Archive of SID

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، (تابستان ۱۳۹۸)
دوره‌ی ۱-۳۵، شماره‌ی ۱/۱، ص. ۱۱-۲۱

Original Article

رویکرد نظریه‌ی بازی برای قیمت‌گذاری و تعیین میزان سرمایه‌گذاری با وجود دو تولیدکننده‌ی دارای کالاهای جانشین

لعیا شهبازی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
مرتضی راستی برزکی * (دانشیار)
دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان

تاکنون به مسئله‌ی تعیین مقدار سرمایه‌گذاری و قیمت‌گذاری دو کالای جانشین به طور یکپارچه پرداخته نشده است. در مقاله‌ی حاضر این مسئله بررسی خواهد شد. دو تولیدکننده با استفاده از سرمایه‌ی یک سرمایه‌گذار بیرونی قصد خرید فنّاوری جدیدی به منظور کاهش هزینه‌های تولید دارند. در این پژوهش برخلاف مطالعات قبلی، سرمایه‌گذار مستقیماً جزء بازار نیست و به صورت مستقل عمل می‌کند و پس از سرمایه‌گذاری از تولیدکنندگان سود دریافت می‌کند. این مسئله به صورت بازی استکلبرگ - برترند مدل‌سازی و حل شده است. ابتدا سرمایه‌گذار به عنوان رهبر تعیین می‌کند که چه میزان در هر شرکت سرمایه‌گذاری خواهد کرد و سپس تولیدکننده‌ها به عنوان پیرو با توجه به مقدار سرمایه‌ی کسب شده قیمت محصولات خود را به صورت هم‌زمان تعیین می‌کنند. برای حل بازی ابتدا به کمک تعادل نش مقادیر مربوط به قیمت‌های تعادلی تولیدکننده‌ها محاسبه شده است؛ سپس با توجه به جواب‌ها و تعادل استکلبرگ مقدار بهینه‌ی سرمایه‌گذاری در هر شرکت محاسبه شده و تقاضا و قیمت‌ها پس از سرمایه‌گذاری به دست آمده است.

واژگان کلیدی: زنجیره‌ی تأمین، قیمت‌گذاری، سرمایه‌گذاری، تعادل نش و استکلبرگ، نظریه‌ی بازی.

layashahbazy@gmail.com
rasti@cc.iut.ac.ir

۱. مقدمه

سرمایه‌گذاری [۱] عبارت است از هرگونه فداکردن ارزش مشخصی بعد از انجام تجزیه و تحلیل‌های لازم برای گذاشتن یا قرض دادن پول در یک چرخه به امید به دست آوردن ارزش یا سودی در زمان آینده که معمولاً اندازه یا کیفیت آن نامعلوم است. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذار در حال حاضر ارزش مشخصی را فدا می‌کند تا در قبال آن در آینده ارزش خاصی، که مورد نظرش است، به دست آورد.[۱] سرمایه‌گذاری در بسیاری حوزه‌های اقتصادی مثل حوزه‌ی مدیریت کسب و کار یا دارایی در سطوح مختلف از قبیل خانواده‌ها، بنگاه‌ها، یا دولت‌ها بحث و بررسی می‌شود. در این نوشتار سرمایه‌گذاریِ عامل بیرونی در بازاری با دو بنگاه تولیدی بررسی می‌شود. اگر عامل سرمایه‌گذار مستقیماً بخشی از بازار نباشد، نسبت به حالتی که سرمایه‌گذار نیز جزئی از بازار است می‌تواند مشکلات بیشتری به همراه داشته باشد؛ زیرا امکان کمتری برای کنترل شرایط از سوی او وجود دارد. به همین علت سرمایه‌گذاری در این شرایط نیاز به بررسی و تحلیل دقیق‌تری دارد.

یکی از روش‌های تقسیم‌بندی سرمایه‌گذاری، دسته‌بندی بر اساس موضوع سرمایه‌گذاری است. سرمایه‌گذاری بر حسب موضوع به دو دسته‌ی سرمایه‌گذاری واقعی و سرمایه‌گذاری مالی تقسیم می‌شود. در سرمایه‌گذاری واقعی موضوع، دارایی واقعی است. اما در سرمایه‌گذاری مالی، فرد در ازای فداکردن ارزش حاضر، نوعی دارایی مالی که نتیجه‌ی آن معمولاً جریانی از وجوه نقد است، به دست می‌آورد و فرد در ازای پرداخت پول، شایسته‌ی دریافت جریانی از وجوه نقد به شکل سود می‌شود. طبق تحقیق انجام گرفته توسط اسمیت و جورجیس[۲]، یک شرکت باید بر روی منابع منعطف سازمان سرمایه‌گذاری کند؛ یعنی منابعی که شایستگی ایجاد سود مشخصی در شرکت را داشته باشند یا بتوانند فرصت‌هایی را در بازار برای شرکت ایجاد کنند. از آنجایی که سرمایه‌گذاری در تولید یک محصول و فرایندهای فناورانه یک انتخاب بلندمدت در نظرگرفته می‌شود، برای تصمیم‌گیری درباره‌ی این موضوع باید دقت و ارزیابی‌های لازم صورت پذیرد.[۳]

در دنیای امروز صنایع تولیدی به شدت رقابتی شده است و تعداد سازمان‌هایی که به بازار وارد می‌شوند نیز افزایش یافته است. این مسائل باعث ایجاد فشار بر روی مدیران برای تغییر در عملکرد کسب و کار شده است.[۳] شرکت‌ها برای باقی ماندن در بازار رقابت و نیز وفادار نگه‌داشتن مشتریان به خود در این راستا تلاش می‌کنند و با توجه به گسترش روز افزون فنّاوری شرکت‌ها موظف هستند تا محصولات خود را

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۱۰/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۶/۷/۵، پذیرش ۱۳۹۶/۷/۲۴.
DOI:10.24200/J65.2019.7068.1684

www.SID.ir

Archive of SID

متناسب با نیازهای مشتریان و با استفاده از فنّاوری‌های پیشرفته و به روز به دست آنها برسانند. اگر در یک بازار، رقبای شرکت محصولاتی با قیمت پایین‌تر تحویل مشتری دهند، مشخص است که شرکت مذکور به زودی سهم بازار خود را از دست خواهد داد و از صحنه‌ی رقابت حذف خواهد شد. یکی دیگر از عوامل تأثیرگذار در حفظ سهم بازار مسئله‌ی پاسخ به تغییرات در زمان مناسب است. بازاری را در نظر بگیرید که دو تولیدکننده محصولات مشابهی به دست مشتری می‌رسانند. اگر در این بازار یکی از تولیدکنندگان به فنّاوری جدیدی دست یابد که به کمک آن قیمت محصولات را کاهش دهد ولی شرکت دیگر با شرایط اولیه همچنان به تولید ادامه بدهد، چه اتفاقی رخ خواهد داد؟ واضح است که اگر شرکت دوم به زودی تغییری در روند تولید ایجاد نکند، سهم بازار را از دست خواهد داد. در واقع، این شرکت باید هرچه سریع‌تر به تغییر ایجاد شده واکنش صحیح نشان دهد. در این نوشتار در پی پاسخ‌دادن به این سؤال هستیم که بهترین راه برای این شرکت چیست. بدین منظور زنجیره‌ی تأمینی با دو تولیدکننده‌ی محصولات جانشین در نظر گرفته شده است. این دو تولیدکننده قصد دارند هم‌زمان با پیشرفت فنّاوری، تجهیزات خود را ارتقا دهد تا هزینه‌ی تولید محصولات کاهش یابد. این شرکت‌ها می‌توانند برای تأمین هزینه‌های خود از سرمایه‌ی یک سرمایه‌گذار خارج از بازار استفاده کنند که تمایلی برای ورود مستقیم به بازار ندارد. از طرفی سرمایه‌گذار در صورتی اقدام به سرمایه‌گذاری خواهد کرد که بتواند به سود قابل قبولی دست یابد. وی در صورت سوددهی مبلغ مشخصی را در شرکت‌ها سرمایه‌گذاری می‌کند و در ازای این سرمایه‌گذاری کسری از افزایش سود شرکت‌ها را در شرایط جدید به عنوان سود سرمایه‌گذاری دریافت می‌کند. همچنین این مقاله به این پرسش پاسخ می‌دهد که با توجه به رقیب بودن دو شرکت و عدم اطلاع از تصمیم شرکت رقیب، چگونه می‌توان برای خرید تجهیز جدید تصمیم‌گیری کرد. این مقاله به کمک نظریه‌ی بازی به بررسی تصمیمات عوامل موجود در بازی پرداخته و پاسخ بهینه‌ی هر یک را به دست آورده است.

۲. پیشینه‌ی پژوهش

پژوهشگران موضوع سرمایه‌گذاری و اثرات آن بر کسب و کار را از جنبه‌های مختلف بررسی کرده‌اند. در ادامه به برخی از پژوهش‌های صورت گرفته در این حوزه اشاره می‌شود. زهیر و همکاران تأکید کرده‌اند که عملکرد یک سازمان به میزان سرمایه‌گذاری فناورانه‌ی صورت گرفته در آن سازمان بستگی دارد.[۴] همچنین کبیر و الحاجی در پژوهشی به بررسی تأثیر سرمایه‌گذاری فناورانه در حوزه‌ی تولید و عملکرد شرکت‌های تولیدی به کمک یک مدل کیفی پرداخته و نشان داده‌اند که این فعالیت‌ها از قبیل خرید تجهیزات و ساختارهای جدید به افزایش کارایی شرکت‌ها منجر می‌شود.[۳] در پژوهشی دیگر، چان و همکاران صنعت تولید مربوط به تولید یک کالای خاص را بررسی کرده و نشان داده‌اند که سرمایه‌گذاری در کارخانه‌ها، عامل اصلی موفقیت در صنعت مربوط (تولید ترانزیستور فیلم) است.[۵]

لفلی و سارکیس نشان داده‌اند که یکی از موانع عمده در اجرای سرمایه‌گذاری در بسیاری از سازمان‌ها توجیه فرایند سرمایه‌گذاری است.[۶] در همین راستا برخی مقالات به بررسی اثرات سطح اعتماد و روابط متقابل در محیط سرمایه‌گذاری پرداخته و رفتارهای انسانی را مبنا قرار داده‌اند. مانند تحقیقات انجام گرفته توسط برگ و همکاران.[۷] در مقاله‌ی کاراگارتنام و همکاران[۸] نیز ارزش‌های اجتماعی در کنار روابط متقابل لحاظ شده است. همچنین بوچان و همکاران[۹] جنسیت افراد را در سطح اعتماد به طرف مقابل در نظر گرفته‌اند. گنس در مقاله‌یی[۱۰]، یک بازی را بررسی می‌کند که در آن هم تأثیر عوامل اجتماعی و هم رقابت منظور شده است.

