

مدلی ریاضی برای طراحی خط تولید با رویکرد بهینه‌سازی پایایی در شرایط عدم قطعیت

Original Article

فریبرز جولای* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

سبحان جوئیبار (دکتری)

محمدعلی زارع شوربچه (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مدیریت، دانشگاه تهران

در تحقیقات مرتبط با بهینه‌سازی پایایی قابلیت اطمینان اغلب کمتر به جنبه‌های کاربردی آن توجه شده است. هدف از ارائه‌ی این مقاله استفاده از مسئله‌ی بهینه‌سازی پایایی در طراحی خط تولید است. در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی غیرخطی عدد صحیح با پارامترهای فاصله‌ی برای مسئله‌ی طراحی خط تولید مبتنی بر استقرار محصولی و راهبرد نظریه‌ی محدودیت‌ها با در نظر گرفتن پایایی در شرایط عدم قطعیت ارائه شده است. هدف از ارائه‌ی این مدل، تعیین تعداد بهینه‌ی خطوط تولید مورد نیاز برای تولید محصولات با در نظر گرفتن محدودیت‌های بودجه، فضا، ظرفیت و تقاضای محصولات است؛ به نحوی که قابلیت اطمینان کل سیستم بیشینه و هزینه‌ی کل نگهداری و کمبود موجودی کمینه شود. برای آزمون مدل، سه مثال عددی ارائه شده است که نتایج، مطلوب بودن مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد.

fjolai@ut.ac.ir
 sobhan.jooybar@ut.ac.ir
 maz.shourijeh@ut.ac.ir

واژگان کلیدی: طراحی خط تولید، بهینه‌سازی چندهدفه، پایایی، عدم قطعیت.

۱. مقدمه

به طور سنتی در طراحی سیستم‌های تولیدی همواره پارامترهای مهمی چون میزان تقاضای بازار برای هر محصول، فضای مورد نیاز برای استقرار ماشین‌آلات و ایستگاه‌های کاری، منابع مالی در دسترس مدیران و ظرفیت تولید در نظر گرفته می‌شود.^[۱] از سوی دیگر می‌دانیم که عدم پاسخ به تقاضای بازار ممکن است به از دست دادن مشتری و سهم بازار و به تبع آن رشد هزینه‌ی فرصت‌های از دست رفته شود. یکی از مهمترین دلایل کاهش تولید و از دست رفتن مشتریان بالقوه، از کار افتادگی سیستم‌های تولیدی به علت خرابی‌های اجزای تولید و وقفه در تولید است. کاهش تولید و نیز ضایعات حاصل از خرابی سیستم‌های تولیدی همواره مورد توجه تولیدکنندگان بوده است.^[۲] یکی از راه‌های نیل به این هدف بالا بردن قابلیت اطمینان سیستم است.

بنابراین، باید علاوه بر پارامترهای سنتی ذکر شده هم‌زمان بهینه‌سازی پایایی سیستم تولیدی (کمینه کردن از کار افتادگی سیستم) مورد توجه جدی مدیران قرار گیرد.^[۳] به طور کلی پایایی یک سیستم توانایی آن سیستم برای تحقق هدفی که برای آن طراحی شده در یک دوره‌ی زمانی مشخص است.^[۴] مسئله‌ی طراحی یک سیستم با پایایی بالا با در نظر گرفتن محدودیت منابع چون بودجه، وزن، اندازه و غیره

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۳/۲۱، اصلاحیه ۱۳۹۶/۱۰/۱۰، پذیرش ۱۳۹۶/۱۰/۳۰

DOI:10.24200/J65.2019.7214.1758

کردند. کومرل^۷ با هدف طراحی یک سیستم مدیریت بهداشت و ایمنی در صنعت معدن مدلی مبتنی بر بهینه‌سازی پایایی ارائه داد.^[۱۰] واسودون و همکاران^۸ مفاهیم الزامات فضای کاری و چیدمان تسهیلات را با مفاهیم پایایی و بهره‌وری یک کارخانه‌ی فولاد به طور ترکیبی بررسی کردند.^[۱۱] در تحقیق دیگری درباره‌ی خط تولید مواد غذایی، نویسندگان بر خلاف رویکرد معمول طراحی ایستگاه‌های کاری بر اساس اجتناب از گلوگاه^۹ برای کمینه کردن وقفه‌های تولیدی از مفاهیم پایایی بهره بردند.^[۱۲] در مجموع، با مروری که توسط نویسندگان بر پیشینه‌ی محدود این زمینه‌ی پژوهشی صورت گرفت، مشاهده شد که بیشترین پژوهش‌ها (ترکیب طراحی خطوط تولید و پایایی) نیز مربوط به ساخت سلول در سیستم‌های تولید سلولی است.^[۱۳، ۱۲، ۹]

در بسیاری از تحقیقات انجام شده درباره‌ی پایایی فرض می‌شود که تمام احتمالات به شکل دقیق مشخص هستند. بدین معنی که هر یک از احتمالات به نحو خوبی قابل اندازه‌گیری هستند و اطلاعات احتمالی کاملی درباره‌ی سیستم و رفتار اجزای آن وجود دارد. برای تکمیل اطلاعات احتمالی دو شرط باید برقرار باشد: ۱. تمام توزیع‌های احتمالات مشخص یا به شکل خوبی قابل اندازه‌گیری باشند؛ ۲. اجزای سیستم مستقل‌اند، یعنی تمام متغیرهای تصادفی توصیف‌کننده‌ی رفتار پایایی اجزای مستقل‌اند. در صورتی که حداقل یک شرط برقرار نباشد می‌توان از پایایی غیرقطعی (به عنوان مثال، اعداد فاصله‌ی یا فازی) استفاده کرد.^[۱۸] در دنیای واقعی در بسیاری از موارد که زمان چندانی از راه اندازی سیستم نگذشته است یا فقط در قالب یک پروژه کار می‌کند، داده‌های آماری دقیقی وجود ندارد؛ بنابراین پایایی یک جزء از سیستم عدد نادقیقی است که می‌تواند به وسیله‌ی عددی فاصله‌ی یا فازی^[۱۹] تعریف و به کمک قواعد احتمالات غیرقطعی محاسبه شود.

مسئله‌ی بهینه‌سازی پایایی در شرایط عدم قطعیت نیز مورد توجه محققان قرار گرفته است. به عنوان مثال در مرجع^[۲۰] اثر عدم قطعیت داده‌های پایایی ماشین‌آلات بر طراحی و عملیات سیستم‌های تولیدی بررسی شده است. بونیا و همکاران^[۱۸] این مسئله را برای یک سیستم سری - موازی با داده‌های فاصله‌ی و فرض محدودیت‌های تصادفی توسعه داده و با الگوریتم ژنتیک حل کرده‌اند. همچنین شاهو و همکاران^[۱۱] در مرجع^[۲۱] مسئله‌ی بهینه‌سازی پایایی را برای یک سیستم سری - موازی به شکل چندهدفه با محدودیت‌های قطعی و با روشی دو مرحله‌ی مبتنی بر الگوریتم ژنتیک حل کرده‌اند. در مرجع^[۲۲] الگوریتم شبیه‌سازی تبرید برای حل مسائل بهینه‌سازی پایایی برای سیستم‌های سری - موازی با فرض فازی بودن پارامترهای توزیع احتمال عمر اجزا به کار رفته است.

در این مقاله نویسندگان به دنبال طراحی یک سیستم موازی - سری هستند که در آن هر یک از اجزا معرف ماشین‌هایی از انواع مختلف و هر ردیف میبین یک خط تولید است که تمام این خطوط تولید، محصولی یکسان تولید می‌کنند. هدف یافتن تعداد خطوط بهینه‌ی تولید با در نظر گرفتن محدودیت بودجه، فضا و تقاضای بازار برای محصول است. تقاضا احتمالی است و توزیع عمر ماشین‌ها نمایی با پارامترهای فاصله‌ی است. در ادامه ابتدا ریاضیات فاصله‌ی و سپس مدل ریاضی به همراه مفروضات آن و سه مثال عددی و روش حل تشریح می‌شود.

در این مقاله نویسندگان به دنبال طراحی یک سیستم موازی - سری هستند که در آن هر یک از اجزا معرف ماشین‌هایی از انواع مختلف و هر ردیف میبین یک خط تولید است که تمام این خطوط تولید، محصولی یکسان تولید می‌کنند. هدف یافتن تعداد خطوط بهینه‌ی تولید با در نظر گرفتن محدودیت بودجه، فضا و تقاضای بازار برای محصول است. تقاضا احتمالی است و توزیع عمر ماشین‌ها نمایی با پارامترهای فاصله‌ی است. در ادامه ابتدا ریاضیات فاصله‌ی و سپس مدل ریاضی به همراه مفروضات آن و سه مثال عددی و روش حل تشریح می‌شود.

