مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۷)
دوره‌ی ۱-۳۴، شماره‌ی ۱/۱، ص. ۳۹-۵۰

Original Article

تعیین اندازه‌ی انباشته در مسئله‌ی کنترل موجودی با تقاضای پویای احتمالی با درنظرگرفتن تخفیف کلی

صبا خسروی (کارشناس ارشد)
سید حمید میرمحمدی* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

s.khosravi@in.iut.ac.ir
h_mirmohammadi@cc.iut.ac.ir

در این مقاله، مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی پویای احتمالی با درنظرگرفتن تخفیف کلی بررسی می‌شود. مدل غیرخطی مسئله در دو حالت ارائه می‌شود. با رویکرد اول مدل تقریب تکه‌تکه خطی مسئله ارائه خواهد شد؛ رویکرد دوم مبتنی‌بر یک الگوریتم شاخه‌وکران است. در این الگوریتم زیرمسئله‌ی مربوط به هرگره، یک مسئله‌ی غیرخطی مختلط است که بر مبنای برنامه‌ریزی پویا حل می‌شود. هر مرحله از این برنامه‌ریزی پویا با روش ترکیبی شاخه‌وکران و آزادسازی لاگرانژ حل می‌شود. نتایج عددی ارائه‌شده در این مطالعه نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی نسبت به حل مدل ریاضی مسئله با استفاده از نرم‌افزار تجاری GAMS بسیار سریع‌تر به جواب بهینه می‌رسد. الگوریتم پیشنهادی برای حالت دوسطحی تخفیف با حل مدل تقریبی مسئله در این نرم‌افزار نیز مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی، تخفیف کلی، شاخه‌وکران، برنامه‌ریزی پویا، آزادسازی لاگرانژ.

۱. مقدمه

از مسئولیت‌های مهم و اساسی در واحدهای صنعتی، برنامه‌ریزی تولید و کنترل موجودی‌هاست. امر تهیه‌ی مواد و برنامه‌ریزی برای تولید کالا، باکیفیت و مقدار مطلوب و در زمان و قیمت مناسب، یکی از دغدغه‌های اصلی مدیران است. مدل‌های تعیین مقدار سفارش‌دهی یا اندازه‌ی انباشته برای نیل به این هدف گسترش داده‌شده‌اند.

تعیین اندازه‌ی اقتصادی سفارش تعیین می‌کند که چه مقدار و چه زمان از یک محصول سفارش داده شود، به‌طوری‌که هزینه‌های سیستم که اغلب شامل نگه‌داری، سفارش‌دهی، و خرید است کمینه شود.[۱] «تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی پویا» به آن دسته از مسائلی اشاره دارد که افق برنامه‌ریزی به‌صورت محدود و گسسته یا به عبارت بهتر به‌صورت دوره‌یی فرض شده و تقاضا از یک دوره به دوره‌ی دیگر متفاوت است.[۱] عوامل زیادی در تنوع مدل‌های تعیین اندازه‌ی انباشته اثر داشته‌اند و بنا به تعریف این مسئله در حوزه‌ی کنترل موجودی و حوزه‌ی برنامه‌ریزی تولید، مشخصات و فرضیات گوناگونی برای مدل درنظرگرفته شده است. از جمله این مشخصات می‌توان به نوع تقاضا، محدویت ظرفیت، تعداد محصولات، افق برنامه‌ریزی و قیمت خرید اشاره کرد.

تخفیف در خرید کالا اغلب در مسائل قطعی مطرح شده است. کالرمن و وایبارک[۲] یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط برای مسئله‌ی سفارش‌دهی با تخفیف کلی ارائه کردند که به‌وسیله آن سیاست بهینه‌ی سفارش‌دهی با متغیرهای تصمیم صفر و یک به‌دست می‌آید. چانگ و همکاران[۳] برای مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی قطعی و درنظرگرفتن تخفیف کلی، ثابت کردند که یک سیاست بهینه وجود دارد که مقدار سفارش بین هر دو نقطه‌ی سفارش‌دهی مجدد متوالی به غیر از آخرین سفارش برابر با یکی از سطوح تخفیف است. با استفاده از این ویژگی الگوریتمی بر مبنای برنامه‌ریزی پویا ارائه شد که از الگوریتم کالرمن و وایبارک بسیار کاراتر عمل می‌کند. میرمحمدی و همکاران[۴] برای مسئله‌ی تعیین مقدار سفارش در حالت قطعی، تک محصولی، و درنظرگرفتن تخفیف، یک الگوریتم شاخه‌وکران ارائه داده‌اند که نسبت به روش‌های حل قبلی در حل مسائل با ابعاد بزرگ (دوره‌های زیاد و سطوح تخفیف زیاد) بسیار کاراتر است. گوسن و همکاران[۵] نشان دادند که برای حل مسئله‌ی تعیین سفارش‌دهی چند کالایی با درنظرگرفتن تخفیف هیچ الگوریتم چند جمله‌یی وجود ندارد. به عبارت دیگر این مسئله که با نام TQD شناخته می‌شود در رده‌ی مسائل NP_hard است.

دو رویکرد برای کنترل کمبود در مدل‌های احتمالی وجود دارد. رویکرد استاندارد، معرفی جریمه‌ی کمبود در تابع هدف است. در بعضی از مواقع محاسبه‌ی این پارامتر اگر غیر ممکن نباشد، به‌اندازه‌یی دشوار است که منجر به استفاده از معیارهای عملکرد فنی می‌شود. رویکرد دوم استفاده از معیارهای عمکرد فنی است. سطح رضایت از این معیارها توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود. در پژوهش‌های پیشین معیارهای عملکرد مختلفی درنظرگرفته شده است که مهم‌ترین آن‌ها سطح سرویس α, β, γ است.[۶]

اولین مطالعات در زمینه‌ی تقاضای احتمالی و درنظرگرفتن آن در مسائل تعیین

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۷/۲۱، اصلاحیه ۱۳۹۵/۲/۳۰، پذیرش ۱۳۹۵/۵/۲۷.
DOI:10.24200/J65.2018.5546

اندازه‌ی انباشته توسط سیلور[۷] در سال ۱۹۷۸ انجام شد. سیلور یک روش ابتکاری سه مرحله‌یی برای تعیین اندازه‌ی انباشته با تقاضای احتمالی ارائه داد. بوک‌بایندر و تان[۸] مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی را در حالت تک‌مرحله‌یی با درنظرگرفتن محدودیت سطح خدمت α مدل‌سازی کرده‌اند. در راستای کنترل تصادفی‌بودن تقاضا در طی زمان، با توجه به شرایط سیستم‌های موجودی و تولیدی، سه استراتژی برای تعیین زمان و مقدار سفارش مشخص کرده‌اند: استراتژی عدم قطعیت پویا، استراتژی عدم قطعیت ایستا ـ پویا، استراتژی عدم قطعیت ایستا. آن‌ها نشان دادند که ساختار ریاضی مسئله‌ی احتمالی با سطح خدمت α و استراتژی ایستا با یک مدل تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی قطعی یکسان است و می‌توان از روش‌های حل مسائل قطعی تعیین اندازه‌ی انباشته برای حل حالت احتمالی استفاده کرد. در به‌کارگیری سطح خدمت α در این زمینه کارهای بسیاری انجام شده است. کوکا و همکاران[۹] یک مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی دسته محدود احتمالی را مطرح کرده‌اند که زمان‌های پردازش در آن قابل کنترل است؛ اما در ازای کنترل این زمان‌ها هزینه‌ی فشرده‌سازی با یک تابع محدب محاسبه می‌شود. آنها این مسئله را با استراتژی ایستای قطعی با محدودیت سطح خدمت α به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی مختلط فرمول‌بندی کرده‌اند و با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری برخی مثال‌های عددی را حل و تحلیل کرده‌اند. وارگاس[۱۰] یک الگوریتم بهینه برای حل مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی تک محصولی، بدون محدودیت ظرفیت ارائه داد. این مسئله به‌عنوان نسخه‌ی احتمالی مدل واگنر ـ ویتین نام برده شده است. ساکس[۱۱] در سال ۱۹۹۷، به حل بهینه‌ی مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی با درنظرگرفتن قیمت خرید غیرایستا پرداخت. در مسئله‌یی که آنها مطرح کرده‌اند، قیمت خرید واحد کالا در هر دوره متفاوت اما مستقل از مقدار سفارش است. آنها بر اساس الگوریتم برنامه‌ریزی پویا حل بهینه‌ی این مسئله را ارائه کردند. تمپلمیر[۱۲] در سال ۲۰۰۷ مدل‌های ریاضی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی را جمع‌بندی کرده و یک مدل با استراتژی ایستا ـ پویا با درنظرگرفتن نرخ انباشتگی β گسترش داده است که در روش حل آن از موجودی در دست به جای موجودی خالص استفاده‌شده است. وارگاس و میترس[۱۳] الگوریتم ابتکاری PDLA را برای حل مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی بدون محدودیت ظرفیت و در حالت تک‌محصولی و تک‌مرحله‌یی و درنظرگرفتن جریمه‌ی کمبود در تابع هزینه در یک افق برنامه‌ریزی غلتان طراحی کرده‌اند. این الگوریتم گسترشی بر الگوریتم بهینه‌ی یافتن کوتاه‌ترین مسیر در حالت استراتژی ایستا[۱۰] است.

رقابتی‌شدن بازار بسیاری از کالاها روند رو به رشدی دارد که به‌دلیل توسعه‌ی فنّاوری و اهمیت ارتقای کیفیت است. این امر موجب شده است فروشندگان و تأمین‌کنندگان کالاها استراتژی‌های مختلفی را برای جذب مشتریان بیشتر و افزایش فروش خود اتخاذ کنند. یکی از مهمترین استراتژی‌های فروشندگان قیمت فروش واحد کالا و وابسته‌کردن آن به مقدار خرید است که در مدل‌های کنترل موجودی با عنوان تخفیف شناخته شده است. به‌همین دلیل انگیزه‌ی این مقاله کاربردی کردن بیشتر کار ساکس و همکاران[۱۱] از طریق افزودن فرض تخفیف به مسئله است. مسئله‌ی تخفیف به تازگی در مدل‌های چند دوره‌یی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی احتمالی بررسی شده است و مقالات اندکی در این زمینه منتشر شده است. حجی و همکاران[۱۴] تخفیف در حالت تک‌دوره‌یی احتمالی (مسئله‌ی پسرک روزنامه‌فروش) را در سال ۲۰۰۷ با موجودی اولیه‌ی احتمالی بررسی کردند. برای این مسئله، مقدار بهینه‌ی سفارش برای بیشینه‌کردن سود مشخص شده و مسئله با متغیرهای تصادفی تقاضا و موجودی در حالت نرمال بازنویسی شده‌است.

در مقاله‌ی کانگ و لی[۱۵] مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته با تقاضای احتمالی در حالت تک محصولی با درنظرگرفتن تخفیف کلی در خرید از انتخاب تأمین‌کننده بررسی شده است. یک روش ابتکاری بر اساس برنامه‌ریزی پویا (HDP) برای حل مسئله نیزگسترش داده شده است.

