مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
شهریور ۱۳۸۷، شماره‌ی چهل و سوم، ص. ۶۳-۷۰

روشی جدید در کنترل آماری فرایند داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو از مرتبه‌ی p

سید تقی اخوان‌نیاکی (استاد)
محمدصابر فلاح‌نژاد (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

niaki@sharif.edu
fallahnezhad@mehr.sharif.edu

در کنترل فرایند آماری[۱]، نمودارهای کنترل یکی از قوی‌ترین ابزارهای شناخته‌شده محسوب می‌شوند. اما چنانچه مشاهدات ناشی از فرایند خودهمبسته[۲] باشند، نمودارهای کنترل استاندارد بسته به نوع خودهمبستگی، یا زنگ خطرهای اشتباه تولید می‌کنند و یا بسیار ضعیف و کم‌اثر عمل می‌کنند. در ادبیات کنترل فرایند آماری، تاکنون روش‌هایی برای کنترل داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو[۳] از مرتبه‌های یک و دو پیشنهاد، و عملکرد آنها از طریق منحنی‌های متوسط طول دنباله[۴] بررسی شده است. در این نوشتار روشی جدید برای کنترل داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو از مرتبه‌ی p ارائه و در جهت بهبود عملکرد آن تحقیق شده است. سپس متوسط طول دنباله در این روش با استفاده از شبیه‌سازی با متوسط طول دنباله در بهترین روش موجود برای داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو از مرتبه‌های یک و دو، مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: کنترل فرایند آماری، فرایندهای اتورگرسیو، متوسط طول دنباله، نمودار کنترل شوهارت، نمودار کنترل باقیمانده‌ها، نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون‌نمایی.

۱. مقدمه و بررسی ادبیات

درمورد عدم کارایی نمودارهای کنترل استاندارد برای داده‌های خودهمبسته، الون و همکارانش[1] نشان داده‌اند که برای ۲۳۵ نمونه از داده‌های خودهمبسته، در ۸۵٪ از موارد حدود کنترل به‌طور اشتباه محاسبه شده که بیش از ۵۰٪ آن به‌خاطر نقض فرض استقلال بوده است. همچنین نورالسناء و واقفی[2] با استفاده از متوسط طول دنباله، اثر خودهمبستگی را بر نمودارهای جمع تجمعی چندمتغیره[۵] بررسی کرده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که خودهمبستگی عملکرد این نمودارها را مختل می‌کند. به‌طور کلی با نقض فرض استقلال، نمودارهای کنترل استاندارد عملکرد خوبی از خود نشان نمی‌دهند، به‌طوری که نقاط رسم شده روی این نمودارها دیگر قابل تعبیر و تفسیر نخواهند بود و نتایج نامطلوبی ارائه می‌دهند.

نگارندگان با تجزیه و تحلیل کارایی نمودارهایی چون نمودار کنترل اصلاح‌شده‌ی شوهارت، نمودار کنترل باقی‌مانده‌ها، نمودار اصلاح‌شده‌ی کنترل باقی‌مانده‌ها، نمودار اصلاح‌شده‌ی میانگین متحرک موزون نمایی[۶]، نمودار میانگین متحرک موزون نمایی باقی‌مانده‌ها و نمودار اصلاح‌شده‌ی میانگین متحرک موزون نمایی باقی‌مانده‌ها تحت شرایط مختلف خودهمبستگی به بررسی و ارزیابی نمودارهای کنترل فرایند آماری برای داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو از مرتبه‌ی ۱ و ۲ پرداختند.[3] آنان سپس الگوریتمی برای انتخاب نمودار کنترل مناسب، به‌منظور کنترل داده‌های خودهمبسته ارائه داده‌اند.

با فرض این که داده‌های ناشی از فرایند از یک مدل اتورگرسیو مرتبه‌ی p برخوردار باشند، در این نوشتار روشی جدید برای کنترل آماری این‌گونه فرایندها مطرح می‌شود و کارایی آنها با استفاده از شبیه‌سازی بررسی خواهد شد. بدین منظور در بخش ۲ روش‌های کنترل فرایند آماری برای داده‌های خود همبسته‌ی اتورگرسیو مرتبه‌ی p توسعه داده می‌شوند. سپس در بخش ۳ نمودار کنترل فرایند برای داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو مرتبه‌ی۱، به نموداری دیگر با کارایی بالاتر تبدیل می‌شود و عملکرد آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ همین کار درمورد مدل اتورگرسیو مرتبه‌ی ۲ انجام می‌شود و آنگاه این نوع تبدیل‌ها به مدل‌های اتورگرسیو مرتبه‌ی p در بخش ۵ توسعه خواهند یافت. در بخش ۶ نتیجه‌گیری نهایی ارائه شده است.

۲. روش‌های کنترل فرایند آماری برای داده‌های خودهمبسته‌ی اتورگرسیو مرتبه‌ی p

فرض کنید داده‌های مربوط به یک مشخصه‌ی کیفی همبسته‌اند و این همبستگی از نوع اتورگرسیو مرتبه‌ی p است. بدین‌ترتیب اگر X_t مبین یک مشاهده از مشخصه‌ی کیفی در زمان t باشد، آنگاه:

$$X_t-\mu=\phi_1(X_{t-1}-\mu)+\cdots+\phi_p(X_{t-p}-\mu)+\varepsilon_t; \quad t\in Z \qquad (1)$$

که در آن μ میانگین فرایند، ϕها پارامترهای مدل، و ε_t خطای تصادفی مستقل و هم‌توزیع فرایند در زمان t است که از یک توزیع نرمال با میانگین صفر و

واریانس $\sigma_{\varepsilon}^{۲}$ برخوردار است. اگر عملگر انتقال پسرو[۷] را با B نشان دهیم طوری که $BX_t = X_{t-۱}$، آنگاه رابطه‌ی ۱ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۲ بازنویسی کرد:

$$\phi(B)(X_t - \mu) = \varepsilon_t \qquad (۲)$$

که در آن $\phi(B)$ یک چندجمله‌یی از B با درجه‌ی p است. حال چنانچه بین داده‌های حاصل از یک مشخصه‌ی کیفی همبستگی از نوع اتورگرسیو مرتبه‌ی p وجود داشته باشد و از نمودار استاندارد شوهارت برای کنترل این مجموعه داده استفاده کنیم، بررسی‌های انجام شده با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده است که این نمودارها عملکرد مطلوبی از خود نشان نمی‌دهند.[۴] در ادامه به بررسی و بسط روش‌های مختلف حل این مشکل خواهیم پرداخت.

