

تحلیل رفتار شرکت‌های رقیب در بازار، با وجود تقاضای حساس به قیمت، زمان تدارک و میزان موجودی

آیدا حامی دیندار (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب
عطاالله طالعی‌زاده* (استادیار)
دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده فنی، دانشگاه تهران

این تحقیق به بررسی رفتار شرکت‌ها با وجود تقاضای حساس به قیمت، زمان تدارک و میزان موجودی می‌پردازد و فرض بر این است که کمبود مجاز نیست و تقاضای بازار تابعی از میزان موجودی و قیمت فروش کالا است. در سناریوی اول تأثیرات قیمت، زمان تدارک و موجودی در دست در رفتار یک شرکت به تنهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در سناریوی دوم رفتار شرکت‌های رقیب در بازار غیر انحصاری، با استفاده از رویکرد نش، تحلیل می‌شود. تصمیمات شرکت در مورد زمان مناسب تحویل، قیمت کالا و میزان موجودی به عنوان متغیرهای تصمیم مسئله به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که میزان سود شرکت را که هدف نهایی این مدل است، بیشینه کند. نهایتاً با تحلیل حساسیت مشخص می‌شود که با تنظیم پارامترهای کسب قیمت و کسب موجودی تقاضا می‌توان در مدیریت زمان تدارک و دستیابی به سود بیشینه اقدام کرد.

واژگان کلیدی: کنترل موجودی، قیمت‌گذاری، زمان تدارک، نظریه بازی.

۱. مقدمه

بسیاری از شرکت‌ها تصمیم‌گیری درباره‌ی زمان تدارک را تصمیم راهبردی مهمی می‌دانند و به‌منظور افزایش سوددهی برای تنظیم آن در تلاش‌اند. از طرفی در بازار رقابتی، ایجاد تناسب بین موجودی و زمان تدارک می‌تواند موجب کاهش هزینه‌ها شود. به‌علاوه قیمت‌گذاری در این‌گونه بازارها نیز می‌تواند بسیار تعیین‌کننده باشد. در سال‌های اخیر، پیرامون این موضوعات مطرح شده مطالعات متعددی صورت گرفته است که در ادامه به بیان برخی از آنها می‌پردازیم. در این بخش، سه شاخه‌ی تحقیقاتی شامل نقش زمان تدارک، موجودی و قیمت‌گذاری در سیستم‌های کنترل موجودی مرور شده است.

۱.۱. زمان تدارک

زمان تدارک متغیر بسیار مهمی در سیستم‌های کنترل موجودی محسوب می‌شود؛ پژوهش‌های فراوانی در مورد اهمیت زمان تدارک وجود دارد که هر یک به بررسی جنبه‌های متفاوت آن پرداخته‌اند. از جمله لی و شوارز^[۱] (۲۰۰۷) به بررسی یک سیستم با موجودی (Q,R)، پرداخته‌اند و با خنثی گرفتن عامل ریسک و نمایی فرض کردن تابع مطلوبیت نشان داده‌اند که نادرده گرفتن تأثیر زمان تدارک می‌تواند

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۷/۲۸، اصلاحیه ۱۳۹۶/۲/۲۰، پذیرش ۱۳۹۶/۳/۱۰

DOI:10.24200/J65.2018.20067

هزینه‌بر باشد. اما این هزینه می‌تواند با قراردادی ساده به راحتی کاهش یابد. حیدری و همکاران^[۲] (۲۰۰۸) در پژوهش خود تأثیر زمان تدارک را در یک زنجیره‌ی تأمین چهارسطحی، که به‌صورت سریالی در ارتباط هستند، بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش در واریانس زمان تدارک، در موجودی نوسان حاصل می‌شود. لو^[۳] (۲۰۰۹) زمان تدارک را به عنوان یک متغیر تصمیم در نظر گرفت و یک مدل مقدار سفارش اقتصادی را با امکان تخفیف در قیمت سفارش‌های مرجوعی پیشنهاد داد و زمان تدارک بهینه را به‌منظور کاهش قیمت‌های کلی به دست آورد. وو و همکاران^[۴] (۲۰۱۲) مدل پسر روزنامه فروش را با تحلیل دو عامل زمان تدارک بهینه و قیمت‌گذاری بررسی کرده‌اند. در پژوهش آنان تقاضای کالا به قیمت فروش و زمان تدارک بستگی دارد و تصادفی است. مدل نهایی، شرکت را قادر به تعیین قیمت فروش مطلوب با در نظر گرفتن زمان تدارک مناسب و مقدار سفارش مطلوب فراهم می‌کند. مدل آنها کارخانه‌ها را قادر می‌سازد قیمت فروش، زمان انجام سفارش و مقدار سفارش را تعیین کنند.

هکو^[۵] (۲۰۱۳) در پژوهش خود، زمان تدارک نامشخص را بررسی کرده است به‌صورتی که مدت تحویل را توزیع نرمال در نظر گرفته و محدودیت‌های زمان مورد انتظار انجام سفارش‌های ذکرشده در مدل‌های موجودی - تولید و فروشنده - خریدار را تشریح کرده و براساس زمان تولید، برگرفته از توزیع نرمال، مدلی ارائه کرده

بازار، کوشش بازاریاب و موجودی بر تقاضای مشتریان پرداخته‌اند و نشان داده‌اند که قیمت می‌تواند به‌عنوان یک عامل هماهنگ‌کننده در تنظیمات یک زنجیره‌ی تأمین عمل کند.

۳.۱. قیمت‌گذاری

لیو و همکاران^[۱۵] (۲۰۰۷) در پژوهش خود، یک زنجیره‌ی تأمین غیرمتمرکز متشکل از خرده‌فروش و تأمین‌کننده را با تابع تقاضای حساس به قیمت و زمان تدارک در نظر گرفتند و توسط تعادل استکلبرگ به تحلیل قیمت و مدت زمان تولید پرداختند. آنها نتیجه گرفتند که تصمیم‌گیری غیرمتمرکز منجر به عملکرد پایین‌تر می‌شود و عرضه‌کننده باید قبل از دنبال کردن یک راهبرد هماهنگ با خرده‌فروشان به بهبود عملیات داخلی خود اقدام کند. هوا و همکاران^[۱۶] (۲۰۰۹) در پژوهش خود، به بررسی تصمیمات بهینه برای قیمت و زمان تدارک در زنجیره‌های تأمین متمرکز و غیرمتمرکز با دو کانال (فروش آنلاین و فروش مستقیم) پرداخته‌اند و با استفاده از بازی استکلبرگ تأثیر زمان تدارک را بر قیمت‌گذاری تولیدکننده و خرده‌فروش بررسی کرده‌اند؛ نتایج تأثیر بسزای زمان تدارک به قیمت خرده‌فروشی را نشان می‌دهد.

آدیدا و پراکیس^[۱۷] (۲۰۱۰) در این پژوهش انواع مدل‌ها را برای مقابله با عدم اطمینان در تقاضا برای قیمت‌گذاری و کنترل موجودی پویا در یک سیستم تولید در نظر گرفته‌اند و مدل‌ها را در یک محیط حلقه‌باز که در آن تصمیم‌گیری برای افق زمانی باید در زمان صفر فرض شود، در نظر گرفته‌اند؛ آنها این روش را در مقابل روش‌های دیگر قوی‌تر یافته‌اند. ژو^[۱۸] (۲۰۱۲) در مطالعه‌ی خود به بررسی یک مدل قیمت‌گذاری و دوباره پر کردن موجودی، به‌صورت دوره‌ی پرداخته است که تقاضا، در دوره‌های متوالی، مستقل از متغیرهای تصادفی است و توزیع آن از قیمت متأثر است. مطالعات او در مورد بازده و تسریع نشان‌دهنده‌ی افزایش سود در موقعیت‌هایی از جمله بازارهای حساس به قیمت است.

لی^[۱۹] (۲۰۱۴) در پژوهشی به مطالعه‌ی قیمت‌گذاری دوره‌ی و دوباره پر کردن موجودی در مواجهه با تقاضای تصادفی در چند دوره پرداخته است. تابع تقاضا متغیر تصادفی است و هر تابع احتمالی را به‌عنوان تابع تقاضا می‌توان در نظر گرفت. وی در نهایت قیمت بهینه بر اساس سطح موجودی در هر دوره را به دست آورده است.

ژنگ و همکاران^[۲۰] (۲۰۱۶) در پژوهش خود، قیمت‌گذاری گروهی برای فروشندگان و مقایسه‌ی آنها با توجه به گزینه‌های فروش را بررسی کرده‌اند و تقاضا را برای خریداران تکی و عمده فرمول‌بندی کرده‌اند. در نهایت برای یک فروشنده‌ی فعال و در انحصار و چند شرکت رقیب، با استفاده از تعادل نش، راهبرد بهینه را به دست آورده‌اند.

هیچ یک از مقالات ذکر شده تأثیر هر سه عامل زمان تدارک، قیمت و میزان موجودی در دست را در بیشینه کردن سود به‌صورت توأم در نظر نگرفته‌اند و در مطالعات گذشته، تنها به تحلیل سودآوری شرکت‌ها در حضور یک یا دو مورد از این عوامل، پرداخته شده است. این در حالی است که هر یک از این عوامل تأثیر بسزایی در رفتار شرکت دارند و تصمیم‌گیری در مورد آنها ملزم به تحلیل هم‌زمان شرایط بهینه‌ی آنهاست. مقاله‌ی پیش رو بر تأثیر زمان تدارک کالا، قیمت، و میزان موجودی در دسترس روی رفتار رقابتی شرکت‌ها به‌منظور بیشینه کردن سود و کاهش هزینه‌ها تمرکز دارد. به علاوه از نظریه‌ی بازی‌های برای تحلیل رفتار دو شرکت، که در بازار مسئول تأمین تقاضای مشتری هستند، استفاده شده است تا شرایط

است. مطالعات مقایسه‌ی فراوانی به‌منظور نشان دادن اهمیت دیدگاه مدل‌سازی متفاوت وی صورت گرفت.

