرسی وجود ندارد احتمال پذیرش محموله‌یی با میانگین μ برابر است با:

$$Pa(\mu) = \int_{-z}^{z} g(\overline{x}|\mu)d\overline{x}$$

ولی در حالتی که خطای بازرسی وجود داشته باشد این احتمال برابر است با:

$$Pa(\mu) = P(\text{accept the lot / lot is ok})^* P(\text{lot is ok}) + P(\text{accept the lot / lot is not ok})^* P(\text{lot is not ok})$$

بنابراین احتمال پذیرش محموله در حالتی که خطای بازرسی وجود دارد عبارت است از:

$$Pae(\mu) = (1-a)^* \int_{-z}^{z} g(\overline{x}|\mu)d\overline{x} + \beta^*\left(1 - \int_{-z}^{z} g(\overline{x}|\mu)d\overline{x}\right) \quad (1)$$

پس برای احتمال پذیرش با خطای محموله داریم:

$$Pae = \int Pae(\mu)h(\mu)d\mu = \int_{\mu}\int_{\overline{x}} (1 - \alpha - \beta) g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu + \int_{\mu} \beta h(\mu)d\mu \quad (2)$$

وقتی خطای بازرسی از قبل معین شده باشد، برای احتمال پذیرش محموله در حالتی که خطای بازرسی موجود باشد داریم:

$$Pae = (1 - \alpha - \beta) \int_{\mu}\int_{\overline{x}} g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu + \beta \quad (3)$$

با محاسبه‌ی هزینه‌ی پذیرش محموله (CA)، هزینه‌ی بازرسی (CI) و هزینه‌ی رد محموله (CR) به شرح زیر خواهیم داشت:

$$CA = \int_{\mu} CA(\mu)h(\mu)du = (N - n) \int (cost\ of\ acceptance\ one\ unit)^* Pae(\mu)h(\mu)d\mu$$

در این مدل هزینه‌ی پذیرش واحد محصول برابر با kx^2 (براساس مدل هزینه‌ی تاگوچی) است.

$$\int q(x)f(x|\mu)dx = \int kx^2 f(x|\mu)dx = k\int x^2 f(x|\mu)dx = k[(E(x)^2+var(x)] = k(\mu^2+\sigma^2) \tag{۴}$$

هزینه‌ی پذیرش برابر است با:

$$CA = (N-n)k\int_\mu(\mu^2+\sigma^2)\Big\{(1-\alpha-\beta)\int g(\overline{x}|\mu)d\overline{x}+\beta\Big\} h(\mu)du = (N-n)k(1-\alpha-\beta)\int_\mu(\mu^2+\sigma^2)\int_{\overline{x}} g(\overline{x}|\mu)d\overline{x}h(\mu)d\mu + (N-n)k\beta \int_\mu(\mu^2+\sigma^2)h(\mu)d\mu = (N-n)k(1-\alpha-\beta)\int_\mu\int_{\overline{x}}(u^2+\sigma^2)g(\overline{x}|\mu)h(\mu)\overline{d\overline{x}d\mu} + (N-n)k\beta(\sigma^2+\sigma^2/D) \tag{۵}$$

هزینه‌ی رد برابر است با:

$$CR = (N-n)cr(1-Pae) = (N-n)cr-(N-n)cr(1-\alpha-\beta)\int_u\int_{\overline{x}} g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu - (N-n)cr\beta \tag{۶}$$

و در نهایت برای هزینه‌ی بازرسی داریم:

$$CI = cs + nci \tag{۷}$$

و هزینه‌ی مورد انتظار در حالتی که بازرسی محموله انجام پذیرد برابر است با:

$$ETCI(n,z) = CI+CR+CA = nci+cs+(N-n)cr-(N-n)cr(1-\alpha-\beta)\int_u\int_{\overline{x}} g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu-(N-n)cr\beta+(N-n)k(1-\alpha-\beta)\int_u\int_{\overline{x}}\mu^2 g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu + (N-n)k(1-\alpha-\beta)\sigma^2\int_u\int_{\overline{x}} g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu + (N-n)k\beta(\sigma^2+\sigma^2/D) \tag{۸}$$

ETCA (هزینه مورد انتظار درحالتی که محموله مورد پذیرش قرارگیرد) را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$N\int_\mu\int_x q(x)f(x|\mu)dxh(\mu)d\mu = Nk\int_\mu\int_x x^2 f(x|\mu)h(\mu)dxd\mu = Nk\int_\mu(\mu^2+\sigma^2)h(\mu)d\mu = Nk\sigma^2(1+1/D) \tag{۹}$$

همچنین هزینه‌ی مورد انتظار در حالتی که محموله رد شود برابر است با:

$$ETCR = Ncr \tag{۱۰}$$

برای پیداکردن نقطه‌ی بهینه‌ی هزینه (کم‌ترین هزینه) می‌بایستی کم‌ترین مقدار در بین سه هزینه‌ی ETCA، ETCI، و ETCR به‌عنوان نقطه‌ی بهینه انتخاب شود.

