

مقاله "علمی-پژوهشی"

بررسی شکست نمونه‌های سنگی دارای شیار U شکل با استفاده از معیار تنش محیطی اصلاح شده (MTS-FEM) تحت مود یک

جوادا کبر دوست^{۱*}، میلاد سنگ سفیدی^۲، علیرضا ترابی^۳

دانشیار دانشگاه خوارزمی، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مکانیک، akbar doost@khu.ac.ir
کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران، milad.sangsefidi.71@gmail.com
دانشیار، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، a_torabi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۶ - تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۵)

چکیده

در این مقاله به بررسی شکست نمونه‌های سنگی دارای شیار U شکل تحت بارگذاری مود یک خالص با استفاده از یک معیار جدید پرداخته می‌شود. معیار پیشنهادی بر پایه معیار بیشینه تنش محیطی (MTS) استوار می‌باشد. بر اساس معیار MTS، شروع شکست هنگامی اتفاق می‌افتد که میزان بیشینه تنش محیطی در شعاع بحرانی از نوک شیار به مقدار بحرانی خود برسد. با توجه به بزرگ بودن شعاع بحرانی در نمونه‌های سنگی، معیار بیشینه تنش محیطی کلاسیک که فقط جملات اول یا تکین از بسط سری تنش را مورد توجه قرار می‌دهد، نمی‌تواند توصیف صحیح و دقیقی از شروع شکست ارائه نماید. بنابراین، از تحلیل اجزای محدود برای محاسبه‌ی دقیق‌تر تنش در روش پیشنهادی استفاده شده است. به منظور ارزیابی روش پیشنهادی که روش MTS-FEM نامیده می‌شود، از داده‌های آزمایشگاهی ارائه شده در تحلیل نمونه‌های خمش چهار نقطه-ای با شیار U شکل لبه‌ای، تحت بارگذاری مود I خالص که در مقالات علمی گزارش شده است، استفاده می‌گردد. نتایج حاصل از ارزیابی‌ها نشان می‌دهد که معیار MTS-FEM نه تنها نسبت به معیار MTS از دقت بهتری برخوردار است، بلکه می‌تواند نتایج آزمایشگاهی را با دقت خوبی (زیر ۱۳٪) پیش‌بینی نماید.

کلمات کلیدی

قطعات سنگی شیاردار، تنش مرزی اصلاح شده، قطعه خمش چهار نقطه، مود یک خالص، روش اجزا محدود

۱- مقدمه

مواد سنگی عموماً دارای حفره ها، ترک ها و شیارهای طبیعی می باشند. به علاوه در بسیاری از کاربردهای صنعتی مانند ایجاد سدها، طراحی تونلها و حفاری معادن ممکن است شیارهای مختلفی در توده های بزرگ سنگی به صورت مصنوعی ایجاد گردد. وجود این شیارها به عنوان تمرکز تنش، باعث افت شدید بارپذیری توده های سنگی می شود. بنابراین، بررسی قطعات سنگی شیاردار یکی از موضوعات مهم مهندسی عمران و معدن می باشد. شیارها ممکن است با شکل های مختلفی در قطعات و توده های سنگی به وجود آیند. یکی از شکل های شیار که به طور متداول در قطعات سنگی ایجاد می گردد، شیار U شکل می باشد. به عنوان مثال، می توان تونل را به عنوان یک شیار U شکل در نظر گرفت. به منظور بررسی شکست قطعات سنگی شیاردار می توان از مبانی علم مکانیک شکست که یکی از شاخه های علم مکانیک می باشد، استفاده نمود [۴-۱] در علم مکانیک شکست، از معیارهای مختلفی از جمله مدل ناحیه چسبناک^۱ [۵،۶]، کمینه چگالی انرژی کرنشی^۲ [۷-۱۰]، انتگرال J^۳ تعمیم یافته [۱۱-۱۳]، مکانیک شکست محدود [۱۴،۱۵]، بیشینه تنش محیطی^۴ (MTS) و بیشینه تنش متوسط^۴ (MS) [۱۶-۱۹] برای تعیین شروع شکست در قطعات شیاردار استفاده می شود. در بین این معیارها، معیارهای MTS و SED از جمله معیارهایی می باشند که به صورت گسترده برای تخمین مقاومت نمونه های شیاردار (U شکل و غیر U شکل) مورد استفاده قرار گرفته اند. در ادامه به بررسی برخی از تحقیقات که از این معیارها برای بررسی رفتار نمونه های شیاردار استفاده کرده اند، پرداخته می شود. گومز و همکاران [۲۰]، هفت معیار برای بررسی شروع شکست در نمونه هایی با شیار U شکل را مورد بررسی قرار دادند که دو معیار مذکور از جمله آن معیارها می باشد. یک روش بر اساس تئوری گریفیث^۵ توسط لگوویلن و یوسیباش [۲۱] برای تخمین رفتار شکست نمونه هایی با شیار V شکل با نوک گرد (RV^۶) ارائه شده است. لازارین و همکارانش [۲۲] به بررسی رفتار شکست نمونه هایی با شیار U و RV شکل با استفاده از روش چگالی انرژی کرنشی پرداخته اند. در مطالعه دیگر، مقایسه ای میان معیارهای کرنشی و تنشی برای بررسی شکست تحت بارگذاری مود I برای نمونه های دارای شیار V شکل توسط لازارین و همکارانش [۲۳] صورت گرفته است. در روشی