۱.۲. نمودار کنترل اصلاح‌شده‌ی شوهارت

در تصحیح نمودارهای کنترل شوهارت، نمودارهای کنترل برای بررسی میانگین و واریانس فرایندهای خودهمبسته ارائه شده‌اند.[۵] در این نمودارها از دو نوع تطبیق[۸] در نمودار کنترل استفاده می‌شود. در تطبیق نوع اول که از واریانس واقعی فرایند بهره می‌گیرد، به‌راحتی با گرفتن واریانس از دو طرف رابطه‌ی ۱ می‌توان نشان داد که واریانس فرایند ($\sigma_X^{۲}$) از رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید که در آن γ_{i-j} کوواریانس بین داده‌ها در زمان‌های $t-i$ و $t-j$ است.[۶]

$$\sigma_X^{۲} = \frac{۲\sum_{i=۱}^{p-۱}\sum_{j=i+۱}^{p}\phi_i\phi_j\gamma_{i-j} + \sigma_{\varepsilon}^{۲}}{۱ - \sum_{i=۱}^{p}\phi_i^{۲}} \qquad (۳)$$

در تطبیق نوع دوم، ضریب انحراف معیار واقعی فرایند در حدود کنترل طوری تعدیل می‌شود که متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترلی در حالت خودهمبستگی و در حالت استقلال ــ زمانی که هیچ تغییری در فرایند روی نداده باشد ــ برابر باشند؛ به‌عبارت دیگر، حدود کنترل طوری تغییر داده می‌شود که هر دو نمودار دارای خطای نوع اول برابر باشند و سپس با توجه به خطای نوع دوم به مقایسه‌ی نمودارها پرداخته می‌شود.

۲.۲. نمودار کنترل باقی‌مانده‌ها[۹]

اگر «باقی‌مانده» را اختلاف بین مقدار مشاهده‌شده‌ی یک مشخصه‌ی کیفی و مقدار تخمینی آن توسط یک مدل تعریف کنیم، آنگاه در نمودار کنترل باقی‌مانده‌ها از این واقعیت استفاده می‌شود که باقی‌مانده‌های مشاهداتی که از طریق مدل‌های اتورگرسیو مرتبه‌ی p به دست می‌آیند، مستقل خطی‌اند. بنابراین می‌توان با مشاهدات ناشی از آنها مانند داده‌یی مستقل رفتار کرده و از نمودارهای کنترلی استاندارد برای پایش آنها استفاده کرد.

برتوکس و همکاران[۷] روشی برای کنترل باقی‌مانده‌های یک مدل اتورگرسیو ارائه داده‌اند. همچنین ارمر و همکاران روشی برای کنترل باقی‌مانده‌های یک مدل میانگین متحرک اتورگرسیو (مرتبه‌ی ۱ و ۲)[۱۰] مطرح کرده‌اند.[۸و۹] دیگر محققین برای پایش باقی‌مانده‌های یک مدل میانگین متحرک اتورگرسیو از درجه‌ی چهارم روشی جدید ارائه[۱۰] و نیز متوسط طول دنباله‌ی نمودار باقی‌مانده‌ها را محاسبه کرده‌اند.[۶ و ۱۱]

۳.۲. نمودار کنترل باقی‌مانده‌های اصلاح شده

در نمودار کنترل باقی‌مانده‌ها به‌راحتی می‌توان نشان داد که اگر تغییری به‌میزان $\delta\sigma_x$ در میانگین فرایند اتورگرسیو مرتبه‌ی p به وجود آید، آنگاه مقدار تغییری که به باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود برابر است با $(۱ - \sum_{i=۱}^{p}\phi_i)\sigma_x\delta$. بنابراین اگر $۲ \leq \sum_{i=۱}^{p}\phi_i \leq ۰$ فقط درصدی از تغییرات به باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود و عملکرد نمودار باقی‌مانده‌ها نسبت به نمودار شوهارت استاندارد کاهش می‌یابد. درغیر این‌صورت نمودار باقی‌مانده‌ها عملکرد بهتری خواهد داشت. برای رفع این مشکل یک تخمین‌گر قوی میانگین، که معمولاً تخمین‌گر میانگین متحرک موزون نمایی است، به‌کار می‌آید. سپس این تخمین در مقدار $\sum_{i=۱}^{p}\phi_i$ ضرب، و به باقی‌مانده‌ها اضافه می‌شود. درنتیجه چنانچه به‌اندازه‌ی $\delta\sigma_x$ در میانگین فرایند تغییر به وجود آید، مقدار تغییر انتقال یافته به باقی‌مانده‌ی فرایند با استفاده از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید.

$$\left(۱ - \sum_{i=۱}^{p}\phi_i\right)\delta\sigma_x + \sum_{i=۱}^{p}\phi_i\delta\sigma_x = \delta\sigma_x \qquad (۴)$$

به‌عبارت دیگر در حالی که فرض استقلال کماکان برقرار است، تمام تغییرات به باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود و مسئله به استفاده از یک نمودار شوهارت ساده تبدیل می‌شود. نمودار باقی‌مانده‌های اصلاح‌شده هنگامی که $۲ \leq \sum_{i=۱}^{p}\phi_i \leq ۰$ باشد عملکرد بهتری نسبت به نمودار باقی‌مانده‌ها و نمودار شوهارت اصلاح شده دارد.

۴.۲. نمودار اصلاح‌شده‌ی میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA)

آماره‌ی EWMA که با $W_{x,t}$ نشان داده می‌شود، از طریق رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$W_{x,t} = \lambda X_t + (۱ - \lambda)W_{x,t-۱} \qquad (۵)$$

که در آن $۱ > \lambda > ۰$ پارامتر مدل است. حال اگر X_tها مستقل از هم باشند، واریانس $W_{x,t}$ از رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید:

$$Var(W_{x,t}) = \left(\frac{\lambda}{۲ - \lambda}\right)\sigma_x^{۲} \qquad (۶)$$

بنابراین می‌توان به‌سادگی برای کنترل یک فرایند از آماره‌ی EWMA مربوط به آن استفاده کرد. نمودار اصلاح‌شده‌ی میانگین متحرک موزون را رابرتس[۱۲] پیشنهاد کرد، و هانتر[۱۳] آن را بسط داد. همچنین کرودر[۱۴] روشی ساده برای محاسبه‌ی متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل در این نمودار ارائه داده است.