بنابراین ابتدا در رابطه ETCI مشتق اول را نسبت به z برابر صفر قرار می‌دهیم؛ در این‌صورت داریم:

$$\partial ETCI/\partial z = -(N-n)cr(1-\alpha-\beta)\int_\mu[g(z|\mu)+g(-z|\mu)]h(\mu)d\mu + (N-n)k(1-\alpha-\beta)\int_\mu \mu^2[g(z|\mu)+g(-z|\mu)]h(\mu)d\mu + (N-n)k(1-\alpha-\beta)\sigma^2\int_\mu[g(z|\mu)+g(-z|\mu)]h(\mu)d\mu = 0 \tag{۱۱}$$

پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$k\int_\mu \mu^2[g(z|\mu)+g(-z|u)]h(\mu)d\mu + (k\sigma^2-cr)\int_\mu[g(z|\mu)+g(-z|u)]h(\mu)d\mu = 0 \tag{۱۲}$$

اما از سوی دیگر:[11]

$$\int_\mu[g(z|\mu)+g(-z|u)]h(\mu)d\mu = 2\psi(z), z\sim N(0,\sigma^2(n+D)/nD) \tag{۱۳}$$

$$\int_\mu \mu^2[g(z|\mu)+g(-z|u)]h(\mu)d\mu = 2\psi(z)\{n^2z^2/(n+D)^2 + \sigma^2/(n+D)\} \tag{۱۴}$$

با جایگذاری روابط ۱۳ و ۱۴ در رابطه‌ی ۱۲ خواهیم داشت:

$$k^*2(\psi(z))\{n^2z^2/(n+D)^2+\sigma^2/(n+D)\}+(k\sigma^2-cr)2\psi(z)=0 \tag{۱۵}$$

چنان که پیداست معادله‌ی ۱۵ درصورتی جواب بهینه خواهد داشت که $cr > k\sigma^2$ باشد. بنابراین رابطه‌ی ۱۶ بین z و n برقرار خواهد بود:

$$z(n) = [(cr(n+D)-(n+D+1)k\sigma^2)(n+D)/kn^2]^{0.5} \tag{۱۶}$$

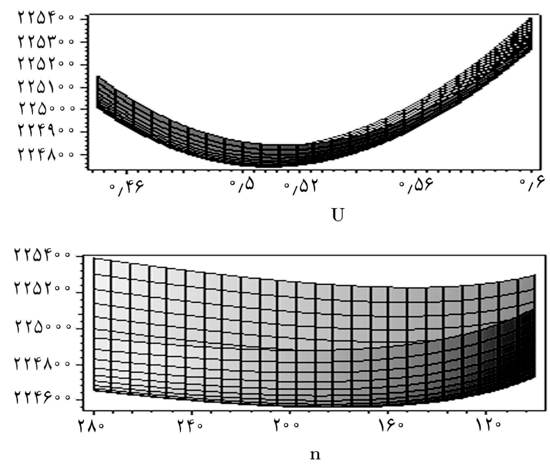
مشتق دوم معادله‌ی هزینه برابر است با:

$$\partial^2 ETCI(n,z)/\partial^2 z = k2\psi'(z)(n^2z^2/(n+D)^2+\sigma^2/(n+D)) + 4k\psi(z)^*2n^2z^2/(n+D)^2 + 2\psi'(z)(k\sigma^2-cr) \tag{۱۷}$$

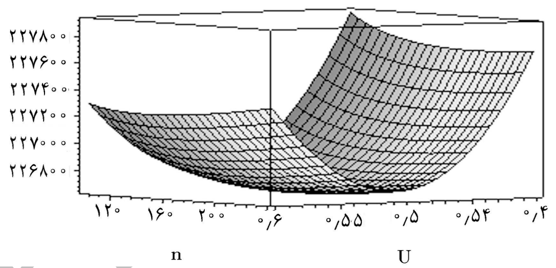
این عبارت همواره مثبت است و بنابراین مسئله‌ی اصلی درصورتی که شرط جواب آن برقرار باشد، همواره جواب بهینه خواهد داشت. در اینجا لازم است که به دو نکته‌ی اساسی اشاره کنیم:

۱. در حالتی که خطای بازرسی ثابت باشد، رابطه‌ی بین z و n همان رابطه‌ی موجود در حالت بدون خطا خواهد بود؛ اما چنان که از رابطه‌ی ۱۶ نیز برمی‌آید این رابطه صرفاً بیان‌گر ارتباط بین z و n است و مقدار نهایی آنها را معین نمی‌کند. بدین‌جهت مقدار بهینه‌ی z و n در این حالت همچنان که در مثال‌های آینده نیز بیان می‌شود برابر مقدار بهینه در حالت بدون خطا نیست.

۲. احتمال پذیرش محموله درحالت وجود خطا با حالت بدون خطا متفاوت است. در اینجا به مثالی درخصوص مدل خطای ثابت می‌پردازیم:



شکل ۱. رفتار هزینه در برابر تغییرات n و z.



شکل ۲. رفتار هزینه در برابر تغییرات n در حالتی که $\alpha = \beta = ۰٫۰۵$.

مثال ۱:

فرض کنید پارامترهای مدل نظیر مسئله‌ی ارائه‌شده توسط تاگارس[11] باشد:

$$\sigma = ۱, D = ۵, N = ۱۰۰,۰۰۰, cs = ۱۰, ci = ۵, cr = ۲٫۵, k = ۲$$

الف) حالتی که در آن خطای بازرسی وجود ندارد:

در این مدل جواب بهینه‌ی به دست آمده توسط تاگارس برابر است با:

$$n^* = ۱۸۱, z^* = ۰/۵۰۸, Pa = ۰/۷۳۸, ETCI = ۲۲۴,۵۵۹,$$
$$ETCA = ۲۴۰,۰۰۰, ERCR = ۲۵۰,۰۰۰$$

این مسئله توسط نرم‌افزار maple 9.5 مدل‌سازی شده و نتایج آن در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

ب) حالتی که در آن خطای بازرسی وجود دارد:

اگر در این مرحله مقدار خطای نوع اول را برابر ۵درصد و خطای نوع دوم را برابر ۵درصد در نظر بگیریم، پس از مدل‌سازی مسئله توسط نرم‌افزار Maple9.5 نتایج زیر حاصل می‌شود (شکل ۲):

$$n^* = ۱۷۴, z^* = ۰/۵۰۸, ETCI = ۲۲۶,۶۴۹, Pae = ۰/۷۱۳۵$$

در جدول ۱ حل نهایی مسئله به‌ازای مقادیر مختلف خطا ارائه شده است.

۴. مدل هزینه‌ی پله‌یی در برابر مدل هزینه‌ی تاگوچی

در مدل هزینه‌ی تاگوچی هزینه‌ی انحراف از هدف به‌ازای هر مقدار انحراف برابر با حاصل‌ضرب مقداری مثبت در مجذور انحراف از هدف خواهد بود، درصورتی که

جدول ۱. رفتار هزینه در برابر تغییرات خطای نوع اول و دوم.

pae (٪)	ETCI	z^*	n^*	B (٪)	a (٪)
۷۱٫۳۵	۲۲۶,۶۴۹	۰٫۵۰۸	۱۷۴	۵	۵
۷۶٫۵۹	۲۲۶,۴۱۸	۰٫۵۲	۱۷۰	۱۰	۱
۶۶٫۷	۲۲۷,۳۰۸	۰٫۵۱	۱۷۰	۱	۱۰
۷۳٫۸۶	۲۲۴,۹۷۸	۰٫۵۱	۱۷۰	۱	۱
۷۲	۲۲۷,۴۴۹	۰٫۵	۱۷۰	۱	۵

در مدل هزینه‌ی پله‌یی این هزینه در حالتی که متغیر مورد بررسی در محدوده‌ی مجاز پذیرش باشد، برابر صفر منظور خواهد شد. هزینه‌ی پذیرش در حالت پله‌یی عبارت است از:

$$CA = (N-n)ca$$
$$(cost\ of\ acceptance)(probability\ of\ acceptance)$$
$$ca\ x > USL, x < LSL$$
$$Cost\, of\, acceptance = q(x) = Elsewhere$$

