مجله کنترل جلد ۳، شماره ۱، بهار ۱۳۸۸، صفحه ۴۶-۳۷

ارائه یک سیستم آشوبناک بعد بالای جدید همراه با یک نقطه تعادل و پایدارسازی آن با استفاده از کنترل‌کننده فیدبک حالت خطی

علی ابویی [۱]، محمدرضا جاهدمطلق [۲]، زهرا رحمانی چراتی [۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، برق- کنترل، آزمایشگاه سیستم‌های پیچیده، دانشگاه علم‌و صنعت ایران، aliabooee@elec.iust.ac.ir

[۲] دانشیار، آزمایشگاه سیستم‌های پیچیده، دانشگاه علم و صنعت ایران ، jahedmr@iust.ac.ir

[۳] استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل ، Rahmaniz@nit.ac.ir

چکیده: در این مقاله یک سیستم آشوبناک بعد بالای جدید ارائه شده است. این سیستم، دارای یک نقطه تعادل در مبدأ بوده و ویژگی شاخص آن، وجود دو نمای لیاپانوف مثبت بزرگ در مقایسه با سیستم‌های آشوبناک بعد بالای دیگر می‌باشد. در ادامه، معیارهایی جهت اثبات وجود آشوب بعد بالا در این سیستم، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. که از آن جمله معیارها می‌توان به بررسی اتلافی بودن سیستم، ناپایداری تنها نقطه تعادل سیستم، جاذب عجیب، نماهای لیاپانوف، بعد کسری، نگاشت پوانکاره، طیف فرکانسی گسترده و حساسیت شدید پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت سیستم به شرایط اولیه اشاره کرد. بررسی تمام این معیارها، نشان از وجود آشوب بعد بالا در این سیستم داشت. با تغییر یکی از پارامترهای سیستم، رفتارهای متفاوت دینامیکی را برای این سیستم آشوبناک نشان دادیم، که از آن جمله می‌توان به آشوب بعد پایین، سیکل حدی، شبه پریودیک و آشوب بعد بالا اشاره کرد. در انتها با استفاده از کنترل‌کننده فیدبک حالت خطی، سیستم آشوبناک حول نقطه تعادل خود، پایدار شده است.

کلمات کلیدی: سیستم آشوبناک بعد بالا- نمای لیاپانوف- بعد کسری- اتلافی بودن و جاذب عجیب

Abstract: A new hyperchaotic system which is represented in this paper has an equilibrium point located at origin. Having two large positive Lyapunov Exponents, is the prominent feature of this system in comparison to other hyperchaotic systems. Some basic dynamical properties are studied in order to prove existence of hyper chaos in this system including Dissipativeness of System, Instability of Unique Equilibrium Point, Strange Attractor, Lyapunov Exponents, Fractal Dimension, Poincare Mapping and Sensitivity of Time Response related to state variables to initial condition. All of the properties studied show that the system is hyperchaotic. By changing a parameter of the system, various dynamical characteristics is obtained such as Chaos, limit Cycle, Quasi-Periodic and Hyperchaos. At last, the chaotic system is stabilized around its equilibrium point by using linear state feedback controller

Keywords: Hyperchaotic System, Lyapunov Exponent, Fractal Dimension, Dissipativeness and Strange Attractor

۱- مقدمه

در دو دهه‌ی اخیر تحقیقات زیادی جهت معرفی سیستم‌های آشوبناک جدید و تحلیل رفتار آشوبگونه در این نوع سیستم‌ها صورت گرفته است[۱-۱۲]. با توجه به کاربرد گسترده آشوب در سیستم‌های مهندسی، دو زمینه تحقیقاتی جدید در ارتباط با آشوب باز شده است که این دو زمینه، یکی کنترل آشوب [۱و۲] و دیگری سنکرون‌سازی[۱] آشوب [۳و۴] می‌باشد. سیگنال آشوبناک با یک نمای لیاپانوف[۲] مثبت برای انتقال امن داده‌ها در مخابرات مورد استفاده قرار می‌گرفت. تا اینکه در سال ۱۹۹۵ پرز[۳] و سردیرا[۴] نشان دادند که انتقال داده‌ها با سیگنال

[1] Synchronization
[2] Lyapunov Exponent
[3] Perez
[4] Cerdeira

آشوبناک امن نیست و می‌توان داده‌ها را از آن استخراج کرد[۵]. برای غلبه بر این مشکل، سیستم‌های آشوبناک بعد بالا[1] معرفی شدند. سیستم های آشوبناک بعد بالا به علت افزایش تصادفی بودن[2] و بالا بودن عدم قابلیت پیش بینی[3] در آنها، جایگزین سیگنال‌های آشوب بعد پایین در مخابرات امن شدند[۶]. سیستم‌های آشوبناک بعد بالای پیوسته زمان[4]، حداقل دارای ۴ متغیر حالت بوده و ویژگی شاخص این سیستم‌ها وجود دو نمای لیاپانوف مثبت می‌باشد. این ویژگی باعث می‌شود که دینامیک این نوع سیستم‌ها در بیش از یک جهت به طور همزمان گسترش یابد. به علت دینامیک پیچیده سیستم‌های آشوبناک بعد بالا، تحقیقات زیادی در علوم مهندسی بر روی این نوع از سیستم‌ها انجام شده است. به عنوان نمونه، آشوب بعد بالا در مواردی مانند اسیلاتورهای کلپیتس[5] [۷]، مدارهای غیرخطی [۸]، لیزرها [۹] و مخابرات امن [۱۰] دارای کاربرد فراوان است.