کمان و همکاران^[۶] (۲۰۱۳) در پژوهش خود به اهمیت اطلاعات اولیه برای شرکت‌ها پرداخته‌اند. آنها به مطالعه‌ی شرکت‌هایی پرداختند که دارای اطلاعات کامل و ناقص در خصوص وضعیت تولید خود بودند و دریافتند که افزایش امکان مشاهده‌ی وضعیت دقیق سیستم لزوماً به سود بیشتر منجر نخواهد شد و اگر شرکتی زمان تدارک را دقیق‌تر نشان دهد، آنگاه نیاز به اطلاعات حقیقی فروش افزایش می‌یابد. آریکان و همکاران^[۷] (۲۰۱۷) یک سیستم زنجیره‌ی تأمین با موجودی سریالی را که با عرضه‌کنندگان و حاملانی در خارج از کشور در ارتباط است، در نظر گرفتند و ارتباط بین عدم قطعیت زمان تدارک و عملکرد محیطی و اقتصادی زنجیره‌ی تأمین را بررسی کردند و تأثیر تغییر زمان تدارک را بر منافع و هزینه‌های کلی یک خرده‌فروش یا یک تولیدکننده با سطح خدمات عالی مقایسه کردند و دریافت‌اند که در پیش گرفتن سیاست‌های بهینه کردن هزینه‌های کلی، تأثیر ناچیزی بر هزینه‌ها می‌گذارد در حالی که این سیاست‌ها می‌توانند سود را بیشتر تحت تأثیر قرار دهند.

وو و همکاران^[۸] (۲۰۱۵) در پژوهش خود دو عامل زمان تدارک و موجودی را بررسی کردند و به صورت تک شرکت و دو شرکت با استفاده از مدل‌های تحلیلی و رویکرد نش دریافتند که افزایش زمان تدارک موجب افزایش موجودی می‌شود و این امر تقاضای بیشتری را در پی دارد و رقابت موجودی‌محور هر دو کارخانه را وادار به افزایش زمان تدارک می‌کند. کوکی و همکاران^[۹] (۲۰۱۵) در پژوهش خود یک سیستم موجودی فاسدشدنی (موقت) را در نظر گرفتند که تحت تقاضای تصادفی و زمان تدارک ثابت عمل می‌کند. با در نظر گرفتن سیاست کنترل موجودی (T, Q) ، به‌صورت تقریبی پارامترهای مدل را یافته و الگوریتمی شبیه‌سازی کرده‌اند.

۲.۱. کنترل موجودی

دومین شاخه‌ی تحقیقاتی مرتبط با این پژوهش بررسی نقش موجودی در سیستم‌های کنترل موجودی است که تاکنون برخی از مطالعات بدین موضوع اشاره داشته‌اند از جمله یوربان^[۱۰] (۲۰۰۵) در پژوهش خود، مطالعات را بر اساس میزان وابستگی تقاضا به موجودی در مدل‌سازی به دو دسته طبقه‌بندی کرده است؛ در دسته‌ی اول میزان موجودی اولیه و در دسته دوم سطح موجودی لحظه‌ی را وابسته به تقاضا در نظر گرفته است. وی هم‌ارزی دو دسته مدل یاد شده را از طریق یک مدل ارزیابی دوره‌ی نشان می‌دهد. کوشات^[۱۱] (۲۰۰۸) در پژوهش خود اذعان داشت تغییر موجودی، می‌تواند تقاضا را تغییر دهد و با در نظر گرفتن یک ناشر بزرگ ایالات متحده آمریکا به بررسی پیامدها پرداخت و پیشنهاد داد تصمیم‌گیری در مورد سطح موجودی، متناسب با تنوع خرده‌فروشان باشد نه با در نظر گرفتن نشان‌های تجاری مختلف.

اولیوارس و کچون^[۱۲] (۲۰۰۹) در این مطالعه نمایندگی‌های ژنرال‌موتور در ایالات متفاوت را به‌عنوان خرده‌فروش در حال رقابت در نظر گرفتند و به مقایسه‌ی موجودی آنها پرداختند. آنها به بررسی سازوکارهای دو عامل رقابت در فروش و سطح خدمات پرداختند و مشاهده کردند که افزایش کیفیت انتخاب بهتری خواهد بود. چنگ و همکاران^[۱۳] (۲۰۱۰) نیز در پژوهش خود تقاضا را علاوه بر موجودی، به قیمت فروش هر واحد نیز وابسته دانستند. آنها با این فرض برای تقاضا، اقدام به گسترش مدل مقدار سفارش اقتصادی به‌منظور بیشینه کردن سود کرده‌اند.

کین و همکاران^[۱۴] (۲۰۱۱) در یک مدل روزنامه‌فروش به بررسی تأثیر قیمت

تأخیر سفارش و نگهداری محاسبه شود تا تابع سود شرکت حاصل شود. به این ترتیب، شکل کلی تابع سود این مسئله به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$\max \varphi = (P - c_p)D - k\eta - hR \quad (1)$$

۱.۳. مدل یک شرکت

در این بخش، به تحلیل مدل موجودی یک شرکت تولیدی که در آن شرکت به دنبال تعیین موجودی در زمان تدارک T و با قیمت P است، پرداخته می شود. تقاضای شرکت تابعی از موجودی در دسترس و قیمت کالای مد نظر است. برای بیان رابطه تقاضا (رابطه ۲) آن را حاصل ضربی از قابلیت بازار و موجودی و قیمت کالا در نظر می گیریم؛ به صورتی که توسط پارامترهای β و f می توان میزان تأثیر به ترتیب موجودی و قیمت را در تابع تقاضا تنظیم کرد که مقدار β هرچه بزرگ تر باشد مبین آن است که موجودی به مقدار بیشتری تقاضا را تحت تأثیر قرار می دهد که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$D = \alpha R^{\beta+1} P^{-f} \quad (2)$$

در نظریه های کلاسیک موجودی فرض بر این است که تقاضا مستقل از موجودی در دست است و موجودی در دسترس R از رابطه ۳ حاصل می شود. در این معادله x تقاضای تصادفی با تابع چگالی $\phi(x)$ است و از توزیع یکنواخت به صورت $u(m - \sigma, m + \sigma)$ پیروی می کند. بنابراین میزان موجودی شرکت برابر می شود با:

$$\begin{aligned} R &= \int_{m-\sigma}^U (U-x)\phi(x)dx \\ &= \frac{1}{\sigma} (Ux - \frac{1}{2}x^2) \Big|_{x=m-\sigma}^{x=U} \\ &= \frac{1}{\sigma} (U - m + \sigma)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

در این مدل، m متوسط تقاضا در زمان تحویل و η ضریبی غیرمنفی است که در بازه $[0, 1]$ متغیر است و به صورت زیر داریم:

$$m = TD = T\alpha R^{\beta+1} P^{-f} \quad (4)$$

$$\sigma = \eta TD = \eta T\alpha R^{\beta+1} P^{-f} \quad (5)$$

بنابراین با استفاده از دو معادله ۴ و ۵، میزان موجودی و کمبود شرکت برابر می شود با:

$$\begin{aligned} U &= m - \sigma + \sqrt{2\sigma R} \\ &= T\alpha R^{\beta+1} P^{-f} (1 - \eta) \\ &\quad + \sqrt{2\eta T\alpha R^{\beta+1} P^{-f}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} G &= m + R - U \\ &= T\alpha R^{\beta+1} P^{-f} + R \\ &\quad - T\alpha R^{\beta+1} P^{-f} (1 - \eta) \\ &\quad - \sqrt{2\eta T\alpha R^{\beta+1} P^{-f}} \end{aligned} \quad (7)$$

که با جای گذاری رابطه های ۲ تا ۷ در رابطه ۱، تابع سود مسئله ی یک شرکت که

بهینه برای هر یک از سه متغیر تصمیم مسئله و پارامترهای تأثیرگذار بر آن ها روشن شود.

۲. تعریف مسئله

در این پژوهش به بررسی مدل موجودی شرکت های تولیدی با در نظر گرفتن تأثیرات زمان تدارک، قیمت و میزان موجودی بر تقاضای بازار پرداخته شده است و این مسئله در دو حالت مختلف توسعه یافته است. در مدل اول یک شرکت تولیدی مد نظر است که قصد دارد با استفاده از زمان تدارک بهینه، موجودی در دسترس و قیمت مشخص سود متوسط خود را به میزان بیشینه برساند. این شرکت باید قیمت و زمانی را متناسب با موجودی پایه اش که U است تعیین کند تا بتواند تمام تقاضاهای موجود را پوشش دهد.