در پژوهش‌های پیشین این حوزه پژوهش‌هایی فقط مسائل مالی را مدنظر قرار داده‌اند. برای مثال اجبی و همکاران بیان کردند که بازگشت سرمایه یک معیار مهم در تصمیمات سرمایه‌گذار است.[۱۱] کنگ و ووک نیز یک بازی سرمایه‌گذاری بین دو شرکت رقیب برای ورود به یک پروژه با جریان درآمدی غیرقطعی و هزینه‌های نامتقارن را بررسی کرده‌اند.[۱۲] همچنین چان و همکاران به کمک روش ارزش فعلی خالص تصمیمات مربوط به سرمایه‌گذاری را بررسی کرده‌اند. این پژوهش همچنین ریسک را نیز در محاسبات وارد کرده است.[۵] هوسر و همکاران[۱۳] نیز ریسک را در سرمایه‌گذاری بررسی کرده‌اند. بوچان و همکاران نیز ضمن در نظر گرفتن ریسک، سرمایه‌گذاری در کانال‌های فروش اینترنتی محصولات را بررسی کرده‌اند.[۱۴]

در پژوهشی نشان داده شده است که تصمیمات سرمایه‌گذاری یک شرکت تحت تأثیر رفتار شرکت‌های رقیب قرار می‌گیرد.[۱۵] کانو و همکاران دو شرکت را در نظر گرفته‌اند که در شرایط قطعی و بدون ریسک پس از انجام سرمایه‌گذاری می‌توانند وارد بازار شوند و اقدام به تولید محصولات کنند. این مقاله به کمک نظریه‌ی بازی پاسخ بهینه‌ی مسئله را در شرایط رقابتی بررسی کرده است.[۱۶] دسیت و پیندیک نیز در مقاله‌یی سرمایه‌گذاری شرکت‌ها پیش از ورود به بازار را بررسی کرده‌اند. در این مقاله نیز شرکت‌ها در صورت انجام سرمایه‌گذاری می‌توانند وارد بازار شوند.[۱۷] هی و همکاران، دو شرکت را در نظر گرفته‌اند که برای تولید محصولات می‌توانند از دو نوع ماشین استفاده کنند. یکی از ماشین‌ها توان تولید تنها یک نوع محصول و دیگری امکان تولید دو نوع محصول را ایجاد می‌کند. در این مقاله به کمک نظریه‌ی بازی تصمیم‌گیری می‌شود که هر شرکت سرمایه‌ی خود را صرف خرید کدام محصول کند.[۱۸]

المفرج و المسفیر به مرور مقالات مرتبط با رشد اقتصادی بر اثر سرمایه‌گذاری مستقیم خارجی پرداخته‌اند. در اکثر مقالات مرور شده سرمایه‌گذاری خارجی اثرات مثبتی را برای رشد اقتصادی کشور میزبان به همراه دارد.[۱۹]

برخی مقالات، تأثیر مداخله‌ی فرد سوم بر بازی‌های سرمایه‌گذاری را بررسی کرده‌اند.[۲۰-۲۱] همچنین پژوهش‌هایی دو یا چند سرمایه‌گذار را در نظر گرفته‌اند؛ بدین صورت که ابتدا عوامل سرمایه‌گذاری می‌کنند و سپس وارد بازار می‌شوند و به مشارکت در شبکه‌ی ایجاد شده می‌پردازند.[۲۲] بورگر و همکاران[۲۳] نیز، بازی سرمایه‌گذاری را بررسی کرده‌اند که در آن دولت سرمایه‌گذار است.

در اغلب پژوهش‌ها، سرمایه‌گذار بخشی از بازار است و پس از سرمایه‌گذاری به عنوان یک شرکت عمل می‌کند؛ اما در پژوهش حاضر، سرمایه‌گذار وارد بازار نمی‌شود و به صورت انفرادی بررسی می‌شود. در نتیجه دستاوردهای تحقیق حاضر با کارهایی که در گذشته صورت گرفته متفاوت است. همچنین در بسیاری از موارد مسئله‌ی زمان و گذرا بودن فرصت سرمایه‌گذاری لحاظ شده است. برای مثال کافمن و لی به بیان راهبرد زمان سرمایه‌گذاری برای شرکتی که باید بین دو فنّاوری رقابتی برای فعالیت در بازار تصمیم‌گیری کند، پرداخته است.[۲۴] همچنین چانگ و بری، به بررسی زمان و عدم قطعیت موجود در مورد سرمایه‌گذاری ارائه دهندگان خدمات بی‌سیم برای ورود به بازار و سپس رقابت در بازار پرداخته‌اند.[۲۵] اما در مسئله‌ی مطرح شده در مقاله‌ی حاضر تولیدکننده به دنبال جلب رضایت سرمایه‌گذار است و در نتیجه فرصت سرمایه‌گذاری از بین نمی‌رود.

با توجه به موارد ذکر شده، در بیشتر پژوهش‌های انجام شده در این حوزه

www.SID.ir

Archive of SID

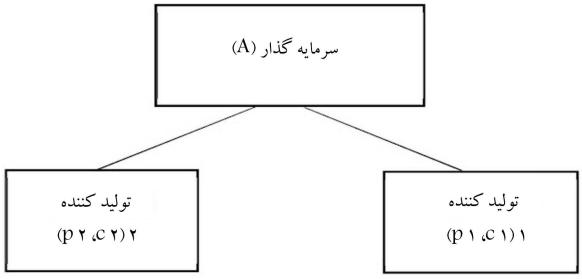
سرمایه‌گذار جزئی از بازار بوده است و به صورت مستقل بررسی نشده است. همچنین در بسیاری از موارد شرکت‌ها با هدف ورود به بازار، سرمایه‌گذاری انجام می‌دهند. در حالی که پژوهش حاضر این گونه در نظر می‌گیرد که پس از شروع فعالیت، شرکت‌ها تصمیم به ارتقای سطح فعالیت خود می‌گیرند و در این راستا از سرمایه‌گذاری در خارج بازار استفاده می‌کنند. که این سرمایه‌گذار اشتیاقی برای ورود مستقیم به بازار و شراکت در فرایند تولید ندارد و تنها مبلغی را به عنوان سرمایه در اختیار شرکت‌ها قرار می‌دهد و در ازای آن در سود به دست آمده سهیم می‌شود. برای مثال می‌توان به تصمیم کارخانه‌ها برای به‌روزرسانی تجهیزات خود یا راه‌اندازی خط تولید جدیدی در کنار خط تولید موجود اشاره کرد. به گونه‌یی که سرمایه‌ی مورد نیاز برای این کار از سرمایه‌گذاری در خارج از بازار از قبیل بخش خصوصی یا افراد سرمایه‌گذار خارجی تأمین می‌شود. برای برگرداندن مبلغ سرمایه‌گذاری شده، سرمایه‌گذار در سود حاصل از ارتقای محصولات و کاهش هزینه‌ی تولید سهیم می‌شود.

بدین منظور زنجیره‌ی تأمینی با دو تولیدکننده در نظرگرفته شده است. این دو تولیدکننده مایل هستند هم‌زمان با پیشرفت فنّاوری، تجهیزات خود را ارتقا دهند و برای تأمین هزینه‌های خود از سرمایه‌یی در خارج از بازار استفاده کنند. برای حل این بازی سرمایه‌گذار به عنوان رهبر بازی تعیین می‌کند که آیا اقدام به سرمایه‌گذاری می‌کند یا خیر. سپس شرکت‌ها به پیروی از شرایط ایجاد شده قیمت محصولات خود را تعیین می‌کنند. در واقع یک بازی استکلبرگ - برترند بررسی شده است.

۳. تعریف مسئله

بازاری با دو تولیدکننده که به تولید کالای جانشین می‌پردازند، در نظرگرفته شده است. هریک از آن‌ها به صورت جداگانه قیمت خود را تعیین می‌کنند. این دو تولیدکننده مایل هستند هم‌زمان با پیشرفت فنّاوری تجهیزات خود را ارتقا دهند و از ادوات تولیدی جدیدی که وارد بازار شده است، استفاده کنند. این شرکت‌ها می‌توانند برای تأمین هزینه‌های خود از سرمایه‌ی سرمایه‌گذاری استفاده کنند که تمایلی برای ورود مستقیم به بازار ندارد. از طرفی سرمایه‌گذار در صورتی اقدام به سرمایه‌گذاری خواهد کرد که به سود قابل قبولی دست یابد. وی در صورت سودآوری، مبلغ مشخص A از سرمایه‌ی خود را در شرکت‌ها سرمایه‌گذاری می‌کند و در ازای این سرمایه‌گذاری کسری از افزایش سود این شرکت‌ها را در شرایط جدید به عنوان سود دریافت می‌کند. او می‌تواند روی هر دو یا فقط یکی از این دو شرکت برای خرید فنّاوری جدید سرمایه‌گذاری کند. هر شرکت که به فنّاوری مدنظر دست یابد، هزینه‌ی تولید کمتری خواهد داشت. هر شرکت قیمت محصول خود را به صورت مستقل تعیین می‌کند. در نتیجه این دو شرکت برای جلب توجه سرمایه‌گذار با هم به رقابت می‌پردازند. شکل ۱ ساختار بازی را نشان می‌دهد.

ابتدا علائم استفاده شده در این نوشتار معرفی می‌شوند.



شکل ۱. ساختار مسئله.