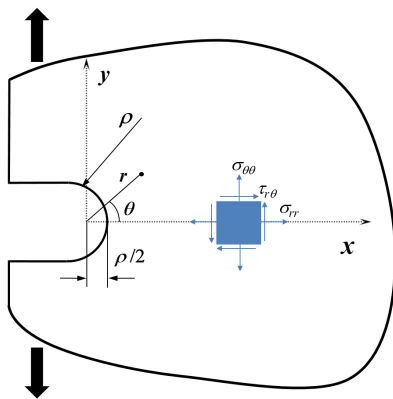
مشابه، ترابی و همکارانش [۲۴،۲۵] به بررسی رفتار شکست نمونه های دیسکی شکل با شیار VO^۷ و کلیدی^۸ پرداخته اند. بر اساس معیار ناحیه چسبناک، گومز و همکاران [۲۶] به بررسی مقاومت شکست نمونه ها با شیار V شکل در اندازه های مختلف پرداخته اند. آیت الهی و ترابی [۲۷] از معیار MTS برای بررسی رفتار شکست نمونه ها با شیار RV استفاده کرده اند. برتو و آیت الهی [۲۸] با استفاده از معیار چگالی انرژی کرنشی به بررسی مقاومت شکست نمونه های PMMA دارای شیار V شکل که تحت بارگذاری مرکب می باشند، پرداخته اند. همچنین آیت الهی و همکارانش [۲۹] با استفاده از معیار SED به بررسی رفتار شکست نمونه دیسکی دارای شیار مرکزی V شکل (ساخته شده از گرافیت) پرداخته اند. در پژوهشی مشابه، برتو و همکارانش [۳۰] از معیار SED برای نمونه ها با شیار U شکل استفاده نمودند. ترابی و همکارانش [۳۱] از معیارهای MTS و MS برای بررسی رفتار شکست نمونه دارای شیار V شکل استفاده کرده اند. آیت الهی و همکارانش [۳۲] با استفاده از معیار MTS، رفتار شکست نمونه های دیسکی با شیار مرکزی RV شکل ساخته شده از PMMA را تحت بارگذاری مرکب مورد بررسی قرار دادند. همچنین صبوری و همکارانش [۳۳] با استفاده از معیارهای MTS و MS به بررسی رفتار نمونه دارای شیار U شکل ساخته شده از PMMA تحت بارگذاری مرکب I/II/III پرداخته اند. ترابی و همکارانش [۳۴] نمونه دیسکی با انواع شیارهای کلیدی شکل را تحت بارگذاری مرکب مورد بررسی قرار دادند و برای پیش بینی مقدار بار شکست از معیارهای MTS و MS استفاده کردند. بیشتر تحقیقات صورت گرفته در مراجع علمی، بر روی قطعات شیاردار از جنس مواد ترد غیر از سنگ متمرکز شده است و تحقیقات زیادی بر روی قطعات سنگی شیاردار وجود ندارد. در موضوع قطعات سنگی شیاردار، تنها می توان به دو مورد فعالیت تحقیقاتی که توسط جاستو و همکارانش [۳،۴] انجام شده است، اشاره نمود. جاستو و همکارانش [۴] به بررسی شکست انواع مختلف سنگها دارای شیار U شکل (تحت مود یک بارگذاری) با استفاده از آزمایش خمش چهار نقطه ای پرداخته اند. سپس با استفاده از روش فاصله بحرانی^۹ به مقایسه نتایج با داده های آزمایشگاهی پرداخته اند. در پژوهشی دیگر، جاستو و همکارانش [۳] شرایط شکست نمونه های شیاردار U شکل را با استفاده از روش کمترین چگالی انرژی کرنشی (SED) پیش بینی کردند. بنابراین، هدف در این مقاله بررسی شکست قطعات سنگی

بحرانی از نوک شیار به حد بحرانی $\sigma_{\theta\theta c}$ برسد. بنابراین، از این معیار در بررسی رفتار شکست نمونه های شیاردار که از مواد شبه ترد مختلفی از جمله گرافیت، شیشه و PMMA ساخته شده اند، به دفعات استفاده شده است [۱۵، ۱۷، ۳۵]. [۳۶] برای استفاده از معیار MTS، در ابتدا باید مؤلفه‌ی تنش محیطی در اطراف شیار را به دست آورد. همانطور که اشاره شد، تمرکز پژوهش پیشرو بر روی شیار U شکل می‌باشد، از روابط موجود برای این نوع شیار در تعیین مولفه های تنش مماسی استفاده می‌گردد. شیار U شکل نوع خاصی از شیار RV است که در آن زاویه شیار صفر می‌شود و یا به عبارت دیگر دو لبه شیار با یکدیگر موازی می‌شوند. بنابراین می‌توان حوزه تنش نوک شیار U شکل را با استفاده از روابط ارائه شده توسط فیلیپی [۳۷] برای شیار RV، با قرار دادن زاویه شیار برابر صفر، مطابق رابطه (۱) به دست آورد.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ K_I^{U,\rho} \left[\left(\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II}^{U,\rho} \left[\left(\frac{r}{\rho} - \frac{\rho}{r} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} \quad (1)$$

در این معادله $K_I^{U,\rho}$ و $K_{II}^{U,\rho}$ به ترتیب ضرایب شدت تنش شیار (NSIF) برای مود I و مود II می‌باشد، θ و r مختصات قطبی نوک شیار می‌باشند (مطابق شکل ۱) و ρ شعاع شیار می‌باشد. در حالت بارگذاری مود I خالص که لبه‌های شیار بدون هیچگونه لغزشی از هم باز می‌شوند، مقدار $K_{II}^{U,\rho}$ برابر با صفر است. بنابراین، رابطه (۱) را می‌توان برای شرایط بارگذاری مود I خالص به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{r}} K_I^{U,\rho} \left[\left(\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2)$$



شکل ۱- مختصات قطبی نوک شیار.

به دلیل تقارن، بیشینه تنش محیطی برای حالت مود I خالص در راستای نیمساز شیار به وجود می‌آید. بنابراین، زاویه

شیاردار می‌باشد. در این راستا، سعی می‌شود تا یک معیار مناسب برای تخمین شرایط شکست قطعات شیاردار سنگی پیشنهاد شود. معیار جدید، اصلاح شده‌ی معیار MTS می‌باشد که در آن تنش محیطی در اطراف شیار با استفاده از روش اجزای محدود محاسبه می‌شود. از آنجا که شیار U شکل کاربرد بیشتری در صنایع مختلف دارد، تحقیق حاضر به بررسی شکست قطعات شیاردار U شکل، می‌پردازد. در انتها، نتایج آزمایشگاهی گزارش شده توسط جاستو و همکارانش [۴]، با استفاده از معیار جدید تخمین زده می‌شود.

۲- تئوری شکست

مشابه با دیگر مواد شبه ترد، سنگ‌ها نیز به بارگذاری‌های کششی حساس هستند و از این رو، معمولاً در راستای بیشینه تنش کششی اصلی شکسته می‌شوند. تنش در اطراف ترک و شیار بسیار زیاد است و از حد استحکامی ماده بیشتر می‌باشد. بنابراین، یک ناحیه آسیب در اطراف شیار و یا ترک ایجاد می‌شود که در مواد شبه ترد همانند سنگ به آن ناحیه فرآوری شکست^{۱۰} (FPZ) گفته می‌شود. در واقعیت، باید ناحیه FPZ را بعنوان یک ناحیه آسیب دیده، مدل نمود و برای آن یک مدل مادی جداگانه تعریف کرد. از طرف دیگر، اندازه‌ی معیارهای مکانیک شکست غیرخطی برای تحلیل دقیق تر شکست قطعات سنگی ترک‌دار و شیاردار استفاده نمود. اما، به دلیل پیچیدگی‌های معیارهای مکانیک شکست غیرخطی، روشهایی (همانند طول ترک مؤثر) که به کمک آن‌ها می‌توان معیارهای الاستیک خطی را برای شرایط غیرخطی استفاده نمود. در کنار این روش‌ها، برخی از معیارها همانند تئوری فاصله بحرانی وجود دارد که پارامتر کلیدی‌شان (تنش، کرنش، انرژی کرنشی و غیره) در خارج از ناحیه آسیب و در شرایط الاستیک خطی محاسبه می‌گردند. بر اساس تئوری فاصله بحرانی، پارامتر کلیدی معیار در فاصله‌ی بحرانی از نوک ترک و یا شیار که به نوعی به اندازه‌ی ناحیه آسیب وابستگی دارد، محاسبه می‌شود. بنابراین، در ناحیه‌ی آسیب که شرایط غیرخطی حاکم است، پارامتری محاسبه نمی‌شود.

