

توسعه‌ی نمودارهای کنترل ترکیبی میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی و جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش میانگین فرایند براساس روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار

Original Article

عطیه محمدخانی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

امیرحسین امیری* (دانشیار)

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد، تهران

در این نوشتار به منظور بهبود عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی و جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی، از روش نوین نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار به جای روش عمومی نمونه‌گیری ساده‌ی تصادفی استفاده شده است. علاوه بر این عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی پیشنهادی براساس الگوی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار با عملکرد نمودارهای کنترل کلاسیک مشابه بر اساس الگوی نمونه‌گیری ساده‌ی تصادفی با استفاده از شبیه‌سازی و معیار متوسط طول دنباله مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار باعث حساسیت بیشتر نمودارهای کنترل ترکیبی در کشف تغییرات کوچک در فرایند می‌شود. همچنین عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی با روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار بهتر از عملکرد نمودارهای کنترل جمع تجمعی و میانگین متحرک موزون نمایی با روش نمونه‌گیری مشابه است.

واژگان کلیدی: کنترل فرایند آماری، نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، نمودار کنترل جمع تجمعی، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار.

atieh.mohamadkhani@yahoo.com
 amiri@shahed.ac.ir

۱. مقدمه

را نظیر آزمون دنباله‌ها و استفاده از حدود هشدار که سعی در استفاده از اطلاعات تمام نقاط در تصمیم‌گیری دارند، نیز می‌توان در مورد نمودار کنترل شوهارت به کار برد. ولی استفاده از این قوانین اضافی که باعث حساس شدن نمودار کنترل شوهارت می‌شود نه تنها سادگی نمودارهای کنترل را از بین می‌برد، بلکه تعبیر و تفسیر آنها را دچار مشکل می‌کند.

اخیراً فرایندهای نظارت آماری پیشرفته‌تری شامل نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی^۲ و نمودار کنترل جمع تجمعی^۳ توسط رابرت^۴ و پیچ^۵ معرفی شده است. زمانی که پی بردن به تغییرات کوچک در فرایند مد نظر باشد از این دو نمودار کنترل استفاده می‌شود. طراحی اولیه‌ی این نمودارها با فرض متغیر بودن مشخصه‌های کیفی انجام شده است. در سال‌های اخیر بهبودها و پیشرفت‌های چشم‌گیری در ساختار هر دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی و کنترل جمع تجمعی به منظور افزایش کارایی این نمودارهای کنترل در تشخیص انحرافات در فرایندها صورت گرفته است. لوکاس^۶ نمودار کنترل جدیدی را با استفاده از نمودار کنترل ترکیبی شوهارت - جمع تجمعی پیشنهاد کرد؛ در این نمودار از حدود کنترل نمودار کنترل

دو نوع انحراف در فرایند وجود دارد که در ویژگی‌های محصولات تولیدی تأثیر دارد: یکی انحرافات با علت خاص و دیگری انحرافات با علت‌های معمول رایج. یک فرایند وقتی در حالت کنترل در نظر گرفته می‌شود که فقط انحرافات معمول در فرایند وجود داشته باشد. اما وجود انحراف با یک علت خاص فرایند را به حالت خارج از کنترل می‌برد. نمودارهای کنترل ابزار مناسبی برای تشخیص این دو حالت برای یک فرایند هستند. مفهوم اولیه‌ی نمودارهای کنترل در سال ۱۹۲۴ توسط والتر شوهارت^۱ معرفی شد. بعد از آن این مفهوم به سمت کنترل فرایند آماری امروزی هدایت شد. یکی از عمده‌ترین نقاط ضعف هر نمودار کنترل شوهارت^۱ استفاده از اطلاعات موجود در آخرین نقطه‌ی رسم شده است. به عبارت دیگر اطلاعاتی که نقاط به طور مشترک می‌توانند منعکس کنند، نادیده گرفته می‌شوند. به همین علت نمودارهای کنترل شوهارت نسبت به پی بردن به وجود تغییرات کوچک در فرایند مثلاً تغییراتی به اندازه‌ی ۱/۵ انحراف معیار یا کمتر نسبتاً بی‌تفاوت هستند. البته روش‌های دیگری

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۳۰، اصلاحیه ۱۳۹۵/۴/۲۶، پذیرش ۱۳۹۵/۶/۱۴.

DOI:10.24200/J65.2018.5543

کنترل ارائه کرد. حق و همکاران^[۱۰] از این روش نمونه‌گیری برای طراحی نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی استفاده کردند.

در این نوشتار برای بهبود عملکرد نمودار کنترل ترکیبی میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی و همچنین نمودار کنترل ترکیبی جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی نمودارهای کنترل جدیدی برای پایش میانگین فرایند با استفاده از روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار به نام نمودارهای کنترل MEC-RSS و MCE-RSS پیشنهاد شده است. پیش فرض‌های این مطالعه عبارت‌اند از:

۱. مشخصه‌ی کیفی مورد مطالعه تک‌متغیره است.
۲. مشخصه‌ی کیفی از توزیع نرمال تبعیت می‌کند.
۳. واریانس فرایند در طول زمان ثابت فرض شده است.
۴. مطالعات در فاز دو انجام می‌شود، از این رو پارامترها معلوم فرض می‌شوند.

ساختار ادامه‌ی این مقاله به‌شرح زیر است: در بخش ۲ الگوی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار معرفی شده است. در بخش ۳ نمودارهای کنترل کلاسیک MEC و MCE تشریح شده است. در بخش ۴ نمودارهای کنترل پیشنهادی MEC-RSS و MCE-RSS ارائه شده است. در بخش ۵ عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی با استفاده از یک مثال عددی با نمودارهای کنترل کلاسیک میانگین متحرک موزون نمایی، جمع تجمعی میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی و همچنین نمودارهای کنترل ترکیبی جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی مقایسه شده است. یک مطالعه‌ی موردی برای نمودارهای پیشنهادی در بخش ۶ آورده شده است. همچنین نتیجه‌گیری و پیشنهادهای آتی در بخش ۷ ارائه شده است.

۲. نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار (RSS)

هنگامی که اندازه‌گیری دقیق از مشخصه‌های کیفی بسیار پرهزینه یا محصولاتی که شکست در آنها بسیار گران‌قیمت و ساخت آنها سخت است، مورد پایش قرار می‌گیرند الگوهای بر اساس نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار کارآمدتر از الگوهای نمونه‌گیری تصادفی ساده است. یک الگوی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار بر اساس گام‌های زیر انجام می‌شود:

گام اول: m^2 محصول از فرایند انتخاب می‌شود.

گام دوم: به صورت تصادفی این m^2 محصول به m مجموعه با اندازه‌ی m اختصاص داده می‌شوند.

گام سوم: محصولات هر مجموعه به صورت بصری یا با هر روش ارزان دیگری با توجه به مشخصه‌های کیفی مورد مطالعه رتبه‌بندی می‌شوند.

گام چهارم: از اولین مجموعه کوچک‌ترین محصول رتبه‌داده‌شده و از دومین مجموعه دومین محصول رتبه‌داده‌شده، و از m امین مجموع m امین محصول رتبه‌داده‌شده انتخاب می‌شود. این فرایند تا اندازه‌گیری m امین کوچک‌ترین محصول رتبه‌داده‌شده از مجموعه‌ی آخر ادامه می‌یابد. این چرخه‌ی کامل از نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار با اندازه‌ی نمونه‌ی m است.