مسائل تعیین اندازه‌ی دسته در حالت احتمالی معمولاً پیچیده است. برای کاهش سطح پیچیدگی این مسائل یا مدل ریاضی آنها، دو رویکرد عمده دیده می‌شود که یکی تقریب تکه‌تکه خطی اجزای غیرخطی مدل ریاضی و دیگری شکستن تصمیم‌گیری سطح بالا به سطوح تصمیم‌گیری سطح پایین‌تر است. مثلاً ولسویز و همکاران[۱۶] یک مسئله‌ی یکپارچه‌ی زمان‌بندی و برنامه‌ریزی تولید را با همین رویکرد حل کرده‌اند. آنها ابتدا بدون درنظرگرفتن محدودیت‌ها ظرفیت در تولید، مسئله را حل کردند و سپس محدودیت‌های مذکور را با استفاده از رویکرد آزادسازی لاگرانژ درنظرگرفته‌اند. کل این رویکرد در یک فرایند تکراری تا رسیدن به شرایط توقف ادامه می‌یابد. در استفاده از رویکرد خطی‌سازی به‌صورت تکه‌تکه‌ی خطی در این حوزه می‌توان به کار تمپلمیر و همکاران[۱۷] اشاره کرد. آنها مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته پویای احتمالی را برای چند کالا با محدودیت نرخ بازپرسازی مطرح کرده‌اند. آنها مدل مسئله را از طریق تقریب تابع هدف غیرخطی که هزینه‌ی کمبود و موجودی را محاسبه می‌کند با یک تابع تکه‌تکه‌ی خطی، به یک مدل خطی تبدیل کرده‌اند. آنها مدل‌های خطی حاصل را با استفاده از یک روش ابتکاری برای برخی مثال‌ها حل و با استفاده از روش‌های مبتنی بر تولید ستون مقایسه کرده‌اند.

در حوزه‌ی تعیین اندازه‌ی دسته در مورد ترجیحات مصرف پژوهش‌های متنوعی به‌ویژه درباره‌ی اقلام فسادپذیر انجام شده است که مرتبط‌ترین آنها کار اونال و همکاران[۱۸] است. آنها مسئله‌ی تعیین اندازه‌یی را مطرح کردند که در آن کالای مورد بررسی دارای تاریخ انقضای قطعی است و مصرف و جایگذاری همراه با ترجیحات از پیش تعیین‌شده است. آنها نشان داده‌اند که این مسئله با چهار ترجیح مشخص و با ظرفیت نامحدود در تدارک مواد در یک زمان چندجمله‌یی حل‌شدنی است.

۲. تعریف و مدل‌سازی مسئله

در مدل‌های پایه‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی پویای احتمالی فرض بر آن است که قیمت واحد کالای سفارش‌داده‌شده با تغییر مقدار هر بار سفارش تغییر نخواهد کرد. در این مقاله مدلی بررسی می‌شود که قیمت واحد کالا بستگی به مقدار هر بار سفارش دارد. به این مفهوم که فروشندگان و تأمین‌کنندگان کالا پیشنهاد می‌دهند، درصورتی‌که مقدار سفارش x به‌حدود مشخصی مانند q برسد، حاضرند کل مقدار x را با قیمتی کم‌تر از c به خریدار بفروشند. این حالت از آن نظر که قیمت اعلام‌شده‌ی جدید شامل کل مقدار سفارش x می‌شود، تخفیف کلی نامیده می‌شود. سیاست تخفیف بیان‌شده برای حالتی که قیمت خرید غیر ایستاست، می‌تواند غیرایستا تعریف شود؛ یعنی، سیاست تخفیف در هر دوره با دوره‌ی دیگر متفاوت باشد (چه از نظر قیمت‌ها و چه از نظر سطوح تخفیف). در این مطالعه برای آسانی فرض بر آن است که تعداد سطوح تخفیف K برای همه‌ی دوره‌ها یکسان است، گرچه بدون این فرض مدل ارائه شده معتبر خواهد بود.

در مسئله‌ی مورد نظر تقاضا فقط برای یک محصول درنظرگرفته می‌شود. افق زمانی متناهی است. هزینه‌ی سفارش‌دهی در هر دوره فقط در صورت سفارش لحاظ می‌شود و منابع با ظرفیت نامحدود هستند. تقاضا به‌صورت پیوسته‌ی احتمالی درنظرگرفته می‌شود. کمبود به‌صورت پس‌افت جبران می‌شود و میزان کمبود به‌صورت هزینه‌ی کمبود در تابع هدف کنترل می‌شود. تقاضا احتمالی است و تابع چگالی

آن مشخص و شناخته شده است و در هر دوره مستقل از دوره‌های دیگر است. هزینه‌های کمبود، نگه‌داری و سفارش‌دهی از یک دوره به دوره‌ی دیگر می‌تواند متفاوت باشد. هدف کمینه‌کردن امید ریاضی هزینه‌ی نگه‌داری، کمبود، سفارش‌دهی، و خرید در کل افق برنامه‌ریزی است.

استراتژی، تعیین اندازه‌ی انباشته ایستاست و در ابتدای افق برای کل افق برنامه‌ریزی زمان و مقدار سفارش‌دهی تعیین می‌شود.

در این مطالعه مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی پویای احتمالی با درنظرگرفتن تخفیف و مفروضات بیان‌شده با نام اختصاری SSDLSPπ بیان می‌شود.

۱.۲. مدل ریاضی غیرخطی مختلط

تمام نمادهای به کار رفته برای تعریف و مدل‌سازی مسئله در این قسمت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

T: طول افق برنامه‌ریزی؛

K: تعداد سطوح تخفیف؛

A_t: هزینه‌ی سفارش‌دهی در دوره‌ی t؛

h_t: هزینه‌ی نگه‌داری یک واحد کالا در دوره‌ی t؛

π_t: هزینه‌ی کمبود یک واحد کالا در دوره‌ی t؛

M: یک عدد بزرگ؛

D_t: متغیر تصادفی تقاضا در دوره‌ی t؛

x_t: متغیر تصمیم مقدار سفارش در دوره‌ی t؛

X_t: متغیر تصمیم مقدار تجمعی سفارش تا دوره‌ی t ($X_t \sum_{j=1}^{t} x_j$)؛

Y_t: متغیر تصادفی تقاضای تجمعی تا دوره‌ی t ($Y_t = \sum_{j=1}^{t} D_j$)؛

$f_{Y_t}(y_t)$: تابع چگالی احتمال تقاضای تجمعی تا دوره‌ی t؛

$F_{Y_t}(y_t)$: تابع توزیع تجمعی احتمال تقاضای تجمعی تا دوره‌ی t؛

$L_t(X_t)$: تابع مجموع متوسط هزینه‌های کمبود و نگه‌داری؛

s_t: متغیر صفر و یک، برابر با یک خواهد بود اگر در دوره‌ی t سفارشی صورت بگیرد؛

q_{tk}: کمینه‌ی مقدار سفارش مجاز در دوره‌ی t در سطح تخفیف kام (بیشینه‌ی مقدار آن $q_{tk+1} - 1$ درنظر گرفته می‌شود)؛

c_{tk}: هزینه‌ی خرید یک واحد کالا در دوره‌ی t از سطح تخفیف kام؛

u_{tk}: متغیر صفر و یک، اگر در دوره‌ی t سفارشی در سطح kام داده شده باشد برابر یک، در غیر این صورت صفر.

۱.۱.۲. مدل اول: توسعه‌ی مدل ساکس و همکاران[11]

$$\text{Min } E\{c\} = \sum_{t=1}^{T} A_t\, s_t + L_t(X_t) + c_t(X_t - X_{t-1}) \quad (1)$$

$$X_{t-1} \le X_t \quad t = 1, ..., T \quad (2)$$

$$X_t - X_{t-1} \le M s_t \quad t = 1, ..., T \quad (3)$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{K} u_{tk} = 1 \quad t = 1, ..., T \quad (4)$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{K} u_{tk}\, c_{tk} = c_t \quad t = 1, ..., T \quad (5)$$

$$X_t - X_{t-1} \le (q_{t,k+1} - 1) + M(1 - u_{tk}) \quad t = 1, ..., T \quad k = 1, ..., K \quad (6)$$

$$q_{t,k} + M(u_{tk} - 1) \le X_t - X_{t-1} \quad t = 1, ..., T \quad k = 1, ..., K \quad (7)$$

$$u_{tk}, s_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, ..., T \quad k = 1, ..., K \quad (8)$$

$$c_t, X_t \ge 0 \quad t = 1, ..., T \quad (9)$$

این گسترشی بر مدل مدل پایه‌ی ساکس[11] است. در این مدل هزینه‌ی خرید هر دوره (c_t) به‌عنوان متغیر تصمیم واسطه‌یی در مدل لحاظ می‌شود و عبارت $c_t(X_t - X_{t-1})$ در رابطه‌ی ۱ یک عبارت غیرخطی محسوب می‌شود. این رابطه بیانگر متوسط هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود و سفارش‌دهی و خرید در کل افق برنامه‌ریزی است. محدودیت ۲ بیان می‌کند که مقدار سفارش در دوره‌ی t حداقل باید برابر با مقدار سفارش تجمعی در دوره‌ی قبل خود باشد. محدودیت ۳ برای مقداردهی درست به متغیر سفارش‌دهی (s_t) ارائه شده است. در این رابطه مقدار سفارش‌دهی فقط در صورتی می‌تواند بزرگ‌تر از صفر باشد که متغیر سفارش‌دهی مقدار یک گرفته باشد و هزینه‌ی آن در تابع هدف لحاظ شود. محدودیت ۴ نشان می‌دهد که مقدار سفارش در هر دوره فقط متعلق به یکی از سطوح است. محدودیت ۵ هزینه‌ی خرید در هر دوره را باتوجه به سطح تعیین‌شده برای سفارش مشخص می‌کند. محدودیت‌های ۶ و ۷ برای تعیین حدود سفارش در هر دوره تعریف شده‌اند. در این محدودیت‌ها اگر سفارشی در سطح تخفیف kام در دوره‌ی tام داده شود، مقدار سفارش بین $q_{t,k}$ و $q_{t,k+1}$ محدود می‌شود. در غیر این صورت محدودیت سطح تخفیف kام برای دوره‌ی tام با استفاده از عدد بزرگ M آزاد می‌شود. معمولاً در مدل‌های تخفیف $q_{t_1} = 0$ و $q_{tk+1} = +\infty$ فرض می‌شود. در مدل ارائه‌شده $L_t(X_t)$ تابع مجموع متوسط هزینه‌های کمبود و نگه‌داری است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.[10]

$$\begin{aligned} L_t(X_t) =& h_t(X_t - E[Y_t]) \\ &+(\pi_t + h_t)\int_{X_t}^{\infty}(y - X_t)f_t(y)dy \quad \text{if } X_t \ge 0 \\ &\pi_t(-X_t + E[Y_t]) \quad \text{if } X_t < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

مقدار X_t در صورتی منفی می‌شود که مقدار موجودی اولیه منفی باشد و تا دوره‌ی t مقدار موجودی مثبت نشده باشد. دراین‌صورت در دوره‌ی t هزینه‌ی نگه‌داری موجودی ندارد و هزینه‌ی کمبود برابر با هزینه‌ی کمبود برای مقدار مثبت موجودی اولیه و متوسط تقاضای تجمعی تا دوره‌ی t است (حالت دوم در رابطه‌ی ۱۰). همچنین مقدار X_0 برابر با مقدار موجودی خالص ابتدای افق (دوره‌ی صفر) در نظر گرفته می‌شود.

۲.۱.۲. مدل دوم: کاهش تعداد متغیرهای تصمیم

حالت دوم مدل‌سازی، پیچیدگی محاسباتی کم‌تری دارد. تعداد متغیرهای صفر و یک مسئله کاهش یافته است و هزینه‌ی خرید به‌صورت خطی وارد تابع هدف می‌شود.

$$\text{Min } E\{c\} = \sum_{t=1}^{T}[A_t(\sum_{k+1}^{K} u_{tk} + L_t(X_t) + \sum_{k+1}^{K}(l_{tk} c_{tk})] \quad (11)$$

s.t.

$$\sum_{k+1}^{K} l_{tk} = X_t - X_{t-1} \quad t = 1, ..., T \quad (12)$$

$$\sum_{k+1}^{K} u_{tk} \leq 1 \qquad t=1,...,T \tag{۱۳}$$

$$q_{tk}\, u_{tk} \leq l_{tk} \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۱۴}$$

$$l_{tk} \leq (q_{tk+1}-1)\, u_{tk} \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۱۵}$$

$$u_{tk} \in \{0,1\} \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۱۶}$$

$$X_t \geq 0 \qquad t=1,...,T \tag{۱۷}$$

$$l_{tk} \geq 0 \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۱۸}$$

در این حالت مدل‌سازی، هزینه‌ی سفارش‌دهی بر اساس متغیر تعیین سطح تخفیف (u_{tk}) تعیین می‌شود و متغیر s_t از مدل حذف شده است. متغیر l_{tk} بیانگر مقدار سفارش در دوره‌ی tام از سطح تخفیف kام است. محدودیت ۱۳ نشان می‌دهد که حداکثر از یکی از سطوح تخفیف، سفارش انجام می‌شود. در محدودیت ۱۲ با جمع کل سفارش‌ها در سطوح مختلف اندازه‌ی سفارش یک دوره مشخص می‌شود. محدودیت‌های ۱۴ و ۱۵ برای تعیین حدود مجاز مقداردهی به l_{tk} در نظرگرفته شده‌اند.