علائم

اندیس‌ها

f_i تولیدکننده‌ی i ام

I سرمایه‌گذار

پارامترها

c_i هزینه‌ی تولید هر شرکت در حالت عادی

D_i تقاضای هر شرکت در حالت عادی

A کل سرمایه‌ی سرمایه‌گذار

λ ،β ،α ضرایب تابع تقاضا

θ ضرییی از سود هر شرکت که به سرمایه‌گذار تعلق می گیرد.

c_i' هزینه‌ی تولید در سیستم جدید

D_i' تقاضا در سیستم جدید

δ ضریب که از هزینه‌ی تولید کاسته می‌شود.

متغیرهای تصمیم

x درصد سرمایه‌ی سرمایه‌گذاری شده در شرکت اول توسط سرمایه‌گذار

p_i قیمت فروش هر شرکت در حالت عادی

p_i' قیمت فروش در سیستم جدید (استقراض)

متغیرهای وابسته

π'_{f_i} تابع سود مربوط به تولیدکننده‌ی i ام در شرایط استقراض

π_I تابع سود سرمایه‌گذار

π_{f_i} تابع سود مربوط به تولیدکننده‌ی i ام در شرایط اولیه

$s_۱$ مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت اول

$s_۲$ مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت دوم

۱.۳. فرضیات مسئله

برای ایجاد مدل فرضیات زیر در نظرگرفته شده است.

فرض ۱

مقدار کل سرمایه‌گذاری از دید سرمایه‌گذار ثابت و برابر با مقدار A است.

$$s_۱ + s_۲ = A \qquad (۱)$$

فرض ۲

سرمایه‌گذار می‌تواند روی هر دو یا فقط یکی از دو شرکت سرمایه‌گذاری کند. یا در هیچ طرحی سرمایه‌گذاری نکند.

$s_۱$ و $s_۲$ ، مقادیر سرمایه‌گذاری در شرکت ۱ و ۲ می‌باشند.

$$s_۱ = x \times A \qquad (۲)$$

$$s_۲ = (۱ - x) \times A \qquad (۳)$$

از آن‌جایی که سرمایه‌گذار در انجام یا عدم انجام سرمایه‌گذاری آزاد است مقادیر sها به صورت رابطه‌ی ۴ در نظرگرفته شده است.

$$s_۱ \geq ۰, s_۲ \geq ۰ \qquad (۴)$$

www.SID.ir

Archive of SID

فرض۳

سود سرمایه‌گذار ضریبی از تفاوت در مقدار سود شرکتی است که از سرمایه استفاده کرده است. مقدار این ضریب توسط عوامل توافق می‌شود. عبارت ۵ برای این ضریب در نظر گرفته می‌شود.

$$0 \leq \theta \leq 1 \qquad (5)$$

فرض۴

پس از سرمایه‌گذاری در شرکت، دیگر هزینه‌یی متوجه سرمایه‌گذار نیست.

فرض ۵

هر شرکت که به فنّاوری مد نظر دست یابد، هزینه‌ی تولید کمتری متناسب با مقدار سرمایه‌گذاری شده خواهد داشت.

$$\delta > 0 \qquad (6)$$

فرض ۶

محصولات به صورت جایگزین در نظر گرفته شده است.

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \qquad (7)$$

فرض ۷

تقاضای بازار به صورت خطی است و تابعی بر حسب قیمت در نظر گرفته شده است. این‌گونه فرض می‌شود که در این بازار تقاضا با توجه به قیمت تغییر می‌کند.

$$D_1 = \alpha_1 - \beta_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \qquad (8)$$

$$D_2 = \alpha_2 - \beta_2 p_2 + \lambda_1 p_1 \qquad (9)$$

با توجه به توابع تقاضا، شروط زیر نیز لحاظ می‌شوند.

$$\beta 1 > 0, \beta 2 > 0, \alpha 1 > 0, \alpha 2 > 0 \qquad (10)$$

عبارت ۱۱ بیان‌گر بیشتربودن تأثیر قیمتی هر محصول بر تقاضای همان محصول نسبت به تأثیر قیمت رقیب است.

$$\beta_1 > \lambda_1 \text{ و } \beta_2 > \lambda_2 \qquad (11)$$

از آن‌جایی‌که تقاضا مقدار مثبتی می‌پذیرد، شروط زیر نیز به ترتیب برای تولیدکننده‌ی اول و دوم در نظر گرفته می‌شود.

$$\alpha_1 + p_2' \lambda_2 \geq 0 \qquad (12)$$

$$\alpha_2 + p_1' \lambda_1 \geq 0 \qquad (13)$$

فرض ۸

از آن‌جایی‌که تولیدکنندگان به دنبال سودآوری هستند، قیمت فروش محصولات بیشتر از هزینه‌ی تولید آن‌ها در نظر گرفته شده است.

$$p_1 > c_i \ , \ p_i' > c_i' \qquad (14)$$

فرض ۹

برای این‌که تولیدکننده مایل به ورود به بازی باشد، باید سودآوری داشته باشد. عبارت ۱۵ شرط سودآوری تولیدکننده‌ی اول را بررسی می‌کند.

$$p_2 > \frac{1}{-\theta c_1 \lambda_2 + \theta p_1 \lambda_2}(1-\theta)E_1 + (c_1\alpha_1 - \theta p_1 \alpha_1 - \theta c_1 p_1 \beta_1 + \theta p_1^2 \beta_1) \qquad (15)$$

شرط سودآوری تولیدکننده‌ی دوم نیز در رابطه‌ی ۱۶ مشاهده می‌شود.

$$p_1 > ((-c_2 + \theta p_2 + (\theta - 1)(s_2\delta - p_2'))\alpha_2 + (\theta(c_2 - p_2)p_2 - (\theta - 1)c_2' p_2' + (\theta - 1)p_2'^2). + (\theta - 1)p_1'(s_2\delta + c_2 - p_2')\lambda_1)/\theta(c_2 - p_2)\lambda_1 \qquad (16)$$

۲.۳. مدل‌سازی

تابع سود مربوط به سرمایه‌گذار در رابطه‌ی ۱۷ نشان داده شده است.

$$\pi_1 = \sum_{i=1}^{2} \theta(\pi_{fi}' - \pi_{fi}) \qquad (17)$$

تابع سود مربوط به هریک از تولیدکننده‌ها از رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید.

$$\pi_{fi}' = (p_i' - c_i')D_i' - \theta((p_i' - c_i')D_i' - (p_i - c_i)D_i) \qquad i = 1, 2 \qquad (18)$$

در رابطه‌ی ۱۷ هزینه‌های تولید جدید از رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید.

$$c_1' = (c_1 - \delta A x)$$
$$c_2' = (c_2 - \delta A(1 - x)) \qquad (19)$$

۴. حل مسئله

بازی برای دو حالت قبل از ورود سرمایه‌گذار و پس از ورود سرمایه‌گذار حل می‌شود. در هر قسمت قیمت‌های تعادلی، مقادیر تقاضا و سود تعادلی عوامل محاسبه و در آخر نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شود

۱.۴. قبل از ورود سرمایه‌گذار

ابتدا حالت اولیه‌ی مسئله یعنی شرایطی که سرمایه‌گذار وجود ندارد، بررسی می‌شود و مقادیر اولیه‌ی قیمت که شرکت‌ها درحال حاضر با آن مشغول فعالیت هستند (p_1, p_2) محاسبه می‌شود. از آنجایی‌که دو شرکت به صورت هم‌زمان قیمت را تعیین می‌کنند، مقادیر قیمت اولیه به کمک تعادل نش محاسبه می‌شود.

قضیه ۱: قیمت حاصل شده از تعادل نش برای هرکدام از تولیدکننده‌های اول و دوم به ترتیب برابر روابط ۲۰ و ۲۱ است.

$$p_1 = \frac{2(\alpha_1 + c_1\beta_1)\beta_2 + (\alpha_2 + c_2\beta_2)\lambda_2}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \qquad (20)$$

$$p_2 = \frac{2\beta_1(\alpha_2 + c_2\beta_2) + (\alpha_1 + c_1\beta_1)\lambda_1}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \qquad (21)$$

اثبات:

برای به دست آوردن قیمت‌های تعادلی تولیدکننده‌ی اول و دوم ابتدا با بررسی مشتق دوم، نشان داده شده است که توابع سود مقعر هستند. برای این منظور باید ماتریس هسین مربوط به توابع سود نیمه معین منفی باشد. ماتریس هسین مربوط به تولیدکننده‌ها در روابط ۲۲ و ۲۳ محاسبه شده است. مشاهده می‌شود که ماتریس

www.SID.ir

Archive of SID

همسین با توجه به مثبت بودن مقدار β_i و نظر به این‌که $0 \leq \theta < 1$، منفی معین است، توابع سود مقعرند.

$$H(\pi'_{f1}) = \begin{pmatrix} 2(\theta-1)\beta_1 & 0 \\ 0 & -2\theta\beta_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$H(\pi'_{f2}) = \begin{pmatrix} 2(\theta-1)\beta_2 & 0 \\ 0 & -2\theta\beta_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

با استفاده از توابع سود تولیدکننده‌ها و تعادل نش، مقادیر تعادلی قیمت اولیه برای هر دو تولیدکننده پس از حل دستگاه مربوطه به صورت روابط ۲۰ و ۲۱ به دست می‌آید و قضیه ۱ اثبات می‌شود.□

با توجه به مقادیر قیمت تعادلی محاسبه شده، مقدار تقاضا در حالت اولیه‌ی بازی در رابطه‌های ۲۴ و ۲۵ قابل مشاهده است.

$$D_1 = \frac{\beta_1(2(\alpha_1 - c_1\beta_1)\beta_2 + (\alpha_2 c_2\beta_2 + c_1\lambda_1)\lambda_2)}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \quad (24)$$

$$D_2 = \frac{\beta_2(\alpha_1\lambda_1 + \beta_1(2\alpha_2 - 2c_2\beta_2 + c_1\lambda_1) + c_2\lambda_1\lambda_2)}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \quad (25)$$

همچنین مقادیر سود تعادلی در رابطه‌های ۲۶ و ۲۷ به دست آمده است.