آشوب بعد بالا اولین بار توسط راسلر[6] در [۱۱] ارائه شد. در سال ۲۰۰۳ ، کافاگنا[7] و گراسی[8] یک روش برای تولید جاذب عجیب[9] آشوبناک بعد بالا، با استفاده از زنجیره‌ای از مدارهای چوآی[10] کوپل شده معرفی کردند [۱۲]. در این ساختار از سه مدار چوآی بهم پیوسته همراه با یک تحریک سینوسی برای تولید آشوب بعد بالا استفاده شده است. تاکنون هیچ روش کلی برای تولید و طراحی سیستم‌های آشوبناک بعد بالا ارایه نشده است. یکی از روش‌های متداول برای طراحی سیستم آشوبناک بعد بالا که اخیراً در مقالات [۲۱-۱۳] به آن اشاره شده است، بدین صورت است که یک سیستم آشوبی بعد پایین با ۳ متغیر حالت را در نظر گرفته و با اضافه کردن کنترل‌کننده فیدبک حالت و تنظیم دوباره ضرایب سیستم، آشوب بعد بالا را در سیستم ایجاد می‌کنند. به عنوان نمونه لی [11] دو سیستم آشوبناک با عناوین " سیستم آشوبناک بعد بالای لورنز تعمیم یافته" [۱۳] و " سیستم آشوبناک بعد بالای چن[12] اصلاح شده" [۱۴] را معرفی کرده است. این دو سیستم آشوبناک بعد بالا، با اضافه شدن یک متغیر حالت جدید به سیستم‌های آشوبناک بعد پایین لورنز[13] و چن ساخته شده‌اند. در [۱۵] با اضافه شدن یک کنترل‌کننده به معادله دوم سیستم آشوبناک چن، سیستم آشوبناک بعد بالای جدیدی معرفی شده است. مقاله [۱۶] با اضافه کردن یک کنترل‌کننده مربعی غیرخطی[14] به معادله دوم سیستم آشوبناک لورنز، سیستم آشوبناک بعد بالای دیگری را ارائه داده است. اخیراً در [۱۷] یک سیستم آشوبناک بعد بالای جدید ارائه شده است که دارای نقطه تعادل یکتا بوده و می‌تواند رفتار پریودیک[15]، شبه پریودیک[16]، آشوب بعد پایین و آشوب بعد بالا از خود نشان دهد. این سیستم آشوبناک جدید با اضافه شدن یک کنترل‌کننده فیدبک حالت به سیستم آشوبناک بعد پایین کی[17] [۱۸] ساخته می‌شود. در سال ۲۰۰۶، چن و وانگ[18] دو سیستم آشوبناک بعد بالا، با اضافه کردن یک متغیر حالت چهارم به سیستم آشوبناک لو[19] ارایه دادند [۲۰و۱۹]. در سال ۲۰۰۷ ونجوآن وو[20] یک سیستم آشوبناک بعد بالای جدید ارایه داد که تمام رفتارهای دینامیکی ممکنه را برای یک سیستم آشوبناک شامل می‌شد [۲۱].

یکی دیگر از روش‌های تولید سیستم آشوبناک بعد بالا، ایجاد اغتشاش‌های کوچک در پارامترهای متغیر با زمان سیستم‌های آشوب با بعد پایین می‌باشد که به عنوان نمونه در [۲۲] با اضافه شدن یک ورودی کنترلی سینوسی به سیستم آشوبناک یکپارچه[21] بعد پایین، سیستم آشوبناک بعد بالای جدیدی ساخته شده است. رفتار آشوبناک بعد بالا در شبکه‌های عصبی مصنوعی[22] نیز دیده شده است که می‌توان به آشوب بعد بالا در شبکه‌های عصبی مصنوعی از نوع هوپفیلد[23] اشاره کرد. در [۲۳] یک شبکه عصبی از نوع هوپفیلد با ۴ نرون در نظر گرفته شده است و با تنظیم ضرایب وزنی میان نرون‌ها، آشوب بعد بالا در این شبکه ایجاد شده است. تمام سیستم‌های آشوبناک بعد بالا که بدان اشاره شد، دارای تعبیر فیزیکی خاصی نبوده و تنها معادلات ریاضی صرف می‌باشند. اما آشوب بعد بالا در سیستم‌های فیزیکی نیز رخ می‌دهد. مقاله‌ی [۲۴] - وجود آشوب بعد بالا را در معادلات اسیلاتور شبکه عصبی سلولی کوانتومی[24] نشان می‌دهد. ویژگی شاخص این سیستم آشوبناک بعد بالا، وجود سه نمای لیاپانوف مثبت می‌باشد.

در این مقاله، ویژگی شاخص سیستم آشوبناک بعد بالا، بزرگ بودن دو نمای لیاپانوف مثبت آن در مقایسه با اغلب سیستم‌های

[1] Hyperchaotic Systems
[2] Increasing Randomness
[3] Higher Unpredictability
[4] Hyperchaotic System In Continuous Time
[5] Colpitts Oscillators
[6] Rössler
[7] Cafagna
[8] Grassi
[9] Strange Attractor
[10] Chua's Circuits
[11] Li
[12] Chen
[13] Lorenz
[14] Nonlinear Quadratic Controller
[15] Periodic
[16] Quasi Periodic
[17] Qi
[18] Wang
[19] Lü
[20] Wenjuan Wu
[21] Unified Chaotic System
[22] Artificial Neural Networks
[23] Hopfield
[24] Quantum Cellular Neural Network Oscillator

آشوبناک بعد بالای دیگر می‌باشد. این ویژگی، در یک بخش جداگانه از مقاله مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

ساختار کلی این مقاله بدین صورت است که در بخش ۲، پس از معرفی دینامیک سیستم آشوبناک بعد بالا، جهت اثبات وجود آشوب در این سیستم، نشان می‌دهیم که سیستم اتلافی و نقطه تعادل آن ناپایدار است. در ادامه این بخش به بررسی جاذب عجیب، پاسخ‌های زمانی، نماهای لیاپانوف، حساسیت به شرایط اولیه، بعد کسری[1] ، نگاشت پوانکاره[2] و طیف فرکانسی گسترده[3] سیستم می‌پردازیم. در بخش ۳ رفتارهای مختلف دینامیکی را با تغییر یکی از پارامترهای سیستم نشان می‌دهیم. بخش ۴ به مقایسه میان نماهای لیاپانوف این سیستم با سیستم‌های آشوبناک دیگر اختصاص یافته است. در بخش ۵ با طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت خطی[4] سیستم حول نقطه تعادل خود پایدار می‌شود و نتیجه‌گیری کلی از مقاله در بخش ۶ ارایه می‌گردد.

