

ارایه‌ی یک روش تحلیلی برای تعیین زمان شروع فاز نهایی در یک موشک تاکتیکی برای برخورد به هدف با زاویه‌ی مناسب

عباس تقی‌پور کمنی^۱، محمدرضا عاروان^۲، علی محمدی^۳

^۱ کارشناس ارشد سیستم‌های هدایت و کنترل دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ataghipoor2006@yahoo.com

^۲ استادیار مجتمع برق و الکترونیک دانشگاه صنعتی مالک اشتر، m_r_arvan@yahoo.com

^۳ استادیار دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ali_mohammadi@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۳/۲۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۷/۱۲)

چکیده: مرحله‌ی نهایی هدایت موشک‌های تاکتیکی، مرحله‌ی برخورد به هدف است. عملکرد موشک در این مرحله وابسته به قانون هدایت، دقت جستجوگر و زاویه‌ی برخورد^۱ است. برای این که سرچنگی بیشترین کارایی را در انهدام هدف داشته باشد، بایستی زاویه‌ی برخورد موشک به هدف قابل کنترل باشد. به علت محدودیت‌های موجود، رسیدن به زاویه‌ی برخورد زیاد امکان‌پذیر نمی‌باشد. در مورد اهداف سطحی مانند تانک و کشتی، زمان شروع فاز نهایی پارامتر تعیین‌کننده‌ای در کنترل زاویه‌ی برخورد است. انتخاب مناسب این زمان، زاویه‌ی برخورد موشک به هدف و عدم برخورد آن به زمین قبل از برخورد به هدف را تضمین می‌کند. در این مقاله با استفاده از روش هدایت ناوبری تناسبی حقیقی بایاس‌دار (BTPN^۲) در فاز نهایی و برآورد زاویه‌ی برخورد نهایی به هدف، الگوریتمی برای تعیین زمان ورود به فاز نهایی ارایه می‌شود تا زاویه‌ی برخورد موشک به هدف کنترل شود. مقدار بیشینه‌ی زاویه‌ی برخورد مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. همچنین شرط وجود جواب برای الگوریتم پیشنهادی به منظور رسیدن به زاویه‌ی برخورد مطلوب، با بیان و اثبات یک قضیه تعیین می‌شود.

کلمات کلیدی: ناوبری تناسبی حقیقی بایاس‌دار (BTPN)، فاز نهایی، زاویه‌ی برخورد به هدف.

An Analytical Method for Calculating Start Time of Terminal Guidance in Order to Achieving Proper Impact Angle in a Tactical Missile

Abstract: The terminal phase is an intercept phase. Missile performance is dependent on: guidance law, seeker accuracy, impact angle. Impact angle should be control for most performance of warhead in target destruction. A great impact angle is not achievable because of some limitations. Start time of terminal phase is significant parameter for control of impact angle in case of surface target such as tanks and ships. This time determines impact angle to target and missile impact to ground avoidance before impact to target. This paper presents an algorithm to determination start time of terminal phase by using of biased true proportional navigation guidance and approximation of impact angle so that controls final impact angle. Maximum value of impact angle analyzes and conditions of solution existence for purposed algorithm to achieve desired impact angle is determined with a theorem declaration and proof.

Keywords: Biased true proportional navigation (BTPN), Terminal phase, Impact angle to target.

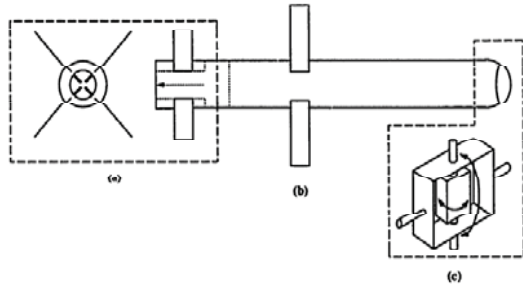
^۱ Impact Angle

^۲ Biased True Proportional Navigation

فهرست متغیرها و علائم:

\wedge : علامت نشان‌دهنده‌ی مقدار تقریبی	M_{y, δ_e} : گشتاور حول محور
N : ثابت ناوبری	γ : بدنی ناشی از انحراف سکان
θ : زاویه‌ی خمشی ^۱ موشک	γ : زاویه‌ی بردار سرعت موشک در صفحه‌ی خمشی نسبت به محور X مرجع
γ_p : زاویه‌ی بردار سرعت موشک در صفحه‌ی خمشی نسبت به محور X مرجع	Z_{δ_e} : نیرو در راستای محور Z
λ_p : زاویه‌ی خط دید هدف در صفحه‌ی خمشی	λ : بدنی ناشی از انحراف سکان
P_k : احتمال انهدام هدف	h : ارتفاع پرواز موشک
P_h : احتمال برخورد به هدف	V_m : سرعت موشک
$P_{k h}$: احتمال انهدام به شرط برخورد	t_{op} : زمان تاخیر خودخلبان
t_{go} : زمان باقیمانده تا هدف	α : زاویه‌ی حمله‌ی خمشی موشک
	R : فاصله‌ی موشک و هدف

۲- شیرجه از بالا احتمال انهدام هدف به شرط برخورد $(P_{k|h})$ را افزایش می‌دهد.



شکل ۱ - ساختار موشک ضدتانک (a) زیرسیستم کنترل و پیشران (b) زیرسیستم بدنه (c) زیرسیستم جستجوگر

در مرجع [3] این موشک بطور کامل معرفی و مدل‌سازی شده است. این موشک در فاز میانی پرواز تا ارتفاع مشخصی صعود می‌کند و سپس با شروع فاز نهایی بر روی هدف شیرجه می‌رود. فاز میانی پرواز این موشک در مراجع [3,4] مورد بررسی قرار گرفته و سیستم هدایت و خودخلبان‌های مربوطه طراحی شده‌اند. با توجه به موارد ذکر شده باید در فاز نهایی بگونه‌ای عمل شود که احتمال انهدام هدف توسط موشک بیشینه شود. برای افزایش احتمال انهدام هدف طبق قانون بیز^۷ (رابطه‌ی (۱))، باید هم احتمال برخورد و هم احتمال انهدام هدف به شرط برخورد زیاد شود [5].

$$P_k = P_h P_{k|h} \quad (1)$$

بنابراین روش هدایتی بکار برده می‌شود که هم دقت زیادی داشته باشد (P_h بیشینه شود) و هم تا حد زیادی بتوان برای افزایش $P_{k|h}$ زاویه‌ی برخورد را کنترل نمود. روش هدایت ناوبری تناسبی و مشتقات آن تا حد زیادی دقت در برخورد به هدف را تضمین می‌کنند [6,7].