X متغیر مورد مطالعه با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ است، همچنین میانگین و واریانس X به ترتیب برابر با μ_0 و σ_0^2 است. X_1, X_2, \dots, X_m یک نمونه‌گیری تصادفی ساده با اندازه‌ی m بدست آمده از

جمع تجمعی برای شناسایی تغییرات کوچک در فرایند استفاده می‌شود، درحالی‌که حدود نمودار کنترل شوهارت حساسیت بیشتری در تشخیص تغییرات بزرگ در فرایند دارند. همچنین نمودار کنترل ترکیبی شوهارت - میانگین متحرک موزون نمایی توسط لوکاس و ساکوچی^[۵] به منظور افزایش حساسیت بیشتر نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی برای تغییرات بزرگ در فرایند پیشنهاد شد. نمودار کنترل جمع تجمعی با پاسخ اولیه‌ی سریع^۴ توسط لوکاس و کروزر^[۶] ارائه شد، و به صورت مشابه اشتاینر^[۷] نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با پاسخ اولیه سریع ارائه کرد. یاسچین^[۸] نمودار کنترل جمع تجمعی وزنی^۵ را پیشنهاد کرد، او در این نمودار به اطلاعات گذشته‌ی آماره‌های نمودار کنترل جمع تجمعی وزن اختصاص داد. لیندرمن و لاول^[۹] نمودار کنترل تعمیم‌یافته‌ی میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره^۶ را برای پایش فرایندهای چندمتغیره وقتی بیش از یک پارامتر باید به‌طور هم‌زمان تحت نظارت قرار بگیرد، ارائه کردند. شو و لین^[۱۰] مدل تعمیم‌یافته‌ی از نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی به نام نمودار کنترل میانگین متحرک موزون عمومی^۷ را برای مشخصه‌های کیفی وصفی بر مبنای شمارش تعداد اقلام نامنتطبق (با توزیع دوجمله‌ی) یا تعداد نقص‌ها در محصول بازرسی (توزیع پواسون) ارائه کردند. اسکاریانو و کالزادا^[۱۱] نمودارهای کنترل ترکیبی^۸ جدیدی را با یکپارچه‌سازی نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی با نمودار کنترل انطباق طول دنباله^۹ تولید کردند. این نمودارهای کنترل ترکیبی دامنه‌ی بیشتری از تغییرات در میانگین را تشخیص می‌دهند و برای کنترل کسر عدم انطباق در فرایند استفاده می‌شوند. ریاض و همکاران^[۱۲] از قوانین حساس‌سازی به منظور افزایش عملکرد نمودار کنترل جمع تجمعی برای تغییرات کوچک و بزرگ استفاده کردند. عباس و همکاران^[۱۳] عملکرد نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی را با استفاده از قوانین حساس‌سازی افزایش دادند. همچنین عباس و همکاران^[۱۴] با استفاده از آماره‌ی نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی به عنوان ورودی نمودار کنترل جمع تجمعی نمودار کنترل ترکیبی میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی^{۱۰} با نام اختصاری MEC را برای پایش میانگین فرایند ارائه کردند و نشان دادند این نمودار در تشخیص تغییرات کوچک فرایند عملکرد بهتری نسبت به نمودارهای کنترل کلاسیک میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی دارد. عباسی و میلر^[۱۵] یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی بر اساس انحراف میانگین^{۱۱} را برای پایش پراکندگی فرایند ارائه کردند؛ این نمودار کنترل عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل انحراف میانگین برای فرایندهایی با توزیع‌های متقارن و نامتقارن دارد. اخیراً ریاض و همکاران^[۱۶] نمودار کنترل ترکیبی جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی^{۱۲} با نام اختصاری MCE را ارائه کردند که برعکس نمودار MEC طراحی شده است و در آن آماره‌ی نمودار کنترل جمع تجمعی ورودی نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی است.

تمرکز اصلی در طراحی نمودارهای کنترل این است که نمونه‌گیری از فرایند اقتصادی و کارآمد باشد. از روش‌های نمونه‌گیری استفاده‌شده در پژوهش‌ها می‌توان به روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار^{۱۳} اشاره کرد. این روش اولین بار توسط مک ایتایر^[۱۷] ارائه شد. سالازار و سینها^[۱۸] از این روش نمونه‌گیری برای طراحی نمودارهای کنترل استفاده کردند. آنها نشان دادند که الگوهای بر اساس نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار کارآمدتر از الگوی نمونه‌گیری تصادفی ساده^{۱۴} است، وقتی که در مورد اندازه‌گیری دقیق مشخصه‌های کیفی که بسیار پرهزینه است یا در مورد محصولاتی که شکست در آنها بسیار گران‌قیمت و ساخت آنها سخت است بحث می‌شود. در همین راستا الصباح^[۱۹] طراحی نمودار کنترل جمع تجمعی را برای پایش میانگین فرایند بر اساس روش مجموعه‌ی رتبه‌دار برای بهبود عملکرد این نمودار

نمودار کنترل آماری نمودار کنترل کلاسیک EWMA به عنوان ورودی نمودار کنترل کلاسیک CUSUM در نظر گرفته می شود.

$$MEC_t^+ = \max [0, (Z_t - \mu_0) - a_t + MEC_{t-1}^+]$$

$$MEC_t^- = \max [0, -(Z_t - \mu_0) - a_t + MEC_{t-1}^-] \quad (8)$$

در رابطه ی a_t مقدار مأخذ است که وابسته به زمان است، MEC_t^+ و MEC_t^- آماره های CUSUM هستند که به ترتیب برای کشف تغییرات افزایشی و کاهشیی استفاده می شوند. همچنین $MEC_t^+ = MEC_t^- = 0$ بر اساس آماری EWMA به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda \bar{X}_t \quad (9)$$

مقدار اولیه ی $Z_0 = \mu_0$ است. میانگین و واریانس آماری Z_t برابر است با:

$$E(Z_t) = \mu_0,$$

$$\text{Var}(Z_t) = \frac{\sigma^2}{m} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 - (1-\lambda)^{2t} \right) \right) \quad (10)$$

آماره های MEC_t^+ و MEC_t^- در مقابل حد کنترل b_t رسم می شوند. زمانی که مقادیر MEC_t^+ و MEC_t^- در داخل حد کنترل رسم شوند فرایند در حالت تحت کنترل است و در غیر این صورت فرایند خارج از کنترل اعلام می شود. اگر MEC_t^+ بالاتر از b_t رسم شود گفته می شود که میانگین فرایند به بالاتر از مقدار هدف منتقل شده است، و اگر MEC_t^- بالاتر از b_t رسم شود گفته می شود که میانگین فرایند به پایین تر از مقدار هدف منتقل شده است. دو مقدار a_t و b_t به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a_t = a^* \times \sqrt{\text{Var}(Z_t)} = a^* \sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 - (1-\lambda)^{2t} \right)}$$

$$b_t = b^* \times \sqrt{\text{Var}(Z_t)} = b^* \sigma_{\bar{X}} \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda} \left(1 - (1-\lambda)^{2t} \right)} \quad (11)$$

a^* و b^* مقادیر ثابت مانند مقادیر h و k (مقدار مأخذ h حد کنترل) در نمودار کنترل کلاسیک CUSUM هستند. انتخاب مقادیرهای a^* و b^* بسیار مهم اند، چون تأثیر زیادی بر روی عملکرد CUSUM دارند.^[۱۲]

مقادیر a_t و b_t با توجه به واریانس آماری EWMA تعیین می شود. برای یک مقدار ثابت از a^* مقدار b^* را می توان با استفاده از شبیه سازی به گونه یی تعیین کرد که $ARL = 15$ دلخواه به دست آید. ARL متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل است که برای برآورد عملکرد نمودارهای کنترل استفاده می شود. معمولاً مقدار a^* را نصف اندازه ی تغییر در نظر می گیرند (برحسب انحراف Z_t).