۲. ریاضیات فاصله‌ی

یک عدد فاصله‌ی A یک بازه‌ی بسته است که به صورت

در این جا عملگرهای ریاضی مانند جمع، تفریق، ضرب اسکالر، ضرب، تقسیم و توان اعداد فاصله‌ی^[۱۸] تشریح می‌شوند. این عملگرها حساب فاصله‌ی نامیده می‌شوند. اگر $A = [a_L, a_R]$ و $B = [b_L, b_R]$ و $A = [a_C, a_W]$ و $B = [b_C, b_W]$ باشد:

$$A + B = [a_L + b_L, a_R + b_R], A + B = \langle a_c + b_c \rangle$$

$$A - B = [a_L - b_R, a_R - b_L]$$

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_L, \lambda a_R] & \text{if } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_R, \lambda a_L] & \text{if } \lambda < 0 \end{cases} \lambda A = \lambda \langle a_C, a_W \rangle = \langle \lambda a_C, |\lambda| a_W \rangle$$

$$A \times B = [\min(a_L b_L, a_L b_R, a_R b_L, a_R b_R),$$

$$\max(a_L b_L, a_L b_R, a_R b_L, a_R b_R)]$$

$$\frac{B}{A} = B \times \frac{1}{A} = [b_L, b_R] \times \left[\frac{1}{a_R}, \frac{1}{a_L} \right], 0 \notin [a_L, a_R]$$

$$A^n = \begin{cases} [1, 1] & \text{if } n = 0 \\ [a_L^n, a_R^n] & \text{if } a_L \geq 0 \text{ or } n \text{ فرد} \\ [a_R^n, a_L^n] & \text{if } a_R \leq 0, n \text{ زوج} \\ [0, \max(a_L^n, a_R^n)] & \text{if } a_L \leq 0 \leq a_R, n > 0 \text{ زوج} \end{cases}$$

$$(A)^{\frac{1}{n}} = [a_L, a_R]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{[a_L, a_R]} =$$

$$\begin{cases} [\sqrt[n]{a_L}, \sqrt[n]{a_R}] & \text{if } a_L \geq 0 \text{ or } n \text{ فرد} \\ [0, \sqrt[n]{a_R}] & \text{if } a_L \leq 0, a_R \geq 0, n \text{ زوج} \\ [\phi] & \text{if } a_R < 0, n \text{ زوج} \end{cases}$$

۱.۲. میانگین و واریانس

اگر $X_i = [X_{iL}, X_{iR}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ i امین عدد فاصله‌ی باشد، میانگین، واریانس و انحراف استاندارد برابر است با:

$$\bar{X} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iL}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iR} \right], var(X) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left[x_{iL} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iR}, x_{iR} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iL} \right] \right)^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{var(X)} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left[x_{iL} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iR}, x_{iR} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iL} \right] \right)^2}$$

۳. فرمول بندی مسئله

پیش از بیان مدل ریاضی مسئله لازم است که مفروضات مدل مطرح شود. سیستم مزبور مطابق شکل ۱ خواهد بود. این سیستم دارای k زیرسیستم است. هر زیرسیستم دارای i ردیف و هر ردیف دارای j جزء است که در این جا اجزا ماشین ها هستند و هر ردیف نشان دهنده ی یک خط تولید است. کاربرد این سیستم در صنعت به وفور قابل مشاهده است. مثلاً شرکتی که هم زمان به تولید نوشابه، آب معدنی و ماءالشعیر مشغول است، نمونه یی از این نوع سیستم می تواند باشد. مفروضات این مدل عبارت اند از:

۱. زیرسیستم های تولیدی مستقل از یکدیگر هستند؛ بنابراین دارای پایایی های مستقل اند.
۲. تمام ردیف های هر زیرسیستم دارای ماشین هایی از j نوع مختلف هستند.
۳. عمر مفید هر ماشین توزیع نمایی با پارامتر فاصله یی است.
۴. مدل در یک افق برنامه ریزی $[0, T]$ تعریف می شود.
۵. هزینه ی نگهداری کالای در جریان ساخت قابل اغماض است.
۶. زمان جابه جایی محصول نیمه ساخته از یک ماشین به ماشین دیگر قابل اغماض است.
۷. تقاضای محصول نهایی تصادفی و دارای یک تابع توزیع مشخص است.
۸. سیستم تولید بر اساس استقرار محصولی است.
۹. راهبرد برنامه ریزی تولید بر اساس نظریه ی محدودیت هاست.

نمادگذاری

h : هزینه ی نگهداری هر محصول نهایی در انبار؛

ψ : هزینه ی کمبود به ازای هر واحد؛

k : زیرسیستمی که در آن محصول k ام تولید می شود ($k = 1, 2, \dots, \bar{k}$)؛

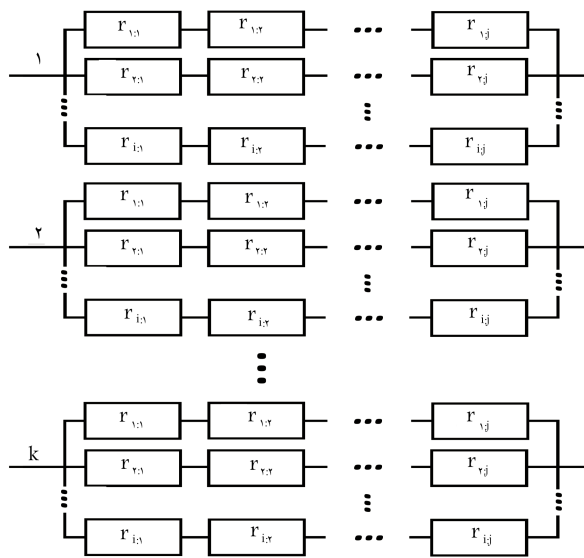
$\lambda_j = [\lambda_{jkL}, \lambda_{jkR}]$: پارامتر توزیع نمایی برای عمر مفید هر ماشین از نوع j ام

($j = 1, 2, \dots, n$) در زیرسیستم k ام؛

C_k : هزینه ی راه اندازی هر خط تولید در زیرسیستم k ام؛

B : بودجه ی کل در اختیار برای راه اندازی خطوط تولید؛

S_k : فضای مفید مورد نیاز برای راه اندازی هر خط تولید در زیرسیستم k ام؛



شکل ۱. سیستم موازی - سری.

۲.۲. روابط (کوچک تر، بزرگ تر و مساوی) اعداد فاصله یی

اگر A و B دو عدد فاصله یی باشند، این دو عدد یکی از سه حالت زیر را خواهند داشت:

نوع ۱: A و B جدا از هم اند.

نوع ۲: A و B با یکدیگر اشتراک دارند.

نوع ۳: $A \subset B$ است یا $B \subset A$.

در منبع^[۱۸] تعاریف گوناگونی برای روابط میان اعداد فاصله یی مطرح شده است. به طور کلی دو نوع تصمیم گیری وجود دارد. تصمیم گیری خوش بینانه و بدبینانه. در نوع خوش بینانه، تصمیم گیرنده بهترین گزینه را بدون در نظر گرفتن عدم اطمینان لحاظ می کند. در حالی که در نوع بدبینانه، تصمیم گیرنده بهترین گزینه را با کمی عدم اطمینان انتخاب می کند.

تعریف ۱. رابطه ی \leq_{min} برای دو عدد فاصله یی $A = [a_L, a_R] = \langle a_C, a_W \rangle$ و $B = [b_L, b_R] = \langle b_C, b_W \rangle$ در حالت خوش بینانه برای مسئله ی کمیته سازی (\leq_{min}) به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \leq_{min} B \Leftrightarrow a_L \leq b_L, A <_{min} B \wedge A \neq B$$

بر اساس این تعریف، تصمیم گیرنده A را می پذیرد. رابطه ی \leq_{min} متقارن^{۱۲} نیست. (\wedge به معنی «و منطقی» (AND) منطقی) است.)