در مرجع [8] سه قانون هدایت فاز نهایی با نام‌های ناوبری تناسبی، قانون حاصلضرب ضربدری^۸ و قانون سه‌بعدی مماسی^۹ ارایه شده است. در این مرجع نشان داده شده است که استفاده از دو قانون اولی نمی‌تواند موشک را به زاویه‌ی برخورد مطلوبی برساند، اما استفاده از قانون سه‌بعدی مماسی موفق می‌شود موشک را به زاویه‌ی برخورد مطلوب برساند. در قانون سه‌بعدی مماسی یک منحنی در فضای سه‌بعدی بین موقعیت فعلی موشک و موقعیت نهایی مطلوب موشک با قید خط مماس در نقطه‌ی انتهایی ساخته می‌شود. شتاب جانبی در این روش بسیار بزرگ بوده و از نقطه نظر پیاده‌سازی شاید قابل اعمال نباشد. مشابه با این قانون هدایت در مرجع [9] از یک منحنی مشخصه برای بدست آوردن معادلات ساده‌ی هدایت در فاز نهایی استفاده شده است. این روش هم نشان می‌دهد که قادر است موشک را به زوایای مسیر پرواز نقطه‌ی انتهایی مورد نظر برساند. در مرجع [10] قانون ناوبری تناسبی

۱- مقدمه

در موشک‌های تاکتیکی که علیه اهداف زمینی مانند تانک یا کشتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، احتمال انهدام هدف (P_k) از اهمیت زیادی برخوردار است. علت این امر وجود زره‌های واکنشی در محل برخورد موشک با هدف است [1,2]. در مورد اهدافی مانند تانک، زره موجود در جلوی آن از نوع واکنشی بوده که نفوذ سرچنگی در آن به‌راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد. در مورد اهدافی مانند کشتی هم به علت خط آتشی که در مقابل موشک‌ها در جلوی کشتی ایجاد می‌شود، احتمال برخورد (P_h) خیلی کم می‌شود. بنابراین موشک باید در فاز نهایی بگونه‌ای هدایت شود که احتمال انهدام هدف بیشینه شود. موشک مورد بررسی در این مقاله، یک موشک تاکتیکی زمین به زمین ضدتانک است که مشخصات کلی آن در شکل ۱ نشان داده شده است. موشک دارای بالک‌های وسطی برای پایداری و ایجاد نیروی برآ^۳ بوده و نیز دارای بالک‌های عقبی برای اعمال نیروی کنترلی موشک است. موشک متقارن و چرخش پایدار^۴ بوده و به‌صورت گردش با سکان (STT)^۵ کنترل می‌شود. زیرسیستم عملگر آن از نوع الکترومکانیکی بوده و امکان کنترل آیرودینامیکی و بردار پیشران (TVC)^۶ را فراهم می‌آورد. تیغه‌هایی در انتهای نازل موتور قرار داده شده‌اند که محور آنها با محور بالک‌های کنترلی عقب موشک یکی است. هم بالک‌های کنترلی و هم تیغه‌ها به‌صورت ساختار \times روی موشک تعبیه شده‌اند. نکات کلیدی در مورد زیرسیستم سرچنگی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۱- سرچنگی به‌طور دقیق در راستای بدنه قرار دارد.

¹ Pitch
² Elevator
³ Lift
⁴ Roll Stabilized
⁵ Skid To Turn
⁶ Thrust Vector Control

⁷ Bayes Rule
⁸ Cross-Product Law
⁹ Tangent Cubic Law

صورت تحلیلی محاسبه شده است. در بخش چهارم شرط وجود جواب برای الگوریتم کنترل زاویه‌ی برخورد، با بیان و اثبات یک قضیه مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در بخش بعد نتایج بررسی‌ها و تقریب‌های انجام شده با استفاده از شبیه‌سازی شش درجه آزادی موشک تاکتیکی نمونه مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. نتیجه‌گیری از مباحث مطرح شده بخش انتهایی مقاله را تشکیل می‌دهد.

۲- برآورد زاویه‌ی برخورد برای تعیین زمان ورود به فاز نهایی

هدف از فاز میانی رساندن موشک به منطقه‌ی هدف و فراهم کردن شرایط موشک برای ورود به فاز نهایی است. تحلیل زمان خروج از فاز میانی وابسته به نوع هدایت موشک در فاز نهایی است. مقصود از فاز نهایی، هدایت موشک برای برخورد به هدف با برآورده کردن شرایط برخورد است. برای افزایش احتمال انهدام هدف هم باید احتمال برخورد و هم احتمال انهدام به شرط برخورد زیاد شود. بنابراین باید بدنبال روش هدایتی رفت که هم دقت زیادی داشته باشد و هم بتوان تا حد زیادی زاویه‌ی برخورد را برای افزایش P_{kill} کنترل کرد. برای رسیدن به این مطلوب از یکی از مشتقات روش هدایت ناوبری تناسبی با نام ناوبری تناسبی حقیقی بایاس‌دار استفاده می‌شود. رابطه‌ی اساسی این روش به صورت زیر است:

$$\dot{\gamma}_{pc} = N (\dot{\lambda}_p + \dot{\lambda}_{pb}) \quad (2)$$

که در آن $\dot{\gamma}_{pc}$ فرمان اعمالی به خودخلبان، N ثابت ناوبری، $\dot{\lambda}_p$ نرخ چرخش خط دید و $\dot{\lambda}_{pb}$ بایاس نرخ چرخش خط دید^۳ است. $\dot{\lambda}_{pb}$ براساس پارامترهای ثابت ناوبری و مقدار اولیه‌ی نرخ چرخش خط دید ($\dot{\lambda}_{p0}$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\lambda}_{pb} = \frac{2-N}{N} \dot{\lambda}_{p0} \quad (3)$$