$$\pi_{F1} = \beta_1 \begin{pmatrix} 2(\alpha_1 - c_1\beta_1)\beta_2 \\ +(\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_1\lambda_1)\lambda_2 \end{pmatrix}^2 \Big/ (-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 \quad (26)$$

$$\pi_{F2} = \beta_2(\alpha_1\lambda_1 + \beta_1(2\alpha_2 - 2c_2\beta_2 + c_1\lambda_1) + c_2\lambda_1\lambda_2)^2/(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 \quad (27)$$

۲.۴. ورود سرمایه‌گذار (بازی استکلبرگ - برترند)

سرمایه‌گذار با ورود به بازی، به عنوان رهبر بازی، ابتدا با توجه به تابع سود خود تعیین می‌کند که حاضر است چه مقدار در هر شرکت سرمایه‌گذاری کند و سپس شرکت‌ها با توجه به مبلغی که به دست می‌آورند به تعیین قیمت محصول خود می‌پردازند. در واقع تولیدکننده‌ها به پیروی از سرمایه‌گذار، سود خود را بیشینه می‌کنند. برای حل بازی، طبق تعادل استکلبرگ، ابتدا تابع سود تولیدکننده‌ها را بیشینه می‌کنیم (مسئله‌ی پیرو) و سپس مقادیر را در تابع سرمایه‌گذار (رهبر) جایگذاری می‌کنیم تا مقدار بهینه‌ی سرمایه‌گذار به دست بیاید. برای حل مسئله‌ی پیرو ابتدا باید قیمت‌های ثانویه محاسبه شود. برای محاسبه‌ی مقادیر تعادلی با در نظرگرفتن این مطلب که هر دو تولیدکننده به صورت هم‌زمان تصمیم‌گیری می‌کنند، مقادیر تعادلی قیمت‌ها به کمک تعادل نش محاسبه می‌شود.

قضیه ۲: قیمت حاصل شده از تعادل نش برای هرکدام از تولیدکننده‌ها پس از سرمایه‌گذاری به ترتیب برابر روابط ۲۸ و ۲۹ است.

$$p'_1 = \frac{2(\alpha_1 + c'_1\beta_1)\beta_2 + (\alpha_2 + c'_2\beta_2)\lambda_2}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \quad (28)$$

$$p'_2 = \frac{2\beta_1(\alpha_2 + c'_2\beta_2) + (\alpha_1 + c'_1\beta_1)\lambda_1}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \quad (29)$$

اثبات:

برای به دست آوردن قیمت بهینه‌ی تولیدکننده‌ها در شرایط جدید p'_2 و p'_1، ابتدا نشان داده شده است که توابع سود آنها بر حسب قیمت ثانویه مقعر هستند. برای بررسی تقعر تابع سود ابتدا ماتریس هسین محاسبه می‌شود. برای این‌که تابع سود مقعر باشد، باید ماتریس هسین حاصل از آن منفی نیمه معین باشد. ماتریس هسین حاصل شده از این تابع سود به صورت روابط ۲۲ و ۲۳ است. این روابط قبلاً در قضیه ۱ استفاده شده‌اند.

$$\frac{d\pi'^2_1}{d^2p'_1} = \begin{pmatrix} 2(-1+\theta)\beta_1 & 0 \\ 0 & -2\theta\beta_1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\frac{d\pi'^2_2}{d^2p'_2} = \begin{pmatrix} 2(-1+\theta)\beta_2 & 0 \\ 0 & -2\theta\beta_2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

در قضیه ۱ اثبات شد که ماتریس هسین مربوط به تابع سود تولیدکننده‌ها، معین منفی هستند و در نتیجه توابع سود مقعر است. بنابراین برای یافتن بیشینه‌ی سود مربوط به تولیدکننده‌ها نقاط تعادلی برای توابع سود با صفر قرار دادن مشتق اول توابع به‌دست می‌آید.

$$p'_1 = \frac{\alpha_1 + c'_1\beta_1 + p'_2\lambda_2}{2\beta_1} \quad (32)$$

$$p'_2 = \frac{\beta_2 c'_2 + p'_1\lambda_1 + \alpha_2}{2\beta_2} \quad (33)$$

با حل هم‌زمان روابط مربوط به مشتق اول مقادیر p'_2 و p'_1 در روابط ۳۲ و ۳۳ محاسبه می‌شود؛ و پس از حل دستگاه معادلات روابط ۲۸ و ۲۹ حاصل می‌شوند. بنابراین مقادیر قیمت تعادلی محاسبه و قضیه ۲ ثابت می‌شود.□

تقاضای تعادلی مربوط به هر تولیدکننده در شرایط جدید در روابط ۳۴ و ۳۵ محاسبه شده است.

$$D'_1 = 2\beta_1\left(\alpha_1 + c'_1\beta_2 + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ +(s_2\delta + c_2)\beta_2 + c'_1\lambda_1 \end{pmatrix}\lambda_2\right) / 4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2 \quad (34)$$

$$D'_2 = \beta_2\left(\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\begin{pmatrix} 2\alpha_2 - 2(s_2\delta + c_2)\beta_2 \\ +(c'_1)\lambda_1 \end{pmatrix} + (s_2\delta + c_2)\lambda_1\lambda_2\right) / 4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2 \quad (35)$$

سود مربوط به تولیدکننده‌ها در شرایط ثانویه در روابط ۳۶ و ۳۷ به دست آمده است.

$$\pi'_{F1} = \frac{1}{(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2} = \beta_1((2\alpha_1\beta_2 - 2c'_1 \beta_1\beta_2 + (\alpha_2 + (s_2\delta + c_2)\beta_2 + (c'_1)\lambda_1)\lambda_2)^2 - \delta\theta(2s_1\beta_1\beta_2 - (s_2\beta_2 + s_1)\lambda_2)(4\alpha_1\beta_2 - 2(c'_1 + c_1)\beta_1\beta_2 + (2\alpha_2 + (s_2\delta + 2c_2)\beta_2 + (c'_1 + c_1)\lambda_1)\lambda_2)) \quad (36)$$

$$\pi'_{F2} = \frac{1}{(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2^2)^2}\beta 2((\lambda_1(\alpha_1 + (s_2\delta + c_2)\lambda_2 + \beta_1 E_2)^2 - \delta\theta(\beta_1(2s_2\beta_2 + s_1\lambda_1) - s_2\lambda_1\lambda_2)\begin{pmatrix} -4\alpha_2\beta_1 + \beta_1(2(A(-1+x)\delta + 2c_2)\beta_2 - (c'_1 + c_1)\lambda_1) \\ -\lambda_1(2\alpha_1 + (s_2\delta + 2c_2)\lambda_2) \end{pmatrix}) \quad (37)$$

www.SID.ir

Archive of SID

با توجه به این‌که رقابت بین تولیدکننده‌ها با سرمایه‌گذار از نوع استکلبرگ است، با جایگذاری حل بهینه‌ی قیمت‌های به دست آمده از تولیدکننده‌ها طبق قضیه ۲ در تابع سود سرمایه‌گذار، رابطه‌ی ۳۸ به دست می‌آید.

$$\pi_1 = \theta\left(-(\pi_{f2} + \pi_{f1}) + \frac{\beta_2 F_1 + \beta_1 F_2}{(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2} \right) \quad (38)$$

مقادیر F_2 و F_1 در پیوست آورده شده است.

در ادامه به بررسی تقعر تابع سود سرمایه‌گذار می‌پردازیم و در صورت برقراری شروط، مقدار بیشینه‌ی سود مربوط به آن محاسبه می‌شود. بدین منظور مشتق دوم تابع سود سرمایه‌گذار بر حسب درصد سرمایه‌گذاری در شرکت اول در رابطه‌ی ۳۹ محاسبه می‌شود. این مقدار باید منفی باشد تا تابع سود مقعر شود.

$$\frac{\partial^2 \pi_I}{\partial x^2} = 2A^2\delta^2\theta(\beta_1^2\beta_2(4\beta_1\beta_2) + (2\beta_2 + \lambda_1)^2) +$$
$$2\beta_1\beta_2(2\beta_1\beta_2 - 2(\beta_1 + \beta_2)\lambda_1 - \lambda_1^2)\lambda_2 +$$
$$(\beta_1(\beta_2 - \lambda_1)^2 + \beta_2\lambda_1^2)\lambda_2^2)/(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 \quad (39)$$

با فرض برقرار بودن شرایط لازم و کافی برای تابع سود سرمایه‌گذار پس از حل مدل، درصد سرمایه‌گذاری تعادلی در شرکت اول از دید سرمایه‌گذار به صورت رابطه‌ی ۴۰ به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \pi_I}{\partial x^2} = 0 \rightarrow x = \frac{\beta_1\beta_2 F_3 + \beta_2 F_2\lambda_2 + F_5\lambda_2^2}{A\delta F_6} \quad (40)$$

مقادیر F_3 تا F_6 در پیوست آمده است.

به کمک روابط ۲ و ۳ می‌توان مقادیر تعادلی سرمایه‌گذاری شده در هر شرکت را به صورت زیر به دست آورد.

$$s_1 = \frac{\beta_1\beta_2 F_3 + \beta_2 F_2\lambda_2 + F_5\lambda_2^2}{\delta F_6} \quad (41)$$

$$s_2 = \frac{A\delta F_6 - (\beta_1\beta_2 F_3 + \beta_2 F_2\lambda_2 + F_5\lambda_2^2)}{\delta F_6} \quad (42)$$

همچنین مقدار سود سرمایه‌گذار به صورت رابطه‌ی ۴۲ خواهد بود.

$$\pi_I = (\theta(I_2 + I_3 - 2\beta_1^3\beta_2^2 I_2\lambda_2 - \beta_1^2\beta_2$$
$$(I_5 + I_6 + I_7)\lambda_2^2 + 2\beta_1\beta_2(I_s + I_9$$
$$-I_{10}\lambda_2^4 - I_{11} + I_{12} + \beta_1\beta_2(I_{13})\lambda_2^2$$
$$+I_{14} + \alpha_1\beta_1 I_{15} + c_1\beta_1 I_{16})) + 2\alpha_2\beta_1$$
$$(\beta_1\lambda_2^2 I_{17} + 2\beta_1^3\beta_2^2((2\beta_2 + \lambda_1)^2$$
$$(2c_2\beta_2 - C_1\lambda_1) + I_{18} + I_{19} + \beta_1^2\beta_2\lambda_2 I_{20}))/M \quad (43)$$

مقادیر I_1 تا I_{20} و M در پیوست آورده شده است.