معیار بیشینه تنش محیطی (MTS) که بر پایه تئوری فاصله بحرانی می‌باشد، یکی از معیارهایی است که توانایی توصیف رفتار شکست مواد شبه ترد را دارد. این معیار بیان می‌دارد که اولاً شکست ترد در نمونه های شیاردار در راستای بیشینه تنش محیطی رخ می‌دهد. ثانیاً، شکست هنگامی اتفاق می‌افتد که مقدار بیشینه تنش محیطی $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$ در فاصله

می توان رابطه‌ی زیر را برای نمونه‌های خمش چهارنقطه که در ادامه مورد توجه قرار خواهد گرفت، نوشت [۴]:

$$\left(\frac{r}{r_c}\right)^{3/2} \left(1.98887 - \left[\frac{(3.49 - 0.68 \frac{a}{w} - 1.35 (\frac{a}{w})^2) \frac{a}{w} (1 - \frac{a}{w})}{(1 + \frac{a}{w})^2} \right] - 1.32 \frac{a}{w} \right) \quad (7)$$

در مواد سنگی، شعاع ناحیه آسیب r_c^* نسبتاً بزرگ می‌باشد. بنابراین، جملات اول بسط سری تنش که تکین هستند، در فاصله بحرانی نمی‌توانند توصیف دقیقی از حوزه تنش داشته باشند. از اینرو، معیارهای کلاسیک که تنها جملات تکین از بسط سری تنش را در نظر می‌گیرند، قادر به تخمین مناسب از شرایط شکست مواد سنگی نیستند. مطالعات اخیر نشان داده اند که با در نظر گرفتن توصیف دقیق‌تری از تنش در اطراف ترک و یا شیار می‌توان پیش‌بینی معیارهای کلاسیک را بهبود بخشید [۴۶-۴۴]. برای نمونه های ترک‌دار، با استفاده از جملات بالاتر از بسط سری ویلیامز [۴۷] می‌توان به توصیف دقیق‌تری از تنش در اطراف ترک رسید [۴۸]. بنابراین، در روش پیشنهادی این مقاله، مؤلفه‌ی تنش محیطی مستقیماً از تحلیل اجزای محدود اندازه‌گیری می‌شود. به عبارت دیگر، در این روش نمونه در نرم افزار المان محدود مدل می‌شود، سپس، میزان بیشینه تنش محیطی در فاصله بحرانی از نوک شیار تعیین می‌شود. از آنجا که تحلیل‌های اجرا محدود در شرایط الاستیک خطی صورت می‌گیرد، مقدار تنش با اندازه‌ی بار وارده رابطه مستقیم دارد و با افزایش بار، مقدار تنش به صورت خطی افزایش می‌یابد. در نتیجه، با استخراج بیشینه تنش محیطی در فاصله بحرانی $\sigma_{\theta\theta}(r_c, \cdot)|_{FEM}$ مقدار بار وارده در تحلیل P_{FEM} و استحکام کششی ماده f_t می‌توان مقدار بار شکست را از معادله زیر محاسبه نمود:

$$P_F = f_t \frac{P_{FEM}}{\sigma_{\theta\theta}(r_c, \cdot)|_{FEM}} \quad (8)$$

به دلیل آنکه روش پیشنهادی یک فرم اصلاح شده از معیار MTS می‌باشد و در آن از روش اجزا محدود استفاده می‌شود، به طور خلاصه به این روش معیار MTS-FEM گفته می‌شود.

شروع شکست برابر با صفر می‌باشد. با قرار دادن $\theta = 0$ در رابطه ۲ می‌توان بیشینه تنش محیطی در فاصله بحرانی r_c را از رابطه ۳ به دست آورد:

$$\sigma_{\theta\theta}(r_c, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_c}} K_{Ic}^{U,P} \left[\left(\gamma + \frac{\rho}{r} \right) \right] \quad (3)$$

که در این رابطه $K_{Ic}^{U,P}$ ضریب شدت تنش بحرانی شیار می‌باشد. فرض دوم در معیار MTS این است که مقدار بیشینه تنش محیطی در فاصله بحرانی به حد بحرانی $\sigma_{\theta\theta c}$ برسد. برای مواد ترد همانند سنگ مقدار بحرانی $\sigma_{\theta\theta c}$ را می‌توان استحکام کششی آن در نظر گرفت [۳۸]. با در نظر گرفتن این نکته، معیار MTS مطابق رابطه (۴) برای قطعات شیاردار U شکل قابل بازنویسی است:

$$f_t = \frac{K_{Ic}^{U,P}}{\sqrt{2\pi r_c}} \left[\left(\gamma + \frac{\rho}{r} \right) \right] \quad (4)$$

برای استفاده از معیار MTS باید مقدار فاصله بحرانی را محاسبه نمود. فاصله بحرانی r_c به صورت مجموع فاصله مبدا مختصات تا مرز شیار ($\rho/2$) و شعاع ناحیه آسیب نوک شیار (r_c^*) نوشته می‌شود (به شکل ۲ توجه شود):

$$r_c = r_c^* + \rho/2 \quad (5)$$

تاکنون روابط متعددی جهت محاسبه شعاع ناحیه‌ی آسیب برای مواد سنگی ارائه شده است [۳۹-۴۲]. در روش پیشنهادی از رابطه‌ی آیت الهی و اکبر دوست [۳۸] که یک معادله اصلاح شده از رابطه اشمیت [۴۳] است، برای تعیین شعاع ناحیه آسیب استفاده می‌شود:

$$r_c^* = \frac{f_t \sqrt{2\pi} \pm \sqrt{2\pi f_t^2 - 12 \frac{A_T^*}{A_1^*} \frac{K_{Ic}^T}{w}}}{\sqrt{12 \frac{A_T^*}{A_1^*} \frac{K_{Ic}^T}{w}}} \quad (6)$$