در این حالت، نرخ چرخش خط دید در شرایط ایده‌آل در طی فاز نهایی ثابت خواهد ماند [17]. با توجه به روابط فوق قانون هدایت بکار برده شده در فاز نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\gamma}_{pc} = N \left(\dot{\lambda}_p + \frac{2-N}{N} \dot{\lambda}_{p0} \right) \quad (4)$$

حال با توجه به روش هدایت بکار گرفته شده، باید زمان شروع انتقال به فاز نهایی تعیین شود. زمان شروع وابسته به زاویه‌ی برخورد نهایی مطلوب موشک ($\bar{\theta}_f$)، زمان برخورد به هدف (t_{go}) و رابطه‌ی (۴) است. زاویه‌ی برخورد نهایی موشک در موشک‌های ضدتانک بخاطر این که جهت سرچنگی در بدنه‌ی موشک ثابت شده است، مسأله‌ی بسیار مهمی است. زاویه‌ی برخورد ($\hat{\theta}_f$) با توجه به روش هدایت و

بایاس‌داری پیشنهاد شده است که زاویه‌ی برخورد مطلوب و فاصله‌ی از دست‌دهی کوچکی را نتیجه می‌دهد. همچنین یک روش حل عددی در مرجع [11] برای کنترل زاویه‌ی برخورد در زمان بهینه پیشنهاد شده است. در دو مرجع اخیر فرض شده است که سرعت موشک در طی فاز نهایی ثابت است. در مرجع [12] یک روش آشیان‌یابی فعال بهینه برای کنترل زاویه‌ی برخورد پیشنهاد شده است. در این روش قانون هدایت شامل حل مسأله‌ی کنترلی حداقل کردن انرژی و قیدهایی برای کاهش فاصله‌ی از دست‌دهی و کنترل زاویه‌ی برخورد است. در این روش سرعت موشک متغیر است و فرض شده است که سرعت به صورت نمایی از یک مقدار اولیه کاهش می‌یابد. برای پیاده‌سازی این روش تقریب زمان باقیمانده تا هدف^۱ مورد نیاز است. در مرجع [13] قوانین هدایت براساس روش‌های کنترل مقاوم برای کنترل وضعیت بدنه‌ی موشک نسبت به هدف در نقطه‌ی برخورد ارایه شده است. در مرجع [14] یک روش هدایت براساس ناوبری دایره‌ای ایجاد شده است. این روش بر این اصل استوار است که موشک مسیری به صورت یک منحنی دایره‌ای شکل را به سمت هدف طی می‌کند که کنترل زاویه‌ی برخورد را نتیجه خواهد داد. در روابط این مرجع هم از اثرات آیرودینامیکی از قبیل نیروی پسا^۲ صرف‌نظر شده و همچنین سرعت موشک ثابت فرض شده است. مشابه با مرجع [13] در [15] یک رابطه‌ی کلی برای قانون هدایت بهینه با هدف حداقل کردن انرژی با استفاده از مدل خطی شده و فرض ثابت بودن هدف ارایه شده است. در مرجع [16] یک رابطه‌ی جدید برای قانون هدایت فاز نهایی ارایه شده است که زاویه‌ی برخورد را کنترل کرده و فاصله‌ی از دست‌دهی را حداقل می‌کند. این رابطه براساس روش کنترل فازی بنا نهاده شده است. در این روش نیازی به خطی‌سازی معادلات درگیری موشک-هدف نمی‌باشد و شبیه‌سازی انجام شده در این مرجع نشان می‌دهد که قانون هدایت پیشنهاد شده عملکرد قابل قبولی دارد.

در روش‌های توسعه داده شده در مراجع ذکر شده دینامیک موشک در نظر گرفته نشده و بحث عمده تنها روش هدایت بوده است. در روش ارایه شده در این مقاله، به کمک حالت خاصی قانون هدایت BTPN، معادلات هدایت فاز نهایی را به شکل ساده‌ای بدست آورده و سپس با استفاده از یک الگوریتم، زمان ورود به فاز نهایی تقریب زده می‌شود تا زاویه‌ی برخورد مطلوب حاصل گردد. قانون هدایت BTPN حداقل شدن فاصله‌ی از دست‌دهی را تضمین می‌کند. در این روش اثرات آیرودینامیکی به صورت خطی در نظر گرفته شده‌اند و سرعت نیز در فاز نهایی ثابت فرض شده است.

این مقاله بصورتی که در ادامه گفته خواهد شد، سازمان‌دهی شده است. در بخش دوم روش برآورد زاویه‌ی برخورد، برای تعیین زمان ورود به فاز نهایی بیان می‌شود. در بخش سوم همچنین زاویه‌ی برخورد بیشینه به

¹ Time to Go

² Drag

³ LOS Rate Bias

۳- حداکثر زاویه‌ی برخورد

برای محاسبه‌ی حداکثر زاویه‌ی برخورد فرض می‌شود که سیستم عملگر ایده‌آل بوده و فرمان خودخلبان را بدون تأخیر اجرا می‌کند. با توجه به شکل ۲ رابطه‌ی زیر را برای $\dot{\lambda}_p$ در هنگام شروع فاز نهایی می‌توان بدست آورد.