۶. تحلیل نتایج

در این قسمت به بررسی و تحلیل نتایج به دست آمده پرداخته می‌شود.

با در نظرگرفتن قیمت تولیدکننده قبل و پس از سرمایه‌گذاری می‌توان گفت که اگر شرایط زیر برقرار باشد سرمایه‌گذاری به کاهش قیمت منجر می‌شود و قیمت در شرایط جدید کمتر از قیمت در شرایط اولیه است و در نتیجه پس از سرمایه‌گذاری، تقاضا بیش از حالت اولیه خواهد بود.

$$p_1 - p_1' = \frac{A\delta\beta_2(2x\beta_1 - (x-1)\lambda_2)}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \quad (44)$$

$$(\beta_1 > \frac{\lambda_2}{2},\ x > \frac{\lambda_2}{-2\beta_1 + \lambda_2}) \quad (45)$$

تغییرات مربوط به تقاضا:

تقاضای مربوط به تولیدکننده‌ها قبل از سرمایه‌گذاری در روابط ۲۴ و ۲۵ به دست آمد. همچنین مقادیر تعادلی تقاضا پس از انجام سرمایه‌گذاری نیز در روابط ۳۴ و ۳۵ محاسبه شد. اختلاف مربوط به مقادیر تقاضا در دو حالت به صورت رابطه‌ی ۴۶ است.

$$D_1 - D_1' = 2(\alpha_1 - c_1'\beta_1)\beta_1\beta_2 +$$
$$(\alpha_2 + (s_2\delta + c_2)\beta_2 - c_1'\lambda_1)\lambda_2\beta_1$$
$$/4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2 \quad (46)$$

اگر α_2 شرط ۴۷ را داشته باشد، تقاضا در حالت جدید بیشتر از تقاضا در سیستم اولیه است.

$$\alpha_2 < -2\alpha_1\beta_2 + 2\beta_1\beta_2(c_1') +$$
$$\beta_2\lambda_2(A\delta - s_1\delta - c_2) - \lambda_1\lambda_2 c_1'/\lambda_2 \quad (47)$$

در مورد تقاضای تولیدکننده‌ی دوم نیز به صورت مشابه، اختلاف تقاضا در رابطه‌ی ۴۸ محاسبه شده است.

$$D_2 - D_2' = \frac{\delta\beta_2(\beta_1(2s_2\beta_2 + s_1\lambda_1) - s_2\lambda_1\lambda_2)}{4\beta_1\beta_2 - \lambda_1\lambda_2} \quad (48)$$

رابطه‌ی ۴۸ با شرط بیان شده در رابطه‌ی ۴۹، همواره منفی است. در واقع در این شرایط همواره تقاضای تولیدکننده‌ی دوم پس از سرمایه‌گذاری بیشتر از حالت اولیه خواهد بود.

$$x < \frac{\lambda_1\lambda_2 - 2\beta_1\beta_2}{\lambda_1\lambda_2 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1\lambda_1} \quad (49)$$

اختلاف بین مقادیر سود که در روابط سود تعادلی محاسبه شده بود، به صورت روابط ۵۰ و ۵۱ به ترتیب برای تولیدکننده‌ی اول و دوم به دست آمده است.

$$\pi_{F1}' - \pi_{F1} = -(A\delta(\theta - 1)\beta_1$$
$$(2x\beta_1\beta_2 + ((x-1)\beta_2 - x\lambda_1)\lambda_2)$$
$$(2(2\alpha_1 + (s_1\delta - 2c_1)\beta_1)\beta_2 +$$
$$(2\alpha_2 + (s_2\delta + 2c_2)\beta_2 + (-s_1\delta + 2c_1)\lambda_1)\lambda_2))$$
$$/(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 \quad (50)$$

عبارت فوق همواره مثبت است که بیانگر افزایش سود در حالت جدید است.

$$\pi_{F2}' - \pi_{F2} = A\delta(\theta - 1)\beta_2$$
$$(\beta_1(2(x-1)\beta_2 + x\lambda_1) - (x-1)\lambda_1\lambda_2)$$
$$(2\alpha_1\lambda_1 + \beta_1(4\alpha_2 - 2(s_2\delta 2c_2)\beta_2 +$$
$$(-s_1\delta + 2c_1)\lambda_1) + (s_2\delta + 2c_2)\lambda_1\lambda_2)$$
$$/(-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2 \quad (51)$$

www.SID.ir

Archive of SID

رابطه‌ی ۵۱ نیز همواره مثبت است که بیانگر افزایش سود در حالت جدید است.

با توجه به نقاط بی‌تفاوتی از دید تولیدکننده برای پارامترهای δ و θ می‌توان حدود پایین زیر را در نظر گرفت.

$$\delta = ((-c_1\alpha_1 + \theta p_1(\alpha_1 + p_2\lambda_2 + c_1\beta_1 - p_1\beta_1) - c_1 p_2\lambda_2\theta + (1+\theta)(p'_1\alpha_1 + c_1 p'_1\beta_1 - p'^2_1\beta_1 - c_1 p'_2\lambda_2 + p'_1 p'_2\lambda_2) / (\theta - 1)x(\alpha_1 - p'_1\beta_1 + p'_2\lambda_2)) \quad (52)$$

$$\theta = (p'_1 - c_1)(\alpha_1 - p'_1\beta_1 + p'_2\lambda_2)/ (p'_1 - p_1)\alpha_1(-c_1 p_1 + p_1^2 + c_1 p'_1 - p'^2_1) \beta_1 + \lambda_2(c_1 p_2 - p_1 p_2 - c_1 p'_2 + p'_1 p'_2) \quad (53)$$

۷. تحلیل حساسیت

در این بخش ابتدا مثال عددی بررسی می‌شود و سپس آنالیز حساسیت بر حسب داده‌های عددی انجام می‌گیرد.

۱.۷. مثال عددی

در این قسمت به بررسی مثال عددی و حل آن پرداخته می‌شود. سپس بر روی پارامترهای مختلف مسئله تحلیل حساسیت صورت می‌گیرد و نتایج مدیریتی استخراج می‌شود.

$$\alpha_1 = ۲۰۰۰۰; \alpha_2 = ۲۰۰۰۰, \beta_1 = ۸; \lambda_1 = ۶, \beta_2 = ۷; \lambda ۲ = ۵,$$
$$c_1 = ۶۰۰۰; c_2 = ۷۰۰۰, \theta = ۰/۴; \delta = ۰/۰۰۰۳; A = ۴۰۰۰۰۰۰۰$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای فوق در روابط محاسبه شده‌ی حاصل از قضیه‌های ۱ و ۲ جدول ۱ به دست می‌آید.

جدول ۱. نتایج مربوط به حل مسئله.

	s_i	c'	p	p'	π'
تولید کننده اول	۱۹۰۸۳۱۶۰	۲۷۵/۱	۶۴۸۵۰	۲۲۴۸/۳۵	۲/۰۱۹۵ * ۱۰^۷
تولید کننده دوم	۲۰۹۱۶۸۴۰	۷۲۴/۹۵	۷۵۶۰۰	۲۷۵۴/۶	۱۹۰۶۶ ۶۰۰
سرمایه گذار	x	$1-x$			π
	۴۷/۷	۵۲/۳			۲/۰۷۲۶۷۸ * ۱۰^۷

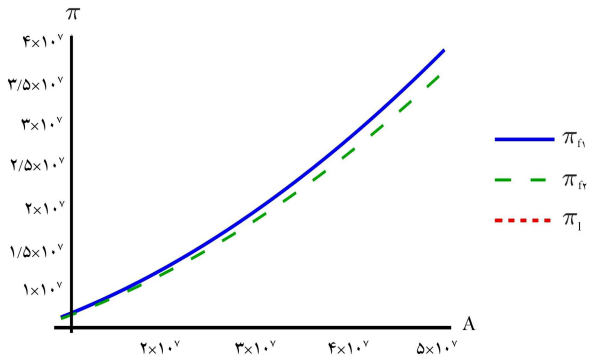
۲.۷. تحلیل حساسیت

- تغییر در کل مبلغ سرمایه

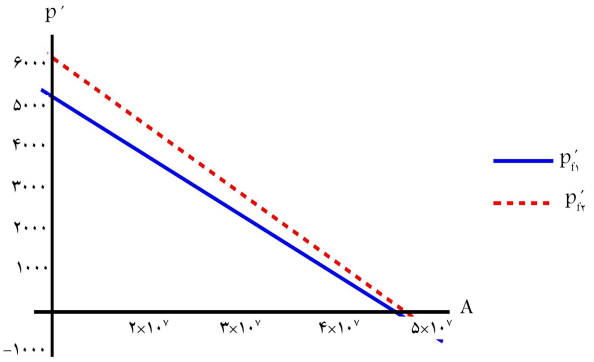
شکل ۲، تغییر در میزان سود عوامل بازی را تحت تأثیر تغییر در میزان کل سرمایه نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۲، افزایش در میزان سرمایه‌یی که سرمایه‌گذار در نظر دارد، موجب افزایش سود تمام عوامل بازی خواهد شد. شدت این تأثیر در سود سرمایه‌گذار بیشتر از سود تولیدکننده‌هاست.

طبق شکل ۳، هرچه میزان کل سرمایه بیشتر باشد، قیمت‌هایی که محصولات با آنها به بازار عرضه می‌شوند، کاهش می‌یابد. این کاهش به علت اثر قیمتی میزان سرمایه‌گذاری در کاهش هزینه‌های تولیدی است.

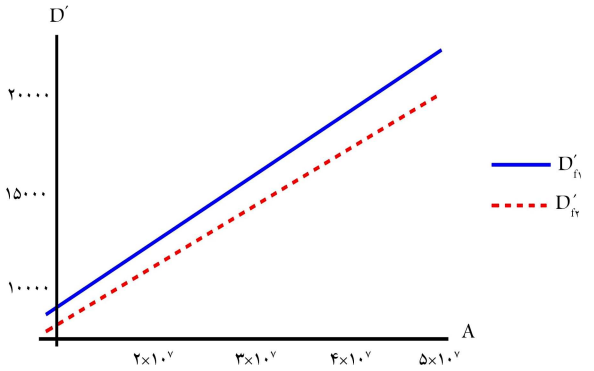
همان طورکه در شکل ۴ قابل مشاهده است، افزایش میزان سرمایه‌گذاری موجب



شکل ۲. سود عوامل بازی بر حسب میزان سرمایه.