تعریف ۲. رابطه ی \geq_{max} بین دو عدد فاصله یی $A = [a_L, a_R] = \langle a_C, a_W \rangle$ و $B = [b_L, b_R] = \langle b_C, b_W \rangle$ در حالت خوش بینانه برای مسئله ی بیشینه سازی (\geq_{max}) به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \geq_{max} B \Leftrightarrow a_R \geq b_R, A >_{max} B \wedge A \neq B$$

بر اساس این تعریف، تصمیم گیرنده ی خوش بین A را انتخاب می کند. رابطه ی \geq_{max} انعکاسی^{۱۳} و تعدی^{۱۴} است، اما متقارن نیست.

تعریف ۳. رابطه ی $<_{pmin}$ میان دو عد فاصله یی

$A = [a_L, a_R] = \langle a_C, a_W \rangle$ و $B = [b_L, b_R] = \langle b_C, b_W \rangle$ در حالت بدبینانه برای مسئله و کمیته سازی ($<_{pmin}$) به صورت زیر خواهد بود:

$$A <_{pmin} B \Leftrightarrow a_c < b_c$$

برای اعداد فاصله یی نوع ۱ و ۲

$$A <_{pmin} B \Leftrightarrow a_C \leq b_C \wedge a_W < b_W$$

برای اعداد فاصله یی نوع ۳

اما برای عدد فاصله یی نوع سوم تصمیم بدبینانه نمی تواند اتخاذ شود، زمانی که $a_C < b_C \wedge a_W > b_W$

تعریف ۴. رابطه ی $>_{pmax}$ بین دو عدد فاصله یی $A = [a_L, a_R] = \langle a_C, a_W \rangle$ و $B = [b_L, b_R] = \langle b_C, b_W \rangle$ در حالت بدبینانه برای مسئله ی بیشینه سازی ($>_{pmax}$) به صورت زیر تعریف می شود:

$$A >_{pmax} B \Leftrightarrow a_C > b_C$$

برای اعداد فاصله یی نوع ۱ و ۲

$$A >_{pmax} B \Leftrightarrow a_C \geq b_C \wedge a_W < b_W$$

برای عدد فاصله یی نوع ۳

اما، برای عدد فاصله یی نوع ۳ تصمیم بدبینانه زمانی که $a_c < b_c \wedge a_W < b_W$ اتخاذ نمی شود.

$$TC = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[h \int_{LQ_k}^{Q_k} (Q_k - d_k) f(d_k) dd_k + \Psi \int_{Q_k}^{UQ_k} (d_k - Q_k) f(d_k) dd_k \right] \quad (4)$$

رابطه‌ی ۴ را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۵ ساده کرد:

$$TC = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[h \int_{qLx_k}^{q_k x_k} (q_k x_k - d_k) f(d_k) dd_k + \Psi \int_{q_k x_k}^{q_k Ux_k} (d_k - q_k x_k) f(d_k) dd_k \right] \quad (5)$$

رابطه‌ی ۵ تابع هدف دوم مسئله است که باید کمینه شود. در این رابطه گزاره‌ی اول، بیانگر هزینه‌ی نگهداری کالای مازاد بر تقاضای محصول k ام در دوره‌ی T است. این هزینه برابر است با مجموع هزینه‌ی نگهداری یک واحد کالا ضرب در مقدار مازاد کالا در دوره‌ی T . تفاوت میان محصول تولید شده و تقاضای بازار $(q_k x_k - d_k)$ تعیین کننده‌ی سطح موجودی کالای مازاد است. گزاره‌ی دوم معرف هزینه‌ی کمبود محصول است که برابر با مجموع هزینه‌ی کمبود یک واحد کالا ضرب در مقدار کمبود محصول در دوره‌ی T است که برابر با تفاوت میان تقاضای بازار و محصول تولید شده $(d_k - q_k x_k)$ است. بر این اساس مدل ریاضی پیشنهادی در این مقاله به صورت زیر خواهد بود:

Maximize

$$R_s(X) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[\left(1 - \prod_{i=1}^{x_k} \left(1 - \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_{ijk} RT} \right) \right), \left(1 - \prod_{i=1}^{x_k} \left(1 - \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_{ijk} LT} \right) \right) \right] \quad (6)$$

Minimize

$$TC = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[h \int_{q_k Lx_k}^{q_k x_k} (q_k x_k - d_k) f(d_k) dd_k + \Psi \int_{q_k x_k}^{q_k Ux_k} (d_k - q_k x_k) f(d_k) dd_k \right] \quad (7)$$

St.

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} c_k x_k \leq B \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} s_k x_k \leq S \quad (9)$$

$$prob[D_k \leq q_k x_k] \geq 1 - \alpha \quad \forall k = 1, 2, \dots, \bar{k} \quad (10)$$

$$Lx_k \leq x_k \leq Ux_k, \quad int \quad \forall k = 1, 2, \dots, \bar{k} \quad (11)$$

محدودیت اول: محدودیت بودجه است مبنی بر این که چه تعداد خط تولید برای تولید هر محصول با توجه به بودجه‌ی در دسترس می‌توان راه‌اندازی کرد.
محدودیت دوم: محدودیت فضا است. مجموع فضای خطوط تولید برای تمام محصولات باید کوچک‌تر یا مساوی با کل فضای مفید در دسترس باشد.

S : کل فضای در اختیار برای راه‌اندازی خط تولید؛
 t_{jk} : زمان لازم برای تولید یک واحد کالای در جریان ساخت توسط ماشین از نوع j ام ($j = 1, 2, \dots, n$) در زیرسیستم k ام؛
 T : افق برنامه‌ریزی؛

D_k : تقاضا برای محصول نهایی k ام در دوره‌ی زمانی $[0, T]$ که متغیری تصادفی با توزیع مشخص است و $D_k = f(d_k)$ ؛
 d_k : مقادیر متغیر تصادفی D_k ؛

q_k : مقدار محصول نهایی تولید شده در هر خط تولید در زیرسیستم k ام با در نظر گرفتن خرابی‌های رخ داده در دوره‌ی برنامه‌ریزی $[0, T]$ ؛
 MRT : امید ریاضی زمان تعمیر پس از هر خرابی؛
 Q_k : مقدار کل تولید محصول k ام؛

x_k : متغیر تصمیم که نشان دهنده‌ی تعداد خطوط تولید لازم برای تولید محصول k ام است؛

Lx_k و Ux_k : کران پایین و کران بالای متغیر تصمیم $(Lx_k \leq x_k \leq Ux_k)$ ؛
 LQ_k : کمترین مقدار محصولی که زیرسیستم k ام باید تولید کند $(LQ_k = q_k \cdot Lx_k)$ ؛
 UQ_k : بیشترین تعداد محصولی که زیرسیستم k ام قابلیت تولید آن را دارد $(UQ_k = q_k \cdot Ux_k)$ ؛

در یک سیستم موازی - سری با k زیرسیستم، پایایی به شکل رابطه‌ی زیر است:

$$R_s(x) = \prod_{j=1}^n [R_{SL}(X), R_{SR}(X)] \quad (1)$$

$$R_{SL}(X) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[1 - \prod_{i=1}^{x_k} \left(1 - \prod_{j=1}^n r_{ijkL} \right) \right], \quad R_{SR}(X) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[1 - \prod_{i=1}^{x_k} \left(1 - \prod_{j=1}^n r_{ijR} \right) \right] \quad (1)$$

این رابطه بر اساس پایایی هر ماشین تعریف می‌شود. با توجه به نمایی بودن عمر مفید هر ماشین، پایایی هر ماشین از نوع j ام در زیرسیستم k ام با توجه به عدم قطعیت پارامتر توزیع مقداری فاصله‌ی و به صورت رابطه ۲ است:

$$r_{ijk} = [e^{-\lambda_{ijk} RT}, e^{-\lambda_{ijk} LT}] \quad \forall i = 1, 2, \dots, x_k \quad (2)$$

بنابراین، تابع هدف نخست به صورت رابطه‌ی ۳ خواهد بود:

Maximize

$$R_s(X) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \left[\left(1 - \prod_{i=1}^{x_k} \left(1 - \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_{ijk} RT} \right) \right), \left(1 - \prod_{i=1}^{x_k} \left(1 - \prod_{j=1}^n e^{-\lambda_{ijk} LT} \right) \right) \right] \quad (3)$$

از آنجا که مقدار تولید (Q_k) می‌تواند کمتر یا بیشتر از تقاضا (D_k) برای محصول k ام باشد، هزینه‌های کمبود محصول و نگهداری محصول بر سیستم تحمیل خواهد شد. می‌دانیم که $Q_k = q_k x_k$ و $LQ_k \leq Q_k \leq UQ_k$ ، در نتیجه با الهام از مرجع [۲۳] هزینه‌ی کل تحمیل شده به سیستم در صورت مواجه شدن با یکی از دو حالت کمبود یا مازاد محصول برابر خواهد بود با:

رابطه‌ی ۱۴ بازه‌ی زمانی مازاد انتهای دوره‌ی برنامه‌ریزی را نشان می‌دهد (توضیحات بیشتر را در پیوست ۲ ببینید). از طرف دیگر طبق خواص توزیع نمایی و بواسون، امید ریاضی فاصله‌ی زمانی تا رخداد اولین خرابی برابر با $\frac{1}{\lambda}$ است. یعنی خرابی‌های متوالی در طول افق زمانی T با فواصل $\frac{1}{\lambda}$ به صورت یکنواخت توزیع می‌شوند. بنابراین طول زیربازه‌های زمانی سلامت سیستم $\frac{1}{\lambda}$ است (به جز بازه‌ی زمانی مازاد انتهای دوره یا همان Γ که طولی کمتر از $\frac{1}{\lambda}$ دارد). در نتیجه طبق رابطه‌ی ۱۲ تعداد چرخه‌های کامل تولید انجام شده برای محصول k ام (که به معنای تعداد تولید محصول نهایی k ام است) در هر یک از این زیربازه‌های زمانی برابر است با:

$$\bar{m}_k = \left\lfloor \frac{\frac{1}{\lambda} - \delta + \Omega}{\Omega} \right\rfloor \quad \forall k = 1, 2, \dots, \bar{k} \quad (15)$$

و تعداد چرخه‌های کامل تولید انجام شده برای محصول k ام در بازه‌ی مازاد انتهای دوره برابر است با:

$$\bar{m}_k \left\lfloor \frac{\Gamma - \delta + \Omega}{\Omega} \right\rfloor \quad (16)$$

بنابراین تعداد تولید محصول k ام نهایی در طول افق زمانی T برابر است با:

$$q_k = \vartheta \cdot \bar{m}_k + \bar{m}_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, \bar{k} \quad (17)$$

در رابطه‌ی ۱۷ از تعداد محصولات نهایی سالمی که ممکن است در چرخه‌های ناقص تولید شود، صرف نظر شده است؛ یعنی، q_k تعداد محصول نهایی در حالت بدبینانه است. به دلیل فاصله‌ی بودن λ در روابط ۱۳ و ۱۴، q_k نیز عددی فاصله‌ی است.

۴. بهینه‌سازی چندهدفه

مدل برنامه‌ریزی پیشنهادی در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی دهدفه با محدودیت‌های خطی است. برای حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه روش‌های گوناگونی وجود دارد که هر کدام از این روش‌ها مزایا و معایب خاص خود را دارند. ضمن این‌که جواب به دست آمده از هر روش لزوماً برابر با دیگر روش‌ها نیست؛ زیرا مفروضات هر روش و همچنین میزان مشارکت تصمیم‌گیرنده در فرایند حل متفاوت است.^[۲۴] در این تحقیق از روش معیار جامع برای حل مدل نهایی استفاده شده است.

۴.۱. روش معیار جامع

در این روش برخلاف روش‌های دیگر حل مسائل چندهدفه نیازی به اولویت بندی اهداف، وزن دهی، یا تبدیل اهداف به محدودیت نیست. روش معیار جامع^{۱۵}، بسته به مورد، مجموع توان اول، دوم، ... انحرافات نسبی اهداف از مقدار بهینه‌شان را کمینه می‌کند. در این روش، تابع هدف که همواره کمینه‌سازی آن مورد توجه است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min Z = \sum_{i=1}^k \left(\frac{f_i^* - f_i}{f_i^*} \right)^p \quad (18)$$

که در آن f_i^* مقدار بهینه‌ی تابع هدف f_i ام (بدون در نظر گرفتن اهداف دیگر) است. پیشنهادهای مختلفی برای مقدار p وجود دارد. $p = 1$ را مناسب می‌دانند (یعنی مجموع نسبی انحرافات کمینه شود) و برخی نیز $p = 2$ را مناسب تر می‌دانند (یعنی مجموع توان دوم انحرافات کمینه شود).^[۲۴]

محدودیت سوم: یک محدودیت احتمالی است که نشان می‌دهد احتمال بزرگ‌تر یا مساوی بودن با عرضه نسبت به تقاضا باید بیشتر از $1 - \alpha$ منهای سطح اطمینان (α) باشد. این محدودیت احتمالی را می‌توان بر اساس تعریف زیر به یک محدودیت قطعی تبدیل کرد:^[۱۸]

وقتی D_k دارای توزیع نرمال است. در این حالت، $D_k \sim N(\mu_{D_k}, \sigma_{D_k}^2)$ ، که در آن μ_{D_k} معرف میانگین از $D_k = E(D_k)$ و $\sigma_{D_k}^2$ بیان‌گر واریانس از $D_k = Var(D_k)$ است. بنابراین، $prob[D_k \leq q_k x_k] \geq 1 - \alpha$ می‌تواند به صورت $q_k x_k \geq \mu_{D_k} + \gamma \cdot \sigma_{D_k}$ نوشته شود که γ مقدار نرمال استاندارد است که از رابطه‌ی $\phi(\gamma) = \alpha$ به دست می‌آید در این جا

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ است. بنابراین به جای محدودیت فوق $q_k x_k \geq \mu_{D_k} + \gamma \cdot \sigma_{D_k}$ جایگزین می‌شود. وقتی D_k دارای توزیع یکنواخت است، $D_k \sim U(l_k, u_k)$ پس محدودیت احتمالی $prob[D_k \leq q_k \cdot x_k] \geq 1 - \alpha$ می‌تواند به صورت محدودیت قطعی $\tau_k \leq q_k x_k$ نوشته شود که در آن $\tau = u_k \beta + l_k \alpha$ که در آن $\beta = 1 - \alpha$ است. $\int_{l_k}^{\tau_k} \frac{1}{u_k - l_k} dd_k = 1 - \alpha$

در این حالت به جای محدودیت فوق $q_k x_k \geq u_k \beta + l_k \alpha$ جایگزین می‌شود. یک سیستم با یک خط تولید سری را که برای ساخت محصول k طراحی شده است، در نظر بگیرید. در سیستم تولید سری اولین محصول نهایی بدون هیچ‌گونه وقفه و در طی زمان $\delta = \sum_{j=1}^n t_{jk}$ (مجموع زمان پردازش توسط n ماشین در خط) تولید می‌شود. از آن‌جا که نوع ماشین‌های سری شده مختلف است، مدت زمان کار هر ماشین بر روی محصول نیمه‌ساخته متفاوت است. در این وضعیت، ماشینی که دارای مدت زمان پردازش بیشتری است، گلوگاه خط تولید محسوب می‌شود. اگر برای تولید محصول نهایی دوم به محض خالی شدن ماشین اول و ورود محصول نیمه‌ساخته به ماشین دوم اقدام شود، در پشت ماشین گلوگاهی صافی از محصولات نیمه‌ساخته در انتظار پردازش ایجاد خواهد شد. بنابراین، برای اجتناب از رخ دادن چنین وضعیتی، تولید محصولات متوالی باید با یک وقفه‌ی زمانی نسبت به محصول پیشین شروع شود. مدت زمان این وقفه برابر است با مدت زمان پردازش ماشین گلوگاهی یعنی $\Omega = \max_{j,k} (t_{jk})$. بدیهی است که در صورت برابر بودن مدت زمان پردازش همه‌ی ماشین‌ها مدت زمان این وقفه برابر مدت زمان پردازش‌ها یا t_{jk} است. اگر یک بازه‌ی زمانی بدون خرابی را با یک بازه‌ی زمانی پیوسته بنامیم و آن را با I نشان دهیم، با توجه به زمان پردازش ماشین گلوگاهی (Ω) و مدت زمان یک چرخه‌ی تولید (δ)، تعداد چرخه‌های کامل تولید رخ داده برای محصول k ام که به معنای تولید محصول نهایی k ام است، طبق پیوست ۱ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$m = \left\lfloor \frac{1 - \delta + \Omega}{\Omega} \right\rfloor \quad \forall k = 1, 2, \dots, \bar{k} \quad (12)$$

اما آنچه در واقعیت وجود دارد، این است که معمولاً در یک افق زمانی T سیستم دچار خرابی می‌شود؛ از این رو، T یک بازه‌ی پیوسته نخواهد بود. بنابراین باید تعداد بازه‌های زمانی پیوسته در افق برنامه‌ریزی T را به دست آورد. این مهم از طریق رابطه‌های زیر (که در پیوست ۲ نحوه‌ی محاسبه‌ی آنها تشریح شده است) حاصل می‌شود:

$$\vartheta = \left\lfloor \frac{T + MRT}{\frac{1}{\lambda} + MRT} \right\rfloor \quad (13)$$

$$\Gamma = T - \vartheta \left(\frac{1}{\lambda} + MRT \right) \quad (14)$$

رابطه‌ی ۱۳ تعداد بازه‌هایی از سلامت سیستم را که طول آنها دقیقاً برابر $\frac{1}{\lambda}$ است، و

جدول ۱. یافته‌های نهایی حاصل از حل مثال‌ها.