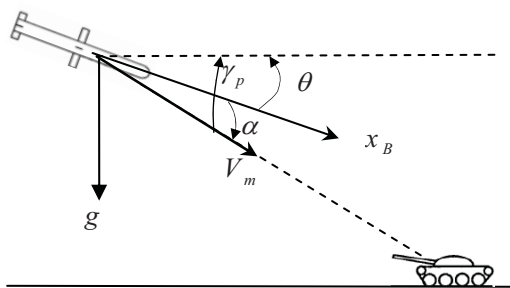
$$\sin \lambda_p = \frac{h}{R} \Rightarrow \dot{\lambda}_p \cos \lambda_p = \frac{h\dot{R} - h\dot{R}}{R^2} \quad (10)$$

در انتهای فاز نهایی تغییرات ارتفاع (\dot{h}) تقریباً برابر صفر است. همچنین رابطه‌ی زیر برای \dot{R} وجود دارد:

$$\dot{R} = -V_m \cos \lambda_p \quad (11)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\dot{\lambda}_p \cos \lambda_p = \frac{h\dot{R}}{R^2} = -\frac{hV_m \cos \lambda_p}{R^2} \Rightarrow \dot{\lambda}_p = -\frac{hV_m}{R^2} \quad (12)$$



شکل ۲- تعریف مشخصات هندسی فاز نهایی

برای رسیدن به حداکثر زاویه‌ی برخورد، تا حد امکان باید $\dot{\lambda}_p$ زیاد شود. این امر طبق رابطه‌ی فوق در صورتی اتفاق می‌افتد که مقدار فاصله‌ی موشک و هدف (R) کمینه شود (توجه شود که کنترلی روی ارتفاع و سرعت وجود ندارد). اما به خاطر میدان نظر محدود موشک نمی‌توان خیلی به هدف نزدیک شد. با نزدیک‌تر شدن موشک به هدف در ابتدای فاز نهایی مقدار t_{go} کم شده و این عامل باعث کم شدن زاویه‌ی برخورد می‌شود. پس نمی‌توان تنها عامل $\dot{\lambda}_p$ را در حداکثر کردن زاویه‌ی برخورد در نظر گرفت. زاویه‌ی برخورد از حل دستگاه معادلات زیر بدست خواهد آمد [3] و از روی آن مقدار بیشینه‌ی آن محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{\gamma_{pf}}{t_{go}} = -\frac{2V_m \sin^2 \lambda_p}{h} + \frac{g \cos \gamma_{pf}}{V_m} \\ \gamma_{pf} t_{go} = -\frac{2h}{V_m} \end{cases} \quad (13)$$

با حل این دستگاه معادلات فوق می‌توان مقدار γ_{pf} و t_{go} را بدست آورد. حال زاویه‌ی حمله‌ی نهایی بدست آورده می‌شود:

$$\alpha_f = \left(2\dot{\lambda}_p + \frac{g \cos \gamma_{pf}}{V_m} \right) \tau \quad (14)$$

بسط معادلات حرکت موشک در فاز نهایی به صورت زیر بدست خواهد آمد [3,17]:

$$\hat{\theta}_f = \hat{\gamma}_{pf} (\text{guidance}) + \hat{\alpha}_f \quad (5)$$

که با توجه به فرض ثابت بودن نرخ چرخش خط دید در فاز نهایی:

$$\hat{\gamma}_{pf} (\text{guidance}) = 2\hat{\lambda}_{p0} = 2\hat{\lambda}_{pf} \quad (6)$$

$$\hat{\gamma}_{pf} (\text{guidance}) = \hat{\gamma}_{pf} = \hat{\gamma}_{p0} + \hat{\gamma}_{pf} (\text{guidance}) \hat{t}_{go} \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_f = \left(\hat{\gamma}_{pf} (\text{guidance}) + \frac{g \cos \hat{\gamma}_{pf} (\text{guidance})}{V_m} \right) \hat{t} \quad (8)$$

$$\hat{t} = \frac{M_{y\delta e}}{F}, \quad F = \tilde{Z}_{\delta e} \tilde{M}_{y\alpha} - \tilde{Z}_{\alpha} \tilde{M}_{y\delta e} \quad (9)$$

در نهایت جهت شروع هدایت فاز نهایی، معیار زیر با توجه به نتایج بدست آمده، معرفی می‌شود:

الف - اگر $\hat{\theta}_f \leq \bar{\theta}_f$ باشد آنگاه هدایت فاز نهایی شروع شود (توجه شود که $\bar{\theta}_f$ و $\hat{\theta}_f$ منفی هستند).

ب - اگر $\hat{\theta}_f > \bar{\theta}_f$ باشد آنگاه روش هدایت فاز میانی ادامه داده شود. این معیار باعث می‌شود تا شرایط تعیین شده برای برخورد تامین گردد. محدودیت‌های زیر بایستی در تحلیل‌ها برای رسیدن به $|\bar{\theta}_f|$ بزرگ در نظر گرفته شوند:

۱- محدودیت میدان نظر^۱ (FOR)

وقتی که هدف از میدان نظر خارج شود، از دست رفتن فرآیند قفل روی هدف اتفاق می‌افتد. بنابراین ممکن است لازم باشد که موشک در ارتفاع پایین‌تری معیار بیان شده را برآورده کند. در این حالت موشک در هنگام برخورد به $\bar{\theta}_f$ نخواهد رسید.

۲- محدودیت مانورپذیری بدنه‌ی موشک

اگر شتاب اعمالی از حد شتاب‌پذیری بدنه فراتر رود، ناپایداری بدنه‌ی موشک اتفاق می‌افتد. ناپایداری بدنه مانع برخورد موشک به هدف می‌شود، بنابراین BTPN باید با در نظر گرفتن حد مانورپذیری بدنه، طراحی شود.

۳- محدودیت سرعت و زاویه‌ی بالک‌های کنترلی

زیرسیستم کنترل، خمش، گردش^۲ و چرخش^۳ بدنه‌ی موشک را کنترل می‌کند. فراتر رفتن از محدودیت‌های زیرسیستم کنترل، باعث از دست رفتن هدف می‌شود. بنابراین در طراحی اولیه‌ی BTPN، باید اشباع کنترل را پیش‌بینی کرد.

