مجله کنترل
جلد ۳، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۸، صفحه ۵۷-۴۶

رویکرد جدیدی بر نمایش لم حقیقی کراندار در سیستمهای هم‌تراز

آلاء شریعتی [۱]، حمیدرضا تقی‌راد [۲]، بتول لبیبی [۳]

[۱] دانشجوی دکترای مهندسی برق، گروه کنترل، ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، shariati@eetd.kntu. ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، taghirad@kntu. ac.ir

[۳] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، labibi@kntu. ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۹/۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۱۲/۱)

چکیده: معیار لم حقیقی کراندار برای سیستمهای هم‌تراز در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است، که در آن دو لم حقیقی کراندار بصورت وابسته به تاخیر بیان می‌شود. با بهره‌گیری از تئوری لیاپانوف، نمایشی از یک لم حقیقی کراندار بصورت وابسته به تاخیر ارائه می شود و با استفاده از تبدیل مدل توصیفی برای سیستم و بکارگیری یک تابع لیاپانوف-کراسوسکی جدید، یک لم حقیقی کراندار دیگری که نسبت به لم قبلی از محافظه‌کاری کمتری برخوردار است، بیان می شود. لم‌های ارائه شده، شرایط کافی را برای قرار گرفتن نُرم H_∞ سیستم پایین‌تر از یک مقدار مطلوب در قالب نامساویهای ماتریسی بیان می‌نمایند. مزیت مهم لم‌های حقیقی کراندار ارائه شده در این مقاله، کارآمدی در طراحی کنترل کننده H_∞ است. خصوصا در شرایطی که تمام ضرایب ترم‌های تاخیردار در سیستم هم‌تراز به پارامترهای کنترل‌کننده وابسته باشند. مثالهای عددی، برتری این لم‌ها را نسبت به لم‌های حقیقی کراندار ارائه شده در مقالات پیشین به خوبی نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: لم حقیقی کراندار، سیستم هم‌تراز، مدل توصیفی، نامساوی ماتریسی خطی.

A New Approach to Bounded Real Lemma Representation for Linear Neutral Systems

Ala Shariati, Hamid Reza Taghirad and Batool Labibi

Abstract: This paper is concerned with bounded real criterion for linear neutral delay systems. Two new delay-dependent bounded real lemmas (BRLs) are obtained in this paper, in which, Lyapunov theory is used to derive the first delay-dependent representation for BRL. Using a descriptor model transformation of the system and a new Lyapunov-Krasovskii functional, a less conservative bounded real lemma is obtained compared to that of the first BRL. Then sufficient conditions for the system to possess an H_∞-norm less than a prescribed level, is given in terms of a linear matrix inequality (LMI). The significant advantage of the derived bounded real lemmas is their efficiency in designing H_∞ controller for the closed-loop neutral systems when delayed term coefficients depend on the controller parameters. Numerical examples are given which illustrate the effectiveness of our proposed BRLs.

Keywords: Bounded Real Lemma (BRL), Neutral system, descriptor model, Linear Matrix Inequality (LMI).

۱ – مقدمه

پایداری و کنترل H_∞ سیستمهای تأخیردار یکی از موضوعاتی است که در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۳]-[۱]. از طرف دیگر، لم حقیقی کرانداریکی از ابزارهای مهم در تحلیل عملکرد سیستم حلقه‌بسته و سنتز کنترل‌کننده H_∞ می‌باشد [۴]. به‌همین‌دلیل در سالهای اخیر، دستیابی به یک لم حقیقی کراندار با محافظه‌کاری کمتر برای سیستمهای تأخیردار در بسیاری از تحقیقات انجام شده مورد توجه قرار گرفته است [۱۰]-[۸]. طبق تحقیقات انجام