مثال	نوع خط تولید	تعداد خطوط (X_k)	پایایی خط (فاصله‌ی)		هزینه‌ی کل سیستم (نگهداری + کمبود)	زمان اجرای برنامه (ثانیه)
			حد چپ	حد راست		
۱	۱	۴	۰٫۸۲۶۰۲۲۳	۰٫۸۳۹۵۹۴۷۹۳	۱۱۸۶۲۸۴۶۲	۰٫۲۸۴
	۲	۵	۰٫۶۸۰۲۸۱۱۴	۰٫۷۱۷۰۲۹۴۰۶	۰٫۶۹۸۶۵۵۲۷	
	۱	۶	۰٫۷۹۹۵۹۶۷۵	۰٫۹۲۰۲۵۷۲۲۷	۰٫۸۵۹۹۲۶۹۹	
	۲	۷	۰٫۳۲۹۸۶۳۸۴	۰٫۵۷۴۸۰۷۲۵۲	۰٫۴۵۲۳۳۵۵۵	
	۳	۴	۰٫۵۲۷۴۵۸۹	۰٫۷۰۹۷۴۹۹۵۴	۰٫۶۱۸۶۰۴۴۳	۵۸٫۹۸
۲	۴	۴	۰٫۶۵۷۹۶۱۹۱	۰٫۸۰۳۳۸۶۰۴۹	۲۶۴۶۰۷۹۵۹	
	۵	۵	۰٫۷۰۴۸۴۲۲۹	۰٫۸۵۵۱۸۵۸۲۷	۰٫۷۸۰۰۱۴۰۶	
	۱	۴	۰٫۶۵۷۵۴۵۲۷	۰٫۸۱۴۷۳۴۶۴۱	۰٫۷۳۶۱۳۹۹۵	
	۲	۴	۰٫۴۳۴۱۲۰۳۶	۰٫۵۶۴۷۷۹۷۵۵	۰٫۴۹۹۴۵۰۰۶	
	۳	۵	۰٫۶۰۸۲۱۳۴۸	۰٫۷۸۶۹۵۷۹۳۱	۰٫۶۹۷۵۸۵۷۱	
۳	۴	۴	۰٫۶۵۷۹۶۱۹۱	۰٫۸۰۳۳۸۶۰۴۹	۰٫۷۳۰۶۷۳۹۸	
	۵	۵	۰٫۷۰۴۸۴۲۲۹	۰٫۸۵۵۱۸۵۸۲۷	۰٫۷۸۰۰۱۴۰۶	
	۶	۴	۰٫۵۶۶۷۸۵۵۴	۰٫۷۱۶۹۱۷۹۷۴	۰٫۶۴۱۸۵۱۷۶	۱۹۷۸۴
	۷	۵	۰٫۸۹۳۶۳۸۷۴	۰٫۹۳۰۲۴۴۹۰۹	۰٫۹۱۱۹۴۱۸۳	
	۸	۵	۰٫۵۹۲۱۵۱۳۸	۰٫۷۷۲۶۰۰۵۹۳	۰٫۶۸۲۳۷۵۹۸	
	۹	۴	۰٫۶۷۴۶۴۰۰۷	۰٫۷۱۵۶۳۲۴۳۸	۰٫۶۹۵۱۳۶۲۶	
	۱۰	۴	۰٫۸۲۱۵۹۸۳۷	۰٫۸۷۱۹۷۹۴۶۲	۰٫۸۴۶۷۸۸۹۱	
	۱	۴	۰٫۶۵۷۹۶۱۹۱	۰٫۸۰۳۳۸۶۰۴۹	۰٫۷۳۰۶۷۳۹۸	
	۲	۵	۰٫۷۰۴۸۴۲۲۹	۰٫۸۵۵۱۸۵۸۲۷	۰٫۷۸۰۰۱۴۰۶	
	۳	۴	۰٫۵۶۶۷۸۵۵۴	۰٫۷۱۶۹۱۷۹۷۴	۰٫۶۴۱۸۵۱۷۶	

برای هر خط تولید به کمک رابطه‌ی ۱۷ محاسبه می‌شود. در ادامه با توجه به داده‌های مسئله مقدار حد پایین متغیرهای تصمیم به کمک محدودیت مربوط به رابطه‌ی ۱۰ محاسبه شده است. با قرار دادن حد پایین یک متغیر به جای مقدار آن در محدودیت‌های مربوط به روابط ۸ و ۹ و تعیین اشتراک آنها، مقدار حد بالای متغیر دیگر به دست می‌آید. از آن‌جا که جنس متغیرهای تصمیم عدد صحیح است، در هنگام محاسبه‌ی حدود بالا و پایین چنانچه با اعداد اعشاری مواجه شدیم، برای حد پایین به اولین عدد صحیح بزرگ‌تر (به بالا) و برای حد بالا به بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر (به پایین) گرد می‌کنیم. این مسئله از جنس بهینه‌سازی غیرخطی چندهدفه عدد صحیح با پارامترهای فاصله‌ی است. برای حل این مسئله از روش معیار جامع که در بخش قبل بدان اشاره شد، استفاده شده است. بر طبق این روش مقدار بهینه‌ی هر یک از توابع هدف به طور جداگانه محاسبه شد و با قرار دادن در رابطه‌ی ۱۸ جواب نهایی این مسئله‌ی دوهدفه با توجه به محدودیت‌های چهارگانه‌ی آن محاسبه شد که در جدول ۱ نمایش داده شده است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله نویسندگان یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه‌ی عدد صحیح با پارامترهای فاصله‌ی برای حل مسئله‌ی طراحی خط تولید با در نظر گرفتن نظریه‌ی پایایی ارائه کرده‌اند. این مدل به مدیران کمک می‌کند تا در باره‌ی راه‌اندازی خطوط

۵. مثال عددی

به منظور تعیین اعتبار مدل پیشنهادی، سه مثال عددی در اندازه‌های مختلف طراحی و توسط نرم‌افزار MATLAB و با استفاده از الگوریتم شمارش صریح حل شده است. اطلاعات مربوط به این مثال‌ها در جدول‌های ۴، ۳ و ۵ و پیوست ۳ نشان داده شده است. مثال‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب دارای ۲، ۵ و ۱۰ نوع خط تولید هستند که کمینه ۲ و بیشینه ۴ ماشین برای خطوط مختلف تعیین شده است. زمان پردازش برای ماشین‌ها به دقیقه در نظر گرفته شده است و نرخ خرابی به صورت بازه‌ی خواهد بود. برای هر خط تولید در هر یک از مثال‌ها فضا و بودجه‌ی مورد نیاز برای راه‌اندازی هر یک در نظر گرفته شده است. کل بودجه و فضا نیز از دیگر پارامترهای مفروض در این مسائل هستند. ضمن این‌که توزیع تقاضا برای محصولات مختلف توزیع یکنواخت یا نرمال در نظر گرفته شده است که در جدول‌های ۴ و ۵ قابل مشاهده است. هزینه‌ی نگهداری و کمبود کالاها، سطح اطمینان، دوره‌ی برنامه‌ریزی و زمان تعمیر خط پس از وقوع خرابی در سه مسئله یکسان در نظر گرفته شده است. در دوره‌ی برنامه‌ریزی مورد نظر به طور مستمر به دنبال تولید محصولات هستیم. بر اساس این داده‌ها می‌خواهیم تعداد خطوط بهینه را از هر نوع با هدف کمینه کردن مجموع هزینه‌های کمبود و نگهداری و بیشینه کردن پایایی هر زیرسیستم به دست آوریم.