در بخش بعد حداکثر زاویه‌ی برخوردی که موشک با استفاده از قانون هدایت رابطه‌ی (۴)، خواهد داشت، بدست آورده می‌شود.

¹ Field of Regard

² Yaw

³ Roll

آنگاه شرط رسیدن به زاویه‌ی برخورد مورد نظر به صورت زیر خواهد

$$\frac{hg}{V_m^2} < 2 \sin^2 \lambda_p \quad (17)$$

که در رابطه‌ی فوق g شتاب جاذبه‌ی زمین است.

اثبات. همان‌طور که در بخش قبل ملاحظه شد زاویه‌ی برخورد از حل دستگاه معادلات (۱۳) بدست می‌آید. با حذف زمان در دستگاه معادلات (۱۳):

$$\frac{V_m \gamma_{pf}^2}{2h} = -\frac{2V_m \sin^2 \lambda_p}{h} + \frac{g \cos \gamma_{pf}}{V_m} \quad (18)$$

$$\gamma_{pf}^2 + \frac{2hg \cos \gamma_{pf}}{V_m^2} - 4 \sin^2 \lambda_p = 0$$

معادله‌ی فوق با روش‌های معمولی حل نشده و نیاز است تا بجای $\cos \gamma_{pf}$ تقریبی از بسط آن را نوشته شود:

$$\cos \gamma_{pf} = 1 - \frac{\gamma_{pf}^2}{2!} + \frac{\gamma_{pf}^4}{4!} - \frac{\gamma_{pf}^6}{6!} + \dots \approx 1 - \frac{\gamma_{pf}^2}{2} + \frac{\gamma_{pf}^4}{24} \quad (19)$$

بنابراین:

$$\gamma_{pf}^2 + \frac{2hg}{V_m^2} \left(1 - \frac{\gamma_{pf}^2}{2} + \frac{\gamma_{pf}^4}{24} \right) - 4 \sin^2 \lambda_p = 0$$

$$\frac{hg}{12V_m^2} \gamma_{pf}^4 + \left(1 - \frac{hg}{V_m^2} \right) \gamma_{pf}^2 + \frac{2hg}{V_m^2} - 4 \sin^2 \lambda_p = 0 \quad (20)$$

این معادله یک معادله‌ی درجه‌ی دو است که دارای دو جواب برای γ_{pf}^2 است، پس:

$$a\gamma_{pf}^4 + b\gamma_{pf}^2 + c = 0$$

$$a = \frac{hg}{12V_m^2} > 0$$

$$b = 1 - \frac{hg}{V_m^2} > 0, \quad c = \frac{2hg}{V_m^2} - 4 \sin^2 \lambda_p$$

یکی از دو جواب معادله‌ی درجه‌ی دوم با توجه به روابط فوق منفی بوده و قابل قبول نمی‌باشد. ریشه‌ی دیگر به صورت زیر بدست آورده می‌شود:

$$\gamma_{pf}^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \gamma_{pf} = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

ریشه‌ی قابل قبول معادله‌ی (۲۰) مورد بررسی قرار داده می‌شود. شرط وجود جواب این است که مقدار ریشه مثبت باشد بنابراین:

$$\gamma_{pf}^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \Rightarrow b^2 < b^2 - 4ac \Rightarrow -ac > 0$$

با توجه به اینکه $a > 0$ پس باید $c < 0$ باشد. لذا:

در نتیجه زاویه‌ی برخورد برابر خواهد بود با:

$$\theta_f = \gamma_{pf} + \alpha_f \quad (15)$$

الگوریتم فوق در محاسبه‌ی زاویه‌ی برخورد یک نقص دارد. در عمل از زمان اعمال $\dot{\gamma}_p$ به خودخلبان، تا اجرای آن به اندازه‌ی t_{ap} تأخیر وجود دارد. این پدیده به علت غیرحداقل فاز (NMP)^۱ بودن این نوع خودخلبان است. در این مدت ممکن است هدف از میدان نظر خارج شود. بنابراین الگوریتم تصحیح مقدار محاسبه شده‌ی θ_f به صورت زیر ارایه می‌شود:

۱- پس از محاسبه‌ی t_{go} در الگوریتم قبلی، مقدار t_{ap} را به آن افزوده و مقدار جدید t_{go} بدست آورده می‌شود.
۲- مقدار جدید R با تقریب توسط رابطه‌ی زیر حساب می‌شود.

$$R = R + V_m t_{ap} \quad (16)$$

۳- با قرار دادن مقدار جدید R در رابطه‌ی (۱۲) مقدار جدید λ_p محاسبه می‌شود.

۴- با حل دوباره‌ی دو معادله‌ی (۱۳) می‌توان مقدار جدید γ_{pf} را بدست آورد.

۵- ابتدا α_f از رابطه‌ی (۱۴) و سپس θ_f از رابطه‌ی (۱۵) محاسبه می‌شوند.

این الگوریتم با تقریب خوبی مقدار زاویه‌ی برخورد را به ما می‌دهد. منشأ عمده‌ی خطا، در تقریب سرعت و تقریب در محاسبه‌ی α_f است. با بررسی دستگاه معادلات (۱۳) می‌توان نتیجه گرفت که مقدار γ_{pf} تابعی از ارتفاع پرواز و زاویه‌ی خط دید در ابتدای فاز نهایی است. بنابراین مقدار حداکثر این زاویه نیز تابعی از این دو پارامتر خواهد بود. اگر فرض شود که موشک در یک ارتفاع ثابت در حال پرواز است، آنگاه مقدار زاویه‌ی برخورد حداکثر در زاویه‌ی خط دید بیشینه یعنی در FOR جستجوگر اتفاق می‌افتد.