در این رابطه، w بُعد مشخصه نمونه (مانند عرض قطعه در نمونه‌ی تیر با ترک لبه‌ای تحت خمش سه نقطه) است، A_1^* و A_T^* فرم بدون بُعد ضرایب جملات اول و سوم تنش اطراف ترک می‌باشند که عموماً از روش‌های عددی محاسبه می‌گردند. همچنین، پارامترهای K_{Ic} و f_t به ترتیب چقرمگی شکست و استحکام کششی سنگ می‌باشند. حال با قرار دادن اندازه r_c^* در رابطه‌ی ۵ می‌توان اندازه فاصله بحرانی را محاسبه نمود. سپس با جاگذاری فاصله بحرانی در رابطه ۴ می‌توان مقدار ضریب شدت تنش شیار بحرانی $K_{Ic}^{U,P}$ را به کمک معیار MTS تخمین زد. لازم به ذکر است که بین مقدار $K_{Ic}^{U,P}$ و بار شکست

چقرمگی شکست ذکر شده در جدول ۱ همان نتایج مربوط به قطعه با شیار $\rho = 0.15 \text{ mm}$ می‌باشد و مقادیر استحکام کششی برای هر نوع سنگ از آزمایش کشش غیر مستقیم محاسبه گردیده است [۴]. ابعاد نمونه‌های آزمایش شده، متناسب با شعاع شیار و جنس سنگ در دو اندازه مختلف انتخاب شده‌اند. جدول ۲ ابعاد نمونه‌ها و شرایط بارگذاری را برای هر نوع سنگ بیان می‌کند. همچنین، بار شکست نمونه‌های آزمایش شده در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی سنگ‌های آزمایش شده توسط

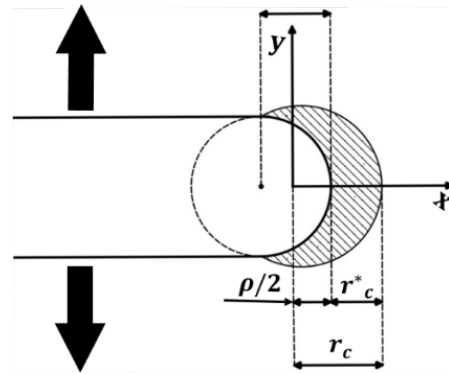
جاستو و همکارانش [۴].

Rock type	Tensile strength f_t (MPa)	Fracture Toughness K_{IC} (MPa \sqrt{m})
Macael marble (M)	8.15	1.14
Italian marble (I)	8.69	0.74
Floresta sandstone (F)	3.38	0.37
Moleano limestone (C)	7.08	0.73
Oolitic limestone (O)	7.8	0.72
Granite (G)	9	1.24

با جاگذاری ابعاد نمونه‌های آزمایش شده و بار شکست هر کدام در رابطه ۷ می‌توان مقادیر $K_{IC}^{U,\rho}$ برای نمونه‌های آزمایش شده را مطابق با جدول ۲ محاسبه کرد. در بخش بعد، سعی خواهد شد تا بار شکست گزارش شده توسط جاستو و همکارانش [۴]، با استفاده از معیار MTS-FEM تخمین زده شود.

۴- بحث روی نتایج

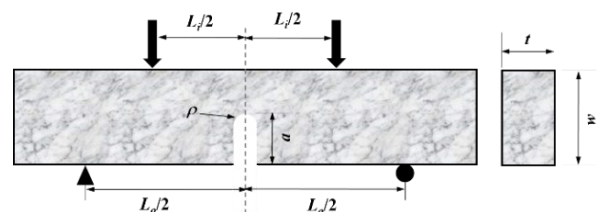
برای استفاده از معیار MTS-FEM برای تخمین بار شکست قطعات آزمایش شده، در ابتدا باید نمونه‌های آزمایش شده را در یکی نرم‌افزارهای اجزای محدود مدل و تحلیل کرد. برای این منظور، هندسه‌ی قطعات آزمایش شده در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی و سپس شبکه‌بندی شد. برای اینکه بتوان تغییرات شدید تنش در نوک شیار نسبت به فاصله از مرز شیار را در نظر گرفت، اطراف شیار با المان‌های ریزتری شبکه‌بندی شده است. همچنین، برای استحصال نتایج دقیق‌تر، از المان‌های درجه دو^{۱۱} استفاده شده است. شکل ۴ هندسه شبکه‌بندی شده در نرم‌افزار آباکوس به همراه شرایط مرزی و بارگذاری را نشان می‌دهد. برای تحلیل اجزای محدود، مقدار بار وارده، برابر با ۱۰۰۰۰ نیوتن در نظر گرفته شده است.



شکل ۲- شماتیکی از معیار MTS برای شیار U شکل تحت بار مود I خالص.

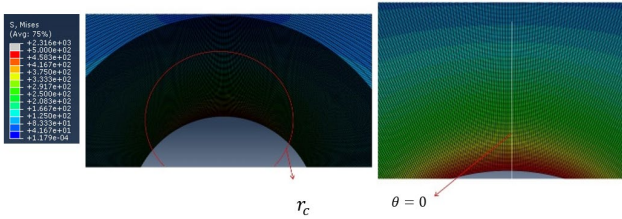
۳- بررسی آزمایشگاهی

به منظور ارزیابی روش MTS-FEM، از نتایج آزمایشگاهی جاستو و همکارانش [۴] استفاده می‌شود. جاستو و همکارانش [۴] برای بررسی آزمایشگاهی شیار U شکل در مواد سنگی، از نمونه‌ی تیر با ترک لبه‌ای تحت بار خمشی چهارنقطه (SENB) که شماتیک آن در شکل (۳) نشان داده شده است، استفاده کرده‌اند. نمونه SENB یک تیر با عرض w و ضخامت t می‌باشد که در وسط آن یک شیار به طول a و شعاع ρ قرار دارد و ممکن است تحت بار خمشی سه‌نقطه‌ای و یا چهارنقطه‌ای قرار گیرد. چنانچه شعاع شیار ρ در این قطعه بسیار کوچک باشد، می‌توان شیار را به عنوان ترک در نظر گرفت و از این قطعه برای محاسبه چقرمگی شکست مواد ترد و شبه ترد استفاده کرد [۴۹،۵۰].



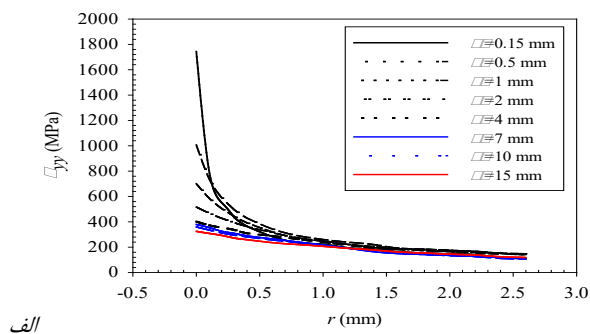
شکل ۳- شماتیکی از قطعه SENB تحت بار خمشی چهار نقطه.