۲.۳. نمودار کنترل کلاسیک ترکیبی MCE

نمودار کنترل CUSUM-EWMA با نام اختصاری MCE هم یک ترکیب از نمودارهای CUSUM و EWMA است. اما بر عکس الگوی MEC است؛ یعنی در این نمودار کنترل آماری نمودار کنترل کلاسیک CUSUM به عنوان ورودی نمودار کنترل EWMA در نظر گرفته می شود. نمودار MCE مبتنی بر دو آماره است:

$$MCE_t^+ = (1 - \lambda_c)MCE_{t-1}^+ + \lambda_c C_t^+$$

$$MCE_t^- = (1 - \lambda_c)MCE_{t-1}^- + \lambda_c C_t^- \quad (12)$$

$f(x)$ است. برآورد نمونه گیری تصادفی ساده از μ برابر با $\bar{X}_{SRS} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ با واریانس $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{m}$ است.

با واریانس $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{m}$ است. m نمونه گیری تصادفی ساده با اندازه ی هر کدام m است.

نشان دهنده آماری مرتبه دار $X_{i(1:m)}, X_{i(2:m)}, \dots, X_{i(m:m)}$ با استفاده از الگوی مجموعه ی مرتبه دار است. آماره های مجموعه ی مرتبه دار با نشان دهنده ی مرتبه دار $X_{1(1:m)}, X_{2(1:m)}, \dots, X_{m(1:m)}$ نشان داده می شوند به گونه یی که $X_{i(i:m)}$ نشان دهنده ی مرتبه یی از i آمین مجموعه با اندازه ی m است.

تابع چگالی احتمالی آمین آماری مرتبه یی $f_{(i:m)}(x)$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ است و به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$f_{(i:m)}(x) = m \binom{m-1}{i-1} \{F(x)\}^{i-1} \{1 - F(x)\}^{m-i} f(x), \quad (1)$$

بر این اساس میانگین و واریانس $X_{(i:m)}$ برابر است با:

$$\mu_{(i:m)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(i:m)}(x) dx \quad (2)$$

$$\sigma_{(i:m)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{(i:m)})^2 f_{(i:m)}(x) dx \quad (3)$$

در نتیجه برآورد مجموعه ی مرتبه دار از میانگین جامعه برابر است با:

$$\bar{X}_{RSS} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i(i:m)}, \quad (4)$$

با واریانس:

$$\text{Var}(\bar{X}_{RSS}) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sigma_{(i:m)}^2 = \frac{\sigma^2}{m} - \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu_0)^2 \quad (5)$$

μ_0 و σ_0 به ترتیب میانگین و انحراف معیار فرایند در حالت تحت کنترل هستند. تاکاهاشی و واکی موتو^[۱۱] با استفاده از رابطه ی $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_{(i:t)}$ نشان دادند که \bar{X}_{RSS} یک برآورد بدون اریب از μ_0 است:

$$E(\bar{X}_{RSS}) = \frac{1}{m} E\left(\sum_{i=1}^m X_{i(i:m)}\right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \mu_{(i:m)}\right) = \mu_0, \quad (6)$$

همچنین می توان رابطه ی ۵ را به صورت رابطه ی ۷ باز نویسی کرد و نشان داد که $\text{Var}(\bar{X}_{RSS}) < \text{Var}(\bar{X}_{SRS})$ است.

$$\text{Var}(\bar{X}_{RSS}) = \text{Var}(\bar{X}_{SRS}) - \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu_0)^2 \quad (7)$$

۳. نمودارهای کنترل ترکیبی کلاسیک موجود MEC و MCE

۱.۳. نمودار کنترل ترکیبی کلاسیک MEC

نمودار EWMA-CUSUM با نام MEC با انگیزه ی بهبود حساسیت نمودارهای کنترل به خصوص برای کشف تغییرات کوچک در فرایند ارائه شده است. در این

مقدار \bar{X}_{RSS} برابر با میانگین نمونه بر اساس نمونه‌گیری RSS است. مقدار اولیه‌ی $Z_{RSS,0} = 0$ است. میانگین و واریانس آماره Z_{RSS} برابر است با:

$$E(Z_{RSS,t}) = \mu_0, \quad (17)$$

$$\text{Var}(Z_{RSS,t}) = \left[\frac{\lambda}{2-\lambda} \left(1 - (1-\lambda)^{2t} \right) \right] \text{Var}(\bar{X}_{RSS,t})$$

$$\text{Var}(\bar{X}_{RSS,t}) = \text{Var}(\bar{X}_{RSS}) = \frac{\sigma_0^2}{m} - \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m (\mu_{(i:m)} - \mu_0)^2. \quad (18)$$

آماره‌های $MEC_{RSS,0}^+$ و $MEC_{RSS,0}^-$ در مقابل حد کنترلی b'_t رسم می‌شوند. دو مقدار a'_t و b'_t به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a'_t = a'^* \times \sqrt{\text{Var}(Z_{RSS,t})} \\ b'_t = b'^* \times \sqrt{\text{Var}(Z_{RSS,t})}. \quad (19)$$

a'^* و b'^* مقادیر ثابت مانند مقادیر h و k (مقدار مأخذ و h حد کنترلی) در نمودار کنترل کلاسیک CUSUM هستند. مقادیر a'_t و b'_t با توجه به واریانس آماره‌ی EWMA-RSS انتخاب می‌شوند. برای یک مقدار ثابت از a'^* مقدار b'^* را می‌توان با استفاده از شبیه‌سازی به گونه‌ی تعیین کرد که ARL_0 دلخواه به دست آید. معمولاً مقدار a'^* را نصف اندازه‌ی تغییر در نظر می‌گیرند. در این مقاله مقدار $a'^* = 0.5$ در نظر گرفته شده است؛ زیرا باعث حساسیت بیشتر نمودار کنترل CUSUM به‌خصوص برای تغییرات کوچک می‌شود. [23]

۲.۴. نمودار کنترل ترکیبی MCE با الگوی نمونه‌گیری RSS (MCE-RSS)

در این بخش نمودار کنترل ترکیبی CUSUM-EWMA با الگوی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار با نام اختصاری MCE-RSS به‌منظور افزایش کارایی نمودار کلاسیک CUSUM-EWMA ارائه شده است. در این نمودار کنترل ترکیبی آماره‌ی نمودار کنترل کلاسیک CUSUM-RSS [19] به‌عنوان ورودی نمودار کنترل کلاسیک EWMA در نظر گرفته شده است.

$$MCE_{RSS,t}^+ = \lambda_c C_{RSS,t}^+ + (1 - \lambda_c) MCE_{RSS,t-1}^+ \\ MCE_{RSS,t}^- = \lambda_c C_{RSS,t}^- + (1 - \lambda_c) MCE_{RSS,t-1}^-. \quad (20)$$

λ_c پارامتر هموارسازی نمودار کنترل MCE-RSS است. $C_{RSS,t}^+$ و $C_{RSS,t}^-$ آماره‌های نمودار کنترل CUSUM-RSS هستند.

$$C_{RSS,t}^+ = \max [0, (\bar{X}_{RSS,t} - \mu_0) - k + C_{RSS,t-1}^+] \\ C_{RSS,t}^- = \max [0, -(\bar{X}_{RSS,t} - \mu_0) - k + C_{RSS,t-1}^-]. \quad (21)$$

k مقدار مأخذ و معمولاً حدود نصف مقدار اختلاف بین مقدار μ_0 و مقدار میانگین در حالت خارج از کنترل μ_1 انتخاب می‌شود. اگر تغییر δ در واحد انحراف معیار به صورت $\delta = |\mu_1 - \mu_0| / \delta \bar{X}_{RSS}$ بیان شود آنگاه k برابر با نصف تغییر یا مقدار زیر است:

$$k = \frac{\delta}{2} \sigma \bar{X}_{RSS} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}, \quad (22)$$