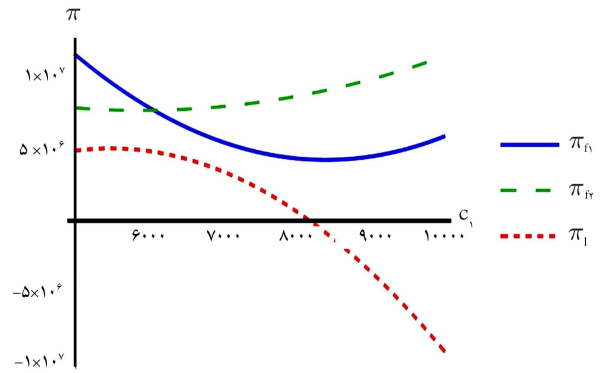
شکل ۳. تغییرات قیمت بر حسب تغییرات A.



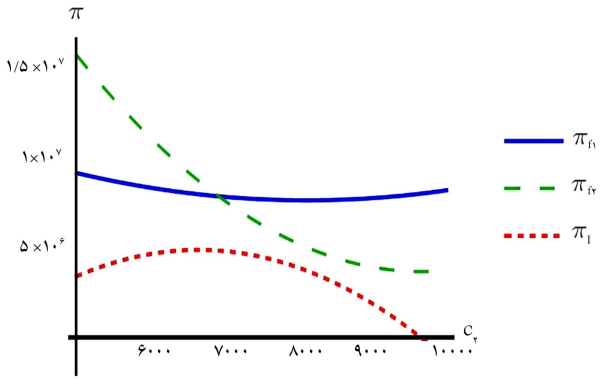
شکل ۴. تغییر در تقاضا بر حسب تغییر در میزان سرمایه.

www.SID.ir

Archive of SID



شکل ۵. سود عوامل بازی به ازای هزینه‌ی تولید محصولات تولیدکننده‌ی اول.



شکل ۶. سود عوامل بازی به ازای هزینه‌ی تولید محصولات تولیدکننده‌ی دوم.

افزایش میزان تقاضا خواهد شد. این نتیجه با میزان کاهشی که در قیمت پس از سرمایه‌گذاری به وجود می‌آید، رابطه‌ی مستقیم دارد.

- تغییر در هزینه‌ی تولید

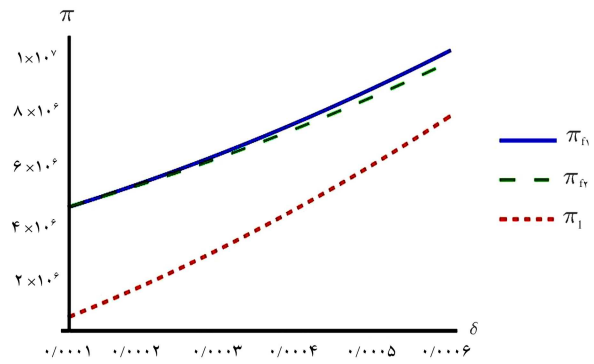
با توجه به شکل ۵ و ۶، هرچه هزینه‌ی تولید محصولات بالاتر باشد، سود عوامل کمتر خواهد بود. همچنین سود سرمایه‌گذار تأثیرپذیری بیشتری نسبت به سایرین دارد. زیرا سود سرمایه‌گذار از تفاوت سود در شرایط متفاوت تأمین می‌شود. در شکل ۵، تغییر در هزینه‌ی تولید تولیدکننده‌ی اول در حال تغییر است. در ابتدا c_1 مقدار کمتری نسبت به c_2 دارد و سود تولیدکننده‌ی اول بیشتر است. با افزایش مقدار c_1، سود تولیدکننده‌ی اول کاهش و سود رقیب افزایش می‌یابد. در شکل ۶ نیز تغییرات c_2 مد نظر است؛ در این نمودار نیز روند مشابه شکل ۵ قابل مشاهده است. در هر دو نمودار، افزایش قیمت تولید موجب کاهش سود سرمایه‌گذار شده است.

- تغییر در ضریب کاهشی قیمت

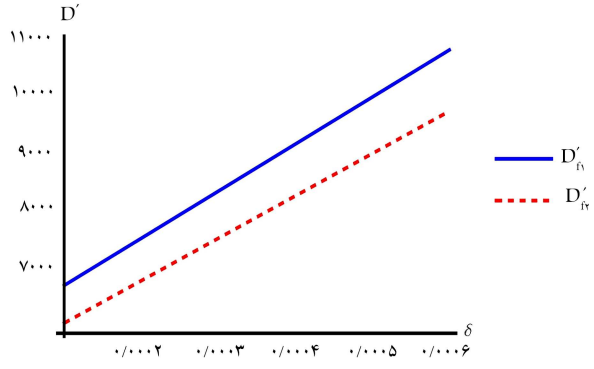
با توجه به شکل ۷، هرچه تأثیر فنّاوری روی هزینه‌های تولید بیشتر باشد، سود عوامل بازی بیشتر خواهد بود. این تأثیر بر روی سود سرمایه‌گذار محسوس‌تر است.

همچنین هرچه میزان تأثیر سرمایه‌گذاری روی هزینه‌ی تولید بیشتر باشد، میزان تقاضای بازار با انجام گرفتن سرمایه‌گذاری بالاتر خواهد بود شکل ۸.

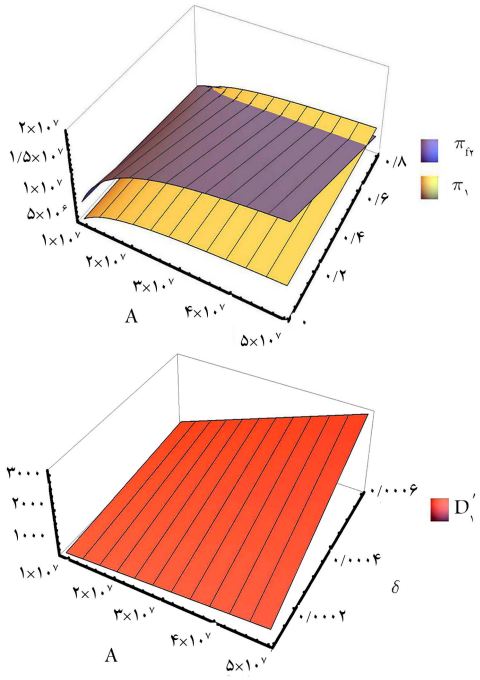
اگر تأثیر تغییر در مبلغ کل سرمایه و درصدی از سود که به سرمایه‌گذار تعلق می‌گیرد را به صورت هم‌زمان در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که سود تولیدکننده بیشتر با توجه به میزان θ تغییر می‌کند. ضمن اینکه این حساسیت در مورد سرمایه‌گذار مشهودتر است. همچنین این مطلب دریافت می‌شود که افزایش سرمایه توسط سرمایه‌گذار تأثیر بیشتری بر روی سود خود سرمایه‌گذار دارد.



شکل ۷. سود عوامل بازی به ازای هزینه‌ی تولید پس از سرمایه‌گذاری.



شکل ۸. تقاضا بر حسب میزان دلتا.



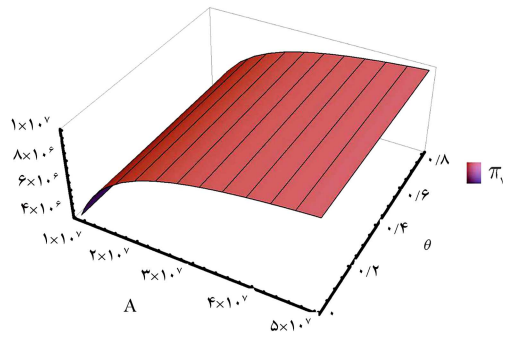
شکل ۹. تغییر هم‌زمان میزان سرمایه و بر روی میزان سود.

در مورد ضریب سود تسلیمی به سرمایه‌گذار نیز طبق شکل ۹، هرچه این ضریب بیشتر باشد، سود تولیدکننده‌ها کاهش می‌یابد.

همچنین مشاهده می‌شود در حالتی‌که مازاد سود با $0/5 < \theta < 0/6$ بین طرفین بازی تقسیم شود، سود همه‌ی افراد در یک محدوده قرار می‌گیرد. سرمایه‌گذار

www.SID.ir

Archive of SID



شکل ۱۰. تغییر هم‌زمان میزان سرمایه و بر روی میزان تقاضا.

به عنوان رهبر بازی باید این مطلب را مد نظر داشته باشد.

شکل ۱۰، تغییرات هم‌زمان میزان سرمایه و δ را بر روی میزان تقاضا بررسی می‌کند. همان طورکه در شکل نیز مشهود است، تغییرات δ، تأثیر بیشتری روی میزان تقاضا دارد. همچنین افزایش میزان سرمایه‌گذاری نیز موجب افزایش تقاضا خواهد شد.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله هدف، بررسی میزان سرمایه‌گذاری در بازاری با دو تولیدکننده است. محصولات به صورت کالاهای جایگزین در نظر گرفته شده‌اند. در این نوشتار سعی شده است از نظریه‌ی بازی‌ها برای حل مسئله استفاده شود؛ به گونه‌یی که سرمایه‌گذار رهبر و تولیدکننده‌ها پیرو هستند و به دنبال تصمیم‌گیری برای قیمت‌گذاری و تعیین میزان بهینه‌ی سرمایه‌گذاری هستیم. با بررسی توابع سود مربوط به تولیدکننده‌ها و سرمایه‌گذار به صورت جداگانه، مقادیر قیمت تعادلی و مقدار بهینه‌ی سرمایه‌گذاری توسط سرمایه‌گذار برای بیشینه کردن سود آنها محاسبه شد. با توجه به کاهش قیمت ناشی از سرمایه‌گذاری، در اغلب موارد، تقاضای بازار با افزایش همراه می‌شود. همچنین این سرمایه‌گذاری باعث افزایش مقادیر سود همه‌ی عوامل بازی می‌شود.