حالت دوم مدل‌سازی پیچیدگی محاسباتی کم‌تری دارد ولی برای نمایش، تجزیه و ساده‌سازی مدل حالت اول گویا وکاربردی‌تر است. بنابراین، برای حل مدل با استفاده از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی و همچنین تقریب خطی از حالت دوم و برای اشاره به مدل SSDLSPπ و تجزیه و تحلیل آن در ادامه‌ی این مقاله از حالت اول استفاده می‌شود.

۲.۲. مدل ریاضی تقریب تکه‌تکه‌ی خطی

از آن‌جاکه مدل ریاضی مسئله‌ی SSDLSPπ غیرخطی مختلط است، خطی‌کردن مدل و حل مدل خطی مختلط یکی از راه‌کارهای ساده‌سازی مسئله و حل آن است. تابع مجموع متوسط هزینه‌های کمبود و نگه‌داری مدل SSDLSPπc را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$L_t(X_t) = h_t\, E[I_t^+] + \pi_t\, E[I_t^-] \tag{۱۹}$$

در رابطه‌ی ۱۹، I_t^+ موجودی مثبت در دوره‌ی t و I_t^- موجودی منفی یا کمبود در دوره‌ی t را نشان می‌دهد. تابع $E[I_t^-]$ تابع متوسط کمبود مرتبه‌ی اول و تابع $E[T_t^+]$ تابع مکمل آن است. که به‌صورت زیر بر حسب مقدار سفارش تجمعی تا دوره‌ی t نوشته می‌شود:

$$E[I_t^-] = G^1_{Y_t}(X_t) \tag{۲۰}$$

$$E[I_t^+] = X_t - \mu_t + G^1_{Y_t}(X_t) \tag{۲۱}$$

در رابطه‌های ۲۰ و ۲۱ برای هر دوره‌ی t تابع کمبود مرتبه اول $G^1_{Y_t}(X_t)$ یک تابع غیرخطی محسوب می‌شود و برای حالت خاص تقاضای نرمال به‌صورت زیر تعریف می‌شود:[19]

$$G^1_{Y_t}(X_t) = \sigma_t\left[\phi\left(\frac{X_t-\mu_t}{\sigma_t}\right) - \left(1-\varphi\left(\frac{X_t-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right)\left(\frac{X_t-\mu_t}{\sigma_t}\right)\right] \tag{۲۲}$$

در رابطه‌ی ۲۲، Y_t متغیر تصادفی تقاضای تجمعی تا دوره‌ی t با توزیع نرمال با میانگین μ_t و انحراف معیار σ_t و $\phi(z)$ تابع چگالی نرمال استاندارد و $\varphi(z)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد هستند.

برای تقریب خطی این تابع B نقطه بر محور X_t در دوره‌ی t با نام e_{bt} که مقدار سفارش تجمعی در bامین شکست در دوره‌ی t است ($b=1,...,B$) را در نظرگرفته می‌شود. تابع تقریب با B پاره‌خط مجموع متوسط هزینه‌های کمبود و نگه‌داری در مدل SSDLSPπc به‌صورت زیر بیان می‌شود:[6]

$$L_t(X_t) = h_t\left[\Delta^0_{I_t^+} + \sum_{b=1}^{B}\Delta^b_{I_t^+} w_{bt}\right] + \pi_t\left[\Delta^0_{I_t^-} + \sum_{b=1}^{B}\Delta^b_{I_t^-} w_{bt}\right] \tag{۲۳}$$

در رابطه‌ی ۲۳ شیب هر پاره‌خط در توابع متوسط موجودی و کمبود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^b_{I_t^+} = \frac{[e_{bt} + G^1_{Y_t}(e_{bt})] - [e_{b-1,t} + G^1_{Y_t}(e_{b-1,t})]}{e_{bt} - e_{b-1,t}} \tag{۲۴}$$

$$\Delta^b_{I_t^-} = \frac{G^1_{Y_t}(e_{bt}) - G^1_{Y_t}(e_{b-1,t})}{e_{bt} - e_{b-1,t}} \tag{۲۵}$$

$\Delta^0_{I_t^+}$ متوسط موجودی و $\Delta^0_{I_t^-}$ متوسط کمبود در نقطه‌ی اولیه‌ی e_{0t} است. w_{bt} مقدار سفارش تجمعی در فاصله‌ی bام تعریف می‌شود به‌طوری‌که $w_{bt} \leq e_{bt} - e_{b-1,t}$ است. از آن‌جایی‌که تابع متوسط موجودی محدب است و شیب $\Delta^b_{I_t^+}$ به ازای افزایش b در حال افزایش است، w_{bt} تنها در صورتی مقدار مثبت به خود می‌گیرد که $w_{b-1,t} = e_{b-1,t} - e_{b-2,t}$ باشد. این حالت برای تابع متوسط کمبود نیز برقرار است. بنابراین، مقدار سفارش تجمعی در دوره‌ی t برابر است با $\sum_{b=1}^{B} w_{bt} = X_t$. بنابراین مدل ریاضی تقریب تکه‌تکه خطی مسئله‌ی SSDLSPπ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\text{Min } E\{c\} = \sum_{t=1}^{T}[A_t(\sum_{k=1}^{K} u_{tk}) + h_t\left[\Delta^0_{I_t^+} + \sum_{b=1}^{B}\Delta^b_{I_t^+} w_{bt}\right]] \\ + \pi_t\left[\Delta^0_{I_t^-} + \sum_{b=1}^{B}\Delta^b_{I_t^-} w_{bt}\right] + \sum_{k=1}^{K}(l_{tk}c_{tk})\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\sum_{k=1}^{K} l_{tk} = \sum_{b=1}^{B} w_{bt} - \sum_{b=1}^{B} w_{b,t-1} \qquad t=1,...,T \tag{۲۷}$$

$$\sum_{k=1}^{K} u_{tk} \leq 1 \qquad t=1,...,T \tag{۲۸}$$

$$q_{tk}\, u_{tk} \leq l_{tk} \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۲۹}$$

$$l_{tk} \leq (q_{tk+1}-1)u_{tk} \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۳۰}$$

$$w_{bt} \leq e_{bt} - e_{b-1,t} \qquad t=1,...,T \qquad b=1,...,B \tag{۳۱}$$

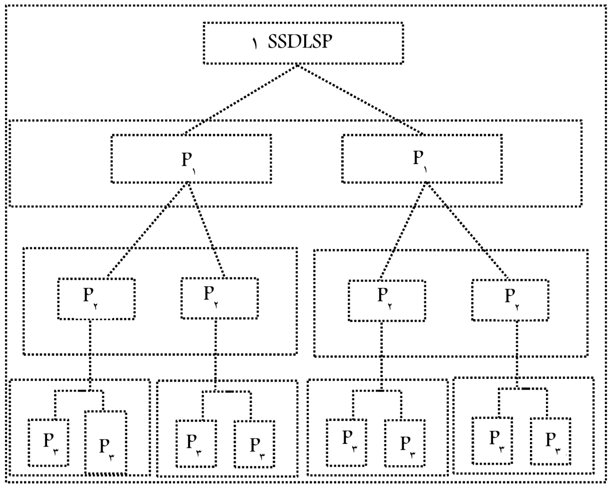
$$u_{tk} \in \{0,1\} \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۳۲}$$

$$w_{bt} \geq 0 \qquad t=1,...,T \qquad b=1,...,B \tag{۳۳}$$

$$l_{tk} \geq 0 \qquad t=1,...,T \qquad k=1,...,K \tag{۳۴}$$

۳. روش حل

اگر مدل[10] به‌عنوان یک مدل پایه با روش حل مشخص درنظرگرفته شود، مدل پیشنهادی SSDLSPπ از دو نظر پیچیده‌تر از مدل پایه است. تعیین سطوح تخفیف بهینه در هر دوره (تعیین مقدار بهینه‌ی متغیر u_{tk}) و همچنین تعیین مقدار بهینه‌ی



شکل ۱. طرح‌واره‌ی کلی الگوریتم ارائه‌شده.

سفارش با رعایت محدودیت‌های حد بالا و پایین مجاز سفارش‌دهی بر پیچیدگی مدل افزوده است. استراتژی حل مسئله بر اساس روش تجزیه‌وتحلیل است. در این مقاله مسئله‌ی SSIULSPπ به روش شاخه‌وکران حل می‌شود. در هر گره از این الگوریتم زیرمسئله‌یی به نام P_1 مطرح است. برای حل این زیرمسئله از روش برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌شود. در هر مرحله از این الگوریتم زیرمسئله‌یی با نام P_2 ارائه می‌شود که به روش شاخه‌وکران قابل حل است. در هر گره از این الگوریتم زیرمسئله‌ی P_3 به روش آزادسازی لاگرانژ حل می‌شود. در این بخش الگوریتم کلی حل در چهار سطح تشریح می‌شود. در سطح اول زیر مسئله‌ی P_1 تعریف و الگوریتم شاخه‌وکران تشریح می‌شود. در سطح دوم زیر مسئله‌ی P_2 تعریف و روش حل زیرمسئله‌ی P_1 ارائه می‌شود. در سطح سوم روش حل زیرمسئله‌ی P_2 با تعریف زیر مسئله‌ی P_3 مطرح می‌شود و در سطح آخر روش حل زیرمسئله‌ی P_3 بررسی می‌شود. شکل ۱ سطوح مختلف زیر مسائل مسئله‌ی اصلی و رویه‌ی کلی الگوریتم حل را نشان می‌دهد.

۱.۳. سطح اول

در این قسمت، ابتدا زیرمسئله‌ی P_1 تعریف و سپس حل مسئله به روش شاخه‌وکران ارائه می‌شود.

۱.۱.۳. تعریف زیرمسئله‌ی P_1

در این زیرمسئله فرض بر آن است که تخفیف فقط برای یک دسته از دوره‌ها که در مجموعه‌یی مانند D قرار دارند مطرح می‌شود و برای دوره‌های دیگر که در مجموعه‌ی R قرار دارند، قیمت خرید ثابت و در بهترین حالت خود (بالاترین سطح تخفیف) قرار دارد و محدودیتی برای سفارش‌دهی وجود ندارد. بنابراین، دوره‌ها در دو دسته‌ی D و R درنظرگرفته می‌شوند. اجتماع این دو مجموعه کل افق برنامه‌ریزی را در برمی‌گیرد. به‌عبارت دیگر محدودیت‌های ۴ تا ۸ تنها برای دوره‌های عضو مجموعه‌ی D لحاظ می‌شود. همچنین سطح تخفیف برای دوره‌های عضو مجموعه‌ی D از قبل مشخص شده است و متغیر u_{tk} مطابق با محدودیت ۴ در مدل SSDLSPπ فقط برای یک سطح مشخص مانند m_t در دوره‌ی t برابر یک و برای سطوح دیگر تخفیف $k \neq m_t$ برابر صفر تنظیم می‌شود. متعاقباً محدودیت‌های ۶ و ۷ به فرم $q_{tm_t} \leq X_t - X_{t-1} \leq q_{t,m_{t+1}}$ تبدیل می‌شوند.