نمودار EWMA نسبت به تغییرات در میانگین، درصورتی که این تغییر مقدار خیلی زیادی نداشته باشد، ($۲{,}۶ > \delta$)، در مقایسه با نمودار شوهارت حساس‌تر است. البته در نمودار کنترلی EWMA مقدار بهینه‌ی ضریب انحراف معیار فرایند متناسب با تغییر در میانگین، و به‌گونه‌یی تعیین می‌شود که نمودار بتواند سریع‌تر آن را شناسایی کند.[۴]

حال چنانچه در داده‌ها همبستگی از نوع اتورگرسیو مرتبه‌ی p وجود داشته باشد، این همبستگی اثر بیشتری بر نمودار EWMA استاندارد نسبت به نمودار شوهارت استاندارد می‌گذارد.[۴] در نمودار اصلاح‌شده‌ی EWMA نیز از استدلال مربوط به نمودار اصلاح‌شده‌ی شوهارت استفاده می‌شود. در این حالت ضریب انحراف معیار طوری تعدیل می‌شود که متوسط طول دنباله‌ی نمودار کنترل در حالت خودهمبستگی و در حالت استقلال ــ هنگامی که هیچ تغییری در فرایند روی نمی‌دهد ــ برابر باشد.

۵.۲. نمودار میانگین متحرک موزون نمایی باقی‌مانده‌ها

نمودار میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) استاندارد را می‌توان برای باقی‌مانده‌های مدل اتورگرسیو مرتبه‌ی p به کار برد. برای این کار آماره‌ی $W_{e,t}$ به‌صورت رابطه‌ی ۷ تعریف می‌شود:

$$W_{e,t} = \lambda e_t + (1-\lambda) W_{e,t-1} \qquad (7)$$

همچنین می‌توان واریانس تقریبی $W_{e,t}$ را از رابطه‌ی ۸ محاسبه کرد:

$$\sigma^2_{W_{e,t}} \approx \sigma^2_e \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \qquad (8)$$

بنابراین می‌توان نمودار EWMA استاندارد را به‌سادگی برای کنترل باقی‌مانده‌ها به‌کار برد. این نمودار در حالت $2 \leq \sum_{i=1}^{p} \phi_i \leq 0$ عملکرد ضعیف‌تری نسبت به نمودار اصلاح‌شده‌ی EWMA دارد و در غیر این‌صورت، نمودار اصلاح‌شده‌ی EWMA عملکرد بهتری خواهد داشت.[۴]

۶.۲. نمودار EWMA باقی‌مانده‌های اصلاح شده

در این روش نمودار EWMA برای باقی‌مانده‌های اصلاح شده به کار می‌رود. در این حالت نظیر آنچه که درمورد نمودار کنترل باقی‌مانده‌های اصلاح شده مطرح شد، عملکرد نمودار به‌ازای $2 \leq \sum_{i=1}^{p} \phi_i \leq 0$ از نمودار EWMA اصلاح‌شده و EWMA باقی‌مانده‌ها بهتر خواهد بود.[۴]

۳. تبدیل مدل اتورگرسیو مرتبه ۱ به مدل اتورگرسیو مرتبه ۱ با کارایی بالاتر

برای افزایش کارایی نمودار EWMA آماره‌ی $W_{x,t}$ به‌صورت رابطه‌ی ۹ تعریف می‌شود:

$$W_{x,t} = (\phi - \lambda) W_{x,t-1} + \lambda X_t \qquad (9)$$

در پیوست الف نشان داده شده است که آماره‌ی $A_t = X_t - W_{x,t}$ از مدل اتورگرسیو مرتبه ۱ با پارامتر $\phi - \lambda$ پیروی می‌کند. همچنین در پیوست ب آمده است که به‌ازای $\lambda < 0$ و $\phi - \lambda < 1$ مقدار تغییر نسبی که به میانگین منتقل می‌شود در داده‌های مربوط به آماره‌ی A_t از داده‌های مربوط به X_t بیشتر خواهد بود. این افزایش تغییر نسبی از یک طرف به بهبود عملکرد نمودارهای کنترل می‌انجامد و از طرف دیگر چون $\lambda < 0$ و $\phi < \phi - \lambda$، مقدار خودهمبستگی موجود در مدل افزایش می‌یابد که ممکن است به کاهش کارایی نمودارهای کنترل منجر شود. در این حالت با استفاده از شبیه‌سازی می‌توان مقادیر λ را برای نمودارهای کنترل چنان به دست آورد که کارایی آنها افزایش یابد. روش استفاده شده در شبیه‌سازی در پیوست ج و برنامه‌ی کدشده‌ی رایانه‌یی به‌زبان Visual Basic نیز در پیوست د آورده شده است.

به‌ازای مقادیر مختلف $\lambda < 0$، عملکردهای نمودارهای کنترل برای آماره‌ی A_t و X_t با استفاده از شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند. درمورد به‌کارگیری نوع نمودارهای کنترل برای آماره‌ی A_t، باتوجه به این که این آماره از مدل اتورگرسیو مرتبه‌ی ۱ با پارامتر $\phi - \lambda$ برخوردار است، می‌توان از الگوریتم مطرح شده توسط نگارندگان درمورد این مدل استفاده کرد.[۳]

جدول ۱. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و روش قدیم به‌ازای $\phi = ۰٫۳$ و $\lambda = -۰٫۲$.

ضریب تغییر در میانگین $(\delta\sigma_Y)$	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۲۷۶٫۲۸	۲۸۲٫۶۳
۰٫۲۰	۱۶۱٫۲۴	۱۶۶٫۸۳
۰٫۲۵	۱۲۰٫۰۳	۱۲۸٫۱۸
۰٫۴۰	۶۰٫۷۸	۶۳٫۵۱
۰٫۶۰	۳۲٫۲۵	۳۳٫۵۳
۰٫۸۰	۲۱٫۱۳	۲۱٫۲۵
۱٫۰	۱۵٫۶۰	۱۵٫۳۵
۱٫۵	۹٫۶۴	۹٫۰۲

جدول ۲. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و روش قدیم به‌ازای $\phi = ۰٫۳$ و $\lambda = -۰٫۵$.

ضریب انحراف استاندارد (δ)	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۲۷۰٫۰۲	۲۸۲٫۶۳
۰٫۲۰	۱۴۹٫۹۶	۱۶۶٫۸۳
۰٫۲۵	۱۱۴٫۲۷	۱۲۸٫۱۸
۰٫۴۰	۵۷٫۴۴	۶۳٫۵۱
۰٫۶۰	۳۱٫۹۹	۳۳٫۵۳
۰٫۸۰	۲۲٫۳۵	۲۱٫۲۵
۱٫۰	۱۷٫۵۴	۱۵٫۳۵
۱٫۵	۱۱٫۹۰	۹٫۰۲

با توجه به این که به‌ازای $\phi = ۰٫۳$ نمودار EWMA باقی‌مانده‌های اصلاح‌شده بهترین عملکرد را دارد[۳] متوسط طول دنباله‌ی روش پیشنهادی با متوسط طول دنباله‌ی نمودار باقی‌مانده‌های اصلاح شده (روش قدیم) به‌ازای $\lambda = -۰٫۲$ و انتقال‌های مختلف در میانگین فرایند با استفاده از ۱۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی مقایسه، و نتیجه‌ی آن در جدول ۱ ارائه شده است.