بنابر این خواهیم داشت:

$$Cost\, of\, acceptance|\mu = \int_{-\infty}^{LSL} ca \times f(x|\mu)dx + \int_{USL}^{+\infty} ca \times f(x|\mu)dx Cost\, of\, acceptance = (N-n)ca \times \int_{\mu} (۱ - \int_{LSL}^{USL} f(x|\mu)dx)\{(۱-\alpha-\beta)\int g(\overline{x}|\mu)d\overline{x} + \beta\} h(\mu)d\mu$$
$$CA = (N-n)^*$$

$$ca^*\{(۱-\alpha-\beta) \times \iint g(\overline{x}|\mu)h(\mu)d\overline{x}d\mu + \beta^* \int h(\mu)d\mu - (۱-\alpha-\beta)\iiint g(\overline{x}|\mu)f(x|\mu)h(\mu) dx d\overline{x} d\mu - \beta \iint f(x|\mu)h(\mu)dxd\mu \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۸ در رابطه‌ی ۸، و با توجه به رابطه‌ی ارائه‌شده توسط اشمیت و سایرین:[4]

$$Q(k,n) = (((n+D)/(n+D+۱))\hat{}۰٫۵) \times (۱/(\sigma\sqrt{۲\pi})^*$$

$$(\int_{LSL}^{USL} e^{-(n+D)(x-(nk+D\mu_۰)/(n+D))\hat{}۲/(۲(n+D+۱)\sigma^۲)}) \qquad (۱۹)$$

برای بررسی مدل ارائه‌شده هزینه‌ی تاگوچی و مدل پله‌یی در نمونه‌گیری پذیرش متغیر، مسئله‌یی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در آن خطای بازرسی مورد استفاده قرار گرفته است[11]؛ اطلاعات ابتدایی مدل به شرح زیر است:

مثال ۲:

$$LSL = -۲ \qquad N = ۵۰۰۰۰$$
$$USL = ۲ \qquad cs = ۱$$
$$\sigma = ۰/۷۵ \qquad ci = ۰۲۵$$
$$D = ۷ \qquad ca = ۱۱$$
$$\alpha = \beta = ۰/۱ \qquad cr = ۰/۲$$

برای حل مسئله به‌روش هزینه‌ی تاگوچی، به مقدار ثابت هزینه‌ی کیفیت (k) نیاز است. به‌همین منظور، از رابطه‌ی

$$ca = q(\tilde{x}) = k\tilde{x}^۲, \tilde{x} = E\{x|x \geq USL, \mu = ۰\},$$
$$\tilde{x} = [۱ - \phi(USL/\sigma)]^{-۱}[(\sigma/\sqrt{۲\pi})exp(-USL^۲/۲\sigma^۲)]$$

استفاده می‌کنیم که در آن $\phi(USL/\sigma)$ تابع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است.[۱۵] براساس موارد یادشده:

$$\tilde{x} = ۲/۲۵, k = ca/(\tilde{x}\hat{\ }۲) = ۲/۱۷۳$$

با بررسی شرط جواب مدل، در حالت هزینه‌ی کیفیت تاگوچی، $cr < k\sigma^۲$ است و لذا مدل در حالت فعلی جواب بهینه‌ی کمینه نخواهد داشت و بهترین تصمیم در این حالت رد محموله با هزینه‌یی برابر با N^*cr خواهد بود.

با توجه به روابط ۱۸ و ۱۹ و جایگذاری در رابطه‌ی هزینه ۸، هزینه‌ی نهایی مدل در حالتی که مسئله با تابع هزینه‌ی پله‌یی بررسی شود عبارت است از:

$$n^* = ۲۵۰, z^* = ۰/۳۴۵, ETCI = ۶۸۵۱, Pae = \%۷۱/۵۸$$
$$\alpha = \beta = \%۱۰$$

و برای این مقادیر بهینه n, Z مقدار هزینه در حالت تابع هزینه‌ی تاگوچی برابر است با:

$$ETCI = ۴۹۴۹۸$$

همان‌طورکه پیش‌تر اشاره شد، این هزینه بهینه نیست.

در حل مسئله‌ی فوق باید به این نکته توجه داشت که ما نمی‌توانیم هزینه‌ی روش تاگوچی $(N^*cr = ۱۰۰۰۰)$ را با هزینه‌ی روش پله‌یی مقایسه کنیم زیرا چنان که بیان شد، در بیان هریک از این روش‌ها دیدگاه هزینه‌یی متفاوتی وجود دارد.