در ادامه برای سادگی در مدل P_1 حد بالای مجاز سفارش در دوره‌ی t با u_t و حد پایین مجاز سفارش با l_t در نظرگرفته می‌شود. همچنین هزینه‌ی خرید c_t به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_t = \begin{cases} c_{tm_t} & t \in D \\ c_{tK} & t \in R \end{cases} \tag{۳۵}$$

مدل زیرمسئله‌ی مورد نظر به شرح زیر خواهد بود:

$$\text{Min } E\{c_{P_1}\} = \sum_{t=1}^{T} A_t s_t + L_t(X_t) + c_t(X_t - X_{t-1}) \tag{۳۶}$$

$$X_t - X_{t-1} \leq u_t \quad \forall t \in D \tag{۳۷}$$

$$X_t - X_{t-1} \geq l_t \quad \forall t \in D \tag{۳۸}$$

$$X_{t-1} \leq X_t \quad t = 1, ..., T \tag{۳۹}$$

$$X_t - X_{t-1} \leq M s_t \quad t = 1, ..., T \tag{۴۰}$$

$$s_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, ..., T \tag{۴۱}$$

$$X_t \geq 0 \quad t = 1, ..., T \tag{۴۲}$$

در این مدل نیز تابع هدف به شکل تعریف شده[۱۰] به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\text{Min } E\{c_{P_1}\} = \sum_{t=1}^{T} A_t s_t + L_t(X_t) + (c_t - c_{t+1})X_t \tag{۴۳}$$

ویژگی ۱. اگر مجموعه‌ی D از زیر مسئله‌ی P_1 تهی باشد، جواب بهینه‌ی زیر مسئله‌ی P_1 یک حد پایین برای مسئله‌ی SSDLSPπ است.

تهی بودن مجموعه‌ی D به این معناست که مسئله هیچ‌گونه محدودیتی در مقدار سفارش‌دهی با توجه به سیاست‌های تخفیف ندارد. بنابراین، با کم‌شدن تعداد محدودیت‌ها، فضای جواب مسئله بزرگ‌تر خواهد شد. از طرفی برای دوره‌ها بهترین مقدار قیمت خرید لحاظ شده است. بنابراین، جواب به‌دست آمده بهترین جواب ممکن برای متوسط هزینه‌ها خواهد بود.

ویژگی ۲. از هر جواب بهینه از زیر مسئله‌ی P_1 می‌توان به یک حد بالا برای مسئله‌ی SSDLSPπ رسید.

ممکن است جواب بهینه‌ی به‌دست آمده از زیر مسئله‌ی P_1 در مسئله‌ی SSDLSPπ نشدنی باشد. زیرا با درنظرگرفتن بهترین قیمت‌ها برای دوره‌هایی که محدودیت سفارش‌دهی ندارند، اگر مقدار سفارش به‌دست‌آمده در هر دوره در بالاترین سطح تخفیف قرار نگیرد جواب نشدنی تلقی می‌شود. بنابراین، اگر برای دوره‌هایی که محدودیت سفارش برای آن‌ها لحاظ نشده است، قیمت‌های متناسب با سطحی که در آن قرارگرفته‌اند لحاظ شود و مقدار تابع هدف با قیمت‌های شدنی به دست آید، جواب حاصل یک جواب شدنی از مسئله‌ی SSDLSPπ خواهد بود و به‌عنوان یک کران بالا معرفی می‌شود.

ویژگی ۳. با شمارش کامل حالت‌های مختلف مقداردهی به متغیر u_{tk} و حل زیر مسئله‌ی مربوط، جواب بهینه‌ی مسئله‌ی SSDLSPπ مشخص خواهد شد.

در یک شمارش کامل برای هر دوره K حالت برای سطح تخفیف وجود دارد، و اگر تعداد کل دوره‌ها برابر T باشد، K^T حالت برای مقداردهی به متغیر u_{tk} وجود دارد. مقدار بهینه‌ی سفارش‌دهی با درنظرگرفتن تخفیف یکی از این حالت‌ها خواهد بود.

۳.۱.۲. الگوریتم شاخه‌وکران و حل مسئله‌ی SSDLSPπ

در این قسمت مراحل لازم برای تشکیل یک الگوریتم شاخه‌وکران برای حل مسئله‌ی SSDLSPπ شرح داده می‌شود.

یافتن یک کران بالا برای سطح صفر: در این مسئله در سطح صفر فرض بر آن است که هیچ محدودیت سفارش‌دهی وجود ندارد و قیمت کالاها در هر دوره در بهترین مقدار ممکن خود (بالاترین سطح تخفیف) در نظرگرفته شده است. فضای جواب با این فرض بسیار بزرگ‌تر از مسئله‌ی اصلی است و مقدار تابع هدف آن یک حد پایین برای مسئله است. در سطح صفر در حقیقت مدل ساکس با بهترین قیمت‌ها حل خواهد شد.

مرحله شاخه‌زنی: استراتژی انتخاب دوره: در این الگوریتم دوره‌هایی که مقدار سفارش در آن‌ها، در سطح صفر، مثبت است در اولویت شاخه‌زنی قرار می‌گیرند (به این دلیل که این دوره‌ها بیشتر مستعد استفاده از تخفیف‌اند). به‌طور دقیق‌تر، در سطح صفر یک فهرست اولویت‌بندی با معیار مذکور برای شاخه‌زنی تعیین می‌شود و تا انتها بر اساس این فهرست، شاخه‌زنی بر روی دوره‌ها انجام می‌شود. در این مرحله مسئله‌ی گره والد درنظرگرفته می‌شود و حداکثر دو محدودیت حد بالا و پایین سفارش‌دهی در هر شاخه به مسئله‌ی قبل اضافه می‌شود. به این طریق که گره نسبت به دوره‌یی مانند t، به K شاخ منشعب می‌شود و در هر شاخ فرض بر این است که مقدار سفارش‌دهی باید در سطح تخفیف kام ($k = 1, ..., K$) برابر با هزینه‌ی خرید c_{tk} باشد. در حقیقت حل مسئله در هر گره به معنای حل یک زیرمسئله‌ی P_1 است، به‌طوریکه در مجموعه‌ی D دوره‌هایی قرار دارند که در مسیر شاخه‌زنی قرار گرفته‌اند. استراتژی انتخاب گره برای شاخ‌زنی به این صورت است که در این الگوریتم، شاخه‌زنی از گره فعالی ادامه می‌یابد که بهترین حد پایین را دارد. اگر دو گره با حد پایین مساوی دارای بهترین حد بودند، شاخه‌زنی در آن گرهی صورت می‌گیرد که عمق پیمایش بیشتری داشته باشد.

مرحله‌ی کران‌بندی: پس از به‌دست آوردن حد پایین هر گره با حل مدل P_1، مقادیر سفارش‌دهی به جای محاسبه با بهترین قیمت، با هزینه‌یی محاسبه می‌شوند که محدودیت مربوط به آن دوره ارضا شود و جواب به‌دست آمده یک جواب شدنی باشد. با این روش یک کران بالا برای مسئله به‌دست خواهد آمد. در این الگوریتم گره‌ها با قواعد زیر غیرفعال می‌شوند:

۱. اگر کران بالا و کران پایین در یک گره باهم برابر باشند، بدین معناست که جواب به‌دست‌آمده شدنی است و شاخه‌زنی جواب را بهتر نخواهد کرد.

۲. اگر کران پایین یک گره از بهترین کران بالای به‌دست آمده تاکنون بیش‌تر باشد.

اگر گرهی در پایین‌ترین سطح درخت قرار داشته باشد حتماً قاعده‌ی اول برای آن صادق است و گره غیرفعال می‌شود.

جواب بهینه: از میان گره‌های غیرفعال‌شده در پایان الگوریتم، گره با کمترین تابع هدف که حد بالا و پایین آن برابر باشد جواب بهینه‌ی مسئله خواهد بود.

۳.۲. سطح دوم

همان‌طور که ملاحظه شد، در سطح اول، لازم است در هر گره زیرمسئله‌ی P_1 به روش بهینه حل شود. برای این‌منظور از یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌شود که در هر مرحله از آن زیرمسئله‌یی به نام زیرمسئله‌ی P_2 تعریف می‌شود.

۳.۲.۱. تعریف زیرمسئله‌ی $P_2(s, t)$

زیرمسئله‌ی P_1 را در نظر بگیرید؛ زیرمسئله‌ی $P_2(s, t)$ متوسط هزینه‌ی مورد انتظار سفارش‌دهی (مجموع هزینه‌های نگه‌داری، کمبود، خرید و سفارش‌دهی) از دوره‌ی s تا انتهای دوره‌ی t را تعیین می‌کند، با فرض این‌که سفارش فقط در دوره‌ی s و در صورت وجود محدودیت‌های الزام‌آور مربوط به سطوح تخفیف در دوره‌ی t_1 تا t_m با شرایط زیر داده شود:

۱. دوره‌ی s و $t+1$ دو دوره از زیرمسئله‌ی P_1 هستند که هیچ‌گونه محدودیتی در سفارش‌دهی ندارند ($(s, t+1) \in R$).

۲. $M = \{t_1, ..., t_m\}$ (به طوری‌که $m \leq t - s$) مجموعه‌ی تمام دوره‌های میان s و t است که دارای محدودیت در سفارش‌دهی هستند.
$(s = t_0 < t_1, ..., t_n < t_{m+1} = t + 1,\ M \subset D)$

مدل ریاضی زیرمسئله‌ی $P_2(s, t)$ به شرح زیر است:

$$\text{Min } P_{st} = A_s + \sum_{i=1}^{m} A_{t_i} s_{t_i} + \sum_{i=0}^{m} g_{t_i}, t_{i+1} - 1(X_{t_i}) \tag{44}$$

$$\text{s.t. } X_{t_i} - X_{t_i-1} \leq u_{t_i} s_{t_i} \quad \forall i = 1, ..., m \tag{45}$$

$$X_{t_i} - X_{t_i-1} \geq l_{t_i} \quad \forall i = 1, ..., m \tag{46}$$

$$s_{t_i} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, ..., m \tag{47}$$

$$X_{t_i} \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., m \tag{48}$$

در رابطه‌ی ۴۵، تابع $g_{i,j}(X_i)$ متوسط هزینه‌ی نگه‌داری و کمبود و خرید از دوره‌ی i تا انتهای دوره‌ی j را بیان می‌کند، در شرایطی که از دوره‌ی i تا انتهای دوره‌ی j سفارش تجمعی برابر با مقدار ثابت X_i باشد. بنابراین $g_{i,j}(X_i)$ عبارت است از:

$$g_{i,j}(X_i) = \begin{cases} (c_i - c_{j+1})X_i + \sum_{t=i}^{j} L_t(X_i) & 0 < i \leq j \\ -c_{j+1}X_0 + \sum_{t=i}^{j} L_t(X_0) & i = 0 \end{cases} \tag{49}$$

و همچنین هزینه‌ی سفارش‌دهی برابر با هزینه‌ی سفارش در دوره‌ی s و در صورت نیاز برابر با هزینه‌ی سفارش‌دهی در دوره‌های t_1 تا t_m است. رابطه‌ی ۴۴ ترکیبی از دو محدودیت ۳۷ و ۴۰ است و بیان می‌کند که در دوره‌هایی میانی سفارشی داده نمی‌شود یا اگر سفارشی داده شد مقدار آن از حد بالای مجاز آن دوره نباید تجاوز کند. نکته‌ی قابل توجه این است که برای دوره‌هایی که حد پایین مجاز سفارش (l_{t_i}) بزرگ‌تر از صفر تعریف شده‌است، متغیر s_{t_i} مربوط به آن حتماً مقدار یک خواهد گرفت. بنابراین متغیر سفارش‌دهی تنها برای زیرمجموعه‌یی مانند $D_z \subset M$ که حد پایین مجاز سفارش برای آن‌ها صفر است (برای دوره‌هایی که در سطح اول تخفیف قرارگرفته‌اند $l_{t_i} = 0$)، درنظرگرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min } P_{st} = & A_s + \sum_{t_i \notin D_z, t_i \in M} A_{t_i} + \sum_{t_i \in D_z} A_{t_i} s_{t_i} \\ & + \sum_{i=0}^{m} g_{t_i, t_{i+1}-1}(X_{t_i}) \end{aligned} \tag{50}$$

۳.۲.۲. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و حل زیرمسئله‌ی P_1

در این قسمت یک الگوریتم بر مبنای برنامه‌ریزی پویای پیشرو، برای حل زیرمسئله‌ی P_1 ارائه می‌شود که در آن پیمودن هر یال معادل با حل یک زیر مسئله $P_2(s, t)$ است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، یک زیر مسئله‌ی $P_2(s, t)$ مقدار بهینه‌ی سفارش‌دهی از دوره‌ی s تا انتهای دوره‌ی t (X_{st}^{opt}) را تعیین می‌کند، (X_{st}^{opt} برداری از مقادیر سفارش بهینه از دوره‌ی s تا دوره‌ی t است $X_{st}^{opt} = (X_s^*, X_{s+1}^*, ..., X_t^*)$) به نحوی که کم‌ترین متوسط هزینه‌ی مورد انتظار سفارش‌دهی یعنی مجموع هزینه‌های

نگه‌داری، کمبود، خرید، و سفارش‌دهی ($P_{st}^{opt}(X_{st}^{opt})$) حاصل شود (رابطه‌ی ۵۰). با فرض این‌که سفارش فقط در دوره‌ی s و در صورت نیاز در دوره‌ی t_1 تا t_m با شرایط ذکر شده داده شود.