C_t^+ و C_t^- آماره‌های نمودار کنترل کلاسیک هستند. $0 < \lambda_c \leq 1$ پارامتر هموارسازی است. مقدار اولیه برای آماره‌های روابط بالا برابر است با میانگین آماره‌های کلاسیک C_t^+ و C_t^- ($MCE_t^+ = MCE_t^- = \mu_c$). میانگین واریانس آماره‌های کلاسیک در حالت تحت کنترل متغیر با زمان t هستند. زمانی که t به سمت بی‌نهایت میل کند ($t \rightarrow \infty$), میانگین آماره‌های C_t^+ و C_t^- برابر با مقدار ثابت μ_c خواهد بود. همچنین این موضوع برای واریانس C_t^+ و C_t^- نیز صادق است. برای حالت $t \rightarrow \infty$ داریم:

$$E(C_t^+) = E(C_t^-) = \mu_c \\ \text{Var}(C_t^+) = \text{Var}(C_t^-) = \sigma_c^2, \quad (13)$$

با استفاده از این میانگین و واریانس، حد کنترل بالای نمودار کنترل MCE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$UCL_t = \mu_c + L_c \sigma_c \sqrt{\frac{\lambda_c}{2-\lambda_c} \left(1 - (1-\lambda_c)^{2t} \right)}. \quad (14)$$

L_c ضریب حد کنترل بالای نمودار کنترل MCE است که با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌ی تعریف می‌شود که ARL_0 دلخواه به دست آید. هر تغییر در جهت مثبت با MCE_t^+ بررسی خواهد شد. در صورتی که مقدار MCE_t^+ از حد کنترل بالا بیشتر شود میانگین فرایند یک تغییر به سمت بالا خواهد داشت. به‌طور مشابه هر تغییر منفی توسط MCE_t^- شناسایی می‌شود. چنانچه مقدار MCE_t^- فراتر از حد کنترل بالا برود، میانگین فرایند یک تغییر به سمت پایین خواهد داشت.

۴. نمودارهای کنترل ترکیبی پیشنهادی MEC و MCE تحت الگوی نمونه‌گیری RSS

۱.۴. نمودار کنترل ترکیبی MEC پیشنهادی تحت الگوی نمونه‌گیری RSS (MEC-RSS)

در این بخش نمودار کنترل ترکیبی EWMA-CUSUM (RSS) با نام اختصاری MEC-RSS با هدف بهبود حساسیت نمودار کنترل ترکیبی EWMA-CUSUM کلاسیک ارائه شده است. در این نمودار کنترل پیشنهادی آماره‌ی نمودار EWMA-RSS به‌عنوان ورودی نمودار کنترل کلاسیک CUSUM در نظر گرفته می‌شود.

$$MEC_{RSS,t}^+ = \max [0, (Z_{RSS,t} - \mu_0) - a'_t + MEC_{RSS,t-1}^+] \\ MEC_{RSS,t}^- = \max [0, -(Z_{RSS,t} - \mu_0) - a'_t + MEC_{RSS,t-1}^-]. \quad (15)$$

در رابطه‌ی ۱۵، مقدار مأخذ وابسته به زمان است، $MEC_{RSS,t}^+$ و $MEC_{RSS,t}^-$ به ترتیب آماره‌های بالا و پایین CUSUM هستند، همچنین:

$$MEC_{RSS,0}^- = MEC_{RSS,0}^+ = 0$$

بر اساس آماره EWMA-RSS [18] مقدار $Z_{RSS,t}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{RSS,t} = \lambda \bar{X}_{RSS} + (1 - \lambda) Z_{RSS,t-1}. \quad (16)$$

جدول ۳. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل EWMA(SRS) با $ARL_0 = 200$ تحت تغییر پله‌یی از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$.

$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.1$	δ
$L = 2,803$	$L = 2,799$	$L = 2,683$	$L = 2,445$	0
200,49	201,86	201,7	201,73	0,25
67,24	46,32	29,72	22,71	0,5
17,58	11,66	8,65	8,52	0,75
6,68	5,02	4,60	5,20	1
3,44	3,03	3,15	3,79	2
1,14	1,22	1,53	2,02	3
1,001	1,003	1,01	1,35	

جدول ۴. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل EWMA(RSS) با $ARL_0 = 200$ تحت تغییر پله‌یی از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$.

$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.1$	δ
$L = 2,803$	$L = 2,799$	$L = 2,683$	$L = 2,445$	0
199,14	200,80	200,41	199,53	0,25
32,54	20,82	13,83	12,19	0,5
6,42	4,89	4,48	5,09	0,75
2,61	2,46	2,69	3,28	1
1,58	1,67	2,002	2,48	2
1,006	1,001	1,02	1,31	3
1	1	1	1,002	

جدول ۵. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل EWMA-CUSUM(SRS) با $ARL_0 = 200$ و $a^* = 0.5$ تحت تغییر پله‌یی از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$.

$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.1$	δ
$b = 5,82$	$b = 8,56$	$b = 14,34$	$b = 23,4$	0
200,32	199,74	200,64	198,71	0,25
25,24	23,83	23,91	26,86	0,5
8,78	9,38	11,18	14,77	0,75
5,29	6,05	7,85	11,02	1
3,17	4,63	6,27	9,09	2
2,10	2,73	3,94	5,94	3
1,7	2,01	3,01	4,79	

جدول ۶. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل EWMA-CUSUM(RSS) با $ARL_0 = 200$ و $a^* = 0.5$ تحت تغییر پله‌یی از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$.

$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.1$	δ
$b = 5,8$	$b = 8,58$	$b = 14,37$	$b = 23,5$	0
200,92	199,32	201,14	201,59	0,25
12,92	13,07	14,60	18,27	0,5
5,16	5,93	7,72	10,87	0,75
3,38	4,11	5,67	8,34	1
2,59	3,28	4,64	6,96	2
1,66	2,01	3,01	4,73	3
1,004	1,9	2,15	3,95	

که $\sigma_{\bar{X}_{RSS}}^2$ در رابطه ۵ تعریف شده است. مقادیر اولیه برای آماره‌های رابطه ۲۰ با میانگین $C_{RSS,t}^+, C_{RSS,t}^-$ برابر است μ_c $MCE_{RSS,0}^+ = MCE_{RSS,0}^- = \mu_c$. اگر مقدار t بسیار زیاد شود ($t \rightarrow \infty$) آنگاه:

$$E(C_{RSS,t}^+) = E(C_{RSS,t}^-) = \mu_{eRSS}$$

$$Var(C_{RSS,t}^+) = Var(C_{RSS,t}^-) = \sigma_{eRSS}^2 \quad (23)$$

CUSUM μ_{eRSS} و σ_{eRSS} برابر با میانگین و انحراف معیار نمودار کنترل کلاسیک CUSUM با الگوی نمونه‌گیری RSS هستند. با استفاده از این میانگین و واریانس، حد کنترل بالای نمودار کنترل MCE-RSS به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$UCL = \mu_{eRSS} + L_c \sigma_{eRSS} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda_c)^{2t})} \quad (24)$$

L_c ضریب حد کنترل نمودار کنترل ترکیبی MCE-RSS است که با استفاده از شبیه‌سازی به گونه‌یی تعیین شده است که ARL_0 مطلوب به دست آید.

۵. مقایسه‌ی عملکرد

در این بخش عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی MCE-RSS و MEC-RSS با نمودارهای کنترل کلاسیک پیشین برای پایش میانگین فرایند تحت تغییرات مختلف δ (میزان تغییر در میانگین برحسب انحراف معیار) مقایسه شده است.