همان‌طور که از اطلاعات جدول ۱ برمی‌آید، به‌ازای ضرایب انحراف استاندارد $\delta \geq ۰٫۸$ که به‌عنوان انتقال در میانگین فرایند تعریف می‌شوند متوسط طول دنباله در روش جدید بهتر از این مقادیر برای روش قدیمی است. اگر همین مطالعه وقتی که $\lambda = -۰٫۵$ است انجام شود، به‌دلیل این که مقدار خودهمبستگی در روش جدید برابر $\phi - \lambda = ۰٫۸۰$ است وکماکان نمودار EWMA باقی‌مانده‌های اصلاح شده بالاترین کارایی را دارد، عملکرد روش جدید با عملکرد این نمودار سنجیده می‌شود و نتایج ارائه‌شده در جدول ۲ به دست می‌آید.

از مقایسه عملکرد دو نمودار مشخص می‌شود که به‌ازای $\delta \geq ۰٫۷$، روش جدید بهتر از تمامی روش‌های موجود عمل می‌کند.

حال برای این که بدانیم عملکرد نمودار تا چه حد قابل بهبود است مقدار $\lambda = -۰٫۶۵$ انتخاب می‌شود. در این حالت مقدار خودهمبستگی در روش جدید برابر با $\phi - \lambda = ۰٫۹۵$ خواهد بود و نمودار شوهارت باقی‌مانده‌های اصلاح شده در بین نمودارهای کنترل مطرح‌شده در ادبیات بهترین عملکرد را خواهد داشت.[۳] بنابراین با استفاده از این روش نتایج ارائه‌شده در جدول ۳ به دست می‌آید.

از مقایسه‌ی عملکرد دو نمودار کنترل در جدول ۳ مشخص است که به‌ازای $\delta > ۰٫۶$ روش جدید بهتر از روش قدیم عمل می‌کند. البته در این حالت اصلاح به‌عمل آمده از میزان اصلاحی که به‌ازای $\lambda = -۰٫۵$ به دست آمده است بیشتر

است. در حالتی که $\delta \geq ۰٫۶$ کارایی نمودار پیشنهادی کاهش می‌یابد. مطالعه‌ی شبیه‌سازی به‌ازای $\phi = ۰٫۹$ و $\lambda = -٫۰۹$ نیز انجام شده و نتایج حاصل از ۱۰۰۰۰ تکرار در جدول ۴ آمده است.

باید توجه داشت که در این حالت چون $\lambda = -۰٫۰۹$ انتخاب شده است، مقدار خودهمبستگی در روش جدید برابر با $\phi - \lambda = ۰٫۹۹$ خواهد بود و براساس الگوریتم پیشنهادی نگارندگان،[۳] نمودار شوهارت باقی‌مانده‌ی اصلاح‌شده بهترین عملکرد را خواهد داشت (روش قدیم در ستون سوم جدول ۴ اشاره به این روش دارد). از مقایسه‌ی عملکرد دو نمودار مشخص می‌شود که به‌ازای $\delta < ۱٫۲$ روش جدید بهتر از روش قدیم عمل می‌کند.

درمورد مقادیر $\phi < ۰$ بهترین روش موجود (قدیم) نمودار EWMA باقی‌مانده‌ها است.[۳] با علم بر این که در روش قدیم مقدار تغییری که به باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود برابر با $\delta\sigma_x(1-\phi)$ است، براساس استدلال‌های گذشته مقدار حدی تغییری که به باقی‌مانده‌های روش جدید منتقل می‌شود برابر است با:

$$(1-\phi+\lambda)\delta\sigma_x\left(\frac{1-\phi}{1-\phi+\lambda}\right) = \delta\sigma_x(1-\phi)$$

بنابراین مقدار حدی تغییری که در روش جدید به باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود با مقدار حدی تغییری که به باقی‌مانده‌ها در روش قدیم منتقل می‌شود برابر خواهد بود و چون این مقدار پس از چند قدم به باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود، انتظار می‌رود که عملکرد روش جدید مطلوب‌تر از روش قدیم نباشد. این نتیجه در مطالعات شبیه‌سازی نیز به چشم می‌خورد. نتایج شبیه‌سازی حاصل از ۱۰۰۰۰ تکرار به‌ازای $\phi = -۰٫۶$ و $\lambda = -۰٫۳$ در جدول ۵ خلاصه شده است. مطابق انتظار، عملکرد دو روش اختلاف ناچیزی باهم دارد.

به‌طور خلاصه، مطالعات شبیه‌سازی برای داده‌های ناشی از یک فرایند اتورگرسیو

جدول ۳. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و روش قدیم به‌ازای $\phi = ۰٫۳$ و $\lambda = -۰٫۶۵$.

ضریب انحراف استاندارد (δ)	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۲۵۷٫۷۱	۲۸۲٫۶۳
۰٫۲۰	۱۳۹٫۴۳	۱۶۶٫۸۳
۰٫۲۵	۱۰۷٫۳۸	۱۲۸٫۱۸
۰٫۴۰	۵۶٫۴۷	۶۳٫۵۱
۰٫۶۰	۳۳٫۸۴	۳۳٫۵۳
۰٫۸۰	۲۴٫۲۵	۲۱٫۲۵
۱٫۰	۱۹٫۲۷	۱۵٫۳۵
۱٫۵	۱۳٫۳۴	۹٫۰۲

جدول ۴. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و روش قدیم به‌ازای $\phi = ۰٫۹$ و $\lambda = -۰٫۰۹$.

ضریب انحراف استاندارد (δ)	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۳۴۴٫۰۷	۳۵۴٫۹۱
۰٫۲۰	۲۹۸٫۲۲	۳۲۰٫۸۶
۰٫۲۵	۲۷۲٫۴۰	۲۹۵٫۸۹
۰٫۴۰	۲۵۶٫۴۷	۲۶۳٫۵۱
۰٫۶۰	۱۹۷٫۶۹	۲۳۲٫۹۳
۰٫۸۰	۹۸٫۹۳	۱۱۱٫۱۰
۱٫۰	۷۷٫۱۵	۸۲٫۰۲
۱٫۵	۵۰٫۳۲	۴۶٫۴۹

جدول ۵. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و قدیم به‌ازای $\phi = -۰٫۶$ و $\lambda = -۰٫۰۳$.