در پژوهش جاستو و همکارانش [۴]، شش نوع سنگ moleano limestone، oolitic limestone (O)، granite (G) (C)، Floresta sandstone (F)، Italian marble (I) و macael marble (M) که خواص مکانیکی هر کدام در جدول ۱ ارائه شده است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین، شعاع شیار بین $\rho = 0.15 \text{ mm}$ تا $\rho = 15 \text{ mm}$ متغییر می‌باشد تا بررسی جامعی صورت گیرد. لازم به ذکر است که مقادیر

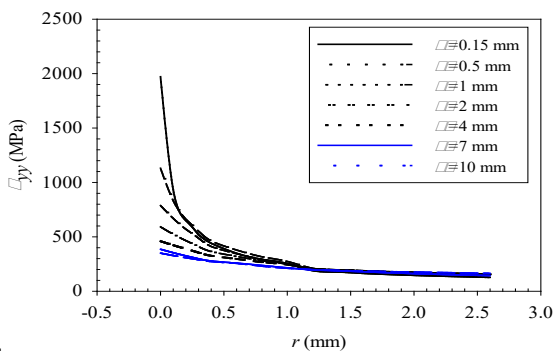


شکل ۵- نمونه‌ای از کانتور تنش σ_{yy} برای قطعه SENB.

در رابطه ۶ پارامترهای بی‌بعد A_1^* و A_2^* برای نمونه‌های SENB ترک‌دار (شیار نازک) با استفاده از روش اجزا محدود فرامعین محاسبه شده‌اند (برای جزئیات بیشتر روش اجزا محدود فرامعین به مرجع [۵۱] رجوع شود). با جاگذاری ابعاد نمونه‌ها، مقادیر چقرمگی شکست، استحکام کششی و پارامترهای بی‌بعد A_1^* و A_2^* در رابطه ۶ مقدار شعاع بحرانی برای هر نوع سنگ محاسبه شده و در جدول ۳ آورده شده است.



الف

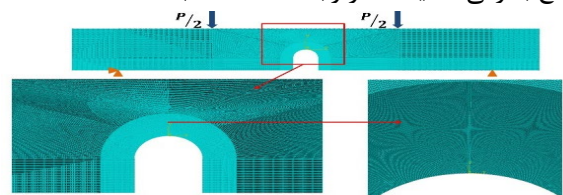


ب

شکل ۶- نمودار تغییرات تنش σ_{yy} بر حسب فاصله از نوک شیار برای الف) نمونه‌های O, G, I, F, M, ب) نمونه‌های O, G.

پس از حل مسأله در نرم‌افزار آباکوس، می‌توان تنش محیطی اطراف شیار را اندازه‌گیری نمود. لازم به ذکر است که امکان دارد، دستگاه مختصاتی که تحلیل‌ها در آن انجام شده است با دستگاه مختصات محلی مربوط به شیار که در شکل ۱ نشان داده شده است، متفاوت باشد. در اینصورت، باید از قوانین تغییر دستگاه مختصات در تانسورهای مرتبه دوم استفاده نمود. همانطور که اشاره شد، راستای بیشینه تنش محیطی در حالت مود I خاص، همان راستای نیمساز شیار می‌باشد. بنابراین، تنش محیطی در راستای بیشینه مقدار خود، با تنش σ_{yy} برابر است. حال، با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در تحلیل‌ها، باید کانتور S_{11} از نرم‌افزار را مورد توجه قرار داد. در اینجا ذکر این نکته الزامیست که تحلیل‌ها در شرایط الاستیک خطی انجام شده است. در نتیجه، مقدار تنش مستقل از جنس قطعه می‌باشد و فقط به ابعاد قطعه و بار وارده بستگی دارد. بنابراین، با انجام یک تحلیل متناسب با ابعاد نمونه‌ی آزمایش شده، می‌توان تنش سایر نمونه‌ها را اندازه‌گیری نمود. این نکته، یکی از مزایای معیار MTS-FEM می‌باشد. شکل ۵ نمونه‌ای از کانتور تنش σ_{yy} را نشان می‌دهد. همچنین، نمودار تغییرات تنش σ_{yy} بر حسب فاصله از لبه‌ی شیار برای دو اندازه‌ی آزمایش شده در شکل ۶ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، به دلیل، تحلیل الاستیک خطی، تنش در نزدیکی شیار بسیار زیاد بوده و از حد استحکامی ماده بیشتر می‌شود. بنابراین، یک ناحیه‌ی آسیب در نوک شیار ایجاد می‌شود.

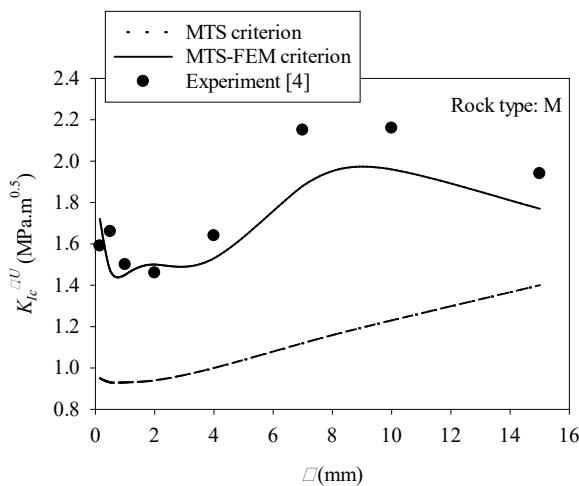
پس از محاسبه‌ی تنش اطراف شیار برای قطعات آزمایش شده، باید فاصله بحرانی از نوک شیار را محاسبه کرد. در روش MTS-FEM، تنش مستقیماً از تحلیل اجزای محدود به دست می‌آید، بنابراین، نیازی نیست فاصله‌ی مبدأ مختصات تا لبه‌ی شیار (یعنی $\rho/2$) در محاسبات لحاظ شود و فقط کافیست شعاع بحرانی ناحیه r_c^* از رابطه (۶) محاسبه شد.



شکل ۴- مدل شبکه‌بندی شده به همراه شرایط بارگذاری و بارگذاری.

جدول ۲- ابعاد، شرایط بارگذاری، بار شکست و مقادیر ضریب شدت تنش شیار بحرانی $K_{Ic}^{U,\rho}$ برای قطعات آزمایش شده در مرجع [۴].