برای حل مسائل، ابتدا باید حد بالا و پایین را برای متغیرهای تصمیم محاسبه کرد. بدین منظور ابتدا باید مقدار q_k را برای خط تولید k ام محاسبه کرد. این مقدار

شمارش صریح استفاده شده است که در صورت افزایش ابعاد مسئله ناکارآمد خواهد بود و به عنوان پیشنهادی برای تحقیقات آتی می‌توان از روش‌های فراابتکاری توسعه یافته مانند الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی ازدحام ذرات و... استفاده کرد. همچنین این مدل می‌تواند با در نظر گرفتن ضایعات خطوط تولید نیز توسعه داده شود.

تولید محصولات مختلف با در نظر گرفتن محدودیت‌های بودجه، فضا، و تقاضای بازار و با هدف بیشینه کردن پایداری و کمینه کردن مجموع هزینه‌ی کل نگهداری و کمبود تصمیم‌گیری کنند. مدل از جنس مسائل NP-hard است که حل آن نیازمند روش‌های فراابتکاری است. در این مقاله به دلیل کوچک بودن ابعاد مسئله از روش

پانویس‌ها

1. exact optimization methods
2. Wei-Chang Yeh
3. particle swarm optimization
4. deterministic
5. Bennett & Jenny
6. Chung, Wu & Chang
7. Kumral
8. Vasudevan et al
9. bottleneck
10. Bhunia, et al
11. Sahoo, et al
12. symmetric
13. reflexive
14. transitive
15. global criterion method

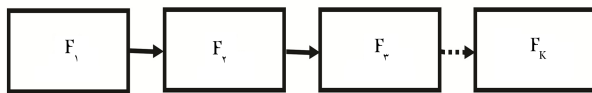
منابع (References)

1. Stevenson, W. J. Production/operations management, Tom Casson, USA (1996).
2. Lin, Y.-K. and et al. "Reliability evaluation for a waste-reduction parallel-line manufacturing system", *Journal of Cleaner Production*, **35**, pp. 93-101 (2012).
3. Liberopoulos, G. and Tsarouhas, P. "Reliability analysis of an automated pizza production line", *Journal of Food Engineering*, **69**, pp. 79-96 (2005).
4. Bennett, D. and Jenney, B. "Reliability: its implications systems design in production", *OMEGA*, **8**(4), pp. 433-440 (1980).
5. Thoft-Christensen, P. and Murotsu, Y. *Application of Structural Systems Reliability Theory Springer*, Berlin, Heidelberg (1986).
6. Garg, H. and et al. "Intuitionistic fuzzy optimization technique for solving multi-objective reliability optimization problems in interval environment", *Expert Systems with Applications*, **41**, pp. 3157-3167 (2014).
7. Yeh, W.-C. "A two-stage discrete particle swarm optimization for the problem of multiple multi-level redundancy allocation in series systems", *Expert Systems with Applications*, **36**, pp. 9192-9200 (2009).
8. Chung, S.-H. and et al. "An efficient tabu search algorithm to the cell formation problem with alternative routings and machine reliability considerations", *Computers & Industrial Engineering*, **60**, pp. 7-15 (2011).
9. Das, K. and et al. "Reliability consideration in the design and analysis of cellular manufacturing systems", *Int. J. Production Economics*, **105**, pp. 243-262 (2007).
10. Kumral, M. "Reliability-based optimisation of a mine production system using genetic algorithms", *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, **18**, pp. 186-189 (2005).
11. Vasudevan, K. and et al. "Application of simulation to design and operation of steel mill devoted to manufacture of line pipes", *2010 Second International Conference on Advances in System Simulation*, pp. 1-6, IEEE (2010).
12. Diallo, M. and et al. "Manufacturing cell design with flexible routing capability in presence of unreliable machines", *International Journal of Production Economics*, **74**(1-3), pp. 175-182 (2001).
13. JabalAmeli, M. S. and Arkat, J. "Cell formation with alternative process routings and machine reliability consideration", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **35**, pp. 761-768 (2008).
14. JabalAmeli, M. S. and et al. "Modelling the effects of machine breakdowns in the generalized cell formation problem", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **39**, pp. 838-850 (2008).
15. Savsar, M. "Reliability analysis of a flexible manufacturing cell", *Reliability Engineering & System Safety*, **67**, pp. 147-152 (2000).
16. Zakarian, A. and Kusiak, A. "Modeling manufacturing dependability", *IEEE Transactions Robotics and Automation*, **13**(2), pp. 161-168 (1997).
17. Logendran, R. Talkington, D. "Analysis of cellular and functional manufacturing system in the presence of machine breakdown", *International Journal of Production Economics*, **53**(3), pp. 239-256 (1997).
18. Bhunia, A. K. and et al. "Reliability stochastic optimization for a series system with interval component reliability via genetic algorithm", *Applied Mathematics and Computation*, **216**, pp. 929-939 (2010).

- Gupta, R. K. and et al. "A GA based penalty function technique for solving constrained redundancy allocation problem of series system with interval valued reliabilities of components", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **232**, pp. 275-284 (2009).
- Colledani, M. and Yemane, A. "Impact of machine reliability data uncertainty on the design and operation of manufacturing systems", *Procedia CIRP*, **7**, pp. 557-562 (2013).
- Sahoo, L. and et al. "Genetic algorithm based multi-objective reliability optimization in interval environ-

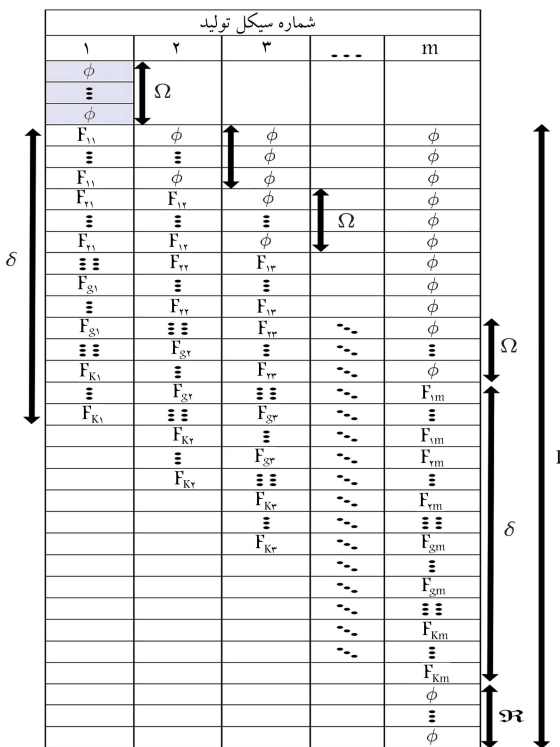
- ment", *Computers & Industrial Engineering*, **62**, pp. 152-160 (2012).
- SeyedEsfahani, M. and et al. "A simulated annealing algorithm for fuzzy reliability optimization model in series-parallel and standby systems", *International Journal of Industrial Engineering & production Management*, **24**(4), pp. 413-422 (2014).
- Sadjadi, S. J. and et al. "A new nonlinear stochastic staff scheduling model", *Scientia Iranica Transactions E: Industrial Engineering*, **18**(3), pp. 699-710 (2011).
- Momeni, M., *New topics of Operations Research, 2th edition*, Tehran University Press, Tehran (2008).

پیوست



شکل ۲. سیستم سری با K ماشین.

پیوست ۱: نحوه محاسبه مقدار محصول نهایی تولید شده در هر خط تولید در زیرسیستم kام در بازه زمانی I



شکل ۳. جریان تولید در یک خط سری.

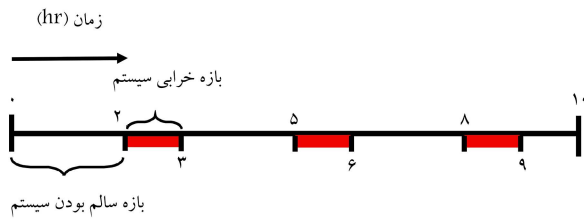
شکل ۲ یک خط تولید با K ماشین و شکل ۳ مدت زمان پردازش محصول نیمه‌ساخته در هر ماشین را نشان می‌دهد. وجود F_{uv} در هر یک از سلول‌های شکل ۳ که $u = 1, \dots, K$ و $v = 1, \dots, m$ به ترتیب شماره ماشین و شماره چرخه تولید است. نشان دهنده این است که محصول نیمه‌ساخته این خط تولید در چرخه تولید v ام در حین پردازش در ماشین F_u است. در این شکل هر سلول نماینده یک واحد زمانی است. این واحد زمانی برابر با بزرگترین واحد زمانی است که بتواند زمان تمام ماشین‌ها را به اعدادی طبیعی برگرداند. مثلاً اگر در یک خط تولید سری زمان‌های تولید سه ماشین ۱، ۲، ۳ دقیقه باشد، به دلیل اعشاری بودن زمان یکی از ماشین‌ها واحد زمان همه ماشین‌ها به واحدی تغییر می‌یابد که اعشار را حذف کند؛ در این‌جا زمان ماشین‌ها به ترتیب به ۱۸۰ ، ۶۰ و ۸۰ ثانیه تبدیل می‌شود. با توجه به آن چه گذشت، تعداد تکرار هر F_{uv} در هر ستون (به عبارت دیگر در هر چرخه) نشان دهنده زمان پردازش ماشین F_u روی محصول مورد نظر در آن چرخه تولید است. مثلاً تکرار ۴ مرتبه F_{22} در ستون دوم نشان دهنده این است که زمان پردازش ماشین F_2 روی محصول مورد نظر در چرخه دوم تولید ۴ واحد زمانی است.