در مدل دوم، مدل قبل برای دو شرکت رقیب توسعه یافته است. به نحوی که در این مدل هر شرکت درصدی از تقاضا را پوشش می دهد و تقاضا وابسته به موجودی در انبار شرکت ها و قیمت مطرح شده از طرف آنها برای کالای مورد نظر است. در این مدل برای بررسی عملکرد شرکت های رقیب در سناریوی دوم از رویکرد نش استفاده شده است. در این رویکرد، هر دو شرکت بدون اطلاع از یکدیگر در یک بازی غیرهمکارانه با هم رقابت می کنند. هدف مقاله بیشینه کردن سود شرکت ها با استفاده از مقادیر بهینه ی متغیرهای تصمیم - قیمت فروش، زمان تدارک و موجودی - است. پارامترهای به کارگرفته شده در مدل سازی این مسئله و همچنین متغیرهای تصمیم عبارت اند از:

پارامترها

α : قابلیت بازار، $\alpha > 0$

β : میزان کشش موجودی تقاضا، $0 < \beta < 1$

f : میزان کشش قیمت مؤثر در تقاضا

D : نرخ تقاضا در واحد زمان

m : متوسط تقاضا در زمان تدارک

η : ضریب غیر منفی در بازه $[0, 1]$ برای اطمینان از مثبت بودن فضا

σ : واریانس تقاضا در زمان تدارک

G : متوسط تأخیر سفارش ها

U : مجموع موجودی و مقدار فروش مورد انتظار

K : هزینه تأخیر سفارش در یک واحد زمان

h : هزینه نگهداری در یک واحد زمان

c_p : هزینه تولید به ازای هر واحد کالا در واحد زمان

φ : تابع سود شرکت در سناریوی اول

φ_i : تابع سود شرکت i ام در سناریوی دوم

متغیرهای تصمیم:

R : موجودی در دسترس شرکت در واحد زمان

P : قیمت فروش کالا به ازای هر واحد کالا در واحد زمان

T : زمان تدارک

۳. مدل سازی

برای بیشینه کردن سود لازم است اختلاف حاصل از درآمد فروش و هزینه های تولید،

در رابطه‌ی ۸ نشان داده شده است، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \varphi = & \alpha R^{\beta+1} P^{1-f} - c_p \alpha R^{\beta+1} P^{-f} \\ & - k T \alpha R^{\beta+1} P^{-f} - k R \\ & + k T \alpha R^{\beta+1} P^{-f} (1 - \eta) \\ & + 2k R^{\beta+1} \sqrt{\eta T \alpha P^{-f}} - h R \end{aligned} \quad (8)$$

با جای‌گذاری رابطه‌های ۹ تا ۱۴ در رابطه‌ی ۱ تابع سود شرکت i برای $i = 1, 2$ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \varphi_i = & (P_i - c_{pi} - \eta k T_i) \alpha R_i \\ & \times (R_i + R_{r-i})^{\beta} (P_i + P_{r-i})^{-f} \\ & + 2k R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} \\ & \times \sqrt{\eta \alpha T_i (P_i + P_{r-i})^{-f}} \\ & - (h + k) R_i \end{aligned} \quad (15)$$

۲.۳. مدل دو شرکت رقیب

در این بخش، مدل قبل تعمیم می‌یابد و برای دو شرکت رقیب مطرح می‌شود. این دو شرکت تولیدی محصولات تولید می‌کنند که مکمل یکدیگر هستند و حتماً باید همراه با یکدیگر به فروش برسند و به بیانی دیگر لازم و ملزوم یکدیگر هستند؛ ازین رو تابع تقاضا نیز وابسته به مجموع قیمت این دو کالا است. تقاضای مشتری در این حالت به صورت رابطه‌ی ۹ بیان می‌شود که میزان تقاضای مشتری بستگی به میزان موجودی و قیمت هر یک از شرکت‌ها دارد.

$$D = \alpha (R_1 + R_2)^{\beta+1} (P_1 + P_2)^{-f} \quad (9)$$

هر شرکت به نسبت موجودی خودش بخشی از تقاضای بازار را برآورده می‌کند. بنابراین، $D = \sum_{i=1}^2 D_i$ برای $i = 1, 2$ ؛ تقاضای هر شرکت به صورت معادله‌ی ۱۰ مطرح می‌شود.

$$D_i = \alpha R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} (P_i + P_{r-i})^{-f} \quad (10)$$

سپس با در نظر گرفتن تابع تقاضای جدید، مقادیر m_i و σ_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} m_i = & T_i D_i \\ = & T_i \alpha R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} (P_i + P_{r-i})^{-f} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i = & \eta T_i D_i \\ = & \eta T_i \alpha R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} (P_i + P_{r-i})^{-f} \end{aligned} \quad (12)$$

بنابراین با استفاده از دو رابطه‌ی ۱۱ و ۱۲، میزان موجودی و کمبود شرکت i برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} U_i = & m_i - \sigma_i + 2\sqrt{\sigma_i R_i} \\ = & (1 - \eta) T_i \alpha R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} \\ & \times (P_i + P_{r-i})^{-f} \\ & + 2\sqrt{\eta T_i \alpha (P_i + P_{r-i})^{-f}} \\ & \times R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G_i = & m_i + R_i - U_i \\ = & R_i + \eta T_i \alpha R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} \\ & \times (P_i + P_{r-i})^{-f} \\ & - 2\sqrt{\eta T_i \alpha (P_i + P_{r-i})^{-f}} \\ & \times R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} \end{aligned} \quad (14)$$

۴. روش حل

همان‌طور که پیش‌تر مطرح شد، هدف بیشینه کردن سود شرکت‌هاست؛ بدین منظور می‌توان مسئله را در دو سناریوی جداگانه بررسی کرد، سناریوی اول بررسی رفتار یک شرکت منفرد و سناریوی دوم بررسی رفتار دو شرکت رقیب در راستای رسیدن به حالت بهینه برای متغیرها و بیشینه‌ترین سود است. در مدل تک‌شرکت، باید تابع هدف شرکت با استفاده از مقادیر بهینه‌ی R, T, P و P بیشینه شود. بدین منظور کافی است نقطه اکسترمم تابع سود به ازای متغیرهای تصمیم تعیین شود. در مورد سناریوی دوم، که بررسی رفتار دو شرکت رقیب است، با استفاده از نظریه‌ی بازی نش رقابت به‌طور کامل بررسی خواهد شد.

۱.۴. یک شرکت

تابع سود در این مدل وابسته به متغیرهای تصمیم قیمت کالا، موجودی در دسترس و زمان تدارک است و به‌منظور بهینه کردن مقدار هر یک از این متغیرها باید به نوعی برای سایرین مقدار ثابتی را در نظر گرفت؛ بدین منظور از تابع سود به دست آمده در رابطه‌ی ۸ نسبت به P و R و T مشتق گرفته که در هر یک از آنها سایر متغیرها ثابت فرض می‌شود تا تأثیر متغیر مدنظر در تابع سود نمایان شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial T} = & -k \alpha R^{\beta+1} P^{-f} \\ & + k \alpha R^{\beta+1} P^{-f} (1 - \eta) \\ & + k R^{\beta+1} T^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\eta \alpha P^{-f}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial R} = & (2\beta + 1) \alpha R^{\beta} P^{1-f} \\ & - (2\beta + 1) c_p \alpha R^{\beta} P^{-f} \\ & - (2\beta + 1) k T \alpha R^{\beta} P^{-f} - k \\ & + (2\beta + 1) k T \alpha R^{\beta} P^{-f} \\ & \times (1 - \eta) + 2(\beta + 1) k R^{\beta} \times \sqrt{\eta T \alpha P^{-f}} - h \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial P} = & (1 - f) \alpha R^{\beta+1} P^{-f} \\ & + (c_p + k T) \alpha f R^{\beta+1} P^{-f-1} \\ & - f k T \alpha R^{\beta+1} P^{-f-1} \\ & \times (1 - \eta) - f k R^{\beta+1} \\ & \times \sqrt{\eta \alpha T P^{-\frac{f}{2}-1}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} = -k\eta\alpha R_1(R_1 + R_2)^{\beta}(P_1 + P_2)^{-f} + kT_1^{-\frac{1}{\beta}} \sqrt{\eta\alpha(P_1 + P_2)^{-f}} \times R_1(R_1 + R_2)^{\beta} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} = \alpha R_1(R_1 + R_2)^{\beta} \times \left[((P_1 + P_2)^{-f} - f(P_1 + P_2)^{-f-1}P_1) + (f(c_{p1} + k\eta T_1)(P_1 + P_2)^{-f-1}) \right] - f k \sqrt{T_1 \eta \alpha} R_1(R_1 + R_2)^{\beta} \times (P_1 + P_2)^{-\frac{f}{\beta}-1} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial R_1} = (P_1 - c_{p1} - k\eta T_1)\alpha(P_1 + P_2)^{-f} \times \left[(R_1 + R_2)^{\beta} + 2\beta(R_1 + R_2)^{\beta-1}R_1 \right] + 2k \sqrt{T_1 \eta \alpha} (P_1 + P_2)^{-f} \times \left[(R_1 + R_2)^{\beta} + \beta(R_1 + R_2)^{\beta-1}R_1 \right] - (k + h) \quad (24)$$

باید توجه داشت که هر یک از شرکت‌ها درصد تأمین موجودی خود، به‌منظور برآورده ساختن تقاضای بازار هستند. از این رو هدف مشترک آنها تأمین کل موجودی مورد نیاز بازار یعنی R است ($R = R_1 + R_2$). هر یک از شرکت‌ها در تأمین این موجودی سهم دارند که با ضرایب γ_1 و γ_2 تعریف می‌شود. به طوری که $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ است. با در نظر گرفتن $R\gamma_1$ و $R\gamma_2$ به جای R_1 و R_2 رابطه‌ی ۱۵ به صورت رابطه‌ی ۲۵ در می‌آید.

$$\max \varphi_i = (P_i - c_{pi} - \eta k T_i) \times \alpha \gamma_i R^{\beta+1} (P_i + P_{r-i})^{-f} + 2k \gamma_i R^{\beta+1} \sqrt{\eta \alpha T_i} (P_i + P_{r-i})^{-f} - (h + k) R \gamma_i \quad (25)$$