ضریب انحراف استاندارد (δ)	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۱۲۴٫۷۴	۱۲۳٫۸۹
۰٫۲۰	۴۱٫۲۸	۴۱٫۵۳
۰٫۲۵	۲۸٫۴۹	۲۸٫۱۸
۰٫۴۰	۱۳٫۶۲	۱۳٫۵۱
۰٫۶۰	۷٫۶۷	۷٫۶۷
۰٫۸۰	۵٫۳۸	۵٫۳۹
۱٫۰	۴٫۱۹	۴٫۱۸
۱٫۵	۲٫۷۶	۲٫۷۷

مرتبه‌ی ۱ و $\phi < ۰$ نشان داده است که اگر ابتدا تبدیل $A_t = X_t - W_{x,t}$ روی داده‌ها اعمال شود و سپس نمودارهای کنترل مناسب برپا شوند، عملکرد نمودار برای داده‌های A_t به‌ازای تغییرات کوچک و متوسط میانگین، بهتر، و به‌ازای تغییرات بزرگ میانگین، بهتر نخواهد بود. این بدان علت است که مقدار تغییر نسبی که به میانگین A_t منتقل می‌شود یک تغییر حدی است (همان‌گونه که در مدل ریاضی نیز نشان داده شد)، و برای مثال پس از ۵ قدم به میانگین منتقل می‌شود و این عامل به‌همراه افزایش مقدار خودهمبستگی سبب می‌شود که کارایی روش جدید به‌ازای تغییرات بزرگ در میانگین نسبت به روش قبلی کاهش یابد.

۴. تبدیل یک مدل اتورگرسیو مرتبه ۲ به یک مدل اتورگرسیو مرتبه ۲ با کارایی بالاتر

در اینجا نیز مشابه روش پیشنهادی برای داده‌های ناشی از فرایند اتورگرسیو مرتبه‌۱، آماره‌ی $W_{x,t}$ به‌صورت

$$W_{x,t} = \lambda X_{t-1} + \lambda X_{t-2} + (\phi_1 - \lambda)W_{x,t-1} + (\phi_2 - \lambda)W_{x,t-2} \qquad (10)$$

تعریف می‌شود. در این صورت چنانچه A_t به‌صورت $A_t = X_t - W_{x,t}$ تعریف شود، آنگاه A_t از فرایند اتورگرسیو مرتبه‌۲ با پارامترهای $\phi_1 - \lambda$ و $\phi_2 - \lambda$ برخوردار است (پیوست هـ).

باید توجه داشت که مقدار λ در روش جدید چنان انتخاب شود که داده‌های تبدیل‌شده ایستا باشند. لازمه‌ی این کار محدودبودن واریانس عنصر خطای مدل اتورگرسیو مرتبه‌۲ است. حال با علم بر این که مدل اتورگرسیو مرتبه ۲ تبدیل‌شده دارای پارامترهای $\phi_1 - \lambda$ و $\phi_2 - \lambda$ است، براساس رابطه‌ی واریانس برای عناصر خطای این مدل باید رابطه‌ی ۱۱ برقرار باشد:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{1-(\phi_1-\lambda)^2-(\phi_2-\lambda)^2-2\frac{(\phi_2-\lambda)(\phi_1-\lambda)^2}{1-\phi_2+\lambda}} > 0 \qquad (11)$$

حال چنانچه مقادیر $\phi_1 = ۰٫۴$ و $\phi_2 = ۰٫۲$ در رابطه‌ی ۱۱ قرار داده شوند، نتیجه $\lambda > -۰٫۲$ خواهد بود و در این صورت با انتخاب $\lambda = -۰٫۱۹$ داده‌های تبدیل شده ایستا خواهند بود. خلاصه‌یی از نتایج مطالعه‌ی شبیه‌سازی به‌ازای $\phi_1 = ۰٫۴$ و $\phi_2 = ۰٫۲$ و $\lambda = -۰٫۱۹$ در جدول ۶ ارائه شده است.

باید توجه داشت که چون $\lambda = -۰٫۱۹$ انتخاب شده است مقادیر خودهمبستگی در روش جدید برابر با $\phi_1 - \lambda = ۰٫۵۹$ و $\phi_2 - \lambda = ۰٫۳۹$ خواهند بود. درنتیجه

جدول ۶. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و قدیم به‌ازای $\phi_1 = 0/4$ و $\phi_2 = 0/2$ و $\lambda = -0/19$.

ضریب انحراف استاندارد (δ)	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۳۰۱٫۹۱	۳۲۴٫۷۲
۰٫۲۰	۱۹۹٫۸۱	۲۴۱٫۶۳
۰٫۲۵	۱۶۰٫۲۲	۱۹۸٫۱۴
۰٫۴۰	۹۷٫۱۳	۱۱۶٫۰۵
۰٫۶۰	۶۳٫۱۲	۶۳٫۴۷
۰٫۸۰	۴۷٫۳۹	۴۰٫۳۲
۱٫۰	۳۹٫۱۶	۲۹٫۳۰
۱٫۵	۲۸٫۶۶	۱۶٫۵۷

جدول ۷. مقایسه‌ی عملکرد روش جدید و قدیم به‌ازای $\phi_1 = -0/4$ و $\phi_2 = -0/2$ و $\lambda = -0/3$.

ضریب انحراف استاندارد (δ)	متوسط طول دنباله	
	روش جدید	روش قدیم
۰٫۱۰	۱۴۹٫۰۴	۱۵۰٫۳۱
۰٫۲۰	۵۲٫۹۱	۵۳٫۹۵
۰٫۲۵	۳۶٫۴۷	۳۶٫۲۲
۰٫۴۰	۱۶٫۷۷	۱۶٫۸۳
۰٫۶۰	۹٫۳۴	۹٫۲۷
۰٫۸۰	۶٫۳۹	۶٫۴۹
۱٫۰	۴٫۹۳	۴٫۹۳
۱٫۵	۳٫۲۰	۳٫۱۹

براساس الگوریتم پیشنهادی نگارندگان، نمودار EWMA باقی‌مانده‌های اصلاح‌شده بهترین عملکرد را دارد[3] و به‌همین دلیل از این نمودار در روش جدید نیز استفاده شده است؛ اما با توجه به نتایج ثبت‌شده در پیوست هـ مشخص است که تقریباً نیمی از تغییر نسبی موجود در روش قدیم در روش جدید نیز وجود دارد. با این حال از مقایسه‌ی عملکرد دو روش مشخص است که عملکرد روش جدید به‌ازای $\delta > 0/7$ بهتر از روش قدیم است و این بدان علت است که در روش جدید، تأثیر افزایش واریانس عناصر خطای روش کم‌تر از افزایش تغییر منتقل‌شده به میانگین است.