Rock type	w (mm)	t (mm)	a (mm)	ρ (mm)	L_o (mm)	L_i (mm)	P_f (N)	$K_{Ic}^{U,\rho}$ (MPa. \sqrt{m})
M	30	30	15	0.15	150	50	552	1.14
				0.5			576	
				1			521	
				2			506	
				4			571	
				7			748	
				10			751	
I	30	30	15	0.15	150	50	353	0.74
				0.5			344	
				1			333	
				2			340	
				4			312	
				7			354	
				10			368	
F	30	30	15	0.15	150	50	175	0.37
				0.5			177	
				1			152	
				2			183	
				4			186	
				7			229	
				10			208	
C	30	30	15	0.15	150	50	375	0.73
				0.5			346	
				1			411	
				2			385	
				4			413	
				7			494	
				10			477	
O	20	30	10	0.15	120	60	358	0.72
				0.5			352	
				1			362	
				2			357	
				4			378	
				7			422	
				10			432	
G	20	30	10	0.15	120	60	696	1.24
				0.5			578	
				1			546	
				2			586	
				4			571	
				7			642	
				10			558	



شکل ۷- نمودار تغییرات $K_{Ic}^{U,P}$ بر حسب شعاع شیار برای سنگ نوع M به دست آمده از معیار MTS، معیار MTS-FEM و آزمایش.

نکته حائز اهمیت در اینجا این است که با بزرگتر شدن شعاع شیار اختلاف بین معیار MTS-FEM نیز بیشتر می‌شود. برای تحلیل دقیق‌تر این اختلاف باید زوایای مختلفی از آزمایش‌های انجام شده را بررسی نمود. چون نتایج آزمایشگاهی از منبع [۴] استخراج شده است، بنابراین نمی‌توان تحلیل دقیقی از علت اختلاف بیان نمود. اما، می‌توان به عنوان حدس اولیه گفت که با بزرگتر شدن شعاع شیار، ناحیه آسیب به مرز بیرونی قطعه نزدیکتر می‌شود و در نتیجه، اثرات مرزی [۳] روی آن تأثیر می‌گذارد. این اثرات، باعث می‌شود تا ناحیه آسیب به وجود آمده در قطعات آزمایشگاهی، کوچکتر از ناحیه‌ی آسیب محاسبه شده توسط رابطه‌ی ۵ شود. برای شکست نهایی قطعه، باید یک ناحیه آسیب با ابعاد مشخصی به وجود آید. بنابراین، در قطعات شیاردار با شیار بزرگتر، باید بار وارده بیشتر شود تا ناحیه‌ی آسیب به اندازه‌ی بحرانی برسد. در نتیجه بار شکست آزمایشگاهی بیشتر از بار تخمین زده باشد.

نکته‌ی دیگری که می‌توان به آن اشاره نمود، مبحث اثرات اندازه می‌باشد. مقاومت شکست قطعات سنگی به اندازه‌ی قطعه آزمایش شده وابستگی دارد. علت اصلی این وابستگی، وجود ناحیه FPZ در نوک ترک و یا شیار قطعات سنگی است. برای بررسی اثرات اندازه در قطعات سنگی ترک‌دار مقالات متعددی در مراجع علمی وجود دارد [۳۹-۴۲]. اما در مورد قطعات شیاردار سنگی تحقیقاتی وجود ندارد. در تحقیق حاضر نیز، به دلیل اینکه، نمونه‌های آزمایش شده توسط جاستو و همکارانش [۴] فقط یک اندازه مشخص داشت، نمی‌توان بحث

جدول ۳- مقادیر شعاع بحرانی برای هر نوع سنگ آزمایش شده [۴]

Rock type	A_1^*	A_3^*	f_t (MPa)	K_{Ic} (MPa.m)	r_c (mm)
Macael marble (M)	0.806	-2.72	8.15	1.14	2.24
Italian marble (I)	0.806	-2.72	8.69	0.74	1
Floresta sandstone (F)	0.806	-2.72	3.38	0.37	1.53
Moleano limestone (C)	0.806	-2.72	7.08	0.73	1.39
Oolitic limestone (O)	0.597	-2.02	7.8	0.72	1.15
Granite (G)	0.597	-2.02	9	1.24	2.19

با دانستن شعاع بحرانی از لبه‌ی شیار، می‌توان مقدار تنش محیطی در فاصله‌ی بحرانی را از نمودارهای شکل ۶ به دست آورد. حال، با جاگذاری مقدار تنش محیطی استخراج شده از نمودار شکل ۶، بار وارده در اجزای محدود (۱۰۰۰۰ نیوتن) و استحکام کششی در رابطه ۸، می‌توان بار شکست هر کدام از نمونه‌ها را تخمین زد. در جدول ۴ بار شکست محاسبه شده با روش MTS-FEM و بار شکست حاصل از آزمایش با هم مقایسه شده‌اند. همچنین، مقادیر ضریب شدت تنش شیار بحرانی $K_{Ic}^{U,P}$ برای هر نمونه با استفاده از روش MTS کلاسیک محاسبه گردید. سپس، با جاگذاری مقادیر به دست آمده برای $K_{Ic}^{U,P}$ از معیار MTS در رابطه ۷، بار شکست هر نمونه تخمین زده شد و در جدول ۴ بیان گردید. ارزیابی مقادیر بار شکست ذکر شده در جدول ۴ نشان می‌دهد که روش MTS-FEM، نه تنها می‌تواند بار شکست قطعات شیاردار سنگی در حالت مود I را با تطابق خوبی (خطای کمتر از ۱۳٪) تخمین بزند، بلکه نسبت به روش کلاسیک MTS نیز از دقت بهتری برخوردار است. همچنین، شکل (۷) نشان دهنده‌ی نمودار تغییرات $K_{Ic}^{U,P}$ بر حسب شعاع شیار برای یک نوع سنگ (سنگ M) که از سه روش آزمایش، معیار MTS و معیار MTS-FEM به دست آمده‌اند، می‌باشد. تطابق خوب بین مقادیر تخمین زده شده توسط معیار MTS-FEM و مقادیر حاصل از آزمایش نیز در شکل ۷ قابل مشاهده است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که معیار MTS-FEM قادر است تا شکست قطعات سنگی با شیار U شکل را به دقت خوبی پیش‌بینی کند.

اثرات اندازه را مطرح و بررسی نمود. بنابراین، برای بررسی اثرات اندازه در قطعات سنگی شیاردار نیاز به آزمایش‌های مختلفی است که می‌توان در کارهای تحقیقاتی مدنظر قرار داد.