شده (ر.ک. [۷]-[۵])، انتخاب مناسب تابع لیاپانوف-کراسوسکی در بدست آوردن معیار پایداری و لم حقیقی کراندار بسیار کلیدی می‌باشد. شکل عمومی این تابع منجر به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای پیچیده‌ای از نوع ریکاتی می‌گردد. حالتهای خاصی از این توابع لیاپانوف-کراسوسکی، معادلات ریکاتی و یا نامساویهای ماتریسی وابسته به تأخیر ساده‌تری را نتیجه خواهد داد [۸]. طی سالهای گذشته، لم‌های حقیقی کراندار متنوعی برای سیستمهای تأخیردار مختلف از جمله سیستمهای هم‌تراز ارائه شده‌اند[۱۰]-[۸]. در خصوص معیارهای مستقل از تأخیر، Xu و همکاران [۱۱] یک لم حقیقی کراندار برای سیستمهای هم‌تراز تک تأخیر ارائه نموده اند. Wang و همکاران با استفاده از این مدل، یک لم حقیقی کراندار دیگر که وابسته به تأخیر می باشد در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه کرده اند [۱۲]. علاوه بر آن یک لم حقیقی کراندار برای سیستمهای تغییرناپذیر با زمان با تأخیر چندگانه در متغیرهای حالت توسط Fridman و Shaked معرفی گردیده است [۱۳]. به‌منظور بهبود این نتایج، همین نویسنگان لم حقیقی کراندار دیگری را با محافظه‌کاری کمتر در [۸] ارائه نموده اند. در سالهای اخیر، پایداری و کنترل سیستمهای تأخیردار نامعین مورد توجه بیشتری قرار گرفته است [۱۴] و [۱۵]. به‌همین منظور، Xu و همکاران نمایشی از لم حقیقی کراندار برای سیستم‌های تأخیردار نامعین با نامعینی پارامتری در [۱۰] ارائه نموده اند. همچنین یک لم حقیقی کراندار تعمیم یافته برای دسته خاصی از سیستمهای غیرخطی زمان گسسته با تأخیر در متغیر حالت توسط Guo و Chen در [۱۴] بدست آمده است.

نمایش یک سیستم هم‌تراز را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{n}A_{h_i}x(t-h_i)+\sum_{j=1}^{k}A_{d_j}\dot{x}(t-d_j)+Ew(t) \qquad (۱)$$

بررسی‌های ما نشان می‌دهد تاکنون تمام تحقیقات انجام شده در زمینه لم‌های حقیقی کراندار برای سیستمهای هم‌تراز برای حالتهایی از این‌گونه سیستمها مناسب هستند که ضرایب A_{dj} همگی ثابت و معین باشند. به عبارت دیگر، با استفاده از لم‌های حقیقی کراندار ارائه شده در تحقیقات به‌عمل آمده تاکنون، درصورتی‌که A_{dj} وابسته به پارامترهای کنترل‌کننده باشد، مقدار آن برابر با صفر محاسبه خواهد شد. به‌عنوان مثال می‌توان به بکارگیری فیدبک مشتق حالت برای سیستمهای تأخیردار ورودی اشاره نمود که در [۱۶] معرفی گردیده است. معادلات حلقه بسته این سیستم به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+BK_1x(t-\tau)+BK_2\dot{x}(t-\tau)+Ew(t) \qquad (۲)$$

که در آن K_1 و K_2 گین‌های کنترل‌کننده هستند.

در این مقاله دو لم حقیقی کراندار برای سیستمهای هم‌تراز فوق در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه می‌دهیم. لم‌های ارائه شده برای سنتز کنترل‌کننده H_∞ در سیستمهای هم‌ترازی که در آن‌ها A_{dj} و A_{hj} وابسته به پارامترهای کنترل‌کننده هستند بسیار کارآمد می‌باشند. تئوری‌های ارائه شده در این مقاله با دو مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این مثال‌ها کارآیی لم‌های ارائه شده نسبت به لم‌های حقیقی کراندار موجود در سایر مقالات مورد بحث قرار خواهند گرفت. این مقاله از بخشهای زیر تشکیل شده است. بیان صورت مسأله در بخش ۲ مورد توجه قرار گرفته است و در بخش ۳، یک لم حقیقی کراندار جدید در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی بیان می‌شود. بر اساس تبدیل مدل توصیفی، لم حقیقی کراندار دیگری با محافظه‌کاری کمتر در بخش ۴ معرفی می‌گردد. در بخش ۵ نیز لم‌های به‌دست آمده با مثال‌های عددی مورد بررسی قرار خواهند گرفت. نتیجه‌گیری نیز در بخش ۶ به‌عنوان بخش پایانی این مقاله ارائه می‌شود.