۲- معادلات دینامیکی سیستم آشوبناک بعد بالای جدید

معادلات دینامیکی این سیستم آشوبناک بعد بالا با الهام از سیستم آشوبناک بعد پایین لیو [۲۷] ساخته شده است. معادلات این سیستم آشوبناک جدید به صورت رابطه (۱) قابل بیان است. این معادلات در واقع با اضافه کردن متغیر حالت چهارم w و افزودن چند ترم غیرخطی به معادلات سیستم آشوبناک لیو، تشکیل شده‌اند.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) + byz^2 = f_1(x,y,z,w) \\ \dot{y} = cx + dxz^2 + ew = f_2(x,y,z,w) \\ \dot{z} = fz + gy^2 + hxw = f_3(x,y,z,w) \\ \dot{w} = ky = f_4(x,y,z,w) \end{cases} \quad (۱)$$

در رابطه (۱) x, y, z, w بیانگر متغیرهای حالت سیستم آشوبناک می‌باشند. با انتخاب پارامترها به صورت رابطه (۲)، سیستم رفتار آشوب بعد بالا از خود نشان می‌دهد.

$$\begin{array}{l} a = 7.7,\ b = -1,\ c = 8,\ d = 4,\ e = 8 \\ f = -4,\ g = 1,\ h = 1,\ k = -2 \end{array} \quad (۲)$$

برای وجود آشوب در یک سیستم شرایط زیر الزامی است:

الف- سیستم باید اتلافی[5] باشد. اتلافی بودن به مفهوم این است که انرژی سیستم در حال کاهش بوده و سیستم پایدار کلی[6] است.

ب- سیستم باید نقاط تعادل ناپایدار داشته باشد. ماتریس ژاکوبین[7] محاسبه شده در نقاط تعادل، باید دارای مقادیر ویژه ناپایدار باشد. این نکته در واقع بیانگر ناپایداری محلی[8] سیستم است.

ج- مدارهای[9] سیستم باید محدود و کراندار باشند.

در ادامه، این شرایط بر روی سیستم مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲-۱- بررسی اتلافی بودن سیستم

خاصیت حفظ سطح و یا حجم در فضاهای بالاتر، مشخصه‌ی کلی سیستم‌های پایستار[10] می‌باشد. این ویژگی، سیستم‌های دینامیکی را بر حسب اینکه حجم‌های فضای فاز ثابت بماند و یا کاهش یابند به ترتیب به دو گروه پایستار و اتلافی تقسیم می‌کند.

همان‌طوری که در بخش دوم مقاله گفته شد، یکی از شرایط لازم برای وجود آشوب در یک سیستم این است که سیستم اتلافی باشد. چنانچه معادلات دینامیکی یک سیستم به صورت رابطه (۳) باشد، برای بررسی اتلافی بودن، ترم $\nabla F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ را محاسبه کرد، چنانچه این مقدار صفر باشد سیستم پایستار و اگر این مقدار منفی باشد سیستم اتلافی است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \quad \ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \quad (۳)$$

رابطه (۴) شرط اتلافی بودن سیستم را بررسی می‌کند و نشان می‌دهد که سیستم اتلافی است.

$$\begin{array}{l} \nabla F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} + \frac{\partial f_4}{\partial w} \Rightarrow \\ \nabla F = -7.7 - 4 = -11.4 \Rightarrow \nabla F < 0 \end{array} \quad (۴)$$

با توجه به این که $\nabla F < 0$ می‌باشد، بنابراین سیستم، اتلافی و پایدار کلی است.

[1] Fraction Dimension
[2] Poincare Map
[3] Continuous Spectrum
[4] Linear Feedback Controller
[5] Dissipative
[6] Globally Stable
[7] Jacobian Matrix
[8] Local Instability
[9] Orbits
[10] Conservative

۲-۲- بررسی ناپایداری نقطه تعادل سیستم

با توجه $f_i = 0,\ i = 1,2,3,4$، سیستم تنها دارای یک نقطه تعادل در $E = (0,0,0,0)$ می‌باشد. ماتریس ژاکوبین سیستم در این نقطه تعادل، به صورت رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$J_{(0,0,0,0)} = \begin{bmatrix} -7.7 & 7.7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۵}$$

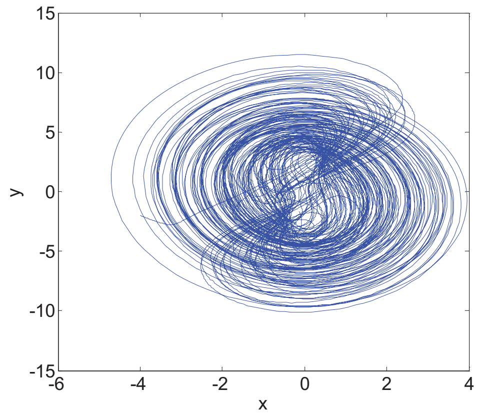
مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین بالا، در رابطه (۶) آورده شده‌اند.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -12.2454 \\ \lambda_2 = 2.2727 + 2.2126\,i \\ \lambda_3 = 2.2727 + 2.2126\,i \\ \lambda_4 = -4 \end{cases} \tag{۶}$$

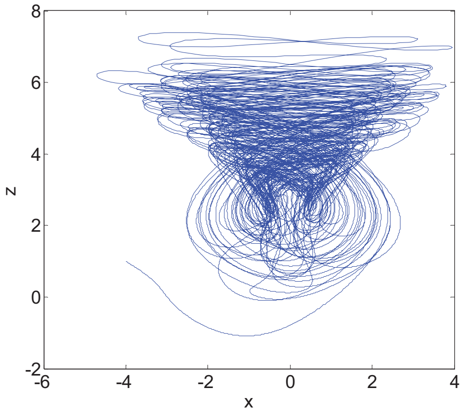
با توجه به علامت مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین سیستم، نقطه تعادل سیستم از نوع زینی شکل و ناپایدار می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سیستم به طور محلی ناپایدار است.

۲-۳- جاذب عجیب سیستم آشوبناک بعد بالا

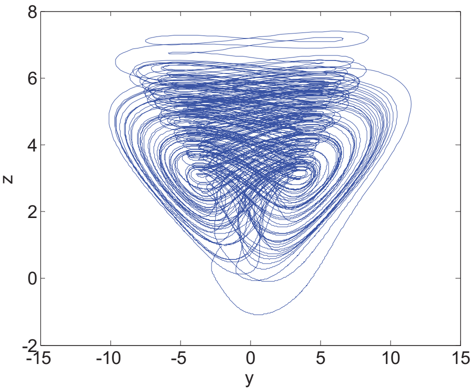
این سیستم آشوبناک با استفاده از نرم افزار MATLAB، شبیه‌سازی شده است و تعدادی از تصویرهای جاذب عجیب این سیستم بر روی فضای دو بعدی و سه بعدی به صورت شکل‌های (۱) تا (۶) نتیجه شده‌اند. شرایط اولیه برای شبیه‌سازی سیستم آشوبناک به صورت $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (-4, -2, 1, 3)$ در نظر گرفته شده است.