فرض کنید t_1، t_2 و ... t_w ($w = 1, ..., W$) دوره‌هایی از مجموعه‌ی R باشند که در آن‌ها $s_{t_w} = 1$ است. در این صورت تابع هدف زیر مسئله‌ی P_1 را می‌توان به‌صورت مجموع چندین تابع هدف زیرمسئله‌ی $P_2(s, t)$ بازنویسی کرد:

$$E\{c_{p_1}\} = \sum_{w=1}^{W} P_{t_w, t_{w+1}-1}(X^{opt}_{t_w, t_{w+1}-1}) \qquad (۵۱)$$

در رابطه‌ی ۵۱، $P_{t_w, t_{w+1}-1}(X^{opt}_{t_w, t_{w+1}-1})$ مقدار بهینه‌ی زیرمسئله‌ی P_2 از دوره‌ی t_w تا دوره‌ی $t_{w+1} - 1$ را نشان می‌دهد، زمانی که مقدار بهینه‌ی سفارش برابر $X^{opt}_{t_w, t_{w+1}-1}$ باشد. در این رابطه $t_{w+1} = T + 1$. این رابطه نشان می‌دهد که زیرمسئله‌ی P_1 قابل تفکیک به زیرمسئله‌های $P_2(t_w, t_{w+1} - 1)$ است.

برنامه‌ریزی پویای پیشنهادی دارای ویژگی‌های زیر است:

مرحله: محاسبه‌ی کم‌ترین هزینه‌ی سفارش تا دوره‌ی $t (t \in R)$ مرحله‌ی الگوریتم برنامه‌ریزی پویای مورد نظر می‌باشد.

حالت: دوره‌ی $s (s \in R)$، به‌عنوان آخرین دوره‌ی سفارش قبل از دوره‌ی t حالت مجاز برای رفتن به مرحله‌ی t است.

رابطه‌ی بازگشتی: اگر f_{st} به‌عنوان هزینه‌ی بهینه تا انتهای دوره‌ی t باشد یعنی تا زمانی که آخرین سفارش داده‌شده در بین دوره‌های عضو مجموعه‌ی R در دوره‌ی s اتفاق افتاده باشد و سفارش از بین دوره‌های عضو مجموعه‌ی R در دوره‌ی $t + 1$ اتفاق افتد، آن‌گاه رابطه‌ی بازگشتی برنامه‌ریزی پویا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{st} = P_{st}(X_{st}^{opt}) + \min_{k<s, k\in R}\{f_{k,s-1} : X^{opt}_{k,s-1}(s-1) \le X^{opt}_{st}(s)\} \qquad (۵۲)$$

اگر $\{k < s : X^{opt}_{k,s-1} \le X^{opt}_{st}\} = \varphi$ آن‌گاه $f_{st} = \infty$ درنظرگرفته می‌شود. به این معنا که در مسیر بهینه از هیچ مسیری نمی‌توان به s رسید و سپس به $t + 1$ رفت، زیرا این مسیر نقض‌کننده‌ی محدودیت ۳۹ است. شبه کد الگوریتم ارائه شده به‌صورت زیر است:

- برای $t = 0, ..., T$ و $i + 1 \in R$
- برای $s = 0, ..., t$ و $s \in R$
- زیرمسئله‌ی P_2 را برای دوره‌ی s و t به‌صورت بهینه حل کن
- مقادیر X_{st}^{opt} و $P_{st}(X_{st}^{opt})$ را محاسبه کن
- اگر $s = 0$ آن‌گاه قرار بده $\text{MIN} = 0$
- در غیر این صورت
- اگر $\{k | k < s, k \in R : X^{opt}_{k,s-1}(s-1) \le X^{opt}_{st}(s)\} = \varphi$ آن‌گاه قرار بده $\text{MIN} = \infty$؛
- در غیر این صورت قرار بده
- $\text{MIN} = \min_{k<s, k\in R}\{f_{k,s-1} : X^{opt}_{k,s-1}(s-1) \le X^{opt}_{st}(s)\}$
- قرار بده $f_{st} = P_{st}(X_{st}^{opt}) + \text{MIN}$
- قرار بده $t = T$
- تا زمانی که $t > 1$
- قرار بده $s = j$ به شرطی که $f_{jt} = \min_{k<t, k\in R}\{f_{kt}\}$
- برای $j = s, ..., t$ قرار بده $X_j = X_{st}^{opt}(j)$
- قرار بده $t = (s - 1)$

۳.۳. سطح سوم

اگر بتوان به طریقی مقدار بهینه‌ی متغیرهای سفارش‌دهی در زیرمسئله‌ی $P_2(s, t)$ را تعیین کرد، آن‌گاه مسئله به یک زیرمسئله‌ی ریاضی غیرخطی بدون عدد صحیح تبدیل خواهد شد که می‌توان از روش‌های بهینه‌سازی محدب برای برنامه‌ریزی غیرخطی محدودیت‌دار برای حل بهینه‌ی این مدل بهره برد.

۱.۳.۳. تعریف زیرمسئله‌ی P_3

همان‌طورکه قبلاً ذکر شد، مجموعه‌ی D_z مجموعه‌یی از دوره‌های بین s و t است که حد پایین مجاز سفارش در این دوره‌ها صفر است. بنابراین، در یک سیاست بهینه ممکن است در این دوره‌ها سفارش داده شود یا داده نشود. یک زیرمسئله‌ی P_3 همان زیرمسئله‌ی P_2 است که برای سفارش در دوره‌های مربوط به مجموعه‌ی D_z، از ابتدا تصمیم‌گیری شده است. در این حالت دوره‌های عضو مجموعه‌ی D_z به سه دسته تقسیم می‌شود. دسته‌ی اول مجموعه‌ی D_A است که هزینه‌ی سفارش‌دهی برای دوره‌های عضو آن مطابق با هزینه‌ی تعریف شده در زیرمسئله‌ی P_2 تعیین می‌شود و در تابع هدف مسئله لحاظ می‌شود (چه سفارشی در آن دوره‌ها صورت بگیرد و چه سفارشی صورت نگیرد) به عبارتی $s_{t_i} = 1$. دسته‌ی دوم مجموعه‌ی D_B است که هزینه‌ی سفارش‌دهی برای دوره‌های عضو صفر درنظرگرفته شده و سفارش در آن دوره‌ها آزاد درنظر گرفته می‌شود. به‌عبارتی $s_{t_i} = 1 \ (t_i \in D_B)$. دسته‌ی سوم مجموعه‌ی D_C است که فرض می‌شود در آن دوره‌ها نباید سفارشی صورت بگیرد، به عبارتی $s_{t_i} = 0 \ (t_i \in D_C)$. اجتماع این سه مجموعه، مجموعه‌ی D_z را تشکیل می‌دهد.

در ادامه برای سادگی در مدل P_3 هزینه‌ی $\overline{A_t}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{A_t} = \begin{cases} A_t & t \in D_A \\ 0 & t \in D_B \end{cases} \qquad (۵۳)$$

با این تقسیم‌بندی بر دوره‌های عضو D_z، زیر مسئله‌ی P_2 به زیر مسئله‌یی تبدیل می‌شود که درآن متغیر صفر و یک سفارش‌دهی وجود ندارد و سفارش فقط در دوره‌ی s و در دوره‌های عضو مجموعه $N = \{t_1, ..., t_n\}$ انجام می‌گیرد. این مجموعه زیر مجموعه‌یی از M است که متغیر سفارش‌دهی برای تمام دوره‌های آن در مدل P_2 برابر یک است ($s_{t_i} = 1$). به‌عبارت دیگر دوره‌های عضو مجموعه‌ی D_C از مجموعه دوره‌های t_1 تا t_m حذف شده‌اند ($N = M - D_C$).

مدل ریاضی زیرمسئله‌ی P_3 به شرح زیر است:

$$\text{Min } PR_{st} = \sum_{i=0}^{n} \overline{A_t} + g_{t_i, t_{i+1}-1}(X_{t_i}) \qquad (۵۴)$$

$$\text{s.t } X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \ge u_{t_i} \quad \forall i = 1, ..., n \qquad (۵۵)$$

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \ge l_{t_i} \quad \forall i = 1, ..., n \qquad (۵۶)$$

$$X_{t_i} \ge 0 \quad \forall i = 1, ..., n \qquad (۵۷)$$

در این مدل دوره‌ها به‌صورت زیر فرض شده‌اند:

$$s = t_0 < t_1, ..., t_n < t_{n+1} = t + 1, \ t_1, ..., t_n \in N$$

ویژگی ۱. اگر در زیر مسئله‌ی P_3 همه‌ی دوره‌های عضو D_z در مجموعه‌ی D_B قرار بگیرد، جواب بهینه‌ی زیر مسئله‌ی P_3 یک حد پایین برای زیرمسئله‌ی $P_2(s,t)$ خواهد بود.

ویژگی ۲. از هر جواب بهینه از زیر مسئله‌ی P_3 بااصلاح هزینه‌های سفارش‌دهی با توجه به جواب به‌دست آمده، می‌توان به یک حد بالا برای زیرمسئله‌ی P_2 رسید.

ویژگی ۳. با شمارش کامل حالت‌های مختلف مقداردهی به متغیر s_{t_i} $(t_i \in D_z)$ و حل زیر مسئله‌ی مربوط، جواب بهینه‌ی زیر مسئله‌ی P_2 مشخص خواهد شد.

۲.۳.۳. الگوریتم شاخه‌وکران و حل زیرمسئله‌ی $\boldsymbol{P_2(s,t)}$

در این قسمت در الگوریتمی مشابه با الگوریتم شاخه‌وکران، جست‌وجوی درختی بر اساس شاخه‌وکران ارائه می‌شود تا به وسیله‌ی آن متغیرهای پیچیده‌کننده‌ی s_{t_i} در زیرمسئله‌ی P_2 مشخص و سطوح بهینه‌ی سفارش‌دهی تعیین شود.

سطح صفر: زیرمسئله‌ی P_2 را در نظر بگیرید. در این زیرمسئله متغیر s_{t_i} به‌عنوان متغیر پیچیده‌کننده ظاهر شده و حل مسئله را پیچیده کرده است. اگر فرض شود که در هر دوره به‌صورت آزاد می‌توان سفارش داد و هیچ هزینه‌یی برای سفارش‌دهی وجود نداشته باشد، آن‌گاه حد پایین جواب مسئله مشخص شده است. بنابراین، در سطح صفر هزینه‌ی سفارش‌دهی برای هیچ یک از دوره‌های عضو D_z لحاظ نخواهد شد و همه‌ی دوره‌های عضو D_z در مجموعه‌ی D_B قرار می‌گیرند.