۲- بیان صورت مسئله

در این مقاله، سیستم هم‌تراز زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+A_hx(t-\tau)+A_d\dot{x}(t-\tau)+Ew(t)\\ z(t)&=Cx(t)+D_hx(t-\tau)+D_d\dot{x}(t-\tau)+Dw(t)\\ x(t_0+\theta)&=\phi(\theta)\qquad \forall\theta\in[-\tau,0]\end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن x متغیر حالت، $w\in\Re^p$ ورودی اغتشاش سیستم متعلق به $L_2[0,\infty)$، τ تأخیر ثابت سیستم و $z\in\Re^q$ خروجی مورد کنترل می‌باشد. ماتریس‌های $A\in\Re^{n\times n}$، $A_h\in\Re^{n\times n}$، $A_d\in\Re^{n\times n}$، $E\in\Re^{n\times p}$، $C\in\Re^{q\times n}$، $D_h\in\Re^{q\times n}$، $D_d\in\Re^{q\times n}$ و $D\in\Re^{q\times p}$ ثابت فرض می‌شوند. ما در اینجا به بیان سه لم می‌پردازیم که در نتایج این مقاله مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم ۱ [۱۷]**:** فرض می کنیم $a(.)\in\Re^{na}$، $b(.)\in\Re^{nb}$ و $N\in\Re^{na\times nb}$ در بازه Ω تعریف شده اند، آنگاه برای هر ماتریس $X\in\Re^{na\times nb}$، $Y\in\Re^{na\times nb}$ و $Z\in\Re^{na\times nb}$ داریم

$$-2\int_\Omega a^T(\alpha)Nb(\alpha)d\alpha \le \int_\Omega \begin{bmatrix}a(\alpha)\\ b(\alpha)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}X & Y-N\\ Y^T-N^T & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(\alpha)\\ b(\alpha)\end{bmatrix}d\alpha,$$

که در آن

$$\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^T & Z\end{bmatrix}>0.$$

$$\begin{bmatrix} \Omega & PA_h-Y_1-Y_2 & A_d-\tau Y_2 & 0 & PE+C^TD & 0 & \tau A^TZ_1 & A^TR_1 & \tau A^TA^TZ_2 & A^TA^TR_2 & C^T \\ * & -Q & 0 & 0 & D_h^TD & 0 & \tau A_h^TZ_1 & A_h^TR_1 & \tau A_h^TA^TZ_2 & (AA_h)^TR_2 & D_h^T \\ * & * & -R_1 & 0 & D_d^TD & 0 & \tau A_d^TZ_1 & A_d^TR_1 & \tau(A_h+AA_d)^TZ_2 & (A_h+AA_d)^TR_2 & D_d^T \\ * & * & * & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(A_d)^TZ_2 & (A_d)^TR_2 & 0 \\ * & * & * & * & D^TD-\gamma^2I & 0 & \tau E^TZ_1 & E^TR_1 & \tau E^TA^TZ_2 & E^TA^TR_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2I & 0 & 0 & \tau E^TZ_2 & E^TR_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\tau Z_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۵)$$

نکته ۱: نامساوی بیان شده در لم ۱ قابل تعمیم به نامساویهای مشابه با انتگرال چندگانه است.

لم ۲ [۱۸]: (نامساوی شر) نامساوی ماتریسی خطی $\begin{bmatrix} Q(y) & S(y) \\ S^T(y) & R(y) \end{bmatrix}<0$ معادل است با

$R(y)<0, \quad Q(y)-S(y)R(y)^{-1}S(y)^T<0,$

لم ۳ [۱۹]: برای یک ماتریس مشخص $M=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ یا $M=\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ نامساوی زیر بر قرار است:

$$\max\{\bar\sigma(A),\ \bar\sigma(B)\} \le \bar\sigma(M) \le \sqrt{2}\max\{\bar\sigma(A),\ \bar\sigma(B)\}$$

۳- لم حقیقی کراندار I

لم حقیقی کراندار نرم H_∞ یک سیستم را با استفاده از عناصر فضای حالت مشخص می‌کند. برای یک مقدار مشخص $\gamma>0$، معیار عملکرد زیر را در نظر می‌گیریم

$$J(w)=\int_0^\infty \left(z^Tz-\gamma^2w^Tw\right)d\tau \quad (۴)$$

همچنین لم زیر را که در اثبات نتایج این مقاله بکار گرفته می‌شود بیان می‌نماییم.