در این مقاله به منظور مقایسه‌ی عملکرد نمودارهای کنترل کلاسیک و نمودارهای کنترل پیشنهادی از هر دو نوع روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و مجموعه‌ی رتبه‌دار با اندازه‌ی نمونه‌ی $m = 4$ استفاده شده و تمام مشاهدات بر اساس توزیع نرمال استاندارد تولید شده است. عملکرد هر کدام از نمودارهای کنترل بر اساس ARL_1 در حالت خارج از کنترل تحت تغییرات $0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ محاسبه شده است (مقدار میانگین از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$ تغییر می‌کند). مقدار ARL_0 در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو با استفاده از نرم‌افزار متلب محاسبه شده و شبیه‌سازی 50000 بار برای برآورد متوسط طول دنباله تکرار شده است. مقدار ARL_0 نمودارهای کنترل با استفاده از مقادیر $0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ برابر با 200 در نظر گرفته شده است. همچنین برای نمودارهای کنترل ترکیبی جمع‌نجمعی مقادیر a^* و k برابر 0.5 در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده برای عملکرد نمودارهای کنترل در جدول‌های ۱ تا ۸ نشان داده شده است. مقدار ARL_1 برای نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS در جدول ۶ و برای نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS در جدول ۸ نشان داده شده است.

در جدول ۱ مقدار ARL_1 برای نمودار کنترل CUSUM-SRS گزارش شده است. پارامترهای نمودار کنترل CUSUM-RSS به منظور رسیدن به مقدار ARL_0

جدول ۱. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل CUSUM(SRS) با $ARL_0 = 200$ ، $k = 0.5$ تحت تغییر پله‌یی از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$.

δ	0	0.25	0.5	0.75	1	2	3
$h = 1,107$	199,36	29,23	11,43	4,85	2,96	1,22	1,003

جدول ۲. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل CUSUM(RSS) با $ARL_0 = 200$ ، $k = 0.5$ تحت تغییر پله‌یی از μ_0 به $\mu_0 + \delta\sigma_0$.

δ	0	0.25	0.5	0.75	1	2	3
$h = 0,445$	200,25	35,94	6,43	2,51	1,55	1,005	1

در تمام تغییرات از نمودار کنترل EWMA-SRS کوچک تر است. همچنین نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS در تمام تغییرات مقدار ARL کمتری از نمودار کنترل EWMA-SRS دارد. به خصوص برای مقادیر بزرگ λ عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS از نمودار کنترل EWMA-SRS بهتر است.

در جدول ۴ مقدار ARL برای نمودار کنترل EWMA-RSS نشان داده شده است. در جدول ۴ نیز برای هر مقدار ثابت λ مقدار L (ضریب حد کنترل نمودار کنترل EWMA-RSS) با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌ی تعیین شده است که $ARL_0 = 1000$ دلخواه حاصل شود. مقایسه‌ی نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS با نمودار کنترل EWMA-RSS نشان می‌دهد که نمودار کنترل پیشنهادی در تغییرات کوچک برای مقادیر بزرگ λ عملکرد بسیار بهتری دارد. همچنین از مقایسه‌ی عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS با نمودار کنترل EWMA-RSS می‌توان نتیجه گرفت که برای تمام مقادیر λ در تغییرات بزرگ $\delta \geq 0.75$ نمودار کنترل پیشنهادی عملکرد بهتری دارد.

در جدول ۵ مقدار ARL برای نمودار کنترل MEC-SRS نشان داده شده است؛ براساس مقدار ثابت $a^* = 0.5$ برای هر مقدار λ مقدار b^* (حد بالای نمودار کنترل MEC-SRS) را می‌توان با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌ی تعیین کرد که ARL_0 دلخواه به دست آید. همچنین در جدول ۷ مقدار ARL برای نمودار کنترل MCE-SRS نشان داده شده است که بر اساس مقدار ثابت $k = 0.5$ برای هر مقدار از λ مقدار L_c (ضریب حد کنترل نمودار کنترل MCE-SRS) را می‌توان با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌ی تعیین کرد که ARL_0 دلخواه به دست آید. از مقایسه‌ی بین این دو نمودار کنترل ترکیبی با نمودارهای کنترل ترکیبی پیشنهادی بر اساس الگوی نمونه‌گیری RSS می‌توان نتیجه گرفت که طراحی هر دو نوع نمودار کنترل ترکیبی MEC و MCE بر اساس الگوی نمونه‌گیری RSS باعث بهبود چشم‌گیری در عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی برای تمام مقادیر λ در تمام تغییرات کوچک، بزرگ و متوسط می‌شود.

جدول ۶ نشان‌دهنده‌ی مقدار ARL برای نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS و جدول ۸ نشان‌دهنده‌ی مقدار ARL برای نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS است. مانند نمودارهای کنترل کلاسیک پیشین برای هر مقدار از λ مقدار L_c (ضریب حد کنترل نمودار کنترل MCE-RSS) و مقدار b^* (حد بالای نمودار کنترل MEC-RSS) را با استفاده از شبیه‌سازی می‌توان به‌گونه‌ی تعیین کرد که ARL_0 دلخواه به دست آید. از مقایسه‌ی مقدار ARL خارج از کنترل برای دو نمودار پیشنهادی می‌توان نتیجه گرفت که برای تمام مقادیر λ در تغییرات $\delta \leq 0.25$ عملکرد نمودار کنترل MEC-RSS از نمودار کنترل MCE-RSS بهتر است. ولی برای سایر تغییرات $\delta \geq 0.5$ عملکرد نمودار کنترل MCE-RSS بهتر است.

برای فراهم کردن یک نمای کلی برای مقایسه‌ی طرح‌های پیشنهادی و سایر نمودارهای کنترل هم‌تای موجود، منحنی‌های ARL ترسیم شده است. سه منحنی متفاوت از نمودارها و الگوهای مطرح شده در این مقاله (با توجه به جدول‌های ۱ تا ۸) در شکل‌های ۱ تا ۳ رسم شده است.

شکل ۱ نشان‌دهنده‌ی تفاوت در مقدار ARL نمودارهای کنترل کلاسیک MEC-SRS و MCE-SRS با نمودارهای کنترل کلاسیک EWMA-SRS و CUSUM-SRS است. شکل ۲ مقدار ARL نمودارهای کنترل پیشنهادی MEC-RSS و MCE-RSS و نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM براساس الگوی RSS را نشان می‌دهد. شکل ۳ نشان‌دهنده‌ی مقایسه‌ی ARL نمودارهای کنترل پیشین MEC و MCE با الگوی نمونه‌گیری SRS و نمودارهای کنترل پیشنهادی جدید MEC و MCE با الگوی نمونه‌گیری RSS است. با توجه به شکل ۱

جدول ۷. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل CUSUM-EWMA(SRS) با $ARL_0 = 2000$ و $k = 0.5$ تحت تغییر پله‌ی μ_0 به $\mu_1 + \delta\sigma_0$.

$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.1$	δ
$L = 6.66$	$L = 7.03$	$L = 6.8$	$L = 5.41$	0
۱۹۹/۴۲	۱۹۸/۴۸	۲۰۱/۵	۲۰۰/۰۳	۰
۴۶/۰۶	۴۳/۷۸	۴۰/۶۱	۳۵/۱۵	۰/۲۵
۱۰/۹۵	۱۰/۴۶	۱۰/۱۵	۹/۶۳	۰/۵
۴/۷۶	۴/۷۹	۴/۸۲	۴/۵	۰/۷۵
۲/۹۸	۳/۰۷	۳/۲۰	۳/۳۶	۱
۱/۳	۱/۴۶	۱/۷۴	۱/۹۴	۲
۱/۰۰۵	۱/۰۲	۱/۰۸	۱/۲۶	۳