مرحله‌ی شاخه‌زنی: در این مرحله از الگوریتم، مسئله‌ی گره والد در ظر گرفته شده است و برای یک دوره از میان دوره‌های عضو مجموعه‌ی D_z که در مسیر شاخه‌زنی گره والد نبوده است شاخه زده می‌شود و گره والد به دو شاخه تقسیم می‌شود. در شاخه‌ی اول برای دوره‌ی درنظرگرفته‌شده هزینه‌ی سفارش‌دهی لحاظ می‌شود و اجازه‌ی مقداردهی به متغیر سفارش‌دهی در آن دوره صادر می‌شود (دوره‌ی موردنظر در دسته‌ی D_A قرار می‌گیرد). در شاخه‌ی دوم مقدار سفارش در آن دوره صفر درنظر گرفته شده و هزینه‌یی برای سفارش‌دهی پرداخته نمی‌شود (دوره‌ی مورد نظر در دسته‌ی D_C قرار می‌گیرد).

استراتژی انتخاب گره برای شاخه‌زنی: در این الگوریتم، شاخه‌زنی از گره فعالی ادامه می‌یابد که بهترین حد پایین را دارد. اگر دو گره با حد پایین مساوی دارای بهترین حد بودند، شاخه‌زنی در آن گرهی صورت می‌گیرد که عمق پیمایش بیشتری داشته باشد.

مرحله‌ی کران‌بندی: در مسئله‌ی کمینه‌سازی، هر جواب موجه از مسئله یک کران بالا برای مسئله است. پس از به‌دست‌آوردن حد پایین هر گره با حل زیرمسئله‌ی P_3، هزینه‌ی سفارش‌دهی به‌صورت موجه برای جواب به‌دست‌آمده در تابع هدف درنظرگرفته می‌شود. به‌عبارت دیگر برای دوره‌های عضو مجموعه‌ی D_B که در جواب بهینه، در آن دوره سفارش داده شده است ولی هزینه‌ی سفارش‌دهی برای آن در نظر گرفته نشده‌است، این هزینه لحاظ می‌شود.در این صورت جواب به‌دست‌آمده یک جواب شدنی و یک کران بالا برای مسئله خواهد بود.

در این الگوریتم گره‌ها با قواعد زیر غیرفعال می‌شوند:

۱. اگر کران بالا و کران پایین در یک گره باهم برابر باشند، به‌این معناست که جواب به‌دست آمده شدنی است و شاخه‌زنی موجب بهترشدن جواب نخواهد شد.

۲. اگر کران پایین یک گره از بهترین کران بالای به‌دست آمده تا کنون بیش‌تر باشد.

جواب بهینه: از میان گره‌های غیرفعال‌شده در پایان الگوریتم، گره با کمترین تابع هدف، که حد بالا و پایین آن برابر باشد جواب بهینه‌ی مسئله خواهد بود.

۴.۳. سطح چهارم

در این سطح، حل زیرمسئله‌ی روش آزادسازی لاگرانژ یکی از روش‌های اصلی در تجزیه و تحلیل مسائل برنامه‌ریزی ریاضی است. این روش در جایی کاربرد دارد که با آزادسازی تعدادی از محدودیت‌های مسئله، روش حل ساده‌یی برای مسئله‌ی آزادشده وجود داشته باشد. در زیر مسئله‌ی P_3 اگر محدودیت‌های حد بالا و پایین مجاز سفارش در رابطه‌ی ۵۵ و ۵۶ به‌عنوان محدودیت‌های پیچیده‌کننده در نظر گرفته شود، آن‌گاه حل تابع اولیه‌ی آزاد شده به راحتی با مشتق‌گیری تابع هدف میسر می‌شود. در این قسمت روش آزادسازی لاگرانژ برای حل زیرمسئله‌ی P_3 در قالب سه گام اصلی ارائه می‌شود.

۱.۴.۳. گام اول: حل مسئله‌ی RPP

مدل آزادشده‌ی زیر مسئله‌ی P_3 به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\text{Min RPP}_{st} = {} & \sum_{i=0}^{n} A_{t_i} + g_{t_i, t_{i+1}-1}(X_{t_i}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{\lambda}_{ut_i}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - u_{t_i}\right)\right. \\ & \left. - \bar{\lambda}_{lt_i}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - l_{t_i}\right)\right] \end{aligned} \tag{۵۸}$$

$$\text{s.t.} \;\; X_{t_i} \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{۵۹}$$

ضرایب لاگرانژ متناظر با محدودیت‌های حد بالا و حد پایین مجاز سفارش‌دهی به ترتیب $\bar{\lambda}_{ut_i}$ و $\bar{\lambda}_{lt_i}$ در نظر گرفته شده است. اگر $\bar{\lambda}_{ut_0} = \bar{\lambda}_{lt_0} = \bar{\lambda}_{lt_{n+1}} = \bar{\lambda}_{ut_{n+1}} = 0$ تعریف شود، در این صورت برای هر دوره t_i یک متغیر X_{t_i} و دو ضریب $\bar{\lambda}_{lt_i}$ و $\bar{\lambda}_{ut_i}$ در نظر گرفته می‌شود و می‌توان تابع هدف را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\text{Min RPP}_{st} = \sum_{i=0}^{n} A_{t_i} + f_{t_i}(X_{t_i}) + l_{t_i} \cdot \bar{\lambda}_{lt_i} - u_{t_i}\bar{\lambda}_{ut_i} \tag{۶۰}$$

$$\text{s.t} \;\; X_{t_i} \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{۶۱}$$

$f_{t_i}(X_{t_i})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f_{t_i}(X_{t_i}) = {} & \left[\left(c_{t_i} + \bar{\lambda}_{ut_i} - \bar{\lambda}_{lt_i}\right) - \left(c_{t_{i+1}} + \bar{\lambda}_{ut_{i+1}} - \bar{\lambda}_{lt_{i+1}}\right)\right] \\ & .\bar{X}_{t_i} + \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} L_j\left(\bar{X}_{t_i}\right) \end{aligned} \tag{۶۲}$$

به این ترتیب مدل آزادشده‌ی زیرمسئله‌ی P_3 یک برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی بدون محدودیت است که مقدار بهینه‌ی مدل با مشتق‌گیری به راحتی حاصل می‌شود. مشتق جزئی تابع هدف نسبت به متغیر X_{t_i} به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_{t_i}} \text{RPP}_{st}\left(X_{t_i}\right) = {} & \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} L'_J\left(X_{t_i}\right) + \left(\bar{c}_{t_i} - \bar{c}_{t_{i+1}}\right) \\ = {} & \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} \left[h_j - (h_j + \pi_j)(1 - F_{y_j}(X_{t_i}))\right] \\ & + \left(c_{t_i} + \bar{\lambda}_{ut_i} - \bar{\lambda}_{lt_i}\right) \\ & - \left(c_{t_{i+1}} + \bar{\lambda}_{ut_{i+1}} - \bar{\lambda}_{lt_{i+1}}\right) \end{aligned} \tag{۶۳}$$

برای یافتن ریشه‌ی این تابع از ترکیب دو روش نصف‌کردن و روش تکرار جهت مخالف استفاده می‌شود.

۲.۴.۳. گام دوم: بهنگام کردن ضرایب

گام اصلی در آزادسازی لاگرانژ بهنگام‌سازی ضرایب لاگرانژ است که در پژوهش‌ها روش‌های متنوعی برای این منظور گسترش داده شده است. در این روش‌ها سعی بر آن است که در هر مرحله ضرایبی به‌عنوان ضریب لاگرانژ در مدل آزادشده‌ی اولیه به کار برده شود و موجب بیشترشدن تابع دوگان شود تا نهایتاً ضرایبی حاصل شود که مسئله‌ی دوگان را بیشینه کند و به تبع آن متغیرهای اولیه در مدل اولیه را کمینه کند. یکی از روش‌های عمومی و اصلی بهنگام‌سازی ضرایب لاگرانژ استفاده از روش زیرگرادیان است. برای زیرمسئله‌ی P_2 ضرایب لاگرانژ به‌صورت زیر بهنگام می‌شوند:

$$\overline{\lambda}_{ut}^{(v+1)} = \max\left\{0, \overline{\lambda}_{ut}^{(v)} + t^{(v)} G_{ut}^{(v)}\right\} \quad (64)$$

$$\overline{\lambda}_{lt}^{(v+1)} = \max\left\{0, \overline{\lambda}_{lt}^{(v)} + t^{(v)} G_{lt}^{(v)}\right\} \quad (65)$$

$$t^{(v)} = \frac{\pi^{(v)}\left(UB_{best} - \mathrm{RPP}_1^{(v)}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(G_{lt}^{(v)}\right)^2 + \left(G_{ut}^{(v)}\right)^2\right]} \quad (66)$$

در این روابط $G_{ut}^{(v)} = X_t^{(v)} + X_{t-1}^{(v)}$ و $G_{lt}^{(v)} = l_t - X_t^{(v)} + X_{t-1}^{(v)}$ است. معمولاً در مطالعات $\pi^{(0)} = 2$ می‌شود و برای همگرایی بهتر $\pi^{(v)}$ درتکرارهای بعد کاهش می‌یابد. UB_{best} بهترین حد بالای به‌دست آمده از مسئله‌ی اولیه‌ی P_2 است که به روش ابتکاری با شدنی‌کردن جواب حاصل از مسئله‌ی آزاد شده به‌دست می‌آید (در این مسئله با تغییر مقادیر سفارش تا رعایت‌شدن حدود مجاز سفارش‌دهی یک جواب شدنی از مسئله ساخته می‌شود). $\mathrm{RPP}_{st}^{(v)}$ مقدار تابع هدف مسئله‌ی آزاد شده در مرحله‌ی vام است.

۳.۴.۳. گام سوم: بررسی همگرایی

در این گام باید شرایطی برای الگوریتم در نظر گرفت که اطمینان حاصل شود جواب به‌دست آمده به اندازه‌ی کافی نزدیک به بهینه است. شرایط زیر از جمله شرایط اصلی مطرح‌شده در تحقیقات است که برای زیرمسئله‌ی P_2 مناسب است:

- اگر اختلاف بهترین حد پایین یافت‌شده (RPP_{best}) با بهترین حد بالا (UB_{best}) در الگوریتم کمتر از خطایی مانند ε باشد، الگوریتم خاتمه یافته است و جواب به‌عنوان $\varepsilon-$ بهینه گزارش می‌شود.
- اگر تعداد تکرار از یک حد تعیین‌شده بیش‌تر شود.
- اگر بردار ضرایب لاگرانژ در تکرارهای آخر به حد کافی به هم نزدیک شده باشد ($\left|\lambda^{(v+1)} - \lambda^{(v-1)}\right| / \left\|\lambda^{(v)}\right\| \leq \varepsilon$).

الگوریتم کلی روش لاگرانژ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

- گام صفر: مقدار دهی اولیه
- قرار بده: $v = 1$ و $\lambda^{(v)} = \lambda$
- قرار بده: $\phi_{down}^{(v-1)} = -\infty$
- گام اول: حل مسئله‌ی RPP
- مسئله‌ی RPP را حل کن و مقدار بهینه‌ی $x^{(v)}$ و مقدار $\phi^{(v)}$ را به‌دست آور
- اگر $\phi_{down}^{(v-1)} < \phi^{(v)}$ قرار بده $\phi_{down}^{(v)} = \phi^{(v)}$
- گام دوم: بهنگام کردن ضرایب
- به روش زیرگرادیان ضرایب لاگرانژ را بهنگام کن و اگر ممکن بود حد بالای مسئله را بهنگام کن
- گام سوم: بررسی همگرایی
- اگر شرایط توقف برقرار بود، قرار بده: $x^{(v)} = x^*$ در غیر این صورت قرار بده $v = v + 1$ و به گام اول برو

۴. آزمایش‌های عددی

آزمایش‌های عددی با کدنویسی الگوریتم پیشنهاد شده با زبان برنامه‌نویسی C# در محیط مایکروسافت ویژوال استادیو ۲۰۱۰ انجام گرفته است و نتایج حل آن‌ها برای بررسی کارایی، با حل مدل غیرخطی مختلط مسئله SSDLSPπ و همچنین مدل تقریب خطی مختلط در نرم‌افزار بهینه‌سازی تجاری GAMS مقایسه شده است. این مقایسه با حل مجموعه‌یی از مسائل تصادفی بر مبنای زمان حل مسئله و دقت حل، انجام گرفته است.