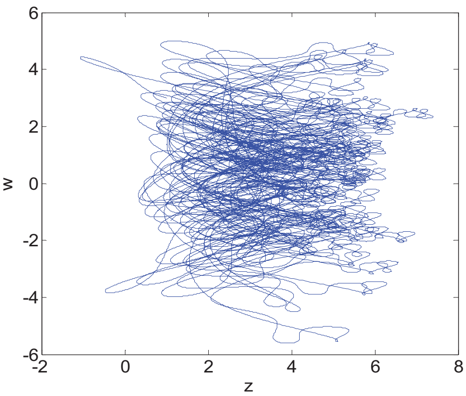
شکل(۱): تصویر جاذب عجیب سیستم در فضای فاز $(x-y)$



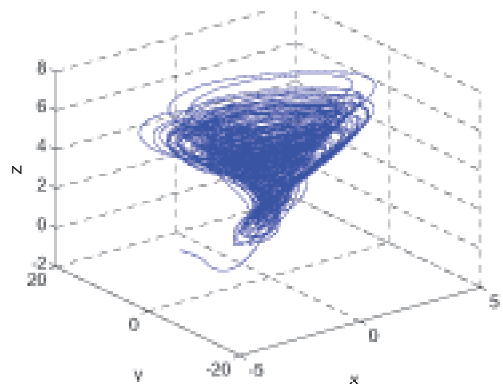
شکل(۲): تصویر جاذب عجیب سیستم در فضای فاز $(x-z)$



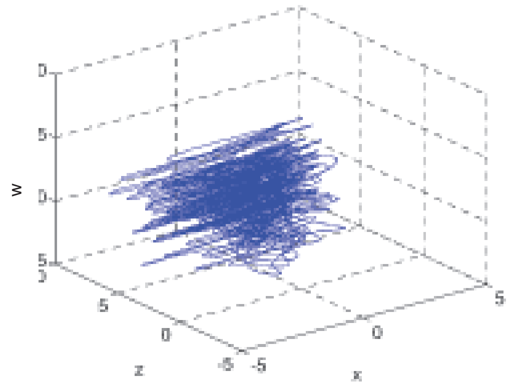
شکل(۳): تصویر جاذب عجیب سیستم در فضای فاز $(y-z)$



شکل(۴): تصویر جاذب عجیب سیستم در فضای فاز $(z-w)$



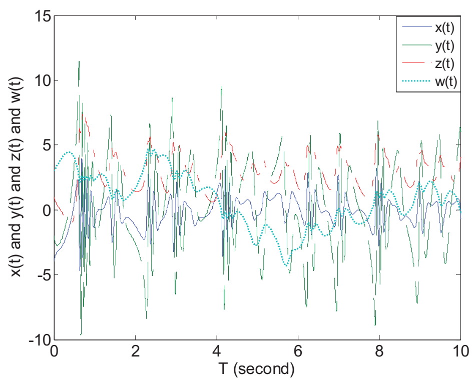
شکل(۵): تصویر جاذب عجیب سیستم در مختصات ($x-y-z$)



شکل(۶): تصویر جاذب عجیب سیستم در مختصات ($x-z-w$)

۲-۴- پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت سیستم آشوبناک بعد بالا

شکل (۷) پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت سیستم آشوبناک بعد بالا را نشان می‌دهد. شرایط اولیه برای شبیه‌سازی سیستم آشوبناک به صورت $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (-4, -2, 1, 3)$ درنظر گرفته شده است.



شکل(۷): پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم آشوبناک

۲-۵- بررسی نماهای لیاپانوف سیستم آشوبناک بعد بالا

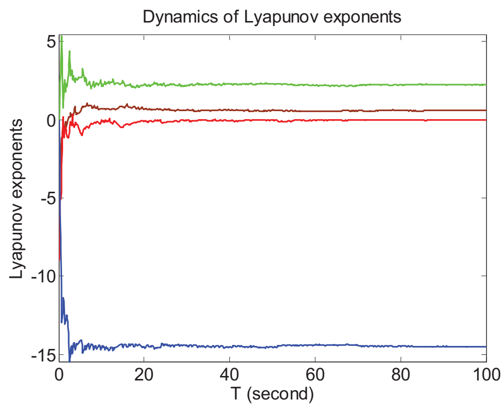
نمای لیاپانوف، یک کمیت اندازه‌گیری است که میزان حساسیت دینامیکی سیستم را به شرایط اولیه مشخص می‌کند. این کمیت در واقع نرخ متوسط همگرایی و واگرایی دو مسیر نزدیک به هم را در فضای فاز مشخص می‌سازد و یک کمیت استاندارد جهت تعیین آشوبگونه بودن یا نبودن یک سیستم است. مسیرهای یک سیستم آشوبناک در فضای حالت، دارای طول بینهایت هستند که در یک فضای محدود محصور شده‌اند لذا باید مسیرهای یک سیستم آشوبناک در بعضی جهات واگرا و در بعضی جهات همگرا شوند، نماهای لیاپانوف برای بررسی کمی واگرایی و همگرایی مسیرهای حالت سیستم استفاده می‌شوند.

جدول (۱) حالت‌های دینامیکی را برای یک سیستم آشوبناک با ۴ متغیر حالت بر حسب علامت نماهای لیاپانوف نشان می‌دهد. در جدول(۱) $i=1,2,3,4$, L_i، بیانگر i امین نمای لیاپانوف سیستم می‌باشد [۲۱].

جدول (۱) : حالت‌های دینامیکی یک سیستم آشوبناک با ۴ متغیر حالت بر حسب علامت نماهای لیاپانوف [۲۱]

نوع رفتار دینامیکی	L_1	L_2	L_3	L_4
نقطه تعادل	−	−	−	−
سیکل حدی	0	−	−	−
شبه‌پریودیک	0	0	−	−
3 torus	0	0	0	−
رفتار آشوبی	+	0	−	−
آشوب بعد بالا	+	+	0	−

نماهای لیاپانوف این سیستم با استفاده از جعبه ابزار MATDS که در محیط نرم افزاری MATLAB قابل اجرا است، محاسبه شده‌اند. شکل (۸) نماهای لیاپانوف را برای این سیستم آشوبناک، نشان می‌دهد.