حال با مشتق‌گیری از این تابع سود و اعمال این تغییرات در رابطه‌های ۲۲ تا ۲۴، می‌توان مقادیر بهینه برای هر دو شرکت را به صورت زیر به دست آورد. از برابر صفر گذاشتن اولین مشتق نسبت به زمان تدارک (رابطه‌ی ۲۲)، رابطه‌ی ۲۶ حاصل می‌شود که نشان‌دهنده‌ی میزان تأثیر قیمت و موجودی دو شرکت در زمان تدارک است:

$$T_i^{N*} = \frac{(P_i^{N*} + P_{r-i}^{N*})^f}{\eta \alpha (R^{N*})^{\beta}}, i = 1, 2 \quad (26)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۲۶ در رابطه‌های ۲۳ و ۲۴ و حل این معادلات، مقادیر بهینه‌ی قیمت و موجودی به صورت مستقل از هم برابر می‌شود با:

$$P_i^{N*} = \frac{f^{\frac{1}{\beta}} c_{pi} - f c_{pi} + f c_{p r-i}}{(f-1)^{\frac{1}{\beta}}}, i = 1, 2 \quad (27)$$

سپس باید مقدار بهینه هر یک از سه متغیر قیمت، زمان تدارک و میزان موجودی به دست آید؛ بنابراین مشتق رابطه‌های ۱۶-۱۸ برابر صفر قرار گرفته و حل می‌شود. به این ترتیب ریشه‌های این معادلات مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم خواهند بود. به طوری که از حل رابطه‌ی ۱۶، عبارت ۱۹ حاصل می‌شود که نشان‌دهنده‌ی میزان تأثیر قیمت و موجودی در زمان تدارک است:

$$T^* = \frac{P^* f}{\eta \alpha R^{* \beta}} \quad (19)$$

حال با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۹، در رابطه‌های ۱۷ و ۱۸ مقادیر بهینه‌ی قیمت و موجودی، به صورت مستقل از هم به دست می‌آید که در رابطه‌های ۲۰ و ۲۱ بیان شده‌اند:

$$P^* = \frac{f c_p}{f-1} \quad (20)$$

$$R^* = \frac{h^{\frac{1}{\beta}}}{\left[(2\beta + 1)\alpha \left[\left(\frac{f c_p}{f-1} \right)^{1-f} - c_p \left(\frac{f c_p}{f-1} \right)^{-f} \right] \right]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (21)$$

که با جای‌گذاری رابطه‌های ۲۱ و ۲۰ در رابطه‌ی ۱۹ مقدار بهینه‌ی زمان تدارک شرکت به دست می‌آید.

۲.۴. دو شرکت رقیب

در این سناریو، مدل تک شرکتی گسترش یافته است. دو شرکت با هم در رقابت هستند و برآورده شدن تقاضای مشتری بستگی به میزان موجودی و قیمت فروش هر یک از شرکت‌ها دارد و هر یک بخشی از تقاضای مشتری را پاسخ می‌دهند. در این مدل، از نظریه‌ی بازی‌ها برای مطالعه‌ی رفتار دو شرکت استفاده شده است.

نظریه‌ی بازی‌ها با استفاده از ریاضیات، رفتار شرکت‌ها را در یک بازی در شرایطی که در آن موفقیت یک شرکت در انتخاب کردن پارامتر و متغیرهای مؤثر بر سود و زیانش وابسته به انتخاب دیگر شرکت‌هاست، برآورد می‌کند و هدف نهایی آن یافتن یک راهبرد بهینه برای هر دو شرکت است. در این بخش رویکرد نش برای مدل‌سازی رفتار شرکت‌ها به کار گرفته شده است.

۱.۲.۴. رویکرد نش

برای تبیین تأثیر موجودی، قیمت و زمان تدارک و تشخیص نحوه‌ی عملکرد دو شرکت در حال رقابت با هم برای یافتن خروجی مناسب بازی از نظریه‌ی بازی نش استفاده شد. تا بدین ترتیب بهترین تابع پاسخ شرکت، براساس زمان تدارک و متوسط موجودی و قیمت تعیین شود. در رویکرد نش، دو شرکت بدون اطلاع از شرایط یکدیگر در یک بازی غیر همکارانه با یکدیگر رقابت می‌کنند؛ در این رویکرد، هر شرکت در تلاش برای بیشینه کردن تابع سود خویش است. بنابراین، دو تابع سود مجزا برای دو شرکت وجود دارد که طبق رابطه‌ی ۱۵، φ_i نشان‌دهنده‌ی تابع سود برای شرکت i ام برای $i = 1, 2$ است. برای هر یک از شرکت‌ها به صورت جداگانه از تابع سود نسبت به متغیرهای P_i و T_i و R_i مشتق گرفته شده است تا هر بار با ثابت نگه داشتن دو متغیر دیگر شرایط متغیر مدنظر بررسی شود و میزان بهینه‌ی هر یک به دست آید.

جدول ۱. پارامترهای در نظر گرفته شده و مقادیر T^* و R^* و P^* حاصل از آنها برای مدل یک شرکت منفرد.

α	β	c_p	k	h	f	η	P^*	R^*	T^*
۲۰۰۰۰	-۰٫۲۵	۰٫۵	۰	۱	۴	۰٫۱	۰٫۶۷	۷۱۱۹۱۰۰۰	۰٫۸۳۳
۲۰۰۰۰	-۰٫۲۵	۰٫۵	۰	۱	۱۰	۰٫۱	۰٫۵۶	۳/۹۳ E۱۰	۰٫۲۷۸
۲۰۰۰۰	-۰٫۲۵	۰٫۵	۰	۱	۱۲	۰٫۱	۰٫۵۴۵	۴/۲۹ E۱۱	۰٫۲۲۷۳
۲۰۰۰۰	-۰٫۲۵	۰٫۷	۰	۰٫۴	۱۰	۰٫۱	۰٫۷۷۷۸	۵۷۶۰۸۰۰۰۰	۰٫۹۷۲۲
۲۰۰۰۰	-۰٫۳	۰٫۶	۰	۰٫۷	۹	۱	۰٫۶۷۵۰	۲۸۱۱۰۰۰۰	۰٫۰۴۲۹
۲۰۰۰۰	-۰٫۳	۰٫۶	۰	۰٫۷	۸٫۵	۰٫۹	۰٫۶۸۰	۲۰۳۲۰۰۰۰	۰٫۰۵۰۸
۲۰۰۰۰	-۰٫۲	۰٫۶	۰	۰٫۷	۹	۱	۰٫۶۷۵	۴/۱ E۱۱	۰٫۰۶۴۳

جدول (۱-۲). پارامترها و مقادیر T_i^{N*} و R_i^{N*} و P_i^{N*} برای رویکرد نش دو شرکت ($\gamma_2 = 1 - \gamma_1$).

γ_1	T_1^{N*}	P_1^{N*}	P_2^{N*}	R_1^{N*}	R_2^{N*}	φ_1	φ_2	$\varphi_1 + \varphi_2$
۰٫۱	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۱۴۶٫۵	۱۳۱۸٫۲	۱۵۳۸	۱۳۸۴٫۲	۱۵۳۸
۰٫۲	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۲۹۲٫۹	۱۱۷۱٫۸	۳۰۷٫۶	۱۲۳۰٫۴	۱۵۳۸
۰٫۳	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۴۳۹٫۴	۱۰۲۵٫۳	۴۶۱٫۴	۱۰۷۶٫۶	۱۵۳۸
۰٫۴	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۵۸۵٫۹	۸۷۸٫۸	۶۱۵٫۲	۹۲۲٫۸	۱۵۳۸
۰٫۵	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۷۳۲٫۴	۷۳۲٫۴	۷۶۹	۷۶۹	۱۵۳۸
۰٫۶	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۸۷۸٫۸	۵۸۵٫۹	۹۲۲٫۸	۶۱۵٫۲	۱۵۳۸
۰٫۷	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۱۰۲۵٫۳	۴۳۹٫۴	۱۰۷۶٫۶	۴۶۱٫۴	۱۵۳۸
۰٫۸	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۱۱۷۱٫۸	۲۹۲٫۹	۱۲۳۰٫۴	۳۰۷٫۶	۱۵۳۸
۰٫۹	۰٫۸۹۸	۰٫۷۵۷۱	۰٫۶۵۷۱	۱۳۱۸٫۲	۱۴۶٫۵	۱۳۸۴٫۲	۱۵۳٫۸	۱۵۳۸

جدول (۲-۲). پارامترها و مقادیر T_i^{N*} و R_i^{N*} و P_i^{N*} برای رویکرد نش دو شرکت ($\gamma_2 = 1 - \gamma_1$).

γ_1	T_1^{N*}	P_1^{N*}	P_2^{N*}	R_1^{N*}	R_2^{N*}	φ_1	φ_2	$\varphi_1 + \varphi_2$
۰٫۱	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۱۵۸٫۳	۱۴۲۸٫۸	۱۱۱٫۱	۱۰۰۰٫۱	۱۱۱۱٫۳
۰٫۲	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۳۱۷٫۵	۱۲۷۰	۲۲۲٫۳	۸۸۹	۱۱۱۱٫۳
۰٫۳	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۴۷۶٫۳	۱۱۱۱٫۳	۳۳۳٫۴	۷۷۷٫۹	۱۱۱۱٫۳
۰٫۴	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۶۳۵	۹۵۲٫۵	۴۴۴٫۵	۶۶۶٫۸	۱۱۱۱٫۳
۰٫۵	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۷۹۳٫۸	۷۹۳٫۸	۵۵۵٫۶	۵۵۵٫۶	۱۱۱۱٫۳
۰٫۶	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۹۵۲٫۵	۶۳۵	۶۶۶٫۸	۴۴۴٫۵	۱۱۱۱٫۳
۰٫۷	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۱۱۱۱٫۳	۴۷۶٫۳	۷۷۷٫۹	۳۳۳٫۴	۱۱۱۱٫۳
۰٫۸	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۱۲۷۰	۳۱۷٫۵	۸۸۹	۲۲۲٫۳	۱۱۱۱٫۳
۰٫۹	۰٫۶۵۵	۰٫۶۹۱۷	۰٫۵۹۱۷	۱۴۲۸٫۸	۱۵۸٫۳	۱۰۰۰٫۱	۱۱۱٫۱	۱۱۱۱٫۳

در جدول ۱ پررنگ‌تر نشان داده شده است. طبق نتایج این جدول، پارامتر f ، که همان کشش قیمت است، تأثیر بسزایی در میزان موجودی در دسترس دارد و به علاوه زمان تدارک را تحت تأثیر قرار می‌دهد. به بیان دیگر، هرچه f کاهش یابد و مدل کمتر به قیمت حساس باشد، مدت زمان بیشتری صرف تولید محصول توسط شرکت خواهد شد.