در این مقاله ارزش زمانی پول در نظر گرفته نشده است. می‌توان این عامل را نیز در بازی لحاظ کرد و تأثیر مربوط به آن را در مطالعات آتی بررسی کرد.

پانوشت

1. investment

منابع (References)

1. Islam Bidgoli, G. and Ehsham Rothi, R. "The application of game theory in evaluating investment in stocks", *Financial Knowledge Analysis of Securities*, **4**, pp.101-129 (2011)
2. Smit, H.T. and L.Trigeorgis "Quantifying the strategic option value of technology investments", Montreal: 8th Annual International Real Options Theory (2004).
3. Kabir, A.A. "A Qualitative Study of the Influence of Advanced Manufacturing Technology Investment on Performance of Production Firms"(2006).
4. Zehir, C., Muceildili, B., Akyuz, B. and et al, "The impact of technology investment on firm performance in national and multinational companies", *Journal of Global Strategic Management*, **1**, pp.144-154 (2010).
5. Wu, L.-C. and et al. "Options in technology investment games: the real world TFT-LCD industry case", *Technological Forecasting and Social Change*, **79**(7), pp. 1241-1253 (2012).
6. Lefley, F. and J. Sarkis. "Short-termism and the appraisal of AMT capital projects inthe US and UK", *International Journal of Production Research*, **35**(2), pp. 341-368 (1997).
7. Berg, J., Dickhaut, J. and McCabe, K. "Trust, reciprocity, and social history", *Games and Economic Behavior*, **10**(1), pp. 122-142 (1995).
8. Kanagaretnam, K. and et al. "The impact of social value orientation and risk attitudes on trust and reciprocity", *Journal of Economic Psychology*, **30**(3), pp. 368-380. (2009)
9. Buchan, N.R., Croson, R.T. and Solnick, S. "Trust and gender: An examination of behavior and beliefs in the investment game", *Journal of Economic Behavior & Organization*, **68**(3), pp. 466-476 (2008).
10. Gans, J.S. "Regulating private infrastructure investment: optimal pricing for access to essential facilities", *Journal of Regulatory Economics*, **20**(2), pp. 167-189 (2001).
11. Ajagbe, A. and et al. "The selection criteria for financing young firms using debt options", *Frontiers of Business, Management and Economics*, pp. 265-269 (2013).
12. Kong, J.J. and Kwok, Y.K. "Real options in strategic investment games between two asymmetric firms European", *Journal of Operational Research*, **181**(2), pp. 967-985 (2007).
13. Houser, D., Schunk, D. and Winter, J. "Distinguishing trust from risk: An anatomy of the investment game", *Journal of Economic Behavior & Organization*, **74**(1), pp. 72-81 (2010).
14. Benaroch, M. "Managing information technology investment risk: A real options perspective", *Journal of Management Information Systems*, **19**(2), pp. 43-84 (2002).
15. Nishihara, M. and Fukushima, M. "Evaluation of firm's loss due to incomplete information in real investment decision", *European Journal of Operational Research*, **188**(2), pp. 569-585 (2008).
16. Huisman, K. and et al. "Strategic investment under uncertainty: merging real options with game theory", pp.22 (2003).

www.SID.ir

Archive of SID

17. Dixit, A.K. and Pindyck, R.S. *Investment Under Uncertainty*, Second printing, Princeton University Press, Princeton, USA. (1996).

18. He, P., Ding, H. and Hua, Z. "Strategic choice of flexible production technology using game theory approach", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **28**(3), pp. 416-424 (2012).

19. Almfraji, M.A. and Almsafir, M.K. "Foreign direct investment and economic growth literature review from 1994 to 2012", *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, **129**, pp. 206-213 (2014).

20. charness,G, Cobo-Reyes, R.and Jimenez, N. "An investment game with third-party intervention", *Journal of Economic Behavior & Organization*, **68**(1), pp. 18-28 (2008).

21. "Inequality-seeking punishment", *Economics Houser, D. and Xiao, E. Letters*, **109**(1), pp. 20-23 (2010).

22. Nöldeke, G. and Samuelson, L. "Investment and competitive matching", *Econometrica*, **83**(3), pp. 835-896 (2015).

23. De Borger, B., Dunkerley, F. and Proost, S. "Strategic investment and pricing decisions in a congested transport corridor", *Journal of Urban Economics*, **62**(2), pp. 294-316 (2007).

24. Kauffman, R.J. and Li, X. "Technology competition and optimal investment timing: a real options perspective", *IEEE Transactions on Engineering Management*, **52**(1), pp. 15-29 (2005).

25. Liu, C. and Berry, R.A. "The impact of investment timing and uncertainty on competition in unlicensed spectrum. in modeling and optimization in mobile, Ad Hoc, and wireless networks (WiOpt)", 14th International Symposium on. IEEE (2016).

پیوست

$$
\begin{aligned}
I_{۳} &= -۸c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۳}\lambda_{۱}^{۲} - ۴c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۴}\lambda_{۱}^{۲} \\
&\quad +۱۶c_{۱}c_{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۴}\lambda_{۱}^{۲} - ۴c_{۲}^{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۴}\lambda_{۱}^{۲} \\
&\quad -۴c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۳}\lambda_{۱}^{۳} + ۴c_{۱}c_{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۳}\lambda_{۱}^{۳} - c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۲}\lambda_{۱}^{۴} \\
I_{۴} &= ۸(c_{۱}-c_{۲})\beta_{۱}\beta_{۲}^{۳}(c_{۱}\beta_{۱}-c_{۲}\beta_{۲})+ \\
&\quad ۴\beta_{۲}I_{۱}\lambda_{۱} + ۲(c_{۱}-c_{۲})\beta_{۲}(-۵c_{۱}\beta_{۱}+۶c_{۲}\beta_{۲}) \\
&\quad \lambda_{۱}^{۲} - ۲(۲c_{۱}^{۲}\beta_{۱} + (c_{۱}^{۲}-۴c_{۱}c_{۲}+c_{۲}^{۲})\beta_{۲}) \\
&\quad \lambda_{۱}^{۳} + c_{۱}(-c_{۱}+c_{۲})\lambda_{۱}^{۴} \\
I_{۵} &= ۴\beta_{۱}\beta_{۲}^{۳}((c_{۱}^{۲}-۴c_{۱}c_{۲}+c_{۲}^{۲})\beta_{۱} + ۲c_{۲}^{۲}\beta_{۲}) \\
&\quad -۴(c_{۱}-c_{۲})\beta_{۱}\beta_{۲}^{۲}(۶c_{۱}\beta_{۱}-۵c_{۲}\beta_{۲})\lambda_{۱} \\
I_{۶} &= \beta_{۲}(۲۴c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۲}- \\
&\quad (۳۳A^{۲}\delta^{۲} + ۸c_{۱}^{۲} - ۶۶A\delta c_{۲} + ۸c_{۲}^{۲} \\
&\quad +c_{۱}(۳۴c_{۲}-۶۶A\delta))\beta_{۱}\beta_{۲} + ۲۴c_{۲}^{۲}\beta_{۲}^{۲})\lambda_{۱}^{۲} \\
I_{۷} &= ۲(c_{۱}-c_{۲})\beta_{۲}(۵c_{۱}\beta_{۱}-۶c_{۲}\beta_{۲}) \\
&\quad \lambda_{۱}^{۳} + (۲c_{۱}^{۲}\beta_{۱} + (c_{۱}^{۲}-۴c_{۱}c_{۲}+c_{۲}^{۲})\beta_{۲})\lambda_{۱}^{۴} \\
I_{۸} &= ((c_{۱}-c_{۲})c_{۲}\beta_{۱}^{۲}\beta_{۲}^{۳} + ۲\beta_{۱}\beta_{۲}^{۴} \\
&\quad ((c_{۱}^{۲}-۴c_{۱}c_{۲}+c_{۲}^{۲})\beta_{۱} + ۲c_{۲}^{۲}\beta_{۲})\lambda_{۱} \\
&\quad -(c_{۱}-c_{۲})\beta_{۱}\beta_{۲}(۶c_{۱}\beta_{۱}-۵c_{۲}\beta_{۲})\lambda_{۱}^{۲} \\
I_{۹} &= (۴c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۲} - (۵A^{۲}\delta^{۲} + c_{۱}^{۲} - ۱۰A\delta c_{۲} \\
&\quad +c_{۲}^{۲} + c_{۱}(-۱۰A\delta+۶c_{۲}))\beta_{۱}\beta_{۲} + ۴c_{۲}^{۲}\beta_{۲}^{۲}) \\
&\quad \lambda_{۱}^{۳} + (c_{۱}-c_{۲})(c_{۱}\beta_{۱}-c_{۲}\beta_{۲})\lambda_{۱}^{۴})\lambda_{۲}^{۳} \\
I_{۱۰} &= c_{۲}^{۲}\beta_{۲}^{۲}(\beta_{۱}(\beta_{۲}-\lambda_{۱}) + \lambda_{۱}^{۲})^{۲} + \beta_{۱}\lambda_{۱}^{۲} \\
&\quad (c_{۱}^{۲}\beta_{۱}(\beta_{۲}-\lambda_{۱})^{۲} - A^{۲}\delta^{۲}\beta_{۲}\lambda_{۱}^{۲} + ۲A\delta c_{۱}\beta_{۲}\lambda_{۱}^{۲}) \\
&\quad +۲c_{۲}\beta_{۱}\beta_{۲}\lambda_{۱}(A\delta\lambda_{۱}^{۳} + c_{۱}(\beta_{۲}-\lambda_{۱})(\beta_{۱}(\beta_{۲}-\lambda_{۱}) + \lambda_{۱}^{۲}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{۱} &= \begin{pmatrix} \alpha_{۱}\lambda_{۱} + \beta_{۱}(۲\alpha_{۲} - ۲(s_{۲}\delta+c_{۲})\beta_{۲} + c_{۱}'\lambda_{۱}) \\ +(s_{۲}\delta+c_{۲})\lambda_{۱}\lambda_{۲} \end{pmatrix}^{۲} \\
F_{۲} &= \begin{pmatrix} ۲(\alpha_{۱}-c_{۱}'\beta_{۱})\beta_{۲} \\ +(\alpha_{۲} + (s_{۲}\delta+c_{۲})\beta_{۲} + c_{۱}'\lambda_{۱})\lambda_{۲} \end{pmatrix}^{۲} \\
F_{۳} &= ۴\beta_{۱}\beta_{۲}(-\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+c_{۱}\beta_{۱} + (A\delta-c_{۲})\beta_{۲}) \\
&\quad +۲(\alpha_{۲}\beta_{۱} + (\alpha_{۱} + ((A\delta-c_{۲})+c_{۱})\beta_{۱})\beta_{۲}) \\
&\quad \lambda_{۱} + (\alpha_{۱}+c_{۱}\beta_{۱})\lambda_{۱}^{۲} \\
F_{۴} &= ۲\beta_{۱}(-\alpha_{۱} + ((A\delta-c_{۲})+c_{۱})\beta_{۱})\beta_{۲} \\
&\quad +۲\beta_{۱}(\alpha_{۱} - ۲(c_{۱}\beta_{۱} + (A\delta-c_{۲})\beta_{۲})) \\
&\quad \lambda_{۱} - (\alpha_{۱} + ((A\delta-c_{۲})+c_{۱})\beta_{۱})\lambda_{۱}^{۲} \\
&\quad -۲\alpha_{۲}\beta_{۱}(\beta_{۱}+\lambda_{۱}) \\
F_{۵} &= (A\delta-c_{۲})\beta_{۲}\lambda_{۱}^{۲} + \alpha_{۲}\beta_{۱}(\lambda_{۱}-\beta_{۲}) \\
&\quad +\beta_{۱}(\beta_{۲}-\lambda_{۱})((A\delta-c_{۲})\beta_{۲} - c_{۱}\lambda_{۱}) \\
F_{۶} &= \beta_{۱}^{۲}\beta_{۲}(۴\beta_{۱}\beta_{۲} + (۲\beta_{۲}+\lambda_{۱})^{۲})+ \\
&\quad ۲\beta_{۱}\beta_{۲}(۲\beta_{۱}\beta_{۲} - ۲(\beta_{۱}+\beta_{۲})\lambda_{۱} - \lambda_{۱}^{۲}) \\
&\quad \lambda_{۲} + (\beta_{۱}(\beta_{۲}-\lambda_{۱})^{۲} + \beta_{۲}\lambda_{۱}^{۲})\lambda_{۲}^{۲} \\
I_{۱} &= -۴c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۲} + \begin{pmatrix} ۵A^{۲}\delta^{۲} + c_{۱}^{۲} - ۱۰A\delta c_{۲} + c_{۲}^{۲} \\ +c_{۱}(-۱۰A\delta+۶c_{۲}) \end{pmatrix} \\
&\quad \beta_{۱}\beta_{۲} - ۴c_{۲}^{۲}\beta_{۲}^{۲} \\
I_{۲} &= -۱۶c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۶}\beta_{۲}^{۴} + ۱۶A^{۲}\delta^{۲}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۵} \\
&\quad -۳۲A\delta c_{۱}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۵} - ۳۲A\delta c_{۲}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۵} \\
&\quad +۳۲c_{۱}c_{۲}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۵} - ۱۶c_{۲}^{۲}\beta_{۱}^{۴}\beta_{۲}^{۶} - \\
&\quad ۱۶c_{۱}^{۲}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۳}\lambda_{۱} + ۱۶c_{۱}c_{۲}\beta_{۱}^{۵}\beta_{۲}^{۳}\lambda_{۱} \\
&\quad +۱۶c_{۱}c_{۲}\beta_{۱}^{۶}\beta_{۲}^{۵}\lambda_{۱} - ۱۶c_{۲}^{۲}\beta_{۱}^{۶}\beta_{۲}^{۵}\lambda_{۱}
\end{aligned}
$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$I_{16} = (\beta_1(4\beta_1\beta_2 - \lambda_1(2\beta_2 + \lambda_1)) + (2\beta_1(\beta_2 - \lambda_1) + \lambda_1^2)$$
$$\lambda_2)(4\beta_1^2\beta_2^2 + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1\lambda_2 - \beta_2(\lambda_1 + \lambda_2)) +$$
$$\beta_1\beta_2(\lambda_1(\lambda_1 - 4\lambda_2) + 2\beta_2(\lambda_1 + \lambda_2))$$