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، معیار جدیدی بر پایه معیار بیشینه تنش مرزی (MTS) برای تخمین بار شکست قطعات سنگی دارای شیار U شکل تحت بارگذاری مود I خالص، پیشنهاد گردید. در معیار جدید که موسوم به معیار بیشینه تنش مرزی اصلاح شده (MTS-FEM) است، تنش محیطی اطراف شیار با استفاده از تحلیل اجزای محدود محاسبه می‌گردد. همچنین، رابطه‌ای که قبلاً برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بحرانی از نوک ترک، در قطعات ترک‌دار سنگی استفاده می‌شد، برای به دست آوردن فاصله‌ی بحرانی از نوک شیار در معیار MTS-FEM به کار گرفته می‌شود. معیار MTS-FEM با استفاده از نتایج آزمایشگاهی قطعات تیر با شیار لبه‌ای (SENB) تحت بار خمش چهارنقطه‌ی متقارن که قبلاً توسط جاستو و همکارانش [۴] بر روی سنگ‌های مختلف آزمایش شده بود، مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج ارزیابی‌ها نشان می‌دهد که معیار MTS-FEM نه تنها نتایج بهتری نسبت به معیار MTS پیش‌بینی می‌کند، بلکه تطابق خوبی (زیر ۱۳٪) با نتایج حاصل از آزمایش دارد و می‌توان از این معیار برای تخمین شرایط شکست قطعات شیاردار سنگی با شیار U شکل استفاده کرد.

جدول ۴- مقادیر بار شکست نمونه‌های SENB تخمین زده با روش‌های MTS و MTS-FEM در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی در مرجع [۴].

ρ (mm)			G	O	C	F	I	M
0.15	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	696	358	375	175	353	552
		MTS	327	203	224	112	232	330
		MTS-FEM	642	380	391	197	391	599
	Discrepancy %	MTS	53	43.3	40.2	30.2	34.2	40.2
		MTS-FEM	7.6	5.8	4.1	11.2	9.7	7.8
0.5	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	578	352	346	177	344	576
		MTS	320	199	220	110	228	324
		MTS-FEM	535	333	321	162	334	509
	Discrepancy %	MTS	44.6	43.4	36.4	37.8	33.7	43.7
		MTS-FEM	7.3	5.3	7	8.2	2.9	11.6
1	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	546	362	411	152	333	521
		MTS	318	202	221	110	233	321
		MTS-FEM	538	346	357	169	348	503
	Discrepancy %	MTS	41.7	44.2	46.2	27.6	30	38.4
		MTS-FEM	1.3	4.2	12.9	10	4	3.4
2	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	586	357	385	183	340	506
		MTS	323	216	232	115	253	326
		MTS-FEM	545	354	359	175	353	522
	Discrepancy %	MTS	44.9	39.5	39.7	37.1	25.6	35.5
		MTS-FEM	6.9	0.68	6.4	4.3	3.8	8.3
4	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	571	378	413	186	312	571
		MTS	347	248	261	128	295	349
		MTS-FEM	548	349	363	177	356	532
	Discrepancy %	MTS	39.2	34.4	36.8	31.2	5.4	38.8
		MTS-FEM	3.9	7.4	12	4.8	12.4	6.7
7	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	642	422	494	229	354	748
		MTS	387	293	303	147	352	389
		MTS-FEM	573	371	431	214	374	652
	Discrepancy %	MTS	39.7	30.6	38.6	35.8	0.5	48
		MTS-FEM	10.7	12	12.6	6.6	5.5	12.8
10	Fracture load $P_f(N)$	Experiment	558	432	477	208	368	751
		MTS	426	333	341	165	402	428
		MTS-FEM	514	376	416	211	386	679
	Discrepancy %	MTS	23.6	22.9	28.5	20.7	9.2	43
		MTS-FEM	7.8	12.7	12.7	1.5	4.7	9.6
15	Fracture load $P_f(N)$	Experiment			430	205	371	672
		MTS			397	192	474	487
		MTS-FEM			389	195	402	613
	Discrepancy %	MTS			7.6	6.3	27.7	27.5
		MTS-FEM			9.5	4.7	7.8	8.8

مراجع

- [13] Livieri P.; 2008; "Use of *J*-integral to predict static failures in sharp *V*-notches and rounded *U*-notches." Engineering Fracture Mechanics, 75(7), 1779-1793.
- [14] Carpinteri A., Cornetti P., Pugno N., Sapora A., Taylor D.; 2008; "A finite fracture mechanics approach to structures with sharp *V*-notches." Engineering Fracture Mechanics, (7), 1736-1752.
- [15] Torabi AR., Etesam S., Sapora A., Cornetti P.; 2017; "Size effects on brittle fracture of Brazilian disk samples containing a circular hole." Engineering Fracture Mechanics, 186, 496-503.
- [16] Ayatollahi MR., Torabi AR.; 2009; "A criterion for brittle fracture in *U*-notched components under mixed mode loading." Engineering Fracture Mechanics, (12), 1883-1896.
- [17] Ayatollahi MR., Torabi AR.; 2010; "Brittle fracture in rounded-tip *V*-shaped notches." Materials & Design, 31(1), 60-67.
- [18] Torabi AR.; 2013; "Fracture Assessment of *U*-Notched Graphite Plates Under Tension." International Journal of Fracture, (2), 285-292.
- [19] Torabi AR., Fakoor M., Pirhadi E.; 2013; "Tensile fracture in coarse-grained polycrystalline graphite weakened by a *U*-shaped notch." Engineering Fracture Mechanics, 111, 77-85.
- [20] Gómez FJ., Guinea GV., Elices M.; 2006; "Failure criteria for linear elastic materials with *U*-notches." International Journal of Fracture, 141, 99-113.
- [21] Leguillon D., Yosibash Z.; 2003; "Crack onset at a *v*-notch. Influence of the notch tip radius." International Journal of Fracture, 122, 1-21.
- [22] Lazzarin P., Berto F., Elices M., Gomez J.; 2009a; "Brittle failures from *U*- and *V*-notches in mode I and mixed, *I* + *II*, mode: a synthesis based on the strain energy density averaged on finite-size volumes." Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 32, 671-684.
- [23] Lazzarin P., Campagnolo A., Berto F.; 2014; "A comparison among some recent energy- and stress-based criteria for the fracture assessment of sharp *V*-notched components under Mode I loading." Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 71, 21-30.
- [24] Torabi AR., Campagnolo A., Berto F.; 2015a; "Local strain energy density to predict mode II brittle fracture in Brazilian disk specimens weakened by *V*-notches with end holes." Materials & Design, 69, 22-29.
- [25] Torabi A., Campagnolo A., Berto F.; 2016; "Mode II Brittle Fracture Assessment of Key-Hole Notches by
- [1] Akbardoost J., Ayatollahi MR.; 2014; "Experimental analysis of mixed mode crack propagation in brittle rocks: The effect of non-singular terms." Engineering Fracture Mechanics, 129, 77-89.
- [2] Aliha MRM., Ayatollahi MR., Akbardoost J.; 2012; "Typical Upper Bound-Lower Bound Mixed Mode Fracture Resistance Envelopes for Rock Material." Rock Mechanics and Rock Engineering, 45(1), 65-74.
- [3] Justo J., Castro J., Cicero S.; 2018; "Energy-based approach for fracture assessment of several rocks containing *U*-shaped notches through the application of the SED criterion." International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 110, 306-315.
- [4] Justo J., Castro J., Cicero S., Sánchez-Carro MA., Husillos R.; 2017; "Notch effect on the fracture of several rocks: Application of the Theory of Critical Distances." Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 90, 251-258.
- [5] Gómez FJ., Elices M.; 2003; "A fracture criterion for sharp *V*-notched samples." International Journal of Fracture, 123(3), 163-175.
- [6] Gómez FJ., Elices M., Valiente A.; 2000; "Cracking in PMMA containing *U*-shaped notches." Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 23(9), 795-803.
- [7] Lazzarin P., Berto F., Radaj D.; 2009; "Fatigue-relevant stress field parameters of welded lap joints: pointed slit tip compared with keyhole notch." Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, (9), 713-735.
- [8] Lazzarin P., Lassen T., Livieri P.; 2003; "A notch stress intensity approach applied to fatigue life predictions of welded joints with different local toe geometry." Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 26(1), 49-58.
- [9] Lazzarin P., Zambardi R.; 2001; "A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp *V*-shaped notches." International Journal of Fracture, 112(3), 275-298.
- [10] Yosibash Z., Bussiba A., Gilad I.; 2004; "Failure criteria for brittle elastic materials." International Journal of Fracture, 125(3), 307-333.
- [11] Berto F., Lazzarin P.; 2007; "Relationships between *J*-integral and the strain energy evaluated in a finite volume surrounding the tip of sharp and blunt *V*-notches." International Journal of Solids and Structures, 44(14), 4621-4645.
- [12] Livieri P.; 2003; "A new path independent integral applied to notched components under mode I loadings." International Journal of Fracture, 123(3), 107-125.