حال در صورتی که مقادیر پارامترها $\alpha = 20000$ ، $\beta = -0/3$ ، $c_{p1} = 0/6$ ، $c_{p2} = 0/5$ ، $\eta = 1$ و $f = 9$ ، $h = 0/7$ ، $k = 0$ ، $c_{p1} = 0/5$ متغیرهای تصمیم دو شرکت با پیروی از رویکرد نش، به صورت جدول ۱-۲ خواهد بود. و در صورتی که مقادیر پارامترها $\alpha = 20000$ ، $\beta = -0/25$ ، $c_{p1} = 0/6$ ، $c_{p2} = 0/5$ ، $\eta = 1$ و $f = 14$ ، $h = 0/7$ ، $k = 0$ ، $c_{p1} = 0/5$ متغیرهای تصمیم دو شرکت به صورت جدول (۲-۲) خواهد بود. در جداول ۱-۲ و ۲-۲، مقادیر متفاوتی برای پارامترهای مدل مقایسه شده‌اند و مقادیری که به سود بیشتر برای دو شرکت منجر شدند به صورت پررنگ‌تر نشان داده شده‌اند. به علاوه

$$R^{N*} = \frac{h^{\frac{1}{\beta}}}{\left(\left(\frac{f^2 c_{pi} - f c_{pi} + f c_{p2-i} - c_{pi}}{(f-1)^2 - 1} \right) \alpha \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{f^2 (c_{pi} + c_{p2-i})}{(f-1)^2 - 1} \right)^{-f} (1 + 2\beta)} \quad (28)$$

که با جای‌گذاری رابطه‌های ۲۷ و ۲۸ در رابطه‌ی ۲۶، مقدار بهینه‌ی زمان تدارک شرکت i ام به دست می‌آید.

۵. مثال عددی

در این بخش، با مثال‌های عددی نتایج تحلیلی کامل شده است تا میزان تأثیر پارامترها مورد ارزیابی قرارگیرد. جدول ۱ نتایج مربوط به مدل یک شرکت منفرد را نشان می‌دهد و جداول ۱-۲ و ۲-۲ به بررسی نتایج رویکرد نش می‌پردازند. مقدار بهینه

جدول ۳. تحلیل حساسیت نشان‌دهنده تغییرات روی پارامترهای f, β, α و تأثیر حاصله روی متغیرهای تصمیم در دو سناریوی یک شرکت منفرد و دو شرکت در رقابت با یکدیگر.

% تغییرات پارامترها و مقادیر مربوطه	یک شرکت منفرد				دو شرکت در رقابت						
	P^*	R^*	T^*	φ	رویگرد نش ($\gamma_1^* = 0/5$)						
					P_1^{N*}	P_2^{N*}	R_i^{N*}	T_i^{N*}	φ_i^N	$\sum_{i=1}^N \varphi_i$	
α	+۷۵	۰٫۶۷۵	۷۱۴۳۸۰۰۰	۰٫۰۴۳	۷۵۰۱۰۰۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۱۸۶۱٫۲	۰٫۰۸۹۸	۱۹۵۴٫۲	۳۹۰٫۸۷۴
	+۵۰	۰٫۶۷۵	۵۵۲۵۲۰۰۰	۰٫۰۴۳	۵۸۰۱۵۰۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۱۴۳۹٫۵	۰٫۰۸۹۸	۱۵۱۱٫۵	۳۰۲۳
	+۲۵	۰٫۶۷۵	۴۰۷۷۴۰۰۰	۰٫۰۴۳	۴۲۸۱۳۰۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۱۰۶۲٫۳	۰٫۰۸۹۸	۱۱۱۵٫۴	۲۲۳۰٫۸
	-۲۵	۰٫۶۷۵	۱۷۴۰۳۰۰۰	۰٫۰۴۳	۱۸۲۷۴۰۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۴۵۳٫۴۱	۰٫۰۸۹۸	۴۷۶٫۰۸	۹۵۲٫۱۶
	-۵۰	۰٫۶۷۵	۸۸۵۴۲۰۰	۰٫۰۴۳	۹۲۹۶۹۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۲۳۰٫۶۷۸	۰٫۰۸۹۸	۲۴۲٫۲۱	۴۸۴٫۴۲
	-۷۵	۰٫۶۷۵	۲۷۸۸۹۰۰	۰٫۰۴۳	۲۹۲۸۳۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۷۲٫۶۶	۰٫۰۸۹۸	۷۶٫۲۹	۱۵۲٫۵۸
β	+۷۵	۰٫۶۷۵	۹/۵E۳۱	۰٫۰۹۱	۱/۱۷E۳۱	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۳/۵۰۲E۱۴	۰٫۱۹۰۸	۴/۳۲۶E۱۳	۸/۶۵۳E۱۳
	+۵۰	۰٫۶۷۵	۵/۱E۱۵	۰٫۰۷۵	۱/۵E۱۵	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۶۹۲۷۹۰۰	۰٫۱۵۷۱	۲۰۷۸۴۰۰	۴۱۵۶۸۰۰
	+۲۵	۰٫۶۷۵	۱/۷E۱۰	۰٫۰۵۹	۹/۹E۹	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۱۶۸۷۸	۰٫۱۲۳۵	۹۶۶۶٫۳	۱۹۳۳۳
	-۲۵	۰٫۶۷۵	۴۸۶۳۳۰	۰٫۰۲۷	۱۰۲۱۳۰۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۹۱٫۰۷۸	۰٫۰۵۶۱	۱۹۱٫۲۶	۳۸۲٫۵۲۷
	-۵۰	۰٫۶۷۵	۱۹۸۱۳	۰٫۰۱۱	۱۲۴۸۲۰	۰٫۷۵۷	۰٫۶۵۷	۱۳٫۸۲	۰٫۰۲۲۴	۸۷٫۰۶۷	۱۷۴٫۱۳
	-۷۵	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی
f	+۷۵	۰٫۶۴۱	۳/۳۲E۹	۰٫۰۲۳	۳/۴۸E۹	۰٫۶۸	۰٫۵۸	۹۹٫۸۵۷	۰٫۰۴۵۷	۱۰۴٫۸۵	۲۰۹٫۷
	+۵۰	۰٫۶۴۸	۶/۳۸E۸	۰٫۰۲۷	۶/۷E۸	۰٫۶۹۵	۰٫۵۹۵	۱۸۴٫۲۰۶	۰٫۰۵۴۷	۱۹۳٫۴۲	۳۸۶٫۸۴
	+۲۵	۰٫۶۵۸	۱/۲۹E۸	۰٫۰۳۳	۱/۳۵E۸	۰٫۷۱۸	۰٫۶۱۸	۳۵۵٫۶۱۲	۰٫۰۶۸۰	۳۷۳٫۳۹	۷۴۶٫۸۴
	-۲۵	۰٫۷۰۴	۶۹۱۶۰۰۰	۰٫۰۵۹	۷۲۶۱۸۰۰	۰٫۸۳۱	۰٫۷۳۱	۱۶۶۳٫۱	۰٫۱۳۲۳	۱۷۴۶٫۳	۳۴۹۲٫۶
	-۵۰	۰٫۷۷۱	۲۱۴۸۲۰۰	۰٫۰۹۸	۲۲۵۵۶۰۰	۱٫۰۴	۰٫۹۴	۴۳۹۶	۰٫۲۵۱۴	۴۶۱۵٫۸	۹۳۳۱٫۶
	-۷۵	۱٫۰۸۰	۱۲۷۸۵۰۰	۰٫۲۷۴	۱۳۴۲۵۰۰	۵	۴٫۹	۶۳۲۵	۲٫۵۱۴۳	۶۶۴۲	۱۳۲۸۴