لم ٤ [۲۰]: سیستم هم‌تراز (۳) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $d(t)=[w^T(t)\ \ \dot w^T(t)]^T$ اگر $\|T_{zd}\|_\infty<\gamma$ آنگاه نامساوی $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$ ارضا میگردد.

نتیجه ۱ [۲۰]: سیستم هم‌تراز (۳) و دو معیار عملکرد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$J_1(w)=\int_0^\infty \left(z^Tz-\gamma^2w^Tw\right)d\tau$$
$$J_2(w)=\int_0^\infty (z^Tz-\gamma^2d^Td)d\tau$$

که $d(t)=[w^T(t)\ \ \dot w^T(t)]^T$. به‌دلیل اینکه نامساوی‌های $J_1<0$ و $J_2<0$ به ترتیب با قیود $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$ و $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$ مطابقت دارند، برای اینکه نامساوی $J_1<0$ برآورده شود کافی است نشان دهیم که شرط $J_1<0$ ارضا می‌گردد.

در ادامه این بخش با بکارگیری مستقیم سیستم هم‌تراز (۳)، نمایشی از لم حقیقی کراندار در قالب نامساویهای ماتریسی خطی (LMI) ارائه خواهیم نمود.

قضیه ۱: سیستم (۳) را در نظر بگیرید. برای یک مقدار مشخص $\gamma>0$، شرط $J(w)<0$ برای تابع معیار (۴) به ازای همه مقادیر غیر صفر $w\in L_2[0,\infty)$ و همه $\tau>0$ برقرار است، اگر ماتریس‌های مثبت معین متقارن، $Z_1\in\Re^{n\times n}$ ، Z_2، R_1، R_2، Q، P و ماتریسهای $Y\in\Re^{n\times n}$ و X وجود داشته باشند چنانچه نامساویهای ماتریسی (۷)-(۵) را ارضا نمایند.

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Z_1 \end{bmatrix}>0 \quad (۶)$$

و

$$\begin{bmatrix} 2X_2 & \tau Y_2 \\ \tau Y_2^T & 2Z_2 \end{bmatrix}>0 \quad (۷)$$

که در آن

$$\Omega=A^TP+PA+Y_1+Y_1^T+\tau(X_1+X_2)+Y_2+Y_2^T+Q$$

اثبات. تابع لیاپانوف-کراسوسکی زیر را برای سیستم (۳) در نظر می‌گیریم.

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4 \quad (۸)$$

که در آن

$$V_1=x(t)^TPx(t) \quad (۹)$$

$$V_2=\int_{-\tau}^0\int_{t+\beta}^t \dot x^T(\alpha)Z_1\dot x(\alpha)\,d\alpha\,d\beta \quad (۱۰)$$

$$V_3=\int_{t-\tau}^{t} x^T(\alpha)Qx(\alpha)d\alpha+\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^T(\alpha)R_1\dot{x}(\alpha)d\alpha \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}V_4=&\tau^{-1}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{\beta}\int_{t+\eta}^{t}\ddot{x}^T(\alpha)Z'\ddot{x}(\alpha)d\alpha\, d\eta\, d\beta\\&+(1/2)\int_{t-\tau}^{t}\ddot{x}^T(\alpha)R'\ddot{x}(\alpha)d\alpha,\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