- [38] Ayatollahi MR., Akbardoost J.; 2012; "Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials – A new approach." *Engineering Fracture Mechanics*, 92, 89-100.
- [39] Bazant ZP, Gettu R, Kazemi MT.; 1991; "Identification of nonlinear fracture properties from size effect tests and structural analysis based on geometry-dependent R-curves." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 28, 43-51.
- [40] Karihaloo BL.; 1999; "Size effect in shallow and deep notched quasi-brittle structures." *International Journal of Fracture*, 95, 379-90.
- [41] Bazant ZP, Planas J.; 1998; "Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials." CRC Press in LLC.
- [42] Schmidt RA.; 1980; "A microcrack model and its significance to hydraulic fracturing and fracture toughness testing." *Proc 21st US Symp On Rock Mech*, 81-90.
- [43] Schmidt RA.; 1980; "A microcrack model and its significance to hydraulic fracturing and fracture toughness testing." *Proc 21st US Symp On Rock Mech*, 581-590.
- [44] Akbardoost J., Amirafshari R., Mohsenzade O., Berto F.; 2018; "Scaling effect on the fracture toughness of bone materials using MMTS criterion." *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 85, 72-79.
- [45] Aliha MRM., Ayatollahi MR., Smith DJ., Pavier MJ.; 2010; "Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading." *Engineering Fracture Mechanics*, 77(11), 2200-2212.
- [46] Ayatollahi MR., Sistaninia M.; 2011; "Mode II fracture study of rocks using Brazilian disk specimens." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 48(5), 819-826.
- [47] Williams ML.; 1957; "On the stress distribution at the base of a stationary crack." *Journal of Applied Mechanics*, 24, 109-14.
- [48] Williams ML.; 1957; "On the stress distribution at the base of a stationary crack." *Journal of Applied Mechanics*, 27, 109-114.
- [49] Wittmann FH, Mihashi H, Nomura N.; 1990; "Size effect on fracture energy of concrete." *Engineering Fracture Mechanics*, 35, 107-15.
- [50] Jenq YS, Shah SP.; 1985; "A two parameter fracture model for concrete." *J Engng Mech*, 111, 1227-41.
- [51] Ayatollahi MR, Nejati M.; 2011; "An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis." *Fatigue & Fracture of Engineering Magterials & Structures*, 34, 159-76.
- [26] Gómez FJ., Elices M.; 2003; "A fracture criterion for sharp V-notched samples." *International Journal of Fracture*, 123, 163-175.
- [27] Ayatollahi MR., Torabi AR.; 2010b; "Investigation of mixed mode brittle fracture in rounded-tip V-notched components." *Engineering Fracture Mechanics*, 77, 3087-3104.
- [28] Berto F., Ayatollahi MR.; 2011; "Fracture assessment of Brazilian disc specimens weakened by blunt V-notches under mixed mode loading by means of local energy." *Materials & Design*, 32, 2858-2869.
- [29] Ayatollahi MR., Berto F., Lazzarin P.; 2011; "Mixed mode brittle fracture of sharp and blunt V-notches in polycrystalline graphite." *Carbon*, 49, 2465-2474.
- [30] Berto F., Lazzarin P., Marangon C.; 2012; "Brittle fracture of U-notched graphite plates under mixed mode loading." *Materials & Design*, 41, 421-432.
- [31] Torabi AR., Firoozabadi M., Ayatollahi MR.; 2015b; "Brittle fracture analysis of blunt V-notches under compression." *International Journal of Solids and Structures*, 67, 219-230.
- [32] Ayatollahi MR., Torabi AR., Bahrami B.; 2016; "On the necessity of using critical distance model in mixed mode brittle fracture prediction of V-notched Brazilian disk specimens under negative mode I conditions." *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 84, 38-48.
- [33] Saboori B., Torabi AR., Ayatollahi MR., Berto F.; 2017; "Experimental verification of two stress-based criteria for mixed mode I/III brittle fracture assessment of U-notched components." *Engineering Fracture Mechanics*, 182, 229-244.
- [34] Torabi AR., Abedinasab SM.; 2014; "Brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading: Experimental study and theoretical predictions." *Engineering Fracture Mechanics*, 134, 35-53.
- [35] Ayatollahi MR., Torabi AR.; 2009; "A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed mode loading." *Engineering Fracture Mechanics*, 76, 1883-1896.
- [36] Ayatollahi MR., Torabi AR.; 2010c; "Tensile fracture in notched polycrystalline graphite specimens." *Carbon*, 48, 2255-2265.
- [37] Filippi S., Lazzarin P., Tovo R.; 2002; "Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates." *International Journal of Solids and Structures*, 39, 4543-4565.

پی‌نوشت

-
- ۱- Cohesive zone model (CZM)
 - ۲- Strain energy density (SED)
 - ۳- Maximum tangential stress (MTS)
 - ۴- Mean stress (MS)
 - ۵- Griffith
 - ۶- Rounded- tip V notch
 - ۷- V-shaped notch with end hole
 - ۸- Key-hole notch
 - ۹- critical distance theory
 - ۱۰- Fracture process zone
 - ۱- Quadratic iso-parametric element
 - l - Boundary effect