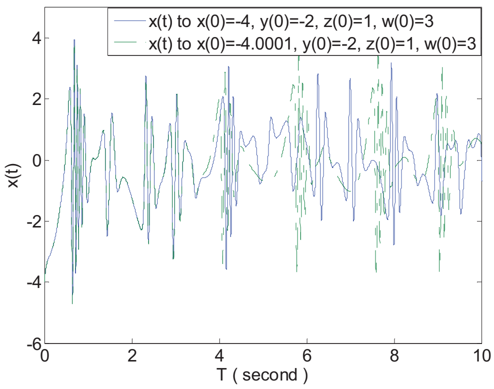
شکل(۸): نماهای لیاپانوف سیستم آشوبناک بعد بالا

همانطوری که در شکل (۸) دیده می‌شود، سیستم دارای دو نمای لیاپانوف مثبت، یک نمای لیاپانوف صفر و یک نمای لیاپانوف منفی است و با توجه به جدول (۱)، این حالت بیانگر آشوب بعد بالا در این سیستم می‌باشد. رابطه (۷) مقادیر ۴ نمای لیاپانوف این سیستم را نشان می‌دهد.

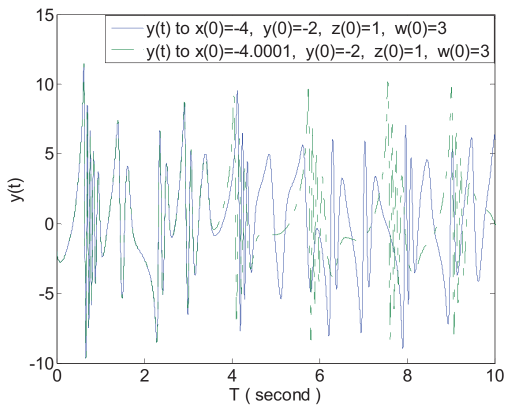
$$\begin{cases} L_1 = 2.2316 \\ L_2 = 0.59014 \\ L_3 = 0.022414 \\ L_4 = -14.4994 \end{cases} \tag{۷}$$

۲-۶- حساسیت شدید سیستم آشوبناک بعد بالا به شرایط اولیه

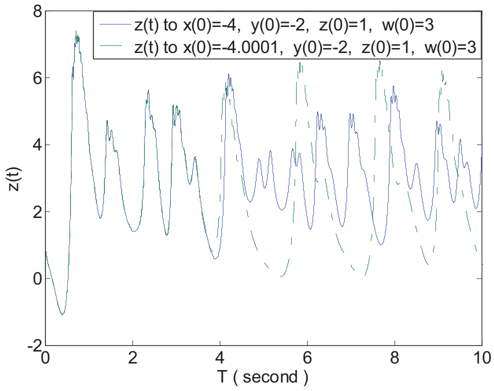
سیستم آشوبناک حساسیت زیادی به شرایط اولیه دارد و تغییر کوچکی در شرایط اولیه سیستم، باعث می‌شود که پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت سیستم آشوبناک متفاوت شوند. این مطلب در شکل (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده است. در این حالت شرایط اولیه سیستم از $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (-4, -2, 1, 3)$ به $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (-4.0001, -2, 1, 3)$ تغییر کرده‌اند.



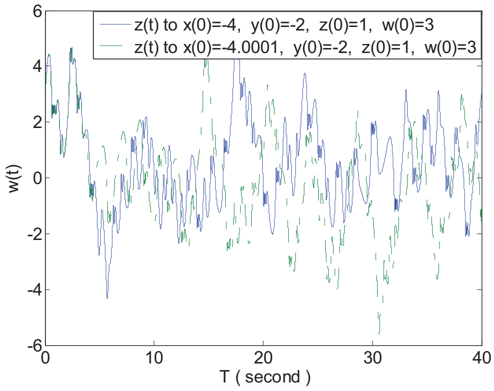
شکل (۹) : پاسخ‌های زمانی متغیر $x(t)$ سیستم آشوبناک با توجه به تغییر شرایط اولیه



شکل (۱۰) : پاسخ‌های زمانی متغیر $y(t)$ سیستم آشوبناک با توجه به تغییر شرایط اولیه



شکل (۱۱) : پاسخ‌های زمانی متغیر $z(t)$ سیستم آشوبناک با توجه به تغییر شرایط اولیه



شکل (۱۲): پاسخ‌های زمانی متغیر $w(t)$ سیستم آشوبناک با توجه به تغییر شرایط اولیه

۲-۷- بعد کسری سیستم آشوبناک بعد بالا

با در نظر گرفتن مقادیر نماهای لیاپانوف سیستم آشوبناک، بعد کاپلان- یورکه[1] سیستم با استفاده از رابطه (۸) محاسبه می‌شود [۲۵]. بعد کاپلان- یورکه همراه با نماهای لیاپانوف ارتباط مهمی بین هندسه فرکتالی جاذب عجیب و ویژگی حساسیت شدید به شرایط اولیه برقرار می‌سازند. در واقع از نماهای لیاپانوف همراه با بعد کاپلان-یورکه می‌توان برای مطالعه شرایط ایجاد آشوب در یک سیستم با تغییر یکی از پارامتر-های آن استفاده کرد. همان طوری که می‌بینیم بعد سیستم با استفاده از رابطه (۸) به صورت یک عدد غیرصحیح نتیجه شده است و این یکی از ویژگی‌های سیستم آشوبناک می‌باشد.