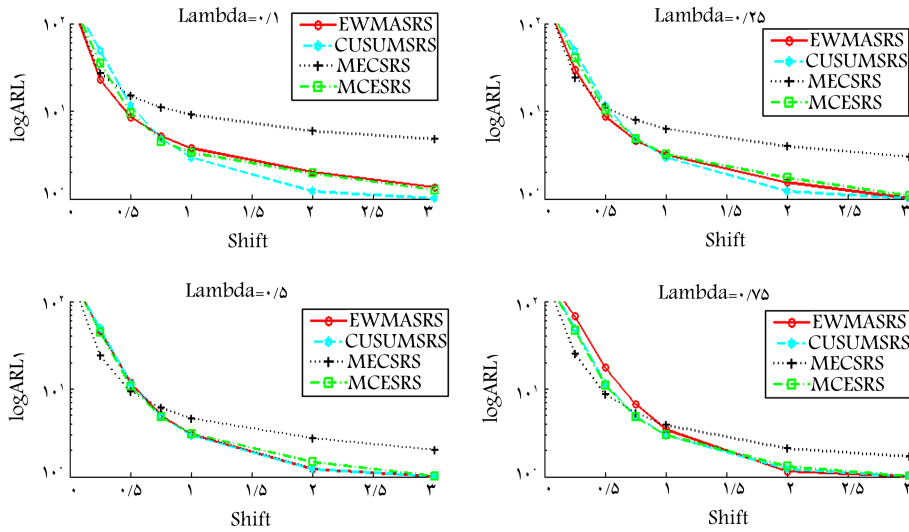
جدول ۸. مقادیر ARL_1 نمودار کنترل CUSUM-EWMA(RSS) با $ARL_0 = 2000$ و $k = 0.5$ تحت تغییر پله‌ی μ_0 به $\mu_1 + \delta\sigma_0$.

$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.1$	δ
$L = 9.68$	$L = 9$	$L = 7.5$	$L = 5.43$	0
۲۰۱/۹۷	۲۰۰/۶۸	۱۹۹/۵	۲۰۰/۶۸	0
۳۳/۰۱	۲۹/۸۸	۲۶/۲۲	۲۲/۹۵	۰/۲۵
۶/۰۴	۵/۷۲	۵/۳۴	۵/۲۲	۰/۵
۲/۴۸	۲/۴۵	۲/۴۴	۲/۵۰	۰/۷۵
۱/۵۵	۱/۵۷	۱/۶۲	۱/۶۹	۱
۱/۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۲	۲
۱	۱	۱	۱	۳

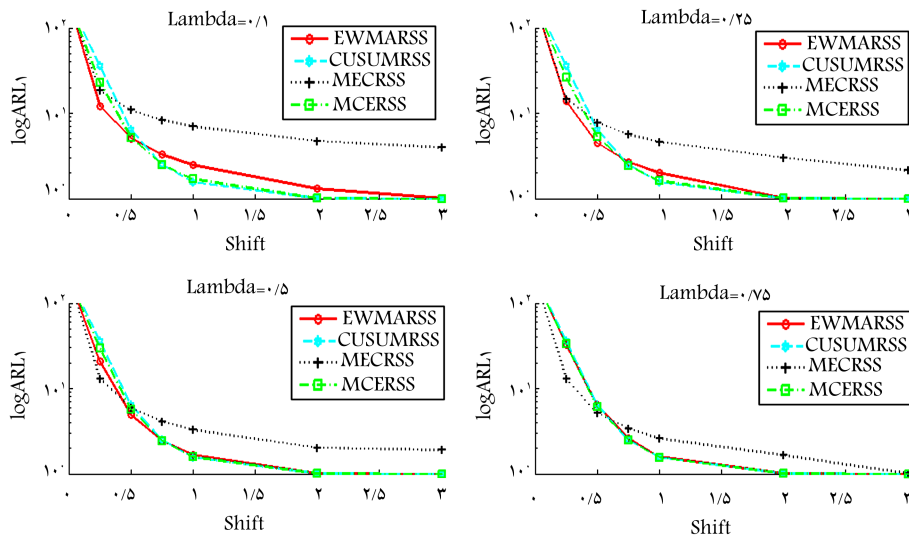
دلخواه برابر با $k = 0.5$ و $h = 1.107$ تنظیم شده است. مقایسه‌ی نمودارهای کنترل پیشنهادی با نمودار کنترل CUSUM-SRS نشان می‌دهد که نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS برای تمام مقادیر λ در تمام تغییرات بسیار بهتری نسبت به نمودار کنترل CUSUM-SRS دارد. همچنین برای تمام مقادیر λ در تغییرات کوچک $\delta \leq 0.75$ مقدار ARL نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS از نمودار CUSUM-SRS کمتر است.

در جدول ۲ مقدار ARL برای نمودار کنترل CUSUM-RSS نشان داده شده است. پارامترهای نمودار کنترل CUSUM-RSS به منظور دست‌یافتن به مقدار ARL_0 دلخواه برابر با $k = 0.5$ و $h = 0.445$ قرار داده شده است. مقایسه‌ی نمودارهای کنترل پیشنهادی با نمودار CUSUM-RSS نشان می‌دهد که نمودار پیشنهادی MEC-RSS برای تمام مقادیر λ به خصوص مقادیر کوچک λ عملکرد بسیار بهتری در تغییرات کوچک $\delta \leq 0.25$ دارد. از مقایسه‌ی عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS با نمودار کنترل CUSUM-RSS می‌توان نتیجه گرفت که در تمام مقادیر λ برای همه‌ی تغییرات کوچک، بزرگ و متوسط عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی از نمودار کنترل کلاسیک CUSUM-RSS بهتر است.

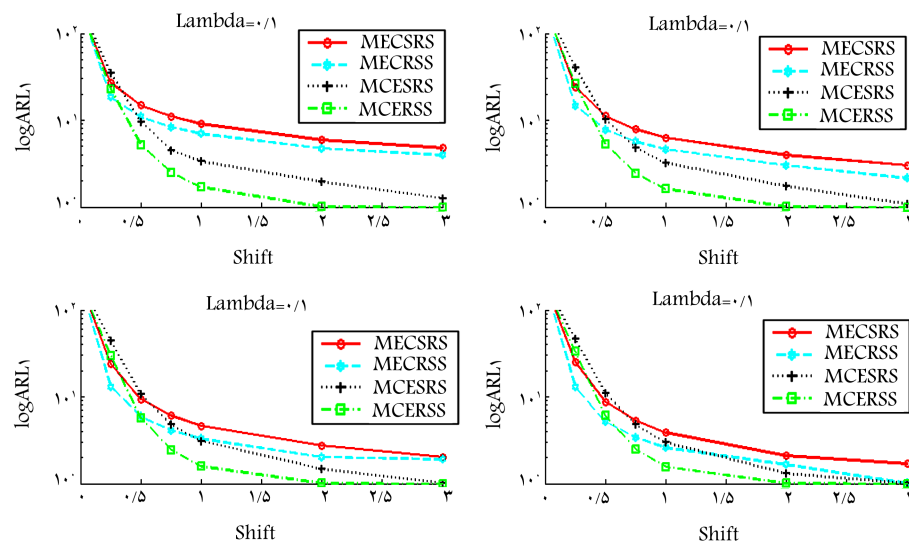
در جدول ۳ مقدار ARL برای نمودار کنترل EWMA-SRS نشان داده شده است. در جدول ۳ برای هر مقدار ثابت λ مقدار L (ضریب حد کنترل نمودار کنترل EWMA-SRS) با استفاده از شبیه‌سازی به‌گونه‌ی تعیین شده است که ARL_0 دلخواه به دست آید. مقایسه‌ی نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS با نمودار کنترل EWMA-SRS نشان می‌دهد که نمودار کنترل پیشنهادی در تغییرات کوچک $\delta \leq 0.75$ برای تمام مقادیر λ به خصوص مقادیر کوچک λ عملکرد بسیار بهتری دارد. برای مقادیر بزرگ λ مقدار ARL نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS



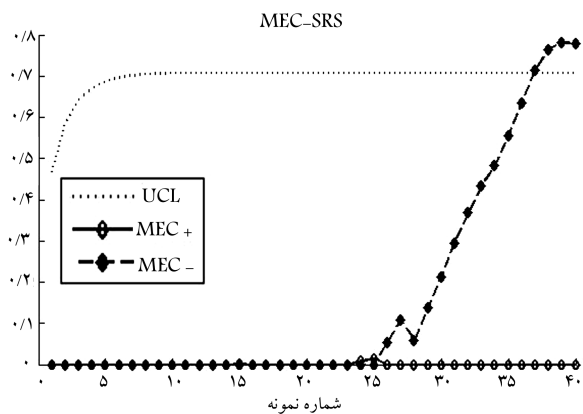
شکل ۱. منحنی $\log ARL_1$ برای نمودارهای EWMA-SRS و CUSUM-SRS، MCE-SRS، MEC-SRS با $ARL_0 = 200$.