۴- بررسی شرایط صحت الگوریتم خروج از فاز

میانی

شرط صحت الگوریتم خروج از فاز میانی برای رسیدن به زاویه‌ی برخورد مورد نظر به صورت یک قضیه بیان می‌شود.

قضیه. اگر در مورد یک موشک تاکتیکی فرض‌های زیر در نظر گرفته شود:

- ۱- در فاز میانی به صورت افقی در ارتفاع ثابت h پرواز کند.
- ۲- سرعت آن در فاز نهایی ثابت و برابر V_m باشد.
- ۳- مقدار زاویه‌ی خط دید در ابتدای فاز نهایی برابر با λ_p باشد.
- ۴- در فاز نهایی موشک از قانون هدایت رابطه‌ی (۴) استفاده کند.

¹ Non Minimum Phase

$$h < \frac{2V_m^2 \sin^2 \lambda_p}{g} \Rightarrow \sin^2 \lambda_p > \frac{hg}{2V_m^2} \Rightarrow \lambda_p > \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{hg}{2V_m^2}} \right) \quad (23)$$

یا اینکه:

$$\lambda_{p(\min)} = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{hg}{2V_m^2}} \right) \quad (24)$$

این مقدار $\lambda_{p(\min)}$ با قرار گرفتن در الگوریتم مقدار حداقل زاویه‌ی برخورد یا θ_{\min} را خواهد داد. پس دو حد برای زاویه‌ی برخورد با توجه به روش هدایت فاز میانی و نهایی بدست آمد.

5- شبیه‌سازی و بررسی الگوریتم

در این بخش الگوریتم محاسبه‌ی بیشینه‌ی زاویه‌ی برخورد معرفی شده در بخش قبل، امتحان شده و تطابق حداکثر زاویه‌ی بدست آمده از آن روش با نتیجه‌ی گرفته شده از شبیه‌سازی، بررسی می‌شود. با توجه به نتایج شبیه‌سازی در بخش قبل مقادیر پارامترهای موشک در انتهای فاز میانی بطور تقریبی به صورت جدول 1 بدست آمدند.

با توجه به نتایج حاصل شده الگوریتم محاسبه‌ی زاویه‌ی برخورد بیشینه به صورت زیر اجرا می‌شود.

1- محاسبه‌ی فاصله موشک تا هدف در انتهای فاز میانی:

$$R_{\min} = \left| \frac{h}{\sin \lambda_{p \max}} \right| = \frac{150}{\sin 25^\circ} = 354.93m$$

جدول 1- مقادیر اولیه در انتهای فاز میانی [17]

نام متغیر	مقدار آن در انتهای فاز میانی	توضیحات
V_m	$125 \frac{m}{s}$	سرعت موشک
h	150m	ارتفاع حداکثر
γ_p	0 deg	زاویه‌ی مسیر در کانال خمش
t_{ap}	0.15	تاخیر خودخلبان $\dot{\gamma}_p$
τ	1	ثابت دینامیکی
$\lambda_{p \max}$	-25 deg	حداکثر زاویه‌ی

2- محاسبه‌ی زاویه‌ی مسیر و زمان مانده با استفاده از دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \gamma_{pf(\max)} = -2 \frac{V_m \sin^2 \lambda_p}{h_{\max}} + \frac{g \cos \gamma_{pf(\max)}}{V_m} \\ t_{go(\min)} \\ \gamma_{pf(\max)} t_{go(\min)} = -\frac{2h}{V_m} \end{cases} \quad (13)$$

جواب تقریبی دستگاه فوق با استفاده روش بسط تیلور توسط حل معادله‌ی (20) حاصل می‌شود:

$$c = \frac{2hg}{V_m^2} - 4 \sin^2 \lambda_p < 0 \Rightarrow \frac{hg}{V_m^2} < 2 \sin^2 \lambda_p \quad (21)$$

عبارت فوق شرط وجود جواب است و بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

نتایج گرفته شده از این قضیه به صورت زیر بیان می‌شوند:

1- در صورتی که در فاز میانی، ارتفاع موشک از یک ارتفاع آستانه بیشتر شود، بطوریکه رابطه‌ی (21) صدق نکند، الگوریتم درست عمل نکرده و موشک به زاویه‌ی برخورد مطلوب نمی‌رسد.

2- هرچه سرعت موشک در فاز میانی و نهایی کمتر باشد برای رسیدن به یک زاویه‌ی برخورد یکسان، این ارتفاع بیشینه کمتر می‌شود.

3- برای یک ارتفاع پرواز مشخص، نمی‌توان از الگوریتم انتظار داشت که زاویه‌ی برخورد از یک زاویه‌ی برخورد حداقل، کمتر شود.

یعنی ممکن است مقادیر پارامترهای رابطه‌ی (21) به گونه‌ای باشد که برطبق قانون هدایت بکار برده، موشک با زاویه‌ی برخورد مورد نظر به هدف برخورد ننماید. درک نتیجه‌ی گرفته شده کمی سخت است اما با کنکاش بیشتر در مورد این قضیه، موضوع روشن‌تر خواهد شد. اگر شرط (17) برحسب h بدست آورده شود:

$$h < \frac{2V_m^2 \sin^2 \lambda_p}{g} \quad (22)$$

عبارت فوق نشان می‌دهد که اگر ارتفاع موشک و زاویه‌ی λ_p گونه‌ای باشند که شرط برقرار نشود، الگوریتم با فرمان هدایت بکار برده شده برای زاویه‌ی مورد نظرمان جوابی نداشته و با زاویه‌ی دیگری به هدف برخورد خواهد کرد. این مسأله هنگامی اتفاق می‌افتد که موشک برای رسیدن به زاویه‌ی برخورد کوچک به ارتفاع بالایی برود.

در این حالت موشک در فاز میانی به مرحله‌ی پرواز ارتفاع ثابت نخواهد رسید و قبل از رسیدن به ارتفاع مورد نظر وارد فاز نهایی می‌شود بنابراین در نهایت با زاویه‌ی مورد نظر، به هدف برخورد نمی‌کند.