$$I_{17} = 2\beta_2^2\lambda_1^2(-c_1\lambda_1 + 2c_2(3\beta_2 + \lambda_1)) + \beta_2\lambda_1(2c_2\beta_2^2$$
$$-3(-3A\delta + c_1 + c_2)\beta_2\lambda_1 - (A\delta - 3c_1 + c_2)\lambda_1^2)\lambda_2 -$$
$$(\beta_2 - \lambda_1)^2(c_2\beta_2 + c_1\lambda_1)\lambda_2^2$$

$$I_{18} = ((8A\delta - 4c_1)\beta_2^2 + 12(-A\delta + c_1)\beta_2\lambda_1$$
$$+5c_1\lambda_1^2)\lambda_2 - 2((-2c_1 + c_2)\beta_2 + 3c_1\lambda_1)\lambda_2^2$$

$$I_{19} = 8\beta_1^2\beta_2^3(2(A\delta - c_1)\beta_2 + c_1(-\lambda_1 + \lambda_2)) -$$
$$\beta_2\lambda_1^2\lambda_2^3(A\delta_1\lambda_2 + c_2(-\lambda_1\lambda_2 + \beta_2(2\lambda_1 + \lambda_2)))$$

$$I_{20} = 3A\delta\beta_2\lambda_1(-8\beta_2 + 3\lambda_1)\lambda_2 - 2c_2\beta_2(\lambda_1(2\beta_2 + \lambda_1)$$
$$(6\beta_2 + \lambda_1) - \lambda_1(2\beta_2 + \lambda_1)\lambda_2 + 2(\beta_2 - \lambda_1)\lambda_2^2)$$
$$+c_1(\lambda_1(\lambda_1 - 2\lambda_2) + 2\beta_2(\lambda_1 + \lambda_2))$$
$$(-3\lambda_1\lambda_2 + \beta_2(4\lambda_1 + \lambda_2)))$$

$$M = (-4\beta_1\beta_2 + \lambda_1\lambda_2)^2(\beta_1^2\beta_2)(4\beta_1\beta_2 + (2\beta_2 + \lambda_1)^2)$$
$$+2\beta_1\beta_2(2\beta_1\beta_2 - 2(\beta_1 + \beta_2)\lambda_1 - \lambda_1^2)\lambda_2 + \beta_1(\beta_2 - \lambda_1)^2$$
$$+\beta_2\lambda_1^2)\lambda_2^2)$$

$$E_1 = -s_1\delta\alpha_1 - p_1'\alpha_1 + s_1\delta p_1'\beta_1 - c_1p_1'\beta_1 +$$
$$p_1'^2\beta_1 - s_1\delta p'^2{}_2\lambda_2 + c_1p'\lambda_2 - p_1'p_2'\lambda_2$$

$$E_2 = 2\alpha_2 - 2(s_2\delta + c_2)\beta_2 + (c_1')\lambda_1$$

$$I_{11} = \alpha_1^2\beta_2^2(\beta_1(4\beta_1\beta_2 - \lambda_1$$
$$(2\beta_2 + \lambda_1)) + (2\beta_1(\beta_2 - \lambda_1)$$
$$+\lambda_1^2)\lambda_2)^2$$
$$+a_2^2\beta_1^2\begin{pmatrix}2\beta_1\beta_2(2\beta_2 + \lambda_1) - 2\beta_2(\beta_1 + \lambda_1)\\ \lambda_2 + (-\beta_2 + \lambda_1)\lambda_2^2\end{pmatrix}^2$$

$$I_{12} = 2\alpha_1\beta_2(2\beta_1^3\beta_2^2$$
$$\begin{pmatrix}c_2\lambda_1(2\beta_2 + \lambda_1)^2 +\\ 4\beta_1\beta_2(2(A\delta - c_2)\beta_2 + (2A\delta - c_2)\lambda_1)\end{pmatrix}$$
$$-\beta_1^2\beta_2\begin{pmatrix}24A\delta\beta_1\beta_2\lambda_1(\beta_2 + \lambda_1) + c_2\\ \begin{pmatrix}8\beta_1\beta_2^2(\beta_1 + \beta_2) - 24\beta_1\beta_2^2\lambda_1\\ +2\beta_2(-5\beta_1 + 6\beta_2)\lambda_1^2 + 8\beta_2\lambda_1^3 + \lambda_1^4\end{pmatrix}\end{pmatrix}\lambda_2$$

$$I_{13} = 9A\delta\beta_1\lambda_1^2(\beta_2 + \lambda_1) + c_2$$
$$\begin{pmatrix}8\beta_1^2\beta_2(-\beta_2 + \lambda_1) + 2\lambda_1^3(3\beta_2 + \lambda_1)\\ +\beta_1(2\beta_2 - 3\lambda_1)\lambda_1(5\beta_2 + \lambda_1)\end{pmatrix}$$

$$I_{14} = -\lambda_2^3\begin{pmatrix}A\delta\beta_1\lambda_1^3(\beta_2 + \lambda_1) + c_2\beta_2\\ (\beta_1(\beta_2 - \lambda_1) + \lambda_1^2)(2\beta_1(\beta_2 - \lambda_1) + \lambda_1^2)\end{pmatrix}$$

$$I_{15} = (\beta_1(4\beta_1\beta_2 - \lambda_1(2\beta_2 + \lambda_1))$$
$$+(2\beta_1(\beta_2 - \lambda_1) + \lambda_1^2)\lambda_2)(2\beta_1\beta_2(2\beta_2 + \lambda_1)$$
$$-2\beta_2(\beta_1 + \lambda_1)\lambda_2 + (\lambda_1 - \beta_2)\lambda_2^2)$$

www.SID.ir