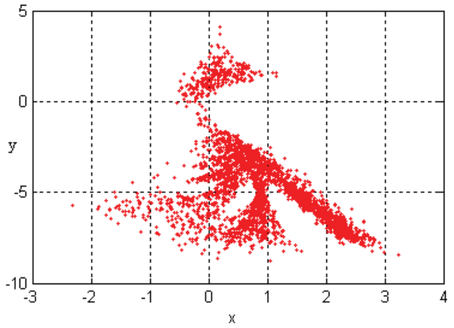
$$\begin{aligned} D_{KY} &= j + \frac{1}{|L_{j+1}|}\sum_{i=1}^{j} L_i \\ &= 3 + \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{|-14.4994|} \\ &= 3 + \frac{(2.2316 + 0.59014 + 0)}{14.4994} = 3.1946 \end{aligned} \tag{۸}$$

[1] Kaplan-Yorke Dimension

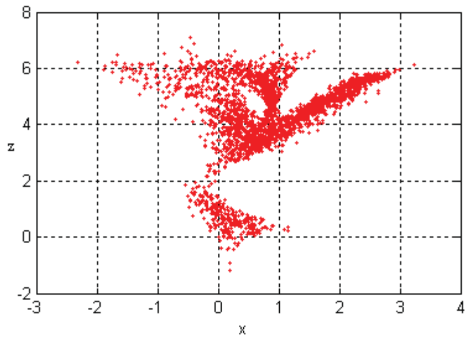
در رابطه (۸) L_iها $(L_1 > L_2 > L_3 > L_4)$ بیانگر مقادیر نماهای لیاپانوف سیستم می‌باشند که در رابطه (۷) آورده شده‌اند و j اندیس کوچکترین نمای لیاپانوف نامنفی سیستم بوده که در اینجا با توجه به رابطه (۷)، $j = 3$ در نظر گرفته شده است.

۲-۸- نگاشت پوانکاره سیستم آشوبناک بعد بالا

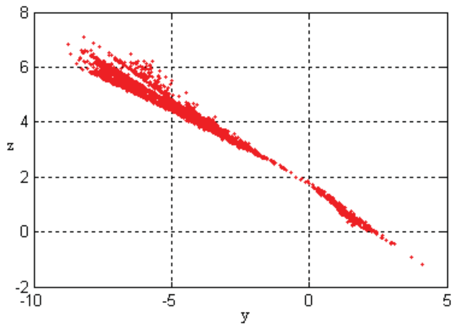
صفحه پوانکاره مورد نظر به صورت $x + 2y + 3z = 5$ در نظر گرفته شده است و به عنوان نمونه، تصویر نگاشت پوانکاره سیستم بر روی صفحات $x - y$، $x - z$ و $y - z$ در شکل‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) آورده شده است.



شکل(۱۳): تصویر نگاشت پوانکاره سیستم آشوبناک بعد بالا برروی صفحه $x - y$



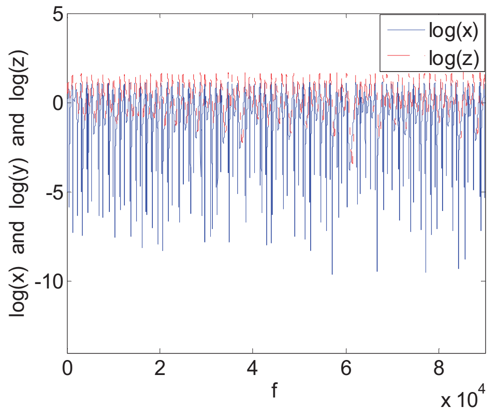
شکل(۱۴): تصویر نگاشت پوانکاره سیستم آشوبناک بعد بالا برروی صفحه $x - z$



شکل(۱۵): تصویر نگاشت پوانکاره سیستم آشوبناک بعد بالا برروی صفحه $y - z$

۲-۹- طیف فرکانسی گسترده سیستم آشوبناک

شکل (۱۶) نمودار طیف فرکانسی متغیرهای x, z سیستم آشوبناک را به عنوان نمونه نشان می‌دهد. می‌دانیم که سیستم‌های آشوبناک دارای طیف فرکانسی گسترده هستند. در این شکل نیز این مطلب به وضوح دیده می‌شود.

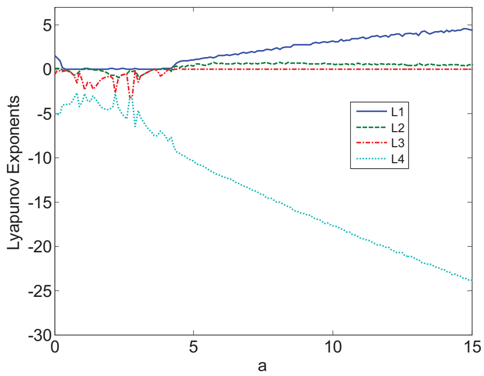


شکل(۱۸): نمودار طیف فرکانسی متغیرهای x, z سیستم آشوبناک بعدبالا

۳- ایجاد رفتارهای دینامیکی گوناگون برای سیستم آشوبناک بعد بالا با استفاده از تغییر پارامتر a

نوع رفتار دینامیکی سیستم آشوبناک از طریق مقادیر نمای لیاپانوف سیستم مشخص می‌شود. در این بخش از مقاله، با تغییر پارامتر a در بازه $[0,15]$ و ثابت نگه داشتن دیگر پارامترهای سیستم، مقادیر نماهای لیاپانوف سیستم، محاسبه شده‌اند. از جعبه ابزار Lab432 1.3 که در محیط نرم‌افزاری MATLAB قابل اجراست برای محاسبه مقادیر نماهای لیاپانوف سیستم بر حسب تغییرات پارامتر a استفاده شده است. این جعبه ابزار از الگوریتم ولف[1] [۲۸] برای محاسبه مقادیر نماهای لیاپانوف استفاده می‌کند و همگرایی مقادیر نماهای لیاپانوف سیستم به ازای هر مقدار پارامتر a تضمین شده است. شکل (۱۷) مقادیر نماهای لیاپانوف را بر حسب پارامتر a نشان می‌دهد.

[1] Wolf



شکل(۱۷): مقادیر نماهای لیاپانوف سیستم بر حسب پارامتر a

با توجه به شکل (۱۷) و جدول (۱)، نوع رفتار دینامیکی این سیستم آشوبناک به صورت جدول (۲) نتیجه می‌شود.