از میان حل‌کننده‌های موجود در نرم‌افزار GAMS فقط حل کننده‌های -BON MIN، KNITRO، ALPHAECP و LINDOGLOBAL برای مدل‌های MINLP هستند که تابع کمبود نرمال مرتبه‌ی اول برای آن‌ها قابل تعریف و تجزیه و تحلیل است. از میان این حل‌کننده‌ها، تنها حل‌کننده‌ی LINDOGLOBAL قادر به اعلام جواب بهینه در ابعاد کوچک است. دیگر حل‌کننده‌ها حتی اگر به جواب بهینه‌ی جهانی رسیده باشند، حل‌کننده آن را به‌عنوان یک جواب بهینه‌ی محلی اعلام می‌کند. بنابراین، مبنای مقایسه روش‌های حل پیشنهادی، حل مسئله در نرم‌افزار GAMS با حل‌کننده‌ی LINDOGLOBAL است. این حل‌کننده در نرم‌افزار LINGO نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. برای حل مدل تقریبی خطی مختلط مسئله‌ی مورد نظر، از حل‌کننده‌ی CPLEX استفاده شده است.

۱.۴. طراحی آزمون‌ها

در تولید مسائل تصادفی، هرکدام از ورودی‌های برنامه یک فاکتورکنترلی برای مسئله می‌باشند. در میان این فاکتورها تأثیر دو فاکتور T و K در حل مسئله بیشتر از دیگر فاکتورهاست. بقیه‌ی ورودی‌ها باید به صورت مناسب تنظیم شود و در کل مثال‌ها ثابت درنظرگرفته شود.

هزینه‌ی آماده‌سازی، نگه‌داری، کمبود، و موجودی اولیه با توجه به پژوهش موجود[۱۰] در نظرگرفته شده است. مقدار متوسط تقاضای هر دوره $E(d_t)$ به‌صورت تصادفی تعیین می‌شود. مقدار انحراف معیار هر دوره[۱۰] $\sigma(d_t) = 0.2 * E(d_t)$ فرض شده‌است. بنابراین مقدار متوسط تقاضای تجمعی μ_t برابر با $\sum_{j=1}^{t} E(d_j)$ و انحراف معیار تقاضای تجمعی σ_t برابر با $\sqrt{\sum_{j=1}^{t} \sigma^2(d_j)}$ می‌شود. همچنین مقدار هزینه‌ی خرید پایه (سطح اول) در هر دوره به‌صورت تصادفی تعیین می‌شود. جدول ۱ مقادیر تنظیم‌شده‌ی پارامترهای ورودی مسئله را نشان می‌دهد.

در سیاست تخفیف، دو فاکتور زیر در زمان حل مسائل بسیار حائز اهمیت است:

جدول ۱. مقادیر تنظیم شده پارامترها.

c_{t1}	$E(d_t)$	I_0	π_t	h_t	A_t
[۰, ۸]	[۲۰, ۱۲۰]	۹۸	۱۲	۰٫۵	۴۸

α: نسبت مقدار هر سطح تخفیف به متوسط تقاضا که براساس آن کمینه‌ی مقدار مجاز سفارش در سطح kام در دوره tام با رابطه‌ی $q_{tk} = \alpha_k.\mu_t$ تعیین می‌شود.

γ: ضریب جذابیت تخفیف، شاخصی برای اندازه‌گیری میزان صرفه‌جویی در هزینه‌ی خرید است که بر اساس آن هزینه‌ی خرید با رابطه‌ی $c_{tk} = (۱ - \gamma_k).c_{t۱}$ به‌دست می‌آید.

این دو فاکتور مشابه با مطالعه‌ی میرمحمدی و همکاران[۴] در مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته قطعی با درنظرگرفتن تخفیف، مطابق جدول ۲ درنظرگرفته شده است.

برای درنظرگرفتن حالت‌های بیش‌تر از دو پارامتر تصادفی μ_t و $c_{t۱}$، تولید تصادفی داده برای هر مسئله با T و K مشخص پنج بار تکرار می‌شود و زمان حل مسائل از میانگین زمان حل هر پنج مسئله حاصل می‌شود.

۲.۴. نتایج آزمون‌ها و تحلیل آن

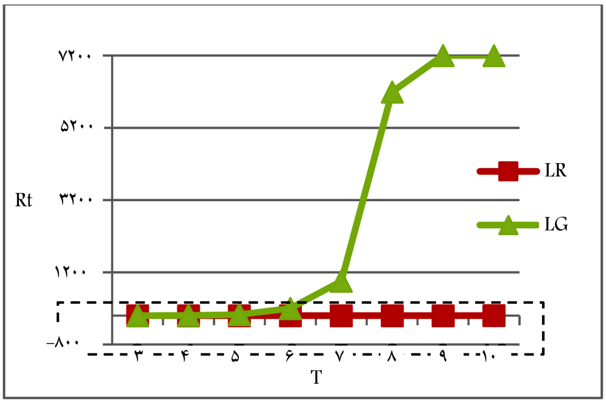
متوسط زمان حل مسائل از اجرای برنامه‌ها بر روی ماشینی با مشخصات Intel(R) core (TM)i۷-۲۶۰۰ CPU@۳٫۴۰ GHz در جدول ۳ ثبت شده است. در این جدول منظور از LG همان حل‌کننده‌ی LINDOGLOBAL است. B&B به الگوریتم پیشنهادی اشاره دارد. علامت Rt متوسط زمان اجرای برنامه برای هر پنج مثال حل‌شده با T و K مختلف را بر حسب ثانیه نشان می‌دهد. در این جدول ۳ نشان داده شده است که حل‌کننده‌ی LG قادر به حل مسائل با ابعاد نه دوره به بالا در محدودیت زمانی تعیین شده نیست. علامت N تعداد مسائلی را نشان می‌دهد (از پنج مسئله‌ی حل شده) که حل‌کننده به جواب بهینه در کمتر از ۷۲۰۰ ثانیه رسیده است.

شکل ۲ مقایسه‌ی زمان حل حل‌کننده‌ی B&B و LG را در سطح تخفیف دوم نشان می‌دهد. در این شکل، شکل ۳ حالت بزرگنمایی شکل ۲ است که در آن مقیاس محور زمان بزرگ‌تر شده تا تفاوت زمانی دو الگوریتم بهتر مشخص شود.

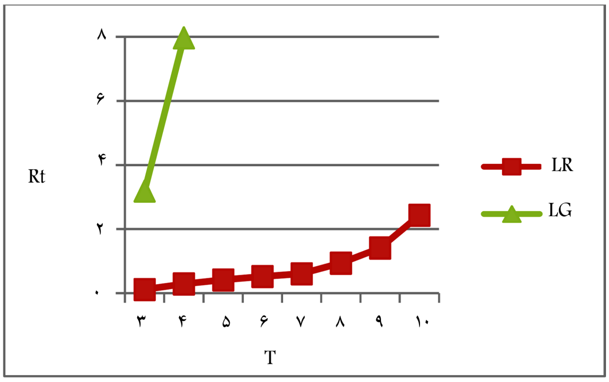
جدول ۲. مقادیر تنظیم‌شده در سیاست تخفیف.

k	۲	۳	۴	۵
α_k	۲	۳	۴	۵
γ_k	۰٫۰۵	۰٫۰۷۵	۰٫۱	۰٫۱۲۵

شکل ۴ مقایسه زمانی روش تقریبی با زمان‌های بدست آمده از حل کننده لینگو را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمان حل الگوریتم پیشنهادی به‌شدت کم‌تر از زمان حل در حل‌کننده‌ی LG است به‌طوری‌که حل‌کننده‌ی LG قادر به اعلام جواب بهینه در ابعاد ۹ و ۱۰ دوره در کم‌تر از ۷۲۰۰ نیست. این در حالی است که بیش‌ترین زمان حل در الگوریتم پیشنهاد شده در سطح دوم و حالت ده دوره‌یی ۲٫۴۳۲ ثانیه است. این نشان کارایی بسیار بالای الگوریتم‌های ارائه شده است.



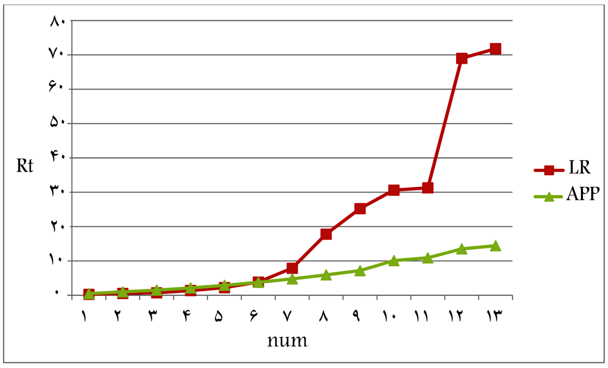
شکل ۲. مقایسه‌ی زمان حل حل‌کننده‌ی B&B و LG.



شکل ۳. بزرگنمایی نمودار.

جدول ۳. مقایسه‌ی زمان حل مسائل در دوره و سطوح مختلف.

شماره‌ی مسئله	K	B&B			LG					
		۲	۳	۴	۲		۳		۴	
	T	Rt	Rt	Rt	Rt	N	Rt	N	Rt	N
۱	۳	۰٫۱۱۸	۰٫۲۹۸	۰٫۳۱۹	۳٫۱۸۷	۵	۳٫۷۹۳	۵	۴٫۹۷۸	۵
۲	۴	۰٫۲۹۰	۰٫۳۷۵	۰٫۵۹۹	۷٫۹۷۲	۵	۹٫۷۸۳	۵	۱۳٫۸۱۳	۵
۳	۵	۰٫۴۱۷	۰٫۶۹۸	۰٫۶۹۸	۳۳٫۸۶۰	۵	۳۶٫۱۱۵	۵	۴۳٫۹۶۵	۵
۴	۶	۰٫۵۲۰	۰٫۶۹۴	۱٫۸۹۵	۲۰۳	۵	۲۰۳	۵	۲۶۰	۴
۵	۷	۰٫۶۰۸	۱٫۳۵۸	۳٫۷۱۲	۹۵۶	۵	۱۳۶۸	۵	۴۰۴۹	۳
۶	۸	۰٫۹۳۹	۲٫۸۴۶	۳٫۷۱۰	۶۱۹۴	۳	۷۰۸۱	۱	۷۲۰۰	۰
۷	۹	۱٫۴۱۲	۲٫۵۵۶	۷٫۹۶۹	۷۲۰۰	۰	۷۲۰۰	۰	۷۲۰۰	۰
۸	۱۰	۲٫۴۳۲	۵٫۲۰۱	۸٫۹۹۶	۷۲۰۰	۰	۷۲۰۰	۰	۷۲۰۰	۰



شکل ۴. مقایسه‌س زمان حل الگوریتم‌های پیشنهادی با مدل تقریبی.

جدول ۴. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با حل تقریبی.