درمورد مقادیر $\phi_1 + \phi_2 < 0$ بهترین روش موجود (قدیم) نمودار EWMA باقی‌مانده است[3] و مانند آنچه که درمورد فرایندهای اتورگرسیو مرتبه۱ گفته شد می‌توان از طریق شبیه‌سازی هم نشان داد که روش قدیم عملکردی مشابه عملکرد روش جدید دارد. به‌عنوان مثال، نتایج شبیه‌سازی حاصل از ۱۰۰۰۰ تکرار به‌ازای $\phi_1 = -0/4$، $\phi_2 = -0/2$ و $\lambda = -0/3$ در جدول ۷ خلاصه شده که نشان‌گر عملکرد تقریباً یکسانی است.

۵. تبدیل یک مدل $AR(p)$ به یک مدل $AR(p)$ با کارایی بالاتر

به‌صورت تعمیمی از فرایندهای $AR(1)$ و$AR(2)$ در حالت کلی وقتی که داده‌ها از یک فرایند $AR(p)$ برخوردار باشند، می‌توان $W_{x,t}$ را به‌صورت

$$W_{x,t} = \lambda X_{t-1} + \lambda X_{t-2} + \cdots + \lambda X_{t-p} + (\phi_1 - \lambda) W_{x,t-1} + (\phi_2 - \lambda) W_{x,t-2} + \cdots + (\phi_p - \lambda) W_{x,t-p} \qquad (12)$$

تعریف کرد. حال چنانچه A_t به‌صورت $A_t = X_t - W_{x,t}$ تعریف شود در پیوست ح نشان داده شده است که A_t از مدل $AR(p)$ با پارامترهای $\phi_1 - \lambda$ و $\phi_2 - \lambda$ و $\cdots$ و $\phi_p - \lambda$ برخوردار خواهد بود. در این حالت، همانند آنچه که درمورد فرایندهای اتورگرسیو مرتبه ۱ و ۲ نشان داده شد، می‌توان نشان داد که چنانچه $0 \le \sum_{i=1}^{p} \phi_i \le 2$ باشد، روش جدید به‌ازای تغییرات کوچک و متوسط در میانگین نسبت به روش‌های قدیم از کارایی بیشتری برخوردار خواهد بود.

۶. نتیجه‌گیری

در کنترل آماری یک فرایند، نمودارهای کنترل یکی از قوی‌ترین ابزارهای شناخته‌شده هستند. اما چنانچه مشاهدات ناشی از فرایندی که مربوط به یک مشخصه‌ی کیفی است خودهمبسته باشند، نمودارهای کنترل ــ بسته به نوع خودهمبستگی ــ یا زنگ خطرهای اشتباه تولید می‌کنند یا عملکردی بسیار ضعیف و کم‌اثر دارند. در این نوشتار ابتدا با استفاده از تبدیلی که روی مدل‌های اتورگرسیو مرتبه ۱ و ۲ اعمال شد، نشان داده شد که عملکرد بهترین نمودارهایی را که تاکنون برای این مدل‌ها ارائه شده در حالت‌هایی که تغییر در میانگین فرایند در حد کوچک و متوسط است، می‌توان اصلاح کرد. برای تغییرات بزرگ در میانگین فرایند، عملکرد نمودارها بهبود نمی‌یابد و این بدان علت است که مقدار تغییر نسبی که به میانگین فرایند منتقل می‌شود یک تغییر حدی است و پس از چند گام به میانگین منتقل می‌شود. روش پیشنهادی برای داده‌های خود همبسته از نوع اتورگرسیو مرتبه‌ی p تعمیم داده شد. بسط منطقی این تبدیل ممکن است شامل داده‌های خودهمبسته‌ی ناشی از فرایندهایی باشد که در آن چند متغیر همبسته وجود دارد به‌طوری که در هر یک از این متغیرها خودهمبستگی نیز مطرح است.

پانوشت

1. Statistical Process Control (SPC)
2. auto-correlated
3. auto-regressive
4. Average Run Length (ARL)
5. Multivariate Cumulative Sum (MCUSUM)
6. Exponential Weighted Moving Averages (EWMA)
7. Backward Shift Operator
8. adjustment
9. residuals
10. auto-regressive moving average

منابع

1. Alwan, L.C. and Roberts, H.V. "The problem of misplaced control limits", *Journal of the Royal Statistical So-*

ciety, Series C, **44**(3), pp. 269- 306, (1995).

2. Noorossana, R. & Vaghefi, S.J.M. "Effect of autocorrelation on performance of the MCUSUM control chart", *Journal of Quality and Reliability Engineering International* 22, pp.191-197, (2005).
3. Fallah-Neghad, M.S. and Niaki, S.T.A. "Statistical process control charts in presence of anto-correlayion; a case study," (IN Farsi), *Sharif Journal of Science and Technology*, 23, pp. 9-20, (2007).
4. Wieringa, Jakob Edo. "Statistically process control for serially correlated data", Ph.D. Dissertation, Rijks Universiteit Groningen, Netherland, (February 1999).
5. Lu, C.W. and Reynolds, M.R. Jr., "Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes", Technical report,Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, U.S.A (1999).
6. Kramer, H. and Schmid, W. "The influence of parameter estimation on the ARL of Shewhart type charts for time series", Arbeitsbericht 60, Europa-Universit¨ at Viadrina Frankfurt (Oder), Fakult¨ at f¨ur Wirtschaftswissenschaften (1996a).
7. Berthouex, P.M.; Hunter, W.G. and Pallesen, L. "Monitoring sewage treatment plants: some quality control aspects", *Journal of Quality Technology*, **10**(4), pp. 139-149, (1978).
8. Chow, M.C.; Wu, S.M. and Ermer, D.S. "A time series control chart for a nuclear reactor", In Proceedings of the 1979 Annual Reliability and Maintainability Symposium, IEEE Press, New York, N.Y., pp. 1-7, (1979).
9. Ermer, D.S. "A control chart for dependent data", In ASQC Technical Conference Transactions, ASQC, 34^{th} Annual Technical Conference, Atlanta, U.S.A., pp. 121-128, (1980).
10. Notohardjono, B.D. and Ermer, D.S. "Time series control charts for correlated and contaminated data", *Journal of Engineering for Industry*, **108**, pp. 219-226 (1986).
11. Schmid, W. "On the run length of a shewhart chart for correlated data", *Statistical Papers*, **36**, pp. 111-130 (1995b).
12. Roberts, S.W. "Control chart tests based on geometric moving averages", *Technometrics*, **1**(3), pp. 239-250 (1959).
13. Hunter, S.J. "The exponentially weighted moving average", *Journal of Quality Technology*, **18**(4), pp. 203-210 (1986).
14. Crowder, S.V. "A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts", *Technometrics*, **29**(4), pp. 401-407 (1987).