جدول ۲. هزینه‌های روش پله‌یی (Stepwise).

$\alpha(\%)$	$\beta(\%)$	هزینه‌ی پله‌یی			
		n^*	z^*	ETCI	$Pae(\%)$
۱۰	۱۰	۲۵۰	۰/۳۴۵	۶۸۵۱	۷۱/۵۸
۵	۵	۲۴۰	۰/۳۷	۶۵۶۸	۷۷
۱	۱	۲۳۵	۰/۳۵	۶۵۲۳	۷۹
۱۰	۱	۲۲۰	۰/۴۱	۶۶۳۹	۷۶/۲۵

جدول ۲ بیان‌گر مقادیر مختلف ارائه‌شده برای حالت‌های مختلف مسئله‌ی نمونه‌ی فوق با در نظرگرفتن مقادیر متفاوت خطا است که برای دست‌یابی به هزینه‌های نهایی، مدل‌سازی با نرم‌افزار Maple 9.5 صورت گرفته است.

۵. خطای متغیر

در این مرحله خطا به‌صورت متغیر در نظرگرفته می‌شود، به‌گونه‌یی که در مرحله‌ی اول خطا با افزایش اندازه‌ی n افزایش خواهد یافت (صعودی) و در مرحله‌ی بعد خطا با افزایش اندازه‌ی نمونه کاهش خواهد یافت. اهمیت این بخش در تعیین مقدار اقتصادی خطای بازرسی برمبنای مقادیر پارامترهای مسئله و جواب بهینه‌ی آن است.

در این مرحله از توابع خطای اشاره شده توسط شین[۱۲] استفاده شده و در نهایت جواب بهینه‌ی مسئله در حالت متغیر و با توجه به مدل طراحی‌شده برمبنای تابع هزینه‌ی کیفیت تاگوچی ارائه شده است.

۱.۵. خطای صعودی

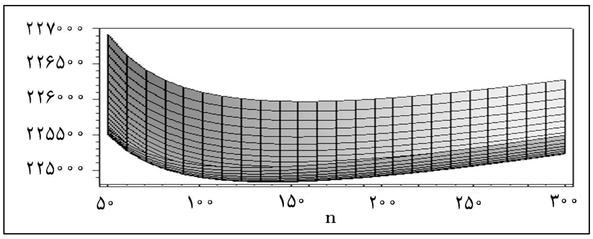
در این حالت مقدار خطا با بزرگ‌شدن اندازه‌ی نمونه افزایش خواهد یافت. در این مرحله تابع خطا را به‌صورت نمایی صعودی مطرح می‌کنیم:

$$e(n) = e(-n/۱۰۰۰) - ۱, \alpha = e(n)/۵, \beta = ۴e(n)/۵ \qquad (۲۰)$$

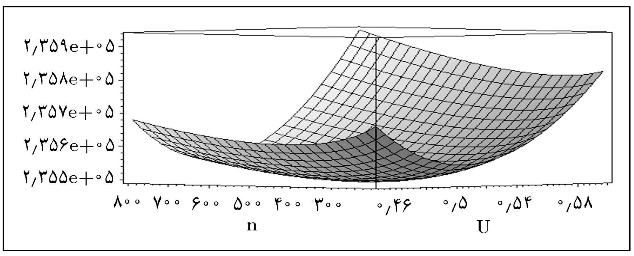
در این مسئله مقدار خطای نوع اول و دوم را به‌عنوان جزیی از مقدارکل خطا در نظرگرفته‌ایم. با جایگذاری رابطه‌ی ۲۰ در رابطه‌ی ۳، و انجام مراحل ساده‌سازی، و سپس با مدل‌سازی مدل مربوطه توسط نرم‌افزار Maple 9.5 با توجه به داده‌های در نظرگرفته شده در مثال ۱، حل مدل به‌شرح زیر خواهد بود (شکل ۳):

$$n^* = ۱۴۰, z^* = ۰/۵۱۱۴, ETCI = ۲۲۴۸۴۱, \alpha = ۰/۲۸(\%),$$
$$\beta = ۱/۱۲(\%) Pae = ۷۳/۹(\%)$$

باید توجه داشت که تمامی روابط ۳ تا ۱۷ در این مدل معتبر است.



شکل ۳. رفتار هزینه در تغییرات اندازه نمونه (خطای صعودی).



شکل ۴. رفتار هزینه در تغییرات اندازه نمونه (خطای نزولی).