شماره‌ی مسئله	T	B&B	APP	
		Rt	Rt	E
۱	۴	۰٫۲۶۰	۰٫۴۹۵	۱٫۱۰
۲	۶	۰٫۵۵۶	۱٫۰۱۶	۱٫۴۳
۳	۸	۰٫۷۳۵	۱٫۵۱۳	۰٫۸۲
۴	۱۰	۱٫۳۸۵	۲٫۱۴۷	۰٫۸۸
۵	۱۲	۲٫۲۳۲	۲٫۹۱۸	۰٫۹۹
۶	۱۴	۳٫۷۶۰	۳٫۷۶۸	۰٫۸۳
۷	۱۶	۷٫۸۸۲	۴٫۷۹۴	۱٫۳۶
۸	۱۸	۱۷٫۸۰۱	۵٫۹۳۶	۱٫۲۹
۹	۲۰	۲۵٫۲۴۰	۷٫۱۷۵	۱٫۱۷
۱۰	۲۲	۳۰٫۶۲۹	۱۰٫۱۰۰	۱٫۲۰
۱۱	۲۴	۳۱٫۲۷۹	۱۰٫۹۰۵	۱٫۰۰
۱۲	۲۶	۶۹٫۰۰۱	۱۳٫۵۲۱	۱٫۴۴
۱۳	۲۸	۷۱٫۸۱۱	۱۴٫۴۳۰	۱٫۳۴
۱۴	۳۰	۲۸۱٫۷۲	۱۵٫۴۲۰	۱٫۴

از آن‌جاکه در شکل ۲ در مقیاس مطرح‌شده روند تغییر زمان حل الگوریتم پیشنهادی محسوس نیست، قسمت پایینی نمودار در شکل ۳ بزرگ‌نمایی شده است.

مسئله‌ی دو سطحی تخفیف، به‌دلیل کاربرد بیش‌تر در عمل، از اهمیت بیش‌تری برخوردار است. در ادامه رفتار الگوریتم پیشنهادی برای دو سطح تخفیف تا ابعاد ۳۰ دوره مقایسه شده است. یکی از مباحث مهم در تحلیل رفتار الگوریتم‌های غیرخطی، مقایسه‌ی آن‌ها با حل مدل تقریبی خطی است. از این جهت، مدل تقریبی مسئله‌ی مورد نظر با در نظرگرفتن ۱۰۰۰ نقطه‌ی تقریب در هر تابع کمبود نرمال در تابع هدف، در نرم افزار GAMS کد نویسی شده است. نتایج محاسباتی در جدول ۴ درج شده است. در این جدول Rt متوسط زمان اجرا برای هر پنج مسئله در سطح دوم تخفیف و دوره‌ی مشخص شده است. منظور از APP مدل تقریب تکه‌تکه خطی است که در نرم‌افزار گمز اجرا می‌شود. علامت E متوسط درصد خطای نسبی جواب مدل تقریبی با تابع هدف الگوریتم B&B را نشان می‌دهد.

در مقایسه با مدل تقریبی مشاهده می‌شود که الگوریتم شاخه‌وکران تا ۱۴ دوره، علاوه بر این که جواب دقیق را گزارش می‌دهد، زمان حل کم‌تری نیز نسبت به مدل

جدول ۵. بررسی اثربخشی قواعد غلبه درالگوریتم شاخه‌وکران.

شماره‌ی مسئله	T	NN	ND۱	ND۲
۱	۴	۵	۳	۰
۲	۸	۵	۳	۰
۳	۱۲	۷	۴	۰
۴	۱۶	۳	۲	۰
۵	۲۰	۳	۲	۰
۶	۲۴	۲۷	۴	۱۰
۷	۲۸	۳	۱	۱
۸	۳۲	۱۵	۳	۵
۹	۳۶	۹	۲	۳
۱۰	۴۰	۲۷	۱	۱۳

تقریبی دارد. از این نقطه‌ی تلاقی به بعد باید اولویت مشخص شود؛ اگر رسیدن به جواب دقیق حائز اهمیت بیش‌تری است از الگوریتم پیشنهادی استفاده می‌شود و اگر زمان حل اهمیت دارد با چشم‌پوشی از خطای نسبی، از حل مدل تقریبی استفاده می‌شود. شکل ۴ زمان حل این دو روش را در مقایسه باهم نشان می‌دهد.

در جدول ۵ ستون سوم NN تعداد گره‌های پیمایش‌شده برای یک بار اجرای هر مسئله در T و K مشخص شده را نشان می‌دهد. ستون چهارم ND۱ تعداد گره‌های غیرفعال‌شده با قاعده‌ی اول و ستون پنجم ND۲ تعداد گره‌های غیرفعال‌شده با قاعده‌ی دوم را نشان می‌دهد.

به‌طورکلی در این نتایج مشاهده می‌شود که تعداد گره‌های پیمایش‌شده نسبت به کل گره‌های بالقوه‌ی درخت شاخ‌وکران کم و قواعد تحدید به اندازه‌ی کافی مناسب برای غیرفعال‌کردن گره‌ها هستند. مثلاً در یک مسئله با ۱۲ دوره و ۲ سطح تخفیف، یک الگوریتم شاخه‌وکران بررسی می‌شود که ۴۰۹۵ = $\frac{1-2^{12}}{1-2}$ گره برای بررسی در آن وجود دارد که در این آزمایش فقط ۷ گره از آن حل و جواب بهینه حاصل شده است.

۵. نتیجه‌گیری

مسئله‌ی تعیین اندازه‌ی انباشته‌ی پویای احتمالی با درنظرگرفتن تخفیف کلی (SSDLSPπ) از دو جنبه بسیار پیچیده‌تر از مدل ساکس است. اولین جنبه اضافه‌شدن متغیرهای صفر و یک بیش‌تر به مدل و جنبه‌ی دوم اضافه‌شدن محدودیت‌های بیش‌تر به مدل پایه است. از این‌رو اگرچه مدل پایه با یک الگوریتم بر مبنای برنامه‌ریزی پویا قابل حل است، مدل گسترش یافته‌ی الگوریتم حل بسیار پیچیده‌تری نسبت به مدل پایه دارد. برای این مسئله سه مدل ریاضی ارائه شده است. مدل اول مدل ریاضی غیرخطی مختلط براساس مدل ارائه شده توسط ساکس و همکاران[11] است. به‌منظور کاهش پیچیدگی محاسباتی و افزایش کارایی در حل نمونه‌های بزرگتر با تغییر در نحوه‌ی محاسبه‌ی هزینه‌ی سفارش‌دهی، این هزینه به‌صورت خطی در تابع هدف وارد شده است. نهایتاً به‌منظور رسیدن به ابعاد بالاتری از حل مسائل نمونه، قسمت غیرخطی تابع هدف به‌صورت تکه‌تکه خطی تغریب زده شد تا مدل ریاضی خطی اما تقریبی مبنایی برای مقایسه شود. برای حل مسئله روش حل پیشنهادی در چهار سطح معرفی شد و به

حل بهینه‌ی مسئله‌ی مورد نظر پرداخته شد. در سطح اول با استفاده از رویکرد شاخه‌وکران، امکان تخفیف در هر گره بررسی می‌شود و زیر مسائل بدون تخفیف، اما با محدودیت در مقدار سفارش ایجاد می‌شوند. برای حل زیر مسائل در سطح دوم از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا استفاده شده است که در هر مرحله از آن زیر مسائلی ایجاد می‌شوند که لازم است برای حل آنها فضای موجه جواب‌ها افراز شود. این کار در سطح سوم و توسط یک الگوریتم شاخه‌وکران دیگر انجام می‌شود. در هر گره از این الگوریتم شاخه‌وکران زیر مسائل محدودیت‌داری وجود دارد که این محدودیت‌ها بر اساس روش آزادسازی لاگرانژ در سطح چهارم لحاظ می‌شوند؛ زیرا حل حالت بدون محدودیت آنها با استفاده از روش‌های موجود امکان‌پذیر است. به‌منظور ارزیابی عملکرد نسبی الگوریتم ارائه شده، نمونه‌هایی از مسئله که در یک چهارچوب تعریف‌شده تولید شده‌اند با الگوریتم پیشنهادی، مدل غیرخطی و مدل تقریب خطی حل شده‌اند. سرعت الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با مدل خطی تقریبی کم است؛ اما این تفاوت در نمونه‌های کوچک ناچیز است و علاوه بر آن باید به بهینه‌بودن الگوریتم پیشنهادی نیز توجه کرد. از نقاط قوت این الگوریتم کاربردی‌بودن آن برای هر توزیع دلخواهی از تقاضاست و از زمان حل با سرعت بسیار بالاتری نسبت به حل‌کننده‌ی LINDOGLOBAL برخوردار است.

از آن‌جا که مسئله‌ی مورد نظر با درنظرگرفتن هزینه‌ی کمبود به‌صورت جریمه در تابع هدف مدل‌سازی شده است، یکی از زمینه‌های اصلی برای تحقیقات آتی می‌تواند درنظرگرفتن مدل با محدودیت سطح خدمت به‌جای جریمه‌ی کمبود باشد.

منابع (References)

1. Karimi, B., Fatemi Ghomi, S. and Wilson, J. "The capacitated lot sizing problem: A review of models and algorithms", *Omega*, **31**, pp. 365-378 (2003).
2. Callerman, T. and Whybark, D. "Purchase quantity discounts in an MRP environment", *Proceeding of. 8th A nnual M idwest Conference* (1977).
3. Chung, C.-S., Chiang, D.T. and Lu, C.-Y. "An optimal algorithm for the quantity discount problem", *Journal of Operations Management*, **7**, pp. 165-177 (1987).
4. Mirmohammadi, S.H., Shadrokh, S. and Kianfar, F. "An efficient optimal algorithm for the quantity discount problem in material requirement planning", *Computers & Operations Research*, **36**, pp. 1780-1788 (2009).
5. Goossens, D.R., Maas, A., Spieksma, F.C. and Van de Klundert, J. "Exact algorithms for procurement problems under a total quantity discount structure", *European Journal of Operational Research,* **178**, pp. 603-626 (2007).
6. Tempelmeier, H. "Stochastic lot sizing problems", Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations, Springer, pp. 313-344 (2013).
7. Silver, E. "Inventory control under a probabilistic time-varying, demand pattern", *Aiie Transactions*, **10**, pp. 71-79 (1978).
8. Bookbinder, J.H. and Tan, J.-Y. "Strategies for the probabilistic lot-sizing problem with service-level constraints", *Management Science,* **34**, pp. 1096-1108 (1988).
9. Koca, E., Yaman, H. and Selim Aktürk, M. "Stochastic lot sizing problem with controllable processing times", *Omega,* **53**, pp. 1-10 (2015).
10. Vargas, V. "An optimal solution for the stochastic version of the Wagner–Whitin dynamic lot-size model", *European Journal of Operational Research,* **198**, pp. 447-451 (2009).
11. Sox, C.R. "Dynamic lot sizing with random demand and non-stationary costs", *Operations Research Letters*, **20**, pp. 155-164 (1997).
12. Tempelmeier, H. "On the stochastic uncapacitated dynamic single-item lotsizing problem with service level constraints", *European Journal of Operational Research*, **181**, pp. 184-194 (2007).
13. Vargas, V. and Metters, R. "A master production scheduling procedure for stochastic demand and rolling planning horizons", *International Journal of Production Economics*, **132**, pp. 296-302 (2011).
14. Haji, M., Haji, R. and Darabi, H. "Price discount and stochastic initial inventory in the newsboy problem", *Journal of Industrial and Systems Engineering*, **1**, pp. 130-138 (2007).
15. Kang, H.-Y. and Lee, A.H. "A stochastic lot-sizing model with multi-supplier and quantity discounts", *International Journal of Production Research*, **51**, pp. 245-263 (2013).
16. Wolosewicz, C., Dauzère-Pérès, S. and Aggoune, R. "A Lagrangian heuristic for an integrated lot-sizing and fixed scheduling problem", *European Journal of Operational Research*, **244**, pp. 3-12 (2015).
17. Tempelmeier, H. and Hilger, T. "Linear programming models for a stochastic dynamic capacitated lot sizing problem", *Computers & Operations Research*, **59**, pp. 119-125 (2015).
18. Önal, M., Romeijn, H.E., Sapra, A. and van den Heuvel, W. "The economic lot-sizing problem with perishable items and consumption order preference", *European Journal of Operational Research*, **244**, pp. 881-891 (2015).
19. Rossi, R., Kilic, O.A. and Tarim, S.A. "Piecewise linear approximations for the static–dynamic uncertainty strategy in stochastic lot-sizing", *Omega,* **50**, pp. 126-140 (2015).