پیوست

پیوست الف

$$A_t = X_t - W_{x,t} = \phi(X_{t-1}-\mu)+\mu+\varepsilon_t-\lambda X_{t-1}-(\phi-\lambda)W_{x,t-1}$$

$$(\phi-\lambda)(X_{t-1}-W_{x,t-1})+\mu(1-\phi)+\varepsilon_t=(\phi-\lambda)A_{t-1}+\mu(1-\phi)+\varepsilon_t$$

در نتیجه A_t از مدل اتورگرسیو مرتبه‌۱، با پارامتر $\phi-\lambda$ پیروی خواهد کرد.

پیوست ب

فرض کنید به مقدار $\delta\sigma_x$ در میانگین فرایند تغییر به وجود آید. حال مقدار تغییری که به آماره‌ی $A_t = X_t - W_{x,t}$ منتقل می‌شود چنین محاسبه می‌شود:

$$A_t = X_t - W_{x,t} = X_t - \sum_{i=1}^{t}\lambda(\phi-\lambda)^{i-1}X_{t-i}$$

$$E(X_t)=\mu \rightarrow \mu+\delta\sigma_x$$

$$\rightarrow \delta\sigma_x - \sum_{i=1}^{t}\lambda(\phi-\lambda)^{i-1}\delta\sigma_x = \delta\sigma_x - \frac{\lambda\delta\sigma_x}{1-(\phi-\lambda)}$$

درنتیجه به‌اندازه‌ی $\delta\sigma_x - \frac{\lambda\delta\sigma_x}{1-(\phi-\lambda)} = \delta\sigma_x(\frac{1-\phi}{1-\phi+\lambda})$ این تغییر به A_t منتقل می‌شود. براساس رابطه‌ی واریانس خطای مدل اتورگرسیو مرتبه‌۱، واریانس A_t از رابطه‌ی $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-(\phi-\lambda)^2} = \frac{\sigma_x^2(1-\phi^2)}{(1-(\phi-\lambda)^2)}$ به دست می‌آید. بنابراین، تغییر نسبی که به مقادیر A_t منتقل می‌شود برابر است با نسبت تغییر منتقل شده به A_t به انحراف معیار A_t که برابر است با:

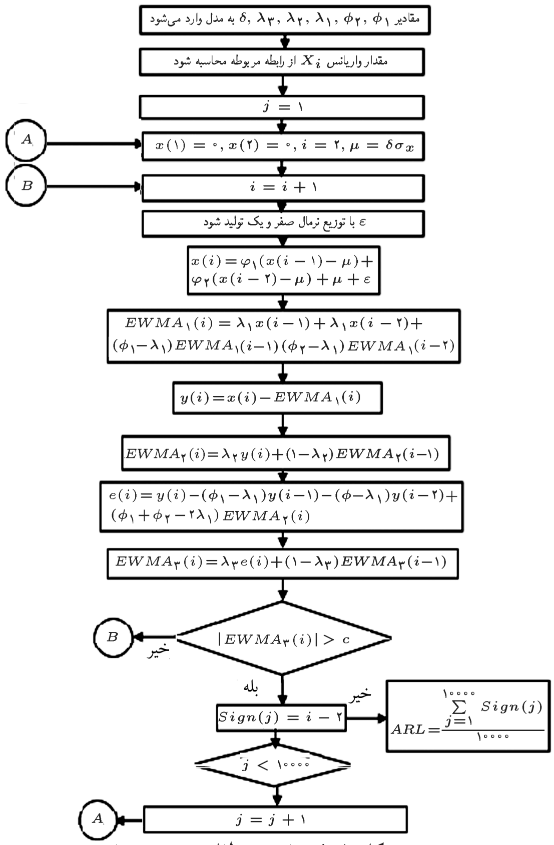
$$\frac{\delta\sigma_x\left(\frac{1-\phi}{1-\phi+\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2(1-\phi^2)}{(1-(\phi-\lambda)^2)}}} = \delta\sigma_x\sqrt{\frac{(1+\phi-\lambda)(1-\phi)}{(1-\phi+\lambda)(1+\phi)}}$$

و به‌سادگی ثابت می‌شود که مقدار عبارت اخیر به‌ازای $\lambda > 0$ از ۱ بزرگ‌تر است. بنابراین مقدار تغییر نسبی انتقال‌یافته به مقادیر A_t از مقدار تغییر نسبی انتقال‌یافته به مقادیر X_t بیشتر است؛ و در این حالت چنانچه نمودارهای کنترل برای داده‌های خودهمبسته را درمورد داده‌های تبدیل‌شده به کار ببریم به عملکرد بهتری دست خواهیم یافت.

پیوست ج

شبیه‌سازی‌های انجام‌شده به‌وسیله‌ی برنامه‌یی در VISUAL BASIC انجام شده است. روش کار بدین‌ترتیب است که برای هریک از مدل‌های موجود و مدل‌های پیشنهادی در این پروژه الگوریتم‌های مربوطه بسط داده شده و برنامه‌های رایانه‌یی آنها نوشته شده است. سپس این برنامه‌ها آن‌قدر اجرا شده‌اند که به‌ازای تغییر صفر در میانگین، اولین نقطه‌ی خارج از کنترل را در قدم ۳۷۰٫۴ تولید کند و درنتیجه دارای خطای نوع اول برابر با نمودار شوهارت استاندارد باشند.

فرض کنید مدل‌های اتورگرسیو مرتبه ۱ و ۲، که از آنها در مطالعات شبیه‌سازی این نوشتار استفاده شد، دارای میانگین صفر، و عناصر خطا در آنها از توزیع نرمال استاندارد برخوردار باشند. در این‌صورت، مثلاً فلوچارت الگوریتم روش جدید برای



شکل ۱. فلوچارت مطالعه‌ی شبیه‌سازی.

نمودار EWMA باقی‌مانده‌های اصلاح‌شده که درمورد فرایند اتورگرسیو مرتبه ۲ به کارگرفته شده مطابق شکل ۱ است. الگوریتم‌های مربوط به سایر روش‌ها به‌طور مشابه قابل بسط‌اند.