ماتریسهای P، Q، R_1، R'، Z_1 و Z' ماتریس‌های مثبت معین متقارن با ابعاد مناسب هستند. همان‌طور که در نشان داده شد، یک حد بالا برای $\dot{V}$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t)=&\sum_{i=1}^{4}\dot{V}_i\\
\le& x^T\{A^TP+PA+\tau(X_1+X'/2)+Y_1+Y_1^T\\
&+\tau^{-1}(Y'+Y'^T)\}x+x^T(t)(PA_h-Y_1)x(t-\tau)\\
&+x^T(t-\tau)(PA_h-Y_1)^Tx(t)\\
&+x^T(t)(PA_d-Y')\dot{x}(t-\tau)\\
&+\dot{x}^T(t-\tau)(PA_d-Y')^Tx(t)-\tau^{-1}x^T(t)Y'x(t-\tau)\\
&-\tau^{-1}x^T(t-\tau)Y'x(t)+x^TA^T\Upsilon_1Ax\\
&+x^TA^TA^T\Upsilon_2AAx+2x^TA^T\Upsilon_1A_hx(t-\tau)\\
&+2x^TA^TA^T\Upsilon_2AA_hx(t-\tau)\\
&+2x^TA^TA^T\Upsilon_2(A_h+AA_d)\dot{x}(t-\tau)\\
&+2x^TA^T\Upsilon_1A_d\dot{x}(t-\tau)+2x^TA^TA^T\Upsilon_2A_d\ddot{x}(t-\tau)\\
&+x^T(t-\tau)(A_h)^T\Upsilon_1A_hx(t-\tau)\\
&+x^T(t-\tau)(AA_h)^T\Upsilon_2AA_hx(t-\tau)\\
&+2x^T(t-\tau)(A_h)^T\Upsilon_1A_d\dot{x}(t-\tau)\\
&+2x^T(t-\tau)(A_h)^TA^T\Upsilon_2(A_h+AA_d)\dot{x}(t-\tau)\\
&+2x^T(t-\tau)(A_h)^TA^T\Upsilon_2A_d\ddot{x}(t-\tau)\\
&+\dot{x}^T(t-\tau)(A_d)^T\Upsilon_1A_d\dot{x}(t-\tau)\\
&+\dot{x}^T(t-\tau)(A_h+AA_d)^T\Upsilon_2(A_h+AA_d)\dot{x}(t-\tau)\\
&+2\dot{x}^T(t-\tau)(A_h+AA_d)^T\Upsilon_2A_d\ddot{x}(t-\tau)\\
&+\ddot{x}^T(t-\tau)(A_d)^T\Upsilon_2A_d\ddot{x}(t-\tau)+x^T(t)Qx(t)\\
&-x^T(t-\tau)Qx(t-\tau)-\dot{x}^T(t-\tau)R_1\dot{x}(t-h)\\
&-\ddot{x}^T(t-\tau)(R'/2)\ddot{x}(t-\tau)+2x^T(t)PEw(t)\\
&+2(Ax(t)+A_hx(t-\tau)+A_d\dot{x}(t-\tau)+Ew(t))^T.\\
&\Upsilon_1Ew(t)\\
&+2x^T(t)A^TA^T\Upsilon_2E\dot{w}(t)\\
&+2x^T(t-\tau)(A_h)^TA^T\Upsilon_2E\dot{w}(t)\\
&+2\dot{x}^T(t-\tau)(A_h+AA_d)^T\Upsilon_2E\dot{w}(t)\\
&+2\ddot{x}^T(t-\tau)(A_d)^T\Upsilon_2E\dot{w}(t)\\
&+2w^T(t)E^TA^T\Upsilon_2E\dot{w}(t)\\
&+\dot{w}^T(t)E^T\Upsilon_2E\dot{w}(t)
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با $\Upsilon_1=R_1+\tau Z_1$، $\Upsilon_2=R'/2+(\tau/2)Z'$،

$$\begin{bmatrix}X_1 & Y_1\\ Y_1^T & Z_1\end{bmatrix}>0 \qquad (۱۴)$$

و

$$\begin{bmatrix}X' & Y'\\ Y' & Z'\end{bmatrix}>0 \qquad (۱۵)$$

شرایط اولیه $\phi(t)=0,\ \forall t\in[-\tau,0]$ را در نظر می‌گیریم و داریم $V(q(t))|_{t=0}=0$. برای یک مقدار مشخص $\gamma>0$، معیار عملکرد زیر را در نظر می‌گیریم

$$J_{zd}(w)=\int_0^{\infty}\left(z^Tz-\gamma^2d^Td\right)d\tau \qquad (۱۶)$$

با $d(t)=\begin{bmatrix}w(t)\\ \dot{w}(t)\end{bmatrix}$، به‌این ترتیب معیار عملکردی (۱۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$J_{zd}(w)=\int_0^{\infty}\left(z^Tz-\gamma^2w^Tw-\gamma^2\dot{w}^T\dot{w}\right)d\tau$$