جدول(۲): نوع رفتار سیستم بر حسب تغییرات پارامتر a

نوع رفتار دینامیکی سیستم	محدوده تغییرات پارامتر a
آشوب بعد پایین	$0 \le a \le 0.3$
سیکل حدی (پریودیک)	$0.4 \le a \le 0.9$
شبه پریودیک	$1 \le a \le 1.4$
سیکل حدی (پریودیک)	$1.5 \le a \le 3.5$
شبه پریودیک	$3.7 \le a \le 3.9$
آشوب بعد بالا	$4.3 \le a \le 15$

۴- مقایسه نماهای لیاپانوف مثبت سیستم آشوبناک این مقاله با دیگر سیستم‌های آشوبناک بعد بالا

همان طوری که در ابتدای مقاله نیز بیان شد ویژگی شاخص این سیستم آشوبناک، بزرگ بودن نماهای لیاپانوف مثبت آن در مقایسه با سیستم‌های آشوبناک دیگر می‌باشد. برای نشان دادن این مطلب دو جدول در ادامه آورده شده است. جدول(۳) بیانگر نماهای لیاپانوف مثبت چندین سیستم آشوبناک بعد بالای معروف بوده و جدول (۴) نماهای لیاپانوف مثبت سیستم آشوبناک این مقاله را برای چند پارامتر مختلف a نشان می‌دهد. مقایسه میان این دو جدول درستی ادعای ما را تایید می‌کند.

جدول(۳): چند سیستم آشوبناک بعد بالا همراه با مقادیر دو نمای لیاپانوف مثبت آنها

سیستم آشوبی	L_1	L_2
راسلر[۱۱]	0.11	0.02
کافاگنا [۱۲]	0.774	0.3120
لی [۱۳]	0.6317	0.0175
چن [۱۷]	4.4090	0.1310
وانگ [۲۶]	1.0181	0.4180
جا [۱۶]	0.969	0.042

جدول(۴): مقادیردو نمای لیاپانوف مثبت سیستم آشوبناک این مقاله با در نظر گرفتن چند مقدار متفاوت برای پارامتر a

پارامتر a	L_1	L_2
17.7	5.0099	0.3284
17.9	5.1291	0.3918
18.8	5.2044	0.3379

۵- کنترل آشوب بعد بالا برای سیستم آشوبناک

فرض می‌کنیم که معادلات یک دسته از سیستم‌های آشوبناک بعد بالای غیرخطی پیوسته زمان به صورت رابطه (۹) می‌باشد.

$$\begin{cases}\dot{X} = f(X,t) \\ X(0) = X_0 \in R^n\end{cases} \tag{۹}$$

در رابطه (۹) بردار X به صورت $X = (x, y, z, w)$ در نظر گرفته شده است. در اینجا قصد داریم تا کنترل‌کننده فیدبک خطی $v = v(X, k)$، را چنان تعیین کنیم که سیستم کنترل شده‌ی $\dot{X} = f(X,t) + v$، به سمت نقطه تعادل ناپایدار یا مدارهای پریودیک[1] خود، همگرا شود. چنانچه $v = 0$ فرض شود، سیستم کنترل شده به سیستم آشوبناک اولیه تبدیل خواهد شد [۲۵]. کنترل‌کننده فیدبک خطی را به صورت $v = k(x + z - w)$ در نظر گرفته و این کنترل‌کننده را به معادله دوم سیستم آشوبناک اضافه می‌کنیم. این کنترل‌کننده با روش سعی و خطا و جستجو میان توابع مختلفی از متغیر-های حالت، استخراج شده است. در رابطه کنترل‌کننده، k بهره فیدبک بوده و باید به گونه‌ای تعیین شود که سیستم به سمت نقطه تعادل خود

[1] Period Orbits

همگرا شود. رابطه (۱۰)، سیستم آشوبناک را همراه با کنترل‌کننده فیدبک خطی نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} \dot{x} = 7.7(y-x) - yz^2 \\ \dot{y} = 8x + 4xz^2 + 8w + k(x+z-w) \\ \dot{z} = -4z + y^2 + xw \\ \dot{w} = -2y \end{cases} \qquad (۱۰)$$

معادله مشخصه[1] ماتریس ژاکوبین سیستم کنترل شده در نقطه تعادل مبدأ، به صورت رابطه (۱۱) نتیجه می‌شود. در این رابطه مقادیر c_1,c_2,c_3 به صورت $c_1=7.7$، $c_2=-9.7k-45.6$، $c_3=-15.4k+123.2$ می‌باشند.

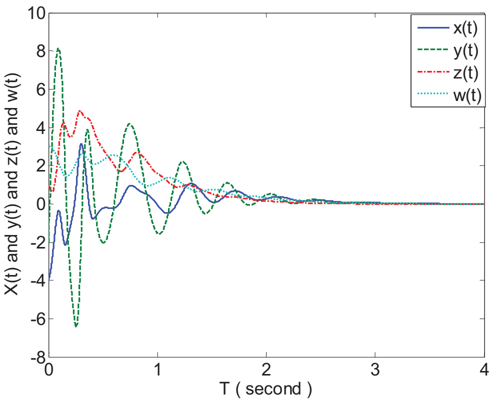
$$(\lambda+4)(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0 \qquad (۱۱)$$

برای اینکه سیستم کنترل شده در نقطه تعادل مبدأ پایدار مجانبی باشد، باید تمام ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سوم رابطه (۱۱) در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند. بنابراین با توجه به معیار روث-هرویتس[2]، باید شرایط رابطه (۱۲) برای ضرایب این چند جمله‌ای برقرار باشد[۲۵].

$$\begin{aligned} &(1)\ c_i > 0\ (i=1,3) \\ &(2)\ c_1c_2 > 0 \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با توجه به مقادیر c_1,c_2,c_3 و رابطه (۱۲)، محدوده‌ی مورد نظر برای بهره فیدبک k، به گونه‌ای که سیستم کنترل شده به مبدا همگرا شود، به صورت $k<-7.6$ نتیجه می‌شود. شکل (۱۸) پاسخ‌های زمانی چهار متغیر حالت سیستم کنترل شده را برای بهره فیدبک $k=-30$ نشان می‌دهد. شرایط اولیه سیستم برای شبیه سازی به صورت $(x_0,y_0,z_0,w_0)=(-4,-2,1,3)$ اعمال شده است. نماهای لیاپانوف سیستم کنترل شده با بهره فیدبک $k=-30$، به صورت $L_1=-2.8$، $L_2=-2.57$، $L_3=-2.6$، $L_4=-4$ نتیجه می‌شوند که همگی منفی بوده و تایید کننده این مطلب هستند که سیستم کنترل شده، به سمت مبدا همگرا می‌شود.