پیوست د

```
Private Sub new modified ewma residuals_Click()
Randomize
correlation = Form2.Text1.Text
landa1 = Form2.Text16.Text
landa2 = Form2.Text17.Text
landa2 = Form2.Text18.Text
correlation = Form2.Text1.Text
correlation1 = Form2.Text19.Text
constant=(1-(correlation ˆ2)-(correlation1 ˆ2)
-2 * correlation1 * (correlation ˆ 2)/(1- correlation1)) ˆ (-0.5)
x(0) = Form2.Text2.Text * constant
x(1) = 0
x(2) = 0
e(0) = 0
e(1) = 0
y(1) = 0
y(2) = 0
CCR = correlation + correlation1
For j = 1 To 10000
For i = 3 To 10000
Call normal
x(i) = correlation * (x(i - 1) - x(0)) + correlation1 *
(x(i- 2) - x(0)) + x(0) + sigma
ewma1(i) = landa1 * x(i - 1) + landa1 * x(i - 2) + (correlation
- landa1) * ewma1(i - 1) + (correlation1 - landa1) * ewma1(i–
2)
y(i) = x(i) - ewma1(i)
ewma2(i) = landa2 * y(i) + (1 - landa2) * ewma2(i – 1)
e(i) = y(i) - (correlation - landa1) * y(i - 1) - (correlation1
- landa1) * y(i - 2) + (CCR - 2 * landa1) * ewma2(i)
ewma3(i) = landa3 * e(i) + (1 – landa3) * ewma3(i – 1)
If (ewma3(i) > 25.69 * ((landa3 / (2 – landa3)) ˆ 0.5))
Or (ewma3(i) < -25.69 * ((landa3 / (2 – landa3)) ˆ 0.5))
Then
sign(j) = i - 2
GoTo 1
End If
Next i
1:
Next j
For k = 1 To 10000
sum = sum + sign(k)
Next k
Form1.Text1.Text = sum / 10000
Form1.Show
End Sub
```

پیوست هـ

$$A_t = X_t - W_{x,t} = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) +$$
$$\varepsilon_t - \lambda X_{t-1} - \lambda X_{t-2} - (\phi_1 - \lambda)W_{x,t-1}$$
$$-(\phi_1 - \lambda)W_{x,t-2} = (\phi_1 - \lambda)(X_{t-1} - W_{x,t-1}) + (\phi_2 - \lambda)$$
$$(X_{t-2} - W_{x,t-2}) - (\phi_1 + \phi_2)\mu + \varepsilon_t =$$
$$(\phi_1 - \lambda)A_{t-1} + (\phi_2 - \lambda)A_{t-2} - (\phi_1 + \phi_2)\mu + \varepsilon_t$$

و درنتیجه A_t از مدل اتورگرسیو مرتبه ۲ با پارامترهای $(\phi_1 - \lambda)$ و $(\phi_2 - \lambda)$ برخوردار خواهد بود.

حال ثابت می‌شود که کارایی مدل A_t از مدل X_t بیشتر است. چنانچه به‌اندازه‌ی $\delta\sigma_x$ در میانگین فرایند تغییر به وجود آید می‌توان شبیه پیوست ب ثابت کرد که مقدار تغییر انتقال‌یافته به مقادیر A_t برابر با $\delta\sigma_x - \frac{\lambda\delta\sigma_x}{1-(\phi_1-\lambda)} - \frac{\lambda\delta\sigma_x}{1-(\phi_2-\lambda)}$ خواهد بود. براساس رابطه‌ی واریانس مدل اتورگرسیو مرتبه۲، واریانس A_t از رابطه‌ی زیر

پیوست ح

$$W_{x,t} = \lambda X_{t-1} + \lambda X_{t-2} + \cdots + \lambda X_{t-p} + (\phi_1 - \lambda) W_{x,t-1}$$
$$+ (\phi_2 - \lambda) W_{x,t-2} + \cdots + (\phi_p - \lambda) W_{x,t-p}$$

$$A_t = X_t - W_{x,t} = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu)$$
$$+ \varepsilon_t + \mu - \lambda X_{t-1} -$$
$$\lambda X_{t-2} + \cdots - \lambda X_{t-p} - (\phi_1 - \lambda) W_{x,t-1} -$$
$$(\phi_2 - \lambda) W_{x,t-2} - \cdots - (\phi_p - \lambda) W_{x,t-p} =$$
$$(\phi_1 - \lambda)(X_{t-1} - W_{x,t-1}) + (\phi_2 - \lambda)(X_{t-2} - W_{x,t-2}) +$$
$$\cdots + (\phi_p - \lambda)(X_{t-p} - W_{x,t-p}) +$$
$$\mu (1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i) + \varepsilon_t = (\phi_1 - \lambda) A_{t-1} + (\phi_2 - \lambda) A_{t-2} + \cdots +$$
$$(\phi_p - \lambda) A_{t-p} + \mu (1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i) + \varepsilon_t$$

در نتیجه A_t از مدل اتورگرسیو مرتبه p برخوردار است.

به دست می‌آید:

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - (\phi_1 - \lambda)^2 - (\phi_2 - \lambda)^2 - 2\frac{(\phi_2 - \lambda)(\phi_1 - \lambda)^2}{1 - (\phi_2 - \lambda)}} =$$

$$\frac{\sigma_x^2 (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - 2\frac{\phi_2 \phi_1^2}{1 - \phi_2})}{1 - (\phi_1 - \lambda)^2 - (\phi_2 - \lambda)^2 - 2\frac{(\phi_2 - \lambda)(\phi_1 - \lambda)^2}{1 - (\phi_2 - \lambda)}}$$

بنابراین مقدار تغییر نسبی که به مقادیر A_t منتقل می‌شود برابر خواهد بود با نسبت تغییر منتقل شده به A_t به انحراف معیار A_t که برابر خواهد با:

$$\frac{\delta \sigma_x - \frac{\lambda \delta \sigma_x}{1 - (\phi_1 - \lambda)} - \frac{\lambda \delta \sigma_x}{1 - (\phi_2 - \lambda)}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2 (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - 2\frac{\phi_2 \phi_1^2}{1 - \phi_2})}{1 - (\phi_1 - \lambda)^2 - (\phi_2 - \lambda)^2 - 2\frac{(\phi_2 - \lambda)(\phi_1 - \lambda)^2}{1 - (\phi_2 - \lambda)}}}}$$

برای به دست آوردن مقدار بیشینه‌ی این عبارت می‌توان با جایگزینی مقادیر ϕ_1, ϕ_2، به مقدار مناسب λ که به‌ازای آن مقدار تغییر انتقال‌یافته به میانگین بیشینه می‌شود، رسید.