به‌دلیل اینکه $V(t)|_{t=0}=0$ و $V(t)|_{t\to\infty}\ge 0$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}J_{zd}(w)=&\int_0^{\infty}\left(z^Tz-\gamma^2w^Tw-\gamma^2\dot{w}^T\dot{w}+\dot{V}(t)\right)d\tau\\&+V(t)\big|_{t=0}-V(t)\big|_{t\to\infty}\\&\le\int_0^{\infty}\left(z^Tz-\gamma^2w^Tw-\gamma^2\dot{w}^T\dot{w}+\dot{V}(t)\right)d\tau\end{aligned}$$

به‌این ترتیب نامساوی زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}J_{zd}(w)\le&\int_0^{\infty}\Big\{x^TC^TCx+2x^TC^TD_hx(t-\tau)\\&+2x^TC^TD_d\dot{x}(t-\tau)+2x^TC^TDw\\&+x^T(t-\tau)D_h^TD_hx(t-\tau)\\&+2x^T(t-\tau)D_h^TD_d\dot{x}(t-\tau)+2x^T(t-\tau)D_h^TDw\\&+\dot{x}^T(t-\tau)D_d^TD_d\dot{x}(t-\tau)+2\dot{x}^T(t-\tau)D_d^TDw\\&+w^TD^TDw-\gamma^2w^Tw-\gamma^2\dot{w}^T\dot{w}+\dot{V}(t)\Big\}d\tau\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$J_{zd}\le\int_0^{\infty}\zeta^T\Pi\zeta\, d\tau \qquad (۱۸)$$

با استفاده از متغیر زیر

$$\zeta=\begin{bmatrix}x(t) & x(t-\tau) & \dot{x}(t-\tau) & \ddot{x}(t-\tau) & w(t) & \dot{w}(t)\end{bmatrix}$$

و ماتریس

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & \Sigma_{15} & \Sigma_{16}\\ * & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & \Sigma_{25} & \Sigma_{26}\\ * & * & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} & \Sigma_{35} & \Sigma_{36}\\ * & * & * & \Sigma_{44} & \Sigma_{45} & \Sigma_{46}\\ * & * & * & * & \Sigma_{55} & \Sigma_{56}\\ * & * & * & * & * & \Sigma_{66}\end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega & PA_h-Y_1-Y_2 & A_d-\bar{\tau}Y_2 & 0 & PE+C^TD & 0 & \bar{\tau}A^TZ_1 & A^TR_1 & \bar{\tau}A^TA^TZ_2 & A^TA^TR_2 & C^T \\ * & -Q & 0 & 0 & D_h^TD & 0 & \bar{\tau}A_h^TZ_1 & A_h^TR_1 & \bar{\tau}A_h^TA^TZ_2 & (AA_h)^TR_2 & D_h^T \\ * & * & -R_1-\bar{\tau}Y_2 & 0 & D_d^TD & 0 & \bar{\tau}A_d^TZ_1 & A_d^TR_1 & \bar{\tau}(A_h+AA_d)^TZ_2 & (A_h+AA_d)^TR_2 & D_d^T \\ * & * & * & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\tau}(A_d)^TZ_2 & (A_d)^TR_2 & 0 \\ * & * & * & * & D^TD^T-\gamma^2I & 0 & \bar{\tau}E^TZ_1 & E^TR_1 & \bar{\tau}E^TA^TZ_2 & E^TA^TR_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2I & 0 & 0 & \bar{\tau}E^TZ_2 & E^TR_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}Z_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -R_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۰)$$