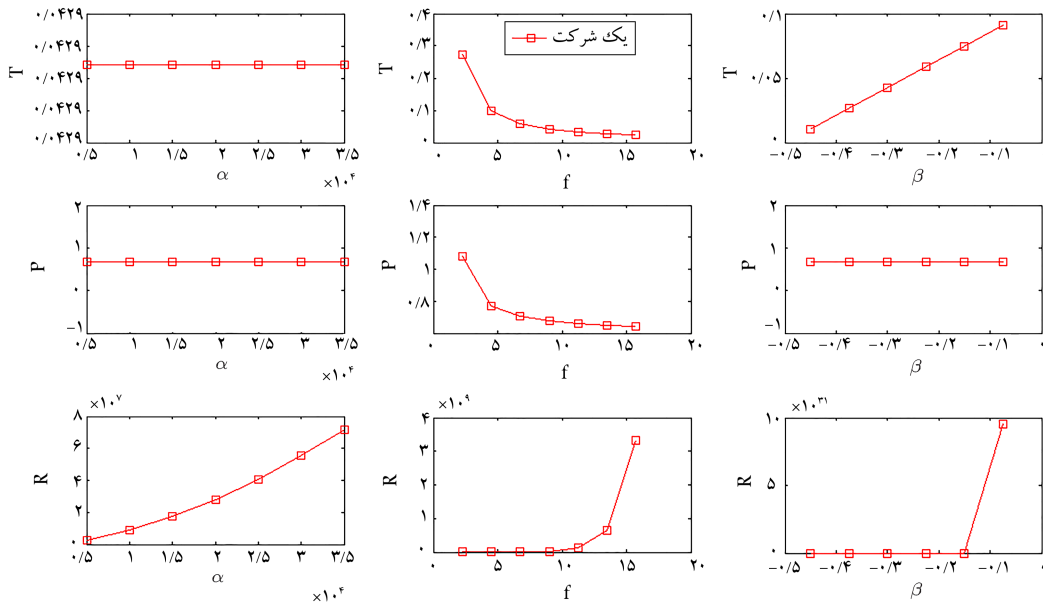
در شکل‌های ۱ و ۲، نمودار تغییرات مقادیر متغیرهای تصمیم بر حسب تغییرات سه پارامتر تأثیرگذار α, β و f نشان داده شده است. در ستون اول، این نمودارها تغییرات پارامتر α در مقابل متغیرهای تصمیم در نظر گرفته شده است و به همین ترتیب ستون‌های دوم و سوم تغییرات پارامترهای f و β را نشان می‌دهند. همان‌طور که در ستون اول (سمت چپ) شکل ۱ مشخص است، افزایش پارامتر قابلیت بازار منجر به افزایش میزان موجودی در دست می‌شود و بر متغیرهای تصمیم زمان تدارک و قیمت تأثیر چشم‌گیری ندارد. ستون دوم این شکل نشان می‌دهد که با افزایش میزان کشش قیمت مؤثر در تقاضا، در صورت ثابت ماندن سایر پارامترها، زمان تدارک و قیمت محصول کاهش می‌یابد که این کاهش ابتدا با شیب افزایشی و سپس با شیبی کاهنده صورت می‌گیرد. به علاوه افزایش این پارامتر موجب افزایش موجودی در دست می‌شود. در نهایت ستون سوم شکل ۱ نشان‌دهنده آن است که با افزایش میزان کشش موجودی تقاضا زمان تدارک و موجودی افزایش می‌یابند و تغییری در میزان قیمت ایجاد نمی‌شود که عبارت ۲۰ نیز نشان‌دهنده همین امر است.

همان‌طور که در سطور اول و سوم شکل ۲، نشان داده شده است، تغییر سه پارامتر α, β و f بر موجودی و زمان تدارک هر دو شرکت تأثیر یکسانی دارد و این امر به علت انتخاب $\gamma_1 = 0/5$ ، در بخش مثال عددی است. در این شکل، با افزایش میزان قابلیت بازار در ستون اول از سمت چپ، موجودی هر دو شرکت افزایش می‌یابد و قیمت و زمان تدارک ثابت باقی می‌ماند. افزایش f موجب کاهش میزان هر سه متغیر تصمیم در این سناریو می‌شود و افزایش پارامتر β ، در ستون سوم موجب افزایش زمان تدارک و موجودی برای هر دو شرکت تولیدی می‌شود و بر

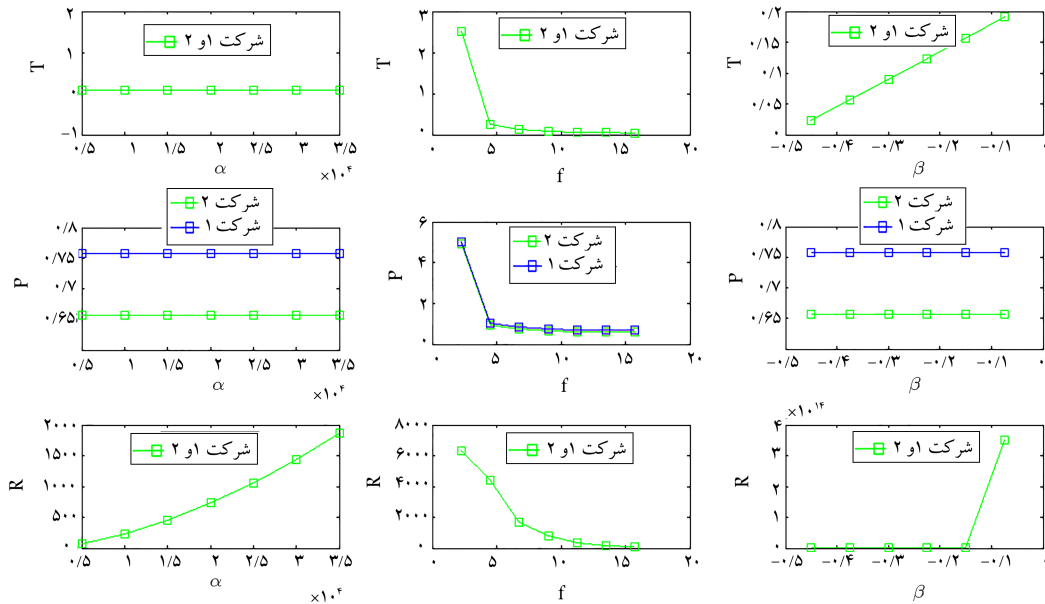
مشاهده شد که در رویکرد نش مجموع سود دو شرکت همواره مقدار ثابتی است و تمام مقادیر γ_1 برای آن امکان‌پذیر است و بهترین حالت زمانی رخ می‌دهد که سود هر یک از شرکت‌ها به میزان بیشینه مقدار خودش باشد؛ همان‌طور که مشخص است در γ_1 برابر با $0/5$ ، این اتفاق می‌افتد و این امر زمانی محقق می‌شود که سهم هر دو شرکت در تأمین موجودی مورد نیاز بازار برابر باشد.

۶. تحلیل حساسیت

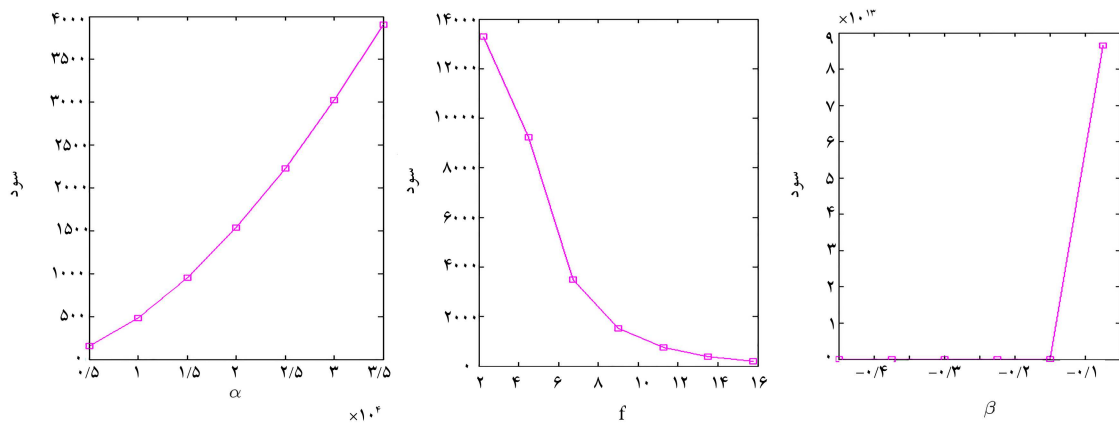
بازه‌های مدنظر برای بررسی اثر پارامترهای مسئله بر مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم شامل $0/25, 0/5, 0/75$ بیشتر و کمتر از مقادیر پارامترهای بهینه‌ی مسئله است. نتیجه‌ی این تحلیل در جدول ۳ ارائه شده است و نمودارهای مربوط به تغییرات هر یک از پارامترهای تأثیرگذار در مدل‌های مختلف به ترتیب در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ ترسیم شده است. جدول ۳، بیانگر تحلیل حساسیت دو سناریو است، نشان می‌دهد که با تعمیم مدل از یک تأمین‌کننده (سناریوی اول) به زمانی که دو تولیدکننده با هم مسئول تأمین تقاضای مشتری هستند (سناریوی دوم)، چه تغییراتی در متغیرهای تصمیم مدل به وجود می‌آید. به علاوه در این جدول مشخص است پارامتر β نسبت به سایر پارامترهای مورد بررسی تأثیر چشم‌گیری بر میزان سود شرکت‌ها می‌گذارد. به صورتی که کاهش این پارامتر موجب کاهش میزان سود شرکت‌ها در هر دو سناریو می‌شود.



شکل ۱. تحلیل حساسیت در سناریوی یک شرکت منفرد.



شکل ۲. تحلیل حساسیت متغیرهای شرکت اول و دوم در سناریوی دو شرکت رقیب در رویکرد نش.



شکل ۳. مقایسه‌ی میزان مجموع سود شرکت ۱ و ۲ در سناریوی دو شرکت در رویکرد نش.

یک شرکت به تنهایی بررسی شده است و در سناریوی دوم، رفتار شرکت های رقیب در بازار غیرانحصاری بررسی شده است؛ به طور کامل در سناریوی دوم به تحلیل رفتار دو شرکت رقیب پرداخته شده و بدین منظور از رویکرد نش نظریه بازی ها استفاده شده است و به تفصیل رویکرد و نتایج آن تشریح شده است.

در این مقاله دریافته ایم که با ثابت بودن سایر مقادیر، هرچه زمان تدارک بیشتر باشد موجودی در دست نیز بیشتر خواهد بود و در عین حال طولانی شدن این زمان، سطح بیشتری از موجودی را به دنبال خواهد داشت و این امر تقاضای بیشتری را در پی دارد؛ همچنین با افزایش میزان موجودی، به دلیل بالا رفتن کالای موجود در انبار هزینه های مربوطه از جمله هزینه انبارداری بالا می رود و این خود به نوبه خود ممکن است ما را از هدف مسئله، که پیشینه کردن سود شرکت در شرایط بهینه است، دور کند؛ پس تنظیم متغیرهای تصمیم مسئله یعنی زمان تدارک، موجودی در دست، و قیمت کالا در دست یابی به پیشینه سود امری ضروری است. ابزار تنظیم این متغیرها به ترتیب پارامترهای قابلیت بازار، کشش موجودی و کشش قیمتی است که در بخش مثال عددی و تحلیل حساسیت به بررسی تغییرات آن پرداخته شده است.