[1] Characteristic Equation
[2] Routh-Hurwitz



شکل(۱۸): پاسخ‌های زمانی ۴ متغیر حالت سیستم کنترل شده با بهره فیدبک

$k=-30$

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن ارایه یک سیستم آشوبناک بعد بالای جدید، به صورت تحلیلی و شبیه‌سازی وجود آشوب بعد بالا در این سیستم نشان داده شد. مقایسه دو جدول ارایه شده در بخش ۴ نشان داد که نماهای لیاپانوف مثبت این سیستم در مقایسه با سیستم‌های آشوبناک بعد بالای دیگر بزرگتر می‌باشند. همچنین با محاسبه نقاط تعادل نشان دادیم که این سیستم دارای یک نقطه تعادل یکتا است. این دو ویژگی شاخص باعث می‌شوند که این سیستم آشوبناک به عنوان یک شاخص ارزیابی[3] خوب برای پیاده‌سازی روش‌های کنترل و سنکرون‌سازی آشوب بعد بالا مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان نمونه، کنترل‌کننده فیدبک حالت خطی برای پایدارسازی این سیستم حول نقطه تعادل، مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه برای کارهای بعدی می‌توان انواع روش‌های کنترلی مانند کنترل لغزشی، کنترل‌کننده فیدبک سرعت، کنترل‌کننده فیدبک به صورت توابع غیرخطی، روش‌های کنترل تطبیقی و کنترل مقاوم و انواع سنکرون‌سازی‌ها را بر روی این سیستم پیاده‌سازی کرد.

مراجع

[1] G. Qi, Z. Chen and Z. Yuan, "Model-free control of affine chaotic systems," *Physics Letters A* , vol. 344, pp. 189-202, 2005.
[2] B. R. Nana and P. Woafo, "Active control with delay of horseshoes chaos using piezoelectric absorber on a buckled beam under parametric excitation," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 73-79, 2007.
[3] JH. Park, "Chaos synchronization between two different chaotic dynamical systems," *Chaos, Solitons and Fractals,* vol. 27, pp. 549-554, 2006.
[4] C. Wu, T. Fang and H. Rony, "Chaos synchronization of two stochastic Duffing oscillators by feedback control,"

[3] Benchmark

[17] Z. Chen, Y. Yuang, G. Qi and Z. Yuan, "Anovel hyperchaos system only with one equilibrium," *Physics Letters A*, vol.36 , pp. 696-701, 2007.

[18] G. Qi, G. Chen, S. Du, Z. Chen and Z. Yuan,"Analysis of a new chaotic system," *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications,* vol.352 , pp.295-308, 2005.

[19] A. Chen, J. Lu and S. Yu, "Generating hyperchaotic Lu attractor via state feedback control," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 346, pp. 103-110, 2006.

[20] C. Wang, X. Zhang, Y. Zheng and Y. Li, "A new modifid hyperchoatic Lu system," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 371, pp. 260-272, 2006.

[21] W. Wu, Z. Chen and Z. Yuan, "The evolution of a novel four-dimensional autonomous system: Among 3-torus, limit cycle , 2-torus, chaos and hyperchaos," *Chaos, Solitons and Fractals,* Accepted 2 July 2007.

[22] Y. Li, G. Chen and WKS. Tang, "Controlling a unified chaotic system to hyperchaotic," *IEEE Transaction Circuit System II* , vol. 52, pp. 204-207, 2005.

[23] Q. Li, X. S. Yang and F. Yang, "Hyperchaos in Hopfield-type neural networks," *Neurocomput-ing, vol*. 67, pp. 275-280, 2005.

[24] Z. M. Ge and G. H. Yang, "Hyperchaos of four state autonomous system with three positive lyapunov exponents," *Physics Letters A*, vol.373 , pp. 349-353, 2009.

[25] Q. Jia, " Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control," *Physics Letters A*, vol.366 , pp 217-222, 2007.

[26] J. Wang, Z. Chen and Z. Yuan, " The generation of a hyperchaotic system based on a three dimensional autonomous chaotic system, " *Chynese Physics* , vol. 15, pp. 1216-1225, 2006.

[27] C. Liu, T. Liu, L. Liu, K. Liu, " A novel chaotic attractor," *Chaos, Solitons and Fractals,* vol.22, pp. 1031-10383, 2004.

[28] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, " Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D*, vol. D16, pp. 285-317, 1985.

Chaos, Solitons and Fractals, vol.32, pp. 1201-1207, 2007.

[5] G. Perez and HA. Cerdeira, "Extracting messages masked by chaos," *Physical Review Letters*, vol. 74, pp.1970-1973, 1995.

[6] L. Pecora, " Hyperchaos harnessed," *Physics World*, vol.9, pp. 17-18, 1996.

[7] A. Genys, A. Tamasevicius and A. Bazailiauskas, "Hyperchaos in coupled colpitts oscillators," *Chaos, Solitons and Fractals,* vol. 17 , pp. 349-353, 2003.

[8] S. Cincotti and SD. Stefano, "Complex dynamical behaviors in two non-linearly coupled chua’s circuits," *Chaos, Solitons and Fractals,* vol. 21, pp. 633-641, 2004.

[9] JP. Goedgebuer, L. larger and H. Porle, "Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode," *Physical Review Letters*, vol. 80, pp. 2249-2252, 1998.

[10] C. Li, X. Liao and K. Wang, "Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communication," *Chaos, Solitons and Fractals,* vol.23, pp. 183-193, 2005.

[11] O. E. Rossler, "An equation for hyperchaos," *Physics Letters A* , vol. 71, pp. 155-157, 1979.

[12] D. Cafagna and G. Grassi, "New 3D scroll attractors in hyperchaotic chua’s circuit forming a ring," *International Journal of Bifurcation and Chaos,* vol.13, pp. 2889-2903, 2003.

[13] Y. Li, WKS. Tang and G. Chen, "Hyperchaos evolved from the generalized lorenz equation," *International Journal of Circuit Theory and Applications,* vol. 33, pp. 235-251, 2005.

[14] Y. Li, WKS. Tang and G. Chen, "Generating hyperchaos via state feedback control," *International Journal of Bifurcation and Chaos,* vol. 15, pp. 3367-3375, 2005.

[15] T. Gao, Z. Chen, Z. Yuan and G. Chen, "A hyperchaos generated from chen’s system," , *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.17, pp.471-478, 2006.

[16] T. Gao, G. Chen, Z. Chen and S. Chen, "The generation and circuit implementation of a new hyperchaos upon Lorenz system," *Physics Letters A*, vol.361, pp. 78-86, 2007.