که در آن

$$\Sigma_{11}=A^TP+PA+Y_1+Y_1^T+\tau(X_1+X'/2)$$
$$+Y_2+Y_2^T+A\Upsilon_1A+A^TA^T\Upsilon_2AA+Q+C^TC$$
$$\Sigma_{12}=PA_h-Y_1-Y_2+A^T\Upsilon_1A_h+A^TA^T\Upsilon_2AA_h+C^TD_h$$
$$\Sigma_{13}=PA_d-\tau Y_2+A^T\Upsilon_1A_d+A^TA^T\Upsilon_2(A_h+AA_d)$$
$$+C^TD_d$$
$$\Sigma_{14}=A^TA^T\Upsilon_2A_d$$
$$\Sigma_{15}=PE+A^T\Upsilon_1E+A^TA^T\Upsilon_2AE+C^TD$$
$$\Sigma_{16}=A^TA^T\Upsilon_2E$$
$$\Sigma_{22}=-Q+A_h^T\Upsilon_1A_h+(AA_h)^T\Upsilon_2AA_h+D_h^TD_h$$
$$\Sigma_{23}=A_h^T\Upsilon_1A_d+D_h^TD_d+A_h^TA^T\Upsilon_2(A_h+AA_d)$$
$$\Sigma_{24}=A_h^TA^T\Upsilon_2A_d$$
$$\Sigma_{25}=A_h^T\Upsilon_1E+(AA_h)^T\Upsilon_2AE+D_h^TD$$
$$\Sigma_{26}=(AA_h)^T\Upsilon_2E$$
$$\Sigma_{33}=-R_1+A_d^T\Upsilon_1A_d+D_d^TD_d$$
$$+(A_h+AA_d)^T\Upsilon_2(A_h+AA_d)$$
$$\Sigma_{34}=(A_h+AA_d)^T\Upsilon_2A_d$$
$$\Sigma_{35}=A_d^T\Upsilon_1E+(AA_d+A_h)^T\Upsilon_2AE+D_d^TD$$
$$\Sigma_{36}=(A_h+AA_d)^T\Upsilon_2E$$
$$\Sigma_{44}=-R'/2+A_d^T\Upsilon_2A_d$$
$$\Sigma_{45}=A_d^T\Upsilon_2AE$$
$$\Sigma_{46}=A_d^T\Upsilon_2E$$
$$\Sigma_{55}=E^T\Upsilon_1E+E^TA^T\Upsilon_2AE+D^TD-\gamma^2I$$
$$\Sigma_{56}=E^TA^T\Upsilon_2E$$
$$\Sigma_{66}=E^T\Upsilon_2E-\gamma^2I$$

و با فرض $w(t), \dot{w}(t)\in L_2[0,\infty)$ و $\Pi<0$ خواهیم داشت $J_{zd}<0$ و در نتیجه $\|T_{zd}\|_\infty<\gamma$. با استفاده از لم ۴، برقراری نامساوی $\|T_{zd}\|_\infty<\gamma$ تضمین کننده برقراری $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$ است. با تعریف متغیرهای

$$X_2=X'/2,\ Z_2=Z'/2,\ R_2=R'/2,\ Y_2=\tau^{-1}Y'$$

و با استفاده از لم شر، شرط $\Pi<0$ و LMIهای (۱۴) و (۱۵)به صورت نامساویهای ماتریسی (۵)-(۷) نمایش داده میشوند و بهاینترتیب اثبات قضیه کامل میشود. ■

نکته ۲: مزیت اصلی لم حقیقی کراندار ارائه شده در قضیه ۱، کارآمدی این لم در طراحی کنترل کنندههای H_∞ ای است که پارامترهای آنها در A_h و A_d ظاهر میشوند. برای مشاهده این مزیت، LMI (۵) را در نظر بگیرید. Y_2 یک متغیر ماتریسی است که در عناصر ماتریسی (۱و۱) و (۳و۱) ظاهر میشود. به عبارت دیگر، Y_2 هم بر منفی معین بودن عنصر (۱و۱) تأثیرگذار است و هم در مقدار A_d. بنابراین برخلاف لمهای حقیقی کراندار ارائه شده در [۸]-[۱۰]، $Y_2=0$ لزوما بهترین جواب برای LMI در (۵) نخواهد بود و در نتیجه A_d برابر با صفر بدست نخواهد آمد.