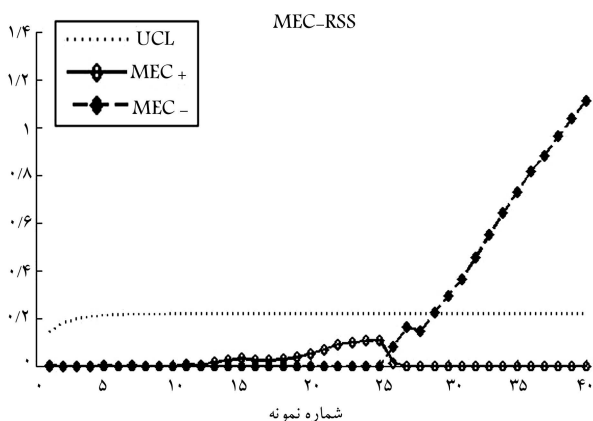
شکل ۲. منحنی $\log ARL_1$ برای نمودارهای EWMA-RSS و CUSUM-RSS، MCE-RSS، MEC-RSS با $ARL_0 = 200$.



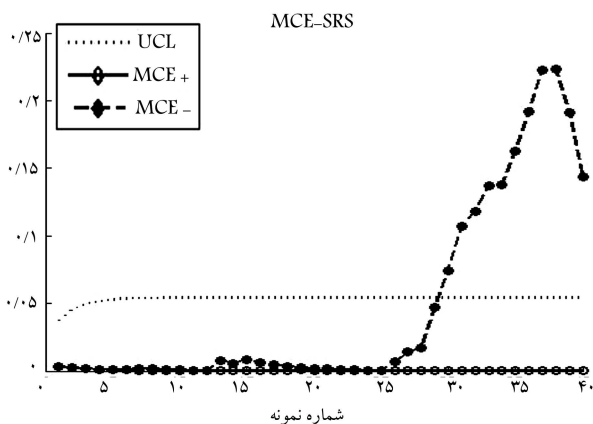
شکل ۳. منحنی $\log ARL_1$ برای نمودارهای MEC-SRS، MCE-SRS، MEC-RSS، MCE-RSS با مقدار ثابت $ARL_0 = 200$.



شکل ۴. نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی بر اساس الگوی نمونه‌گیری SRS با $b = 14/41, a^* = 0/5, \lambda = 0/25$ و $ARL_0 = 200$.



شکل ۵. نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی بر اساس الگوی نمونه‌گیری RSS با $b = 14/41, a^* = 0/5, \lambda = 0/25$ و $ARL_0 = 200$.



شکل ۶. نمودار کنترل جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی بر اساس الگوی نمونه‌گیری SRS با $L = 6/2, k = 0/5, \lambda = 0/25$ و $ARL_0 = 200$.

الگوی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار نسبت به طراحی آن بر اساس الگوی نمونه‌گیری ساده‌ی تصادفی باعث افزایش حساسیت این نمودار برای کشف تغییر در فرایند می‌شود.

در مجموع بر اساس شکل‌های ۴ تا ۷ می‌توان نتیجه گرفت که نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS در کشف تغییر مورد بررسی دارای بهترین عملکرد است.

زمانی که از الگوی نمونه‌گیری SRS استفاده می‌شود، برای مقادیر بزرگ λ در تغییرات کوچک نمودارهای کنترل ترکیبی MEC و MCE عملکرد بهتری از دو نمودار کنترل CUSUM و EWMA دارند. با افزایش تغییر برای تمام مقادیر λ سطح عملکرد نمودار کنترل MEC کاهش می‌یابد؛ اما نمودار کنترل MCE همچنان عملکرد نسبتاً خوبی دارد. شکل ۲ نشان‌دهنده‌ی این است که با استفاده از الگوی نمونه‌گیری RSS عملکرد نمودار کنترل ترکیبی پیشنهادی MEC برای مقادیر بزرگ λ در تغییرات کوچک بهتر از هر کدام از نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM و MCE است. همچنین از شکل ۲ می‌توان نتیجه گرفت که برای تغییرات متوسط و بزرگ در تمام مقادیر λ عملکرد نمودار کنترل ترکیبی پیشنهادی MCE از سه نمودار کنترل دیگر بهتر است. از شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت که اولاً استفاده از الگوی نمونه‌گیری RSS عملکرد هر دو نمودار کنترل ترکیبی MEC و MCE را افزایش می‌دهد. ثانیاً برای تمام مقادیر λ در تغییرات متوسط و بزرگ عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS از نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS و نمودارهای کنترل کلاسیک MCE-SRS و MEC-SRS بسیار بهتر است. اما در تغییرات کوچک برای تمام مقادیر λ عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS از سه نمودار دیگر بهتر است.

۶. مطالعه موردی

در این قسمت برای درک بهتر عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی MEC-RSS و MCE-RSS در شرایط واقعی از یک مطالعه‌ی موردی استفاده شده است. در این مقاله یک فرایند پخت - سخت 16° که در عکاسی برای تولید نیمه‌هادی استفاده می‌شود انتخاب شده و 50 نمونه هر یک با اندازه‌ی 5 با فاصله‌ی زمانی یک ساعت از این فرایند گرفته شده است. اطلاعات کامل در ارتباط با داده‌ها در مونتگومری [۲۲] آورده شده است.

به منظور اجرای نمونه‌گیری ساده‌ی تصادفی و نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار تمام این پنجاه نمونه با یکدیگر ترکیب شده است تا 250 داده حاصل شود؛ سپس 25 نمونه هر کدام با اندازه‌ی 5 در شرایط تحت کنترل بودن فرایند و 15 نمونه در شرایط خارج از کنترل بودن فرایند با یک تغییر کوچک به اندازه $0/1$ با جای‌گذاری نمونه‌ها بر اساس هر دو روش نمونه‌گیری ساده تصادفی و مجموعه‌ی رتبه‌دار تولید شده است. در ادامه نمودارهای کنترل MEC-RSS، MEC-SRS، MCE-RSS و MCE-SRS برای پیش این فرایند طراحی شدند. در تمام این نمودارها مقدار ARL در حالت تحت کنترل برابر با $200, \lambda = 0/25$ و همچنین برای نمودارهای کنترل ترکیبی جمع تجمعی مقادیر a^* و k برابر $0/5$ در نظر گرفته شده است.

با توجه به شکل‌های ۴ و ۵، نمودار کنترل پیشنهادی MEC-RSS از نمونه ۲۹ و نمودار MEC-SRS از نمونه ۳۷ حالت خارج از کنترل را برای فرایند نشان می‌دهند. با توجه به نتایج به دست آمده از طراحی نمودار کنترل ترکیبی میانگین متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی، استفاده از روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار باعث افزایش حساسیت این نمودار در کشف حالت خارج از کنترل در فرایند می‌شود.