فرض می‌کنیم که ماشین F_g که $g \in [1, k]$ به دلیل دارا بودن بیشینه زمان پردازش، گلوگاه این خط تولید است. برای اجتناب از تشکیل صف در پشت ماشین گلوگاهی، هر چرخه تولید جدید با تأخیری معادل زمان پردازش ماشین گلوگاهی آغاز می‌شود. این تأخیرات در آغاز هر چرخه (هرستون) با تکرار نماد ϕ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۳ مشخص است در بازه زمانی پیوسته I تعداد m چرخه کامل تولید رخ می‌دهد که به ازای هر چرخه کامل یک محصول تمام شده از خط خارج می‌شود. طبق شکل اختلاف لحظه‌ای تمام آخرین چرخه (چرخه m ام) و لحظه پایان بازه زمانی I برابر \mathcal{R} است. لزوماً باید $\mathcal{R} \in \{0, 1, 2, \dots, \Omega - 1\}$ باشد، زیرا اگر $\mathcal{R} \geq \Omega$ ، به دلیل این‌که اختلاف زمان لحظه‌ای آغاز دو چرخه متوالی Ω است چرخه‌های بیشتری تشکیل خواهد شد و دیگر چرخه m ام آخرین چرخه تولید نخواهد بود (برهان خلف).

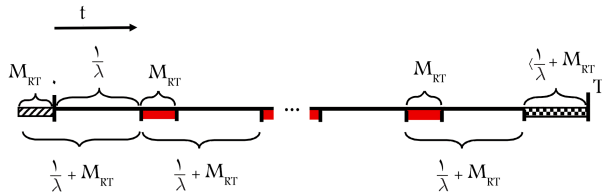
با توجه به شکل ۳ هر چرخه تولید جدید با تأخیری معادل زمان پردازش ماشین گلوگاهی آغاز می‌شود. این تأخیرات که به صورت تناوبی در شکل با Ω نشان داده شده‌اند، به جز چرخه اول، در آغاز تمام چرخه‌ها تکرار می‌شوند. برای

دستیابی به یک الگوی مشترک در همه چرخه‌ها و کشف رابطه ریاضی این الگو، به صورت فرضی این تأخیر را به ابتدای چرخه اول تولید هم می‌افزاییم (در ستون اول شکل ۳ با زمینه خاکستری مشخص است). پس از هر بازه زمانی به طول $\Omega + \delta$ یک محصول نهایی تولید می‌شود (یک چرخه تمام می‌شود). بنابراین، با دست آوردن تعداد این تناوب‌ها در بازه زمانی I تعداد محصول نهایی تولیدی در این بازه حاصل می‌شود.

توجه به این نکته ضروری است که طبق شکل، بازه‌های به طول $\Omega + \delta$ در چرخه‌های متوالی با هم هم‌پوشانی دارند. به صورت شهودی واضح است که از



شکل ۶. حالات سیستم در دوره‌ی زمانی ۱۰ ساعته.



شکل ۷. حالات سیستم در دوره‌ی برنامه‌ریزی $[O, T]$.

پس از هر خرابی M_{RT} باشد، مطلوب است تعداد بازه‌های زمانی سلامت سیستم در دوره‌ی برنامه‌ریزی مذکور.

همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد، از آن‌جا که فاصله‌ی زمانی بین دو خرابی برابر $(\frac{1}{\lambda})$ است، به‌طور متوسط پس از هر $\frac{1}{\lambda}$ یک خرابی اتفاق می‌افتد. بنابراین دوره‌ی تناوب زمانی رویداد «خرابی - سلامت» برابر با $M_{RT} + \frac{1}{\lambda}$ خواهد بود. از طرف دیگر، در لحظه‌ی O سیستم سالم است و بازه‌ی زمانی خرابی وجود ندارد. اما برای آن‌که از اولین بازه‌ی سلامت سیستم صرف‌نظر نشود و بتوان یک تناوب «خرابی - سلامت» دیگر نیز ایجاد کرد، به‌طور فرضی به ابتدای دوره‌ی برنامه‌ریزی به میزان یک بازه‌ی زمانی خرابی اضافه می‌کنیم (یعنی فرض می‌کنیم سیستم بعد از یک خرابی و تعمیر شروع به کار کرده است). در شکل ۶، این بازه‌ی فرضی به صورت هاشور زده قبل از لحظه‌ی صفر نشان داده شده است. بازه‌ی زمانی مازاد انتهای دوره‌ی برنامه‌ریزی که به صورت شطرنجی نشان داده شده است مقداری کمتر از $M_{RT} + \frac{1}{\lambda}$ دارد (که آن را با نماد Γ نشان می‌دهیم). پس نمی‌تواند تشکیل تناوب «خرابی - سلامت» بیشتری دهد. اما برای تعیین مقدار تولید در آفق برنامه‌ریزی نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. از رابطه‌ی زیر تعداد بازه‌های زمانی «خرابی - سلامت» سیستم به دست می‌آید.

$$\vartheta = \left\lfloor \frac{T + M_{RT}}{\frac{1}{\lambda} + M_{RT}} \right\rfloor$$

علامت $\lfloor \cdot \rfloor$ جزء صحیح است و کارکرد آن حذف تناوب ناقص (بازه‌ی زمانی مازاد انتهای دوره‌ی برنامه‌ریزی) است.

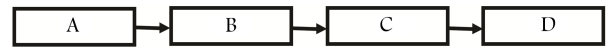
اما برای محاسبه‌ی Γ طبق شکل ۷ داریم:

$$\Gamma = T - \vartheta \left(\frac{1}{\lambda} + M_{RT} \right)$$

برای مثال دوره‌ی برنامه‌ریزی $[10, 0]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید نرخ شکست یک خط تولید برابر 0.5 و امید ریاضی زمان تعمیر پس از هر خرابی ۱ ساعت باشد، طبق شکل ۷ به‌طور متوسط پس از هر ۲ ساعت یک خرابی اتفاق می‌افتد. در این صورت ϑ و Γ در این دوره‌ی برنامه‌ریزی برابر است با:

$$\vartheta = \left\lfloor \frac{10 + 1}{2 + 1} \right\rfloor = 3$$

$$\Gamma = 10 - 3(2 + 1) = 1$$



شکل ۴. سیستم سری با ۴ ماشین.

شماره سیکل تولید (min)	۱	۲	۳	۴	۵
۱	A _۱				
۲	A _۱				
۳	B _۱				
۴	C _۱	A _۲			
۵	C _۱	A _۲			
۶	C _۱	B _۲			
۷	D _۱	C _۲	A _۳		
۸		C _۲	A _۳		
۹		C _۲	B _۳		
۱۰		D _۲	C _۳	A _۴	
۱۱			C _۳	A _۴	
۱۲			C _۳	B _۴	
۱۳			D _۳	C _۴	A _۵
۱۴				C _۴	A _۵
۱۵				C _۴	B _۵
۱۶				D _۴	C _۵
۱۷					C _۵
۱۸					C _۵
۱۹					D _۵
۲۰					
۲۱					

شکل ۵. جریان تولید در خط سری.

جدول ۲. زمان پردازش هر کدام از ماشین‌ها.