این تحقیق می تواند در ابعاد مختلف بسط داده شود. مدل بررسی شده در این مقاله تقاضا را متأثر از قیمت و موجودی فرض کرده است در حالی که در نظر گرفتن سایر عوامل از جمله کیفیت می تواند مدل را به واقعیت نزدیک تر کند. به علاوه در این مطالعه تابع تقاضا به صورت کاپداگلاس فرض شده بود در حالی که می توان روند دیگری را برای تغییرات تقاضا مد نظر قرار داد. همچنین در نظر گرفتن تابع تقاضای احتمالی برای دو شرکت رقیب امری محتمل تر در این مدل است.

قیمت تأثیر چشم گیری نمی گذارد. در سطر دوم این شکل مشخص است که همواره قیمت کالای اول از کالای دوم بیشتر است و این بدیهی است؛ زیرا در مثال عددی فرض شده که این کالا بیشتر از کالای دوم هزینه بر است.

در شکل ۳، ستون انتهایی جدول تحلیل حساسیت بررسی شده است و نوسانات مجموع سود دو شرکت با ایجاد تغییر در پارامترهای اصلی α ، β و f نشان داده شده است. در این شکل مشاهده می شود که افزایش α ، موجب افزایش سود برابند با شیب فزاینده می شود و افزایش f به کاهش برابند سود با شیبی کاهنده می انجامد و در نهایت در قسمت مقایسه β با سود، از شکل ۳، با تحلیل نقش β در میزان برابند سود مشاهده می شود که تا $\beta = -1/5$ با افزایش میزان β ، سود با شیب ملایمی افزایش می یابد اما از $\beta > -1/5$ این افزایش سود، با شیب فزاینده ای انجام می گیرد؛ دلیل این امر نیز نزدیک شدن β به صفر است که با توجه به فرض $0 < \beta < -0/5$ ، صفر شدن این پارامتر، به افزایش تأثیر موجودی در تابع سود با کمتر کردن نقش هزینه های نگهداری می انجامد و امکان پذیر نیست. پس بهترین مقدار برای این پارامتر، $-0/15 < \beta < -0/5$ مشخص می شود.

۷. نتیجه گیری

این تحقیق، رفتار شرکت ها با وجود تقاضای حساس به قیمت، زمان تدارک و میزان موجودی در دست را بررسی می کند که در دو سناریو به تحلیل این مدل پرداخته است؛ در سناریوی اول، تأثیرات قیمت، زمان تدارک، و موجودی در دست در رفتار

منابع (References)

- Lee, J.Y. and Schwarz, L.B. "Lead time reduction in a (Q, r) inventory system: an agency perspective", *International Journal of Production Economics*, **105**, pp. 204-212 (2007).
- Heydari, J., Baradaran Kazemzadeh, R. and Chaharsooghi, S. K. "A study of lead time variation impact on supply chain performance", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **40**, pp. 1206-1215 (2008).
- Lo, M. C. "Economic ordering quantity model with lead time reduction and backorder price discount for stochastic demand", *American journal of applied sciences*, **6**, pp. 387-392 (2009).
- Wu, Z., Kazaz, B., Webster, S. and et al. "Ordering, pricing, and lead-time quotation under lead-time and demand uncertainty" *Production and Operations Management Society*, **21**, pp. 576-589 (2012).
- Hoque, M.A. "A vendor-buyer integrated production-inventory model with normal distribution of lead time", *International Journal of Production Economics*, **144**, pp. 409-417 (2013).
- Kaman, C., Savaseneril, S. and Serin, Y. "Production and lead time quotation under imperfect shop floor information", *International Journal of Production Economics*, **144**, pp. 422-431 (2013).
- Arikan, E., Fichtinger, J. and Ries, J.M. "Impact of transportation lead-time variability on the economic and environmental performance of inventory systems", *International Journal of Production Economics*, **157**, pp. 279-288 (2014).
- Wu, Z., Zhai, X. and Liu, Z. "The inventory billboard effect on the lead time decision", *International Journal of Production Economics*, **170**, pp. 45-53 (2015).
- Kouki, C., Jemai, Z. and Minner, S. "A lost sales (r, Q) inventory control model for perishables with fixed life time and lead time", *International Journal of Production Economics*, **168**, pp. 143-157 (2015).
- Urban, T. L. "Inventory models with inventory -level-dependent demand: a comprehensive review and unifying theory", *European Journal of Operational Research*, **162**, pp. 792-804 (2005).
- Koschat, M. A. "Store inventory can affect demand: empirical evidence from magazine retailing", *Journal of Retailing*, **84**, pp. 165-179 (2008).
- Olivares, M. and Cachon, G.P. "Competing retailers and inventory: an empirical investigation of general motors' dealer ships in isolated US markets", *Management Science*, **55**, pp. 1586-1604 (2009).

13. Chang, C.T., Chen, Y.J., Tsai, T.R. and et al. "Inventory models with stock - and price- dependent demand for deteriorating items based on limited shelf space" , *Yugoslav Journal of Operations Research*, **20**, pp. 55-69 (2010).
14. Qin, Y., Wang, R., Vakharia, A.J. and et al. "The newsvendor problem: review and directions for future research", *European Journal of Operational Research*, **213**(2), pp. 361-374 (2011).
15. Liu, L., Parlar, M. and Zhu, S. X. "Pricing and lead time decisions in decentralized supply chains", *Management science*, **53**, pp. 713 - 725 (2007).
16. Hua, G., Wang, S. and Cheng, T. E. "Price and lead time decisions in dual-channel supply chains" , *European Journal of Operational Research*, **205**, pp. 113-126 (2010).
17. Adida, E. and Perakis, G. "Dynamic pricing and inventory control: robust vs. stochastic uncertainty models-a computational study" , *Annals of Operations Research*, **181**, pp. 125-157 (2010).
18. Zu, S. X. "Joint pricing and inventory replenishment decisions with returns and expediting" , *European Journal of Operational Research*, **216**, pp. 105-112 (2012).
19. Lee, J. "Dynamic pricing inventory control under fixed cost and lost sales" , *Applied Mathematical Modelling*, **38**, pp. 712-721 (2014).
20. Zang, G., Shang, J. and Yildirim, P. "Optimal pricing for group buying with network effects" , *Omega*, **63**, pp. 69-82 (2016).

پیوست‌ها

پیوست الف: اثبات مقعر بودن تابع سود یک شرکت در سناریو اول برای اثبات تقعر تابع سود یک شرکت، کافی است ماتریس هسین آن تشکیل داده و کهادهای آن بررسی شود. در توابع مقعر در صورتی که کهاد اول منفی باشد و سایر کهادها یکی درمیان به ترتیب مثبت و منفی شوند، آنگاه تابع مقعر است. در ادامه ماتریس هسین تابع تشکیل شده است.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} = -\frac{1}{T} k R^{\beta+1} T^{-\frac{f}{\gamma}} \sqrt{\eta \alpha P^{-f}} \quad (\text{الف - ۵})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial R} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R \partial T} = -\eta k \alpha (\beta + 1) R^{\beta} P^{-f} + k(\beta + 1) R^{\beta} T^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\eta \alpha P^{-f}} \quad (\text{الف - ۶})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} = \beta(\beta + 1) \alpha R^{\beta-1} \times P^{1-f} - \beta(\beta + 1) c_p \alpha R^{\beta-1} P^{-f} - \beta(\beta + 1) \eta k T \alpha R^{\beta-1} P^{-f} + \beta(\beta + 1) k R^{\beta-1} \sqrt{\eta T \alpha P^{-f}} \quad (\text{الف - ۷})$$

حال علامت کهادها بررسی می‌شود؛ فرمول کهاد اول، که با $|H|_1$ نشان داده شده است، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود و با شرط منفی بودن عبارت (الف - ۸)، کهادهای بعدی تابع بررسی می‌شود. با شرط مثبت بودن کهاد دوم که در عبارت (الف - ۹) نشان داده شده و فرض منفی بودن کهاد سوم که در ترمینان ماتریس هسین (الف - ۱) است و در عبارت (الف - ۱۰) نشان داده شده است، تابع سود مورد نظر اکیداً مقعر در نظر گرفته می‌شود.

$$|H|_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} < 0 = -f(1-f) \alpha R^{\beta+1} P^{-f-1} - f \times (f+1) c_p \alpha R^{\beta+1} P^{-f-2} - \eta f(f+1) k T \alpha R^{\beta+1} P^{-f-2} + f \left(\frac{f}{\gamma} + 1 \right) k R^{\beta+1} \times \sqrt{\eta T \alpha P^{(-\frac{f}{\gamma}-2)}} < 0 \quad (\text{الف - ۸})$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial T} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial R} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial P} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial R} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R \partial P} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R \partial T} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \end{bmatrix} \quad (\text{الف - ۱})$$