به صورت مشابه شکل‌های ۶ و ۷، نشان می‌دهند که نمودار کنترل پیشنهادی MCE-RSS از نمونه ۲۷ و نمودار کنترل MCE-SRS از نمونه ۳۰ حالت خارج از کنترل را برای فرایند نشان می‌دهند، بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که طراحی نمودار کنترل جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی بر اساس

متحرک موزون نمایی - جمع تجمعی برای پایش میانگین فرایندی که مشخصه‌ی کیفی آن از توزیع نرمال پیروی می‌کند، استفاده شده است. عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی و نمودارهای کنترل همسان موجود بر اساس یک مثال عددی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو در نرم‌افزار متلب مقایسه شد. همچنین عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی با تک‌تک نمودارهای کنترل کلاسیک مقایسه شد.

نتایج نشان داد که نمودارهای کنترل ترکیبی MCE و MEC در کشف تغییرات کوچک و متوسط فرایند از عملکرد مناسبی برخوردارند. علاوه بر این استفاده از الگوی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار به جای الگوی نمونه‌گیری ساده‌ی تصادفی باعث بهبود عملکرد این نمودارهای کنترل برای پایش میانگین فرایند می‌شود. در مجموع بر اساس نتایج شبیه‌سازی و مثال کاربردی می‌توان نتیجه گرفت که نمودار کنترل ترکیبی MEC-RSS در کشف تغییرات کوچک به‌خصوص برای مقادیر بزرگ λ عملکرد بهتری در مقایسه با نمودار کنترل ترکیبی MCE-RSS و نمودارهای کنترل کلاسیک میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی دارد؛ اما در تغییرات متوسط برای تمام مقادیر λ عملکرد نمودار کنترل ترکیبی MCE-RSS بهبود چشم‌گیری داشته است.

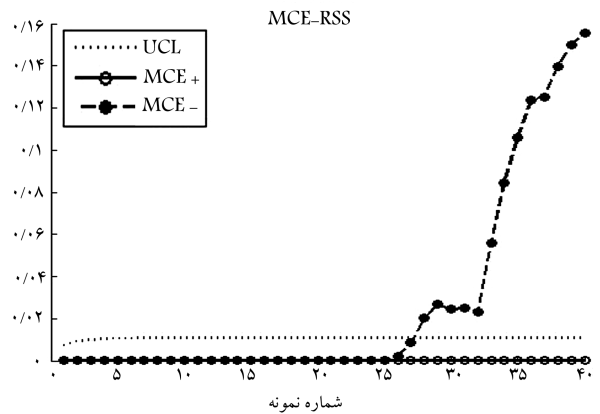
از آنجا که در این مقاله نمودارهای کنترل ترکیبی بر اساس الگوی RSS برای پایش میانگین فرایند طراحی شده‌اند، برای مطالعات آتی می‌توان از نمودارهای کنترل ترکیبی بر اساس الگوی RSS برای پایش واریانس فرایند بهره برد. همچنین می‌توان نمودارهای کنترل ترکیبی MEWMA-MCUSUM و MCUSUM-MEWMA را برای پایش هم‌زمان میانگین چند مشخصه‌ی کیفی توسعه داد.

پانویسها

1. Shewhart control chart
2. exponentially weighted moving average (EWMA)
3. cumulative sum (CUSUM)
4. fast initial response (FIR)
5. weighted
6. multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA)
7. generally weighted moving average (GWMA)
8. synthetic charts
9. conforming run length (CRL)
10. EWMA-CUSUM
11. mean absolute deviations (MD)
12. CUSUM-EWMA
13. ranked set sampling (RSS)
14. simple random sampling (SRS)
15. average run length (ARL)
16. hard-baking

منابع (References)

1. Shewhart, W.A. "Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data", *Bell System Technical Journal*, **3**(1), pp. 43-87 (1924).
2. Roberts, S.W. "Control chart tests based on geometric moving averages", *Technometrics*, **1**(3), pp. 239-250 (1959).
3. Page, E.S. "Cumulative sum charts", *Technometrics*, **3**(1), pp. 1-9 (1951).



شکل ۷. نمودار کنترل جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی بر اساس الگوی نمونه‌گیری RSS با $L = 6.2$, $k = 0.5$, $\lambda = 0.25$ و $ARL_0 = 200$.

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی آتی

به‌طور کلی هدف از انجام این مقاله، ارائه‌ی روش‌هایی برای بهبود عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی با استفاده از روش‌های نوین نمونه‌گیری به جای روش‌های ساده‌ی گذشته است. در این مقاله از روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار به‌منظور طراحی دو نمودار کنترل ترکیبی جمع تجمعی - میانگین متحرک موزون نمایی و میانگین

4. Lucas, J.M. "Combined shewhart-cusum quality control schemes", *Journal of Quality Technology*, **14**(2), pp. 51-59 (1982).
5. Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. "Exponentially weighted moving average control schemes properties and enhancements", *Technometrics*, **32**(1), pp.1-12 (1990).
6. Lucas, J. and Crosier, R.B. "Fast initial response for cusum quality-control scheme", *Technometrics*, **24**(3), pp. 199-205 (1982).
7. Steiner, S. "EWMA control charts with time varying control limits and fast initial response", *Journal of Quality Technology*, **31**(1), pp. 75-86 (1999).
8. Yashchin, E. "Weighted cumulative sum technique", *Technometrics*, **31**(1), pp. 321-338 (1989).
9. Linderman, K. and Love, T.E. "Economic and economic statistical designs for mewma control charts", *Journal of Quality Technology*, **32**(4), pp. 410-417 (2000).
10. Sheu, S.H. and Lin, T.C. "The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean", *Quality Engineering*, **16**(2), pp. 209-231 (2003).
11. Scariano, S.M. and Calzada, M.E. "The generalized synthetic chart", *Sequential Analysis: Design Methods and Applications*, **28**(1), pp. 54-68 (2009).
12. Riaz, M., Abbas, N. and Does, R.J.M.M. "Improving the performance of cusum charts", *Quality and Reliability Engineering International*, **27**(4), pp. 415-424 (2011).
13. Abbas, N. Riaz, and M. Does, R.J.M.M. "Enhancing the performance of ewma charts", *Quality and Reliability Engineering International*, **27**(6), pp. 821-833 (2011).

14. Abbas, N., Riaz, M. and Does, R.J.M.M. "Mixed exponentially weighted moving average-cumulative sum charts for process monitoring", *Quality and Reliability Engineering International*, **29**(3), pp. 345-356 (2012).
15. Abbasi, S.A. and Miller, A. "MDEWMA chart an efficient and robust alternative to monitor process dispersion", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**(2), pp. 247-268 (2013).
16. Riaz, M., Zaman, B., Abbas, N. and Does, R.J.M.M. "Mixed cumulative sum—exponentially weighted moving average control charts: an efficient way of monitoring process location", *Quality and Reliability Engineering International*, **31**(8), pp. 1407-1421 (2015).
17. McIntyre, G.A. "A method for unbiased selective sampling, using ranked sets", *Australian Journal of Agriculture Research*, **3**(4), pp. 385-390 (1952).
18. Salazar, R.D. and Sinha, A.K. "Control chart x-bar based on ranked set sampling", *Comunicacion Tecica*, No. 1-97-09 (PE/CIMAT) (1997).
19. Al-Sabah, W.S. "Cumulative sum statistical control charts using ranked set sampling data", *Pakistan Journal of Statistics*, **26**(2), pp. 365-378 (2010).
20. Haq, A., Brown, J., Moltchanova, E. and Al-Omari, A.I. "Improved exponentially weighted moving average control charts for monitoring process mean and dispersion", *Quality and Reliability Engineering International*, **31**(2), pp. 217-237 (2015).
21. Takahasi, K. and Wakimoto, K. "On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **20**(1), pp. 1-31 (1968).
22. Hawkins, D.M. and Olwell, D.H., *Cumulative Sum Charts and Charting Improvement*, Springer-Verlag, New York (2012).
23. Montgomery, D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th Edn, John Wiley & Sons, New York (2009).