ماشین‌ها	زمان پردازش روی محصول نیمه‌ساخته
A	۲ دقیقه
B	۱ دقیقه
C	۳ دقیقه
D	۱ دقیقه
جمع (چرخه‌ی تولید)	۷ دقیقه

حاصل تقسیم $\Omega - \delta + I$ بر Ω عددی حقیقی به دست می‌آید که بخش صحیح آن نشان دهنده‌ی تعداد تولید (چرخه) است. بخش اعشاری این تقسیم ناشی از R است که نشان دهنده‌ی چرخه‌ی ناتمام (عدم تولید محصول تمام شده) است. بنابراین تعداد محصول نهایی تولیدی در بازه‌ی I از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. علامت $\lfloor \cdot \rfloor$ نشان دهنده‌ی جزء صحیح است.

$$m = \left\lfloor \frac{I - \delta + \Omega}{\Omega} \right\rfloor$$

برای مثال شکل ۴ را به عنوان یک سیستم سری با چهار ماشین در نظر بگیرید. اطلاعات مربوط به زمان پردازش هر ماشین روی محصول نیمه‌ساخته در جدول ۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۵ و آنچه در پیوست ۱ بیان شد تعداد محصول نهایی تولیدی در طول ۲۱ دقیقه برابر ۵ محصول خواهد بود.

$$m = \left\lfloor \frac{21 - 7 + 3}{3} \right\rfloor = 5$$

پیوست ۲: نحوه‌ی محاسبه‌ی تعداد بازه‌های زمانی در دوره‌ی برنامه‌ریزی $[O, T]$ که سیستم سالم است.

دوره‌ی برنامه‌ریزی $[O, T]$ را در نظر بگیرید. در صورتی که نرخ شکست یک خط تولید (مجموع نرخ شکست‌های اجزای یک خط) برابر λ و امید ریاضی زمان تعمیر

پیوست ۳: پارامترها (جدول ۳) و داده‌های مربوط به مثال‌های عددی (جدول‌های ۴ و ۵)

جدول ۳. پارامترهای مربوط به مثال‌های عددی.

دوره‌ی برنامه‌ریزی	هزینه‌ی نگهداری	هزینه‌ی کمبود	سطح خطای توزیع تقاضا	زمان تعمیر پس از وقوع خرابی
(T)	واحد محصول	هر واحد	٪۱	۲ ساعت
۳۰۰۰ ساعت	۱۰۰۰	۵۰۰		

جدول ۴. داده‌های مربوط به مثال‌های عددی اول و دوم.

کل بودجه	کل مساحت	تقاضای تصادفی خط $N(\mu, \sigma)/U(l, u)$	فضای تقاضای مورد نیاز نوع توزیع تقاضا	هزینه فضای راه اندازی	نوع خرابی		زمان پردازش (دقیقه)		مثال خط تولید ماشین		
					حد چپ	حد راست	خط هر خط	خط			
۵۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰	$N(150000, 2000)$	نرمال	۶۰	۶۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۱۰۵	۰,۰۰۰۰۱	۳	۱	۱	
						۰,۰۰۰۰۱۳۱	۰,۰۰۰۰۱۲۵	۴	۲		
						۰,۰۰۰۰۱۱	۰,۰۰۰۰۱۰۹	۲	۳		
		$U(100000, 130000)$	یکنواخت	۷۵	۵۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۲	۰,۰۰۰۰۱۹	۲	۱	۲	
						۰,۰۰۰۰۰۳۳	۰,۰۰۰۰۰۳۱	۵	۲		
۱۵۵۰۰۰۰۰۰	۱۶۹۰	$N(145000, 2200)$	نرمال	۶۰	۶۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۲۳۱۱۵	۰,۰۰۰۰۱۰۷۱۴۲	۲	۱	۱	
						۰,۰۰۰۰۲۵۱۵۵	۰,۰۰۰۰۲۴۸۶۲۶	۴	۲		
						۰,۰۰۰۰۲۸۶۸	۰,۰۰۰۰۲۶۹۸۲۶	۵	۱		
						۰,۰۰۰۰۲۳۱۱	۰,۰۰۰۰۱۷۸۴۴۵	۳	۲		۲
						۰,۰۰۰۰۱۵۵۳۸	۰,۰۰۰۰۱۰۹۲۳۴	۲	۳		
						۰,۰۰۰۰۲۹۰۰۴	۰,۰۰۰۰۱۶۳۴۲	۴	۴		
		۰,۰۰۰۰۲۳۵۷۵	۰,۰۰۰۰۱۸۷۷۴۹	۳	۱	۲					
		۰,۰۰۰۰۱۹۷۹۵	۰,۰۰۰۰۱۳۴۲۳۷	۴	۲						
		۰,۰۰۰۰۱۵۵۲۱	۰,۰۰۰۰۱۱۹۴۲۶	۲	۳						
		۰,۰۰۰۰۲۵۳۱	۰,۰۰۰۰۱۷۶۳۱۲	۴	۱		۴				
		۰,۰۰۰۰۲۲۹۲۶	۰,۰۰۰۰۱۸۹۱۱۷	۴	۲						
		۰,۰۰۰۰۲۵۹۰۴	۰,۰۰۰۰۱۳۷۳۷۵	۳	۱			۵			
۰,۰۰۰۰۲۵۰۹۴	۰,۰۰۰۰۲۴۱۸۷۳	۵	۲								

جدول ۵. داده‌های مربوط به مثال‌های عددی سوم.

مثال	خط تولید	ماشین	زمان پردازش (دقیقه)	نوع خرابی		هزینه راه اندازی	فضای مورد نیاز هر خط	تقاضای تصادفی خط		کل مساحت	کل بودجه
				حد چپ	حد راست			$N(\mu, \sigma)/U(l, u)$	نوع توزیع تقاضا		
	۱	۱	۴	۰٫۰۰۰۰۲۳	۰٫۰۰۰۰۱۰۷	۴۵۰۰۰۰۰	۵۵	نرمال	$N(145000, 2200)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۲۵	۰٫۰۰۰۰۲۴۸						
	۲	۲	۳	۰٫۰۰۰۰۲۸	۰٫۰۰۰۰۲۶۹	۸۰۰۰۰۰۰	۹۵	نرمال	$N(155000, 1950)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۴	۰٫۰۰۰۰۲۳	۰٫۰۰۰۰۱۷۸						
	۳	۳	۲	۰٫۰۰۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۰۱۰۹	۸۰۰۰۰۰۰	۷۵	نرمال	$N(149000, 1850)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۵	۰٫۰۰۰۰۲۳	۰٫۰۰۰۰۱۸۷						
	۴	۴	۳	۰٫۰۰۰۰۱۹	۰٫۰۰۰۰۱۳۴	۹۰۰۰۰۰۰	۶۰	نرمال	$N(151000, 2150)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۲	۰٫۰۰۰۰۱۵	۰٫۰۰۰۰۱۱۹						
	۵	۵	۴	۰٫۰۰۰۰۱۹	۰٫۰۰۰۰۱۰۶	۷۰۰۰۰۰۰	۶۰	نرمال	$N(147000, 2000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۲۵	۰٫۰۰۰۰۱۳۷						
	۶	۶	۵	۰٫۰۰۰۰۲۵	۰٫۰۰۰۰۲۴۱	۶۰۰۰۰۰۰	۶۵	یکنواخت	$U(100000, 130000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۲	۰٫۰۰۰۰۲۲	۰٫۰۰۰۰۲۱۰						
	۷	۷	۴	۰٫۰۰۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۰۱۱۵	۸۰۰۰۰۰۰	۹۵	یکنواخت	$U(95000, 124000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۱۸	۰٫۰۰۰۰۱۰۹						
	۸	۸	۲	۰٫۰۰۰۰۱۹	۰٫۰۰۰۰۱۶۷	۸۰۰۰۰۰۰	۷۵	یکنواخت	$U(110000, 142000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۵	۰٫۰۰۰۰۲۰	۰٫۰۰۰۰۱۷۰						
	۹	۹	۲	۰٫۰۰۰۰۱۳	۰٫۰۰۰۰۱۲۴	۹۰۰۰۰۰۰	۶۶	یکنواخت	$U(98000, 125000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۲۵	۰٫۰۰۰۰۱۸۰						
	۱۰	۱۰	۳	۰٫۰۰۰۰۱۷	۰٫۰۰۰۰۱۴۸	۶۰۰۰۰۰۰	۶۵	یکنواخت	$U(109000, 146000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۲۹	۰٫۰۰۰۰۲۸۸						
			۲	۰٫۰۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۰۱۰۰	۶۰۰۰۰۰۰	۶۵	یکنواخت	$U(109000, 146000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۰۱۰۰						
			۲	۰٫۰۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۰۱۰۳	۶۰۰۰۰۰۰	۶۵	یکنواخت	$U(109000, 146000)$	۲۸۰۰	۲۹۰۰۰۰۰۰۰
			۳	۰٫۰۰۰۰۱۱	۰٫۰۰۰۰۱۰۳						