که در آن تک تک درایه‌ها به صورت زیر، با مشتق‌گیری از تابع مدنظر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial T} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial P} = \eta f k \alpha R^{\beta+1} P^{-f-1} - \frac{1}{T} T^{-\frac{1}{\gamma}} f k R^{\beta+1} \sqrt{\eta \alpha P^{-\frac{f}{\gamma}-1}} \quad (\text{الف - ۲})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} = -f(1-f) \alpha R^{\beta+1} \times P^{-f-1} + f(-f-1) c_p \times \alpha R^{\beta+1} P^{-f-2} + \eta f(-f-1) k T \alpha R^{\beta+1} P^{-f-2} - f \left(-\frac{f}{\gamma} - 1 \right) k R^{\beta+1} \sqrt{\eta T \alpha P^{(-\frac{f}{\gamma}-2)}} \quad (\text{الف - ۳})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial R} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R \partial P} = (\beta + 1) \alpha R^{\beta} \times P^{-f-1} [(1-f)P + f c_p + f k T \eta] - f(\beta + 1) k R^{\beta} \sqrt{\eta T \alpha P^{-\frac{f}{\gamma}-1}} \quad (\text{الف - ۴})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial P_i^2} = \alpha R_i (R_{r-i} + R_i)^{\beta} \left[\begin{array}{l} -f(P_{r-i} + P_i)^{-f-1} + f \\ \times (f+1)(P_{r-i} + P_i)^{-f-2} \\ \times P_i - f(P_{r-i} + P_i)^{-f-1} \\ + c_{pi} - k\eta T_i f \\ \times (f+1)(P_{r-i} + P_i)^{-f-2} \end{array} \right] + fk\sqrt{T_i\eta\alpha}R_i(R_{r-i} + R_i)^{\beta} \times \left(\frac{f}{\gamma} + 1\right)(P_{r-i} + P_i)^{-\frac{f}{\gamma}-1} \quad (3 - ب)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial P_i \partial R_i} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R_i \partial P_i} = \left[\begin{array}{l} \left((P_{r-i} + P_i)^{-f} \right) \\ -f(P_{r-i} + P_i)^{-f-1} P_i \\ + \left(-c_{pi} - k\eta T_i \right) \\ (-f)(P_{r-i} + P_i)^{-f-1} \end{array} \right] \alpha \times \left[\begin{array}{l} (R_{r-i} + R_i)^{\beta} \\ + \beta(R_{r-i} + R_i)^{\beta-1} R_i \end{array} \right] - fk\sqrt{T_i\eta\alpha}(P_{r-i} + P_i)^{-\frac{f}{\gamma}-1} \times \left[\begin{array}{l} (R_{r-i} + R_i)^{\beta} \\ + \beta(R_{r-i} + R_i)^{\beta-1} R_i \end{array} \right] \quad (4 - ب)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial T_i^2} = -\frac{1}{\gamma} k T_i^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\eta\alpha(P_{r-i} + P_i)^{-f}} \times R_i (R_{r-i} + R_i)^{\beta} \quad (5 - ب)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial T_i \partial R_i} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R_i \partial T_i} = k T_i^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\eta\alpha} (P_i + P_{r-i})^{-\frac{f}{\gamma}} \times \left[\begin{array}{l} (R_i + R_{r-i})^{\beta} \\ + \beta(R_i + R_{r-i})^{\beta-1} R_i \end{array} \right] - k\eta\alpha (P_i + P_{r-i})^{-f} \times \left[\begin{array}{l} (R_i + R_{r-i})^{\beta} \\ + \beta(R_i + R_{r-i})^{\beta-1} R_i \end{array} \right] \quad (6 - ب)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial R_i^2} = (P_i - c_{pi} - k\eta T_i)\alpha (P_{r-i} + P_i)^{-f} \times \left[\begin{array}{l} \beta(R_{r-i} + R_i)^{\beta-1} \\ + \beta(\beta-1)(R_{r-i} + R_i)^{\beta-2} R_i \\ + \beta(R_{r-i} + R_i)^{\beta-1} \end{array} \right] + \beta k \sqrt{T_i\eta\alpha} (P_{r-i} + P_i)^{-f} \times \left[\begin{array}{l} \beta(R_{r-i} + R_i)^{\beta-1} + \\ \beta(\beta-1)(R_{r-i} + R_i)^{\beta-2} R_i \\ + \beta(R_{r-i} + R_i)^{\beta-1} \end{array} \right] \quad (7 - ب)$$

$$|H|_r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial T} \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial P} \geq 0 = - \left[\begin{array}{l} f(\lambda - f)\alpha R^{\beta+1} P^{-f-1} \\ f(f+1)c_p\alpha R^{\beta+1} P^{-f-2} \\ + \eta f(f+1)kT\alpha R^{\beta+1} \\ \times P^{-f-2} - f\left(\frac{f}{\gamma} + 1\right)kR^{\beta+1} \\ \times \sqrt{\eta T\alpha} P^{-(\frac{f}{\gamma}-2)} \end{array} \right] \times \left[-\frac{1}{\gamma} k R^{\beta+1} T^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\eta\alpha} P^{-f} \right] - \left[\begin{array}{l} \eta f k \alpha R^{\beta+1} P^{-f-1} \\ -\frac{1}{\gamma} T^{-\frac{1}{\gamma}} f k R^{\beta+1} \\ \times \sqrt{\eta\alpha} P^{-\frac{f}{\gamma}-1} \end{array} \right]^2 > 0 \quad (9 - الف)$$

$$|H|_r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial T} - \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial P^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial R} \right)^2 \\ + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial T} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \\ + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P \partial R} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \end{array} \right] < 0 \quad (10 - الف)$$

پایوست ب: اثبات تقعر تابع سود شرکت i در رویکرد نش

برای اثبات تقعر تابع سود شرکت در رویکرد نش، کافی است ماتریس هسین آن تشکیل و کهدای آن بررسی شود. چنانچه تعریف شد $R_{\gamma} = R_{\gamma r}$ و $R_{\lambda} = R_{\lambda \gamma}$ و با در نظر گرفتن R_1 و R_2 در صورتی که کهد اول منفی باشد و سایر کهداها یک درمیان به ترتیب مثبت و منفی شوند، آنگاه تابع مقعر است. در عبارت (ب-1)، ماتریس هسین تابع تشکیل شده است. پس بدین ترتیب برای شرکت i ام با در نظر گرفتن $i = 1, 2$:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial P_i^2} & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial P_i \partial T_i} & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial P_i \partial R_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial T_i \partial P_i} & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial T_i^2} & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial T_i \partial R_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R_i \partial P_i} & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R_i \partial T_i} & \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R_i^2} \end{bmatrix} \quad (1 - ب)$$

که در آن برای محاسبه ی درایه ها، با گرفتن مشتق از تابع سود نسبت به متغیرهای تصمیم برای شرکت دوم، به صورت زیر عمل می شود:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial P_i \partial T_i} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial T_i \partial P_i} = -\frac{f}{\gamma} k T_i^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\eta\alpha} \times (P_i + P_{r-i})^{-\frac{f}{\gamma}-1} R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} + f k \eta \alpha R_i (R_i + R_{r-i})^{\beta} \times (P_i + P_{r-i})^{-f-1} \quad (2 - ب)$$

$$= \left[\begin{array}{c} \alpha R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\tau\beta} \\ -f(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\lambda} \\ +f(f+\lambda)(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\tau} P_i \\ -f(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\lambda} \\ +(-c_{pi} - k\eta T_i) f(f+\lambda)(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\tau} \\ +fk\sqrt{T_i}\eta\alpha R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\beta} \\ \times (\frac{f}{\tau} + \lambda)(P_{\tau-i} + P_i)^{-\frac{f}{\tau}-\tau} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} -\frac{\lambda}{\tau} k T_i^{-\frac{f}{\tau}} \sqrt{\eta\alpha} (P_{\tau-i} + P_i)^{-f} R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\beta} \\ -k\eta\alpha R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\tau\beta} (-f)(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\lambda} \\ +kT_i^{-\frac{\lambda}{\tau}} R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\beta} \sqrt{\eta\alpha} \\ \times (-\frac{f}{\tau})(P_{\tau-i} + P_i)^{-\frac{f}{\tau}-\lambda} \end{array} \right] > 0 \quad (9 - ب)$$

$$|H|_{\tau} = \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i^{\tau}} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial T_i^{\tau}} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial R_i^{\tau}} + \tau \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial T_i \partial R_i} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i \partial R_i} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i \partial T_i} - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i^{\tau}} (\frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial T_i \partial R_i})^{\tau} + (\frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i \partial T_i})^{\tau} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial R_i^{\tau}} \\ + (\frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i \partial R_i})^{\tau} \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial T_i^{\tau}} \end{array} \right] < 0 \quad (10 - ب)$$

مطابق با شرایط مقعر بودن توابع، کهاد اول بررسی می‌شود. کهاد اول در واقع همان درایه‌ی اول ماتریس است که شرط کوچک‌تر از یا مساوی بودن با صفر بر آن اعمال می‌شود. چنان چه در رابطه‌ی (ب - ۸) نشان داده شده است. کهاد دوم که عبارت (ب - ۹) بیان‌گر آن است، با شرط بزرگ‌تر از صفر بودن و کهاد سوم یا همان درمیان ماتریس هسین تابع طبق عبارت (ب - ۱۰) محاسبه و منفی در نظر گرفته می‌شود. با این شرایط، تابع اکیداً مقعر خواهد بود.

$$|H|_{\lambda} = \frac{\partial^{\lambda}\varphi_i}{\partial P_i^{\lambda}} < 0 \\ = \alpha R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\tau\beta} \\ \times \left[\begin{array}{c} -f(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\lambda} \\ +f(f+\lambda)(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\tau} P_i \\ -f(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\lambda} \\ +(-c_{pi} - k\eta T_i) f(f+\lambda)(P_{\tau-i} + P_i)^{-f-\tau} \end{array} \right] \\ +fk\sqrt{T_i}\eta\alpha R_i (R_{\tau-i} + R_i)^{\beta} \\ \times (\frac{f}{\tau} + \lambda)(P_{\tau-i} + P_i)^{-\frac{f}{\tau}-\tau} < 0 \quad (8 - ب)$$

$$|H|_{\tau} = \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i^{\tau}} \times \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial T_i^{\tau}} \\ - \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial P_i \partial T_i} \times \frac{\partial^{\tau}\varphi_i}{\partial T_i \partial P_i} > 0$$