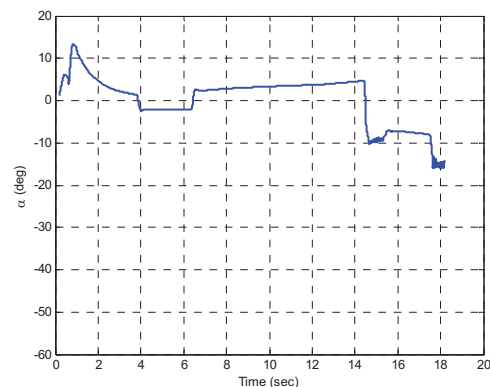
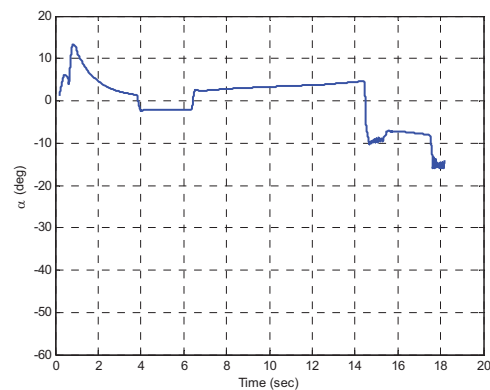
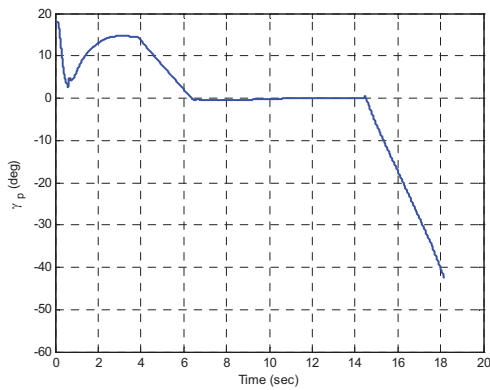
جواب این سوال که چرا با افزایش ارتفاع امکان عدم برخورد موشک به هدف با زاویه‌ی مطلوب ایجاد می‌شود، نقطه‌ی کلیدی حل مسأله خواهد بود. در اوایل پرواز موشک (قبل از رسیدن به مرحله‌ی پروازی

ارتفاع ثابت) ارتفاع، سرعت موشک و زاویه‌ی λ_p در حال افزایش هستند. با نگاه به رابطه‌ی (22) و این که افزایش سرعت موشک و زاویه‌ی λ_p نسبت به افزایش ارتفاع اثر غالب دارد (افزایش سرعت

موشک بخوبی افزایش ارتفاع را جبران می‌کند). در نتیجه مقدار λ_p در حال افزایش خواهد بود. این افزایش سبب ایجاد جوابی برای زاویه‌ی

برخورد در الگوریتم شده و باعث می‌شود که الگوریتم بجای این که در فاز ارتفاع ثابت، فرمان شروع فاز نهایی را بدهد، در مرحله‌ی صعود فرمان ورود به فاز نهایی را صادر کند. پس می‌توان نتیجه گرفت، علاوه

براینکه در مقدار بیشینه‌ی زاویه‌ی برخورد محدودیت وجود دارد در مقدار کمینه‌ی آن نیز محدودیت وجود خواهد داشت. طبق رابطه‌ی (21):



شکل ۳- به ترتیب از بالا زاویه‌ی مسیر در کانال خمش، زاویه‌ی حمله و زاویه‌ی برخورد برحسب زمان پرواز

۶- نتیجه‌گیری

کنترل زاویه‌ی برخورد برای عملکرد بهتر سرچنگی و بالا بردن احتمال انهدام هدف مورد نظر موشک‌های ضدتانک است. در این مقاله الگوریتم پیشنهادی برای کنترل زاویه‌ی برخورد بر روی شبیه‌سازی شش درجه آزادی مورد ارزیابی قرار گرفت و زاویه‌ی برخورد حداکثر با روش تئوری مقایسه گردید. همانطور که مشاهده شد مقدار زاویه‌ی حداکثر بدست آمده از روش تئوری با مقدار بدست آمده از شبیه‌سازی انطباق خوبی داشت. ولی این مقدار زاویه‌ی حداکثر به علت میدان نظر محدود جستجوگر و شتاب جانبی محدود موشک خیلی زیاد نشد. لازم است تا در بررسی‌های آینده برای رسیدن به زاویه‌ی بیشتر، روش‌های مناسب‌تری طراحی و بکار گرفته شود. البته می‌توان زاویه‌ی نصب

$$\frac{hg}{12V_m^2} \gamma_{pf}^4 + \left(1 - \frac{hg}{V_m^2}\right) \gamma_{pf}^2 + \frac{2hg}{V_m^2} - 4 \sin^2 \lambda_p = 0$$

$$\Rightarrow 0.0085 \gamma_{pf}^4 + 0.898 \gamma_{pf}^2 - 0.5102 = 0$$

$$\gamma_{pf} = -0.7518^{\text{rad}} = -43^\circ$$

۳- محاسبه‌ی زمان باقیمانده تا هدف:

$$\gamma_{pf} t_{go} = -\frac{2h_{\max}}{V_m}$$

$$\Rightarrow t_{go} = -\frac{2h_{\max}}{V_m \gamma_{pf}} = -\frac{2 \times 150}{125 \times (-0.7518)} = 3.19s$$

۴- محاسبه‌ی زمان مانده‌ی جدید با توجه به تاخیر خودخلبان $\dot{\gamma}_p$:

$$t_{go} = t_{go} + t_{ap} = 3.19 + 0.15 = 3.34s$$

۵- محاسبه‌ی مقدار جدید γ_{pf} :

$$\gamma_{pf} t_{go} = -\frac{2h_{\max}}{V_m}$$

$$\Rightarrow \gamma_{pf} = -\frac{2 \times 150}{125 \times 3.34} = -0.7185^{\text{rad}} = -41.17^\circ$$