۲.۵. خطای نزولی

در این حالت مقدار خطا با بزرگ‌شدن اندازه‌ی نمونه کاهش خواهد یافت که در این مرحله تابع خطا را به‌صورت نمایی نزولی مطرح می‌کنیم:

$$e(n)=e\left(-n/7000\right)-0.36,\alpha=e(n)/5,\beta=4e(n)/5 \qquad (21)$$

در این حالت با جایگذاری رابطه‌ی ۲۱ در رابطه‌ی ۳، و با ادامه‌ی مدل با شرط معتبر بودن روابط ۳ تا ۱۷ و پس از حل مسئله توسط نرم‌افزار Maple برای اطلاعات مثال قبل خواهیم داشت (شکل ۴):

$$n^*=400, z^*=0.5037, ETCI=235497, \alpha=11.6\left(\%\right),$$
$$\beta=46\left(\%\right), Pae=77.4\left(\%\right)$$

۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار طراحی اقتصادی نمونه‌گیری پذیرش متغیر در حالتی که خطای بازرسی وجود داشته و ثابت یا متغیر (صعودی / نزولی) باشد، انجام گرفته است. در طراحی مدل اصلی از مدل هزینه‌یی تاگوچی استفاده شده که علاوه بر مطالعات انجام‌شده‌ی قبلی، خطای بازرسی نیز در آن لحاظ شده است. در این مدل تصمیم بهینه از طریق مقایسه‌ی هزینه‌های پذیرش بدون بازرسی و بازرسی کامل و رد محموله صورت می‌پذیرد. نکته‌ی مهم در این بهینه‌سازی تعیین مقدار اقتصادی خطای بازرسی با توجه به پارامترهای مدل در حالت خطای بازرسی متغیر است. در ادامه طراحی اقتصادی نمونه‌گیری پذیرش متغیر (پله‌یی) در حالی که خطای بازرسی موجود باشد انجام گرفته است. در نهایت تحلیل حساسیت روی پارامترهای مدل برای بررسی شرایط جواب بهینه صورت پذیرفته است.

منابع

1. Wetherill, G.B., and Chiu, W.K. "A review of acceptance sampling schemes with emphasis on the economic aspect", *International Statistical Review,* **43**, pp. 191-210 (1975).
2. Hald, A. "Statistical theory of sampling inspection by attributes", Academic Press, New York, U.S.A, (1981).
3. Lieberman, G,I. and Resnikoff, G.J. "Sampling plans for inspection by variables", *Journal of the American Statistical Associative,* **50,** pp. 457-516 (1955).
4. Bennett, G.K.; Schmidt, J.W.; Case, K.E. "The choice of variables sampling plans using cost effective criteria", *AIIE Transactions,* **6,** pp. 178-184 (1974).
5. Schmidt, J.W.; Bennet, G.K.; Case, K.E. "Three action cost model for acceptance sampling by variables", *Journal of Quality Technology,* **16**(3), pp. 10-18 (1980).
6. Taguchi, G. "Quality evaluation for quality assurance, american supplier institute", Romulus, Michigan, U.S.A, (1984).
7. Tang, K. and Schnider, H. "The effects of inspection errors on a complete inspection plan", *IIE Transactions,* pp. 421-428 (1987).
8. Tang, K. "Economic design of product specification for a complete inspection plan", *International Journal of Production Research,* **26,** pp. 203-217 (1988).
9. Tang, K. and Tang, J. "Design of product specifications for multi-characteristics inspection", *Management Science,* **35,** pp. 743-756 (1989).
10. Hiu, Y.V. "Economic design of a complete inspection plan for bivariate products", *International Journal of Production Research,* **28,** pp. 259-265 (1990).
11. Tagaras, George. "Economic acceptance sampling by variable with quadratic quality costs", *IIE Transactions,* **26**(6), pp. 29-34 (1994).
12. Shin Wan S.; Lingayat SuniL. "Design of acceptance sampling plans under varying inspection error", *IIE Transaction,* **24**(2), (1992).
13. Ferrell, W.G., Aman Chhoker. "Design of economically optimal acceptance sampling plans with inspection error", *Computer & Operation Research,* **29,** pp. 1283-1300 (2002).
14. Maleyeff, J.; kaminsky, F,C.; Farris, J.P. "Minimum cost 100% inspection system with inspection error", *Quality Engineering,* **15**, pp. 557-563 (2003).
15. Ryan, T.P. "Statistical methods for quality improvements", John Wiley, New York, (1989).