۶- محاسبه‌ی فاصله از هدف جدید:

$$R = R + t_{ap} V_m = 354.93 + 0.15 \times 125 = 373.68m$$

۷- با قرار دادن مقدار جدید R در رابطه‌ی (۱۲) مقدار جدید $\dot{\lambda}_p$ محاسبه می‌شود.

$$\dot{\lambda}_p = \frac{-hV_m}{R^2} = \frac{-150 \times 125}{373.68^2} = -0.1342^{\frac{\text{rad}}{s}} = -7.689^{\frac{\text{deg}}{s}}$$

۸- محاسبه‌ی زاویه‌ی حمله‌ی نهایی:

$$\alpha_f = \left(2\dot{\lambda}_p + \frac{g \cos \gamma_{pf}}{V_m} \right) \tau$$

$$\Rightarrow \alpha_f = \left(-2 \times 0.1342 + \frac{9.8 \times \cos(-41.17)}{125} \right) \times 1 = -0.209^{\text{rad}} = -12^\circ$$

۹- محاسبه‌ی زاویه‌ی برخورد:

$$\theta_f = \gamma_{pf} + \alpha_f = -41.7^\circ - 12^\circ = -53.7^\circ$$

از روش حل عددی معادلات (بدون استفاده از تقریب بسط تیلور) زاویه‌ی برخورد برابر با -55.53° شد که نشان می‌دهد، تقریب بکار برده شده مناسب است. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی شش درجه آزادی زاویه‌ی برخورد حداکثر برابر با -56.75° شد (شبیه‌سازی در شرایط ایده‌آل مجموعه‌ی عملگر انجام شد) که نشان از اعتبار الگوریتم پیشنهادی دارد. نتایج شبیه‌سازی در شکل ۳ نشان داده شده است.

- [7] Rafael Yanushevsky, *Modern Missile Guidance*, CRC Press, 2008.
- [8] Page, J.A. & Rogers, R.O., *Guidance and Control for Maneuvering Reentry Vehicles*, In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 659-664, December 1977.
- [9] Cameron, J.D.M., *Explicit Guidance Equations for Maneuvering Reentry Vehicles*, In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 670-678, December 1977.
- [10] Kim, B.S., Lee, J.G. & Han, H.S., *Biased PNG law for impact with angular constraint*, *IEEE Trans. Aero. Electro. Syst.*, 34(1), 277-287, 1998.
- [11] Song, T.L. & Shin, S.J., *Time Optimal Impact Angle Control for Vertical Plan Engagements*, *IEEE Trans. Aero. Electro. Syst.*, 35(2), 738-742, 1999.
- [12] Song, T.L. & Shin, S.J., *Impact Angle Control for Planar Engagement*, *IEEE Trans. Aero. Electro. Syst.*, 35(4), 1439-1444, 1999.
- [13] Savkin, A.V.; Patheirana, P.N. & Faruqi, F.A., *The Problem of Precision Missile Guidance: LQR and H^∞ Control Frameworks*, In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1535-1540, December 2001.
- [14] Manchester, I.R. & Savkin, A.V., *Circular Navigation Guidance Law for Precision Missile/Target Engagements*, In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1287-1292, December 2002.
- [15] Ryoo, C.K.; Cho, H. & Tahk, M.J., *Closed-Form Solutions of Optimal Guidance with Terminal Impact Angle Constraint*, In *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pp. 504-509, 2003.
- [16] Samir Chabra and S.E. Talole, *Fuzzy Logic-Based Terminal Guidance with Impact Angle Control*, *Defense Science Journal*, Vol. 57, No. 4, pp 351-360, July 2007.
- [17] Terry Alan Rank, *Short-Range, Surface-to-Surface Missile Guidance for Nonlinear, Time Varying Target State Estimation and Missile Dynamics*, University of Texas at Dallas, December 1995.

سرجنگی را طوری طراحی کرد که موشک در این زاویه بهترین عملکرد را داشته باشد. همچنین با تغییر روش هدایت فاز میانی می‌توان به زاویه‌ی برخورد بیشتر رسید. یک روش این است که ارتفاع پرواز در فاز میانی زیادتر شود که این روش هم برای زیرسیستم ردگیری مناسب می‌باشد. بنظر می‌رسد با کار بیشتر و بررسی روش‌های هدایت در فاز نهایی بتوان زاویه‌ی برخورد را بیشتر نمود. الگوریتم پیشنهادی در رسیدن به هر زاویه‌ی برخوردی دارای جواب نبود که با بیان یک قضیه شرط وجود جواب برای این الگوریتم بدست آمد. این شرط زاویه‌ی برخوردی را نتیجه داد که در واقع حداقل زاویه‌ی برخوردی است که سیستم هدایت و کنترل رسیدن به آن را تضمین می‌کند. بنابراین الگوریتم پیشنهادی کنترل زاویه‌ی برخورد بین دو مقدار کمینه و بیشینه را می‌تواند نتیجه دهد.

مراجع

- [1] M. Brand, M. Mayseless, R. Genussov, "Analytical Model to Analyze the Passive Reactive Cassettes", 19th International Symposium of Ballistics, Interlaken, Switzerland, 7-11 May 2001.
- [2] A. Koch and F. Hällér, "Sensitivity of Era-Boxes Initiated by Shaped Charge Jets", 19th International Symposium of Ballistics, Interlaken, Switzerland, 7-11 May 2001.
- [۳] عباس تقی‌پور کمنی، هدایت فاز میانی یک موشک تاکتیکی، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، بهار ۱۳۸۸.
- [۴] عباس تقی‌پور کمنی، محمدرضا عاروان و علی محمدی، طراحی هدایت فاز میانی برای یک موشک تاکتیکی نمونه، ارسال شده برای مجله‌ی علمی ترویجی دانشگاه مالک اشتر
- [5] R. G. Brown, *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*, John Wiley & Sons, 1983.
- [6] Paul Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2002.