قضیه ۱ لم حقیقی کراندار را برای سیستمهای همتراز با تأخیر ثابت مورد توجه قرار میدهد. ما در ادامه، نتایج این قضیه را به سیستمهای همتراز تأخیر ثابت با حد بالای مشخص برای تأخیر تعمیم میدهیم. این بحث در قضیه زیر مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

قضیه ۲: سیستم (۳) را در نظر بگیرید. برای یک مقدار مشخص $\gamma>0$، شرط $J(w)<0$ برای تابع معیار (۴) به ازای همه مقادیر غیر صفر $w\in L_2[0,\infty)$ و همه مقادیر $0<\tau\le\bar{\tau}$ برقرار است، اگر ماتریسهای مثبت معین متقارن $P, Q, R_2, R_1, Z_2, Z_1\in\Re^{n\times n}$ و ماتریس منفی معین متقارن $Y\in\Re^{n\times n}$ و ماتریس $X\in\Re^{n\times n}$ وجود داشته باشند چنانچه نامساویهای ماتریسی (۲۰)-(۲۲) را ارضا نمایند.

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Z_1 \end{bmatrix}>0 \quad (۲۱)$$

و

$$\begin{bmatrix} 2X_2 & \overline{\tau} Y_2 \\ \overline{\tau} Y_2^T & 2Z_2 \end{bmatrix} > 0 \qquad (۲۲)$$

که در آن

$$\Omega = A^T P + PA + Y_1 + Y_1^T + \overline{\tau}\left(X_1 + X_2\right) + \left(2 - \overline{\tau}\right) Y_2 + Q$$

اثبات: برای اثبات این قضیه همان تابع لیاپانوف-کراسوسکی معرفی شده در قضیه قبل با معادلات (۱۲)- (۸) را در نظر می‌گیریم. در نتیجه مشتق $V(t)$ نسبت به t با استفاده از ایده قضیه ۱ بدست خواهد آمد. تغییر متغیر $\tau^{-1} Y' = Y_2$ را تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم $Y' = Y'^T < 0$. با اضافه و کم کردن ترمهای $x^T(t)(\tau Y_2)x(t)$ و $\dot{x}^T(t-\tau)(\tau Y_2)^T \dot{x}(t-\tau)$ در (۱۳)، یک حد بالا برای $\dot{V}$ بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{4} \dot{V}_i \le x^T \{ & A^T P + PA + \overline{\tau}\left(X_1 + (1/2) X'\right) \\
& + Y_1 + Y_1^T + \left(Y_2 + Y_2^T\right)\} x + 2x^T(t)\left(PA_h - Y_1\right) x(t-\tau) \\
& + 2x^T(t) PA_d \dot{x}(t-\tau) + 2x^T(t) PEw(t) \\
& + \left(x^T(t) + \dot{x}(t-\tau)\right)^T \left(-\overline{\tau} Y_2\right)\left(x^T(t) + \dot{x}(t-\tau)\right) \\
& - x^T(t) Y_2 x(t-\tau) - x^T(t-\tau) Y_2 x(t) \\
& + (\overline{\tau}/2) \ddot{x}^T(t) Z' \ddot{x}(t) \\
& + (1/2) \ddot{x}^T(t) R' \ddot{x}(t) - (1/2) \ddot{x}^T(t-\tau) R' \ddot{x}(t-\tau) \\
& + \left(Ax + A_h x(t-\tau) + A_d \dot{x}(t-\tau) + Ew(t)\right)^T \overline{\tau} Z_1 . \\
& \quad \left(Ax + A_h x(t-\tau) + A_d \dot{x}(t-\tau) + Ew(t)\right) \\
& + x^T(t) Q x(t) - x^T(t-\tau) Q x(t-\tau) + \dot{x}^T(t) R_1 \dot{x}(t) \\
& - \dot{x}^T(t-\tau) R_1 \dot{x}(t-\tau) + x^T(t)(\tau Y_2) x(t) \\
& + \dot{x}^T(t-\tau)(\tau Y_2)^T \dot{x}(t-\tau) \\
& = \Lambda
\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

با

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Z_1 \end{bmatrix} > 0 \qquad (۲۴)$$

و

$$\begin{bmatrix} X' & Y' \\ Y'^T & Z' \end{bmatrix} > 0 \qquad (۲۵)$$

می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda_1 + x^T(t)(\tau Y_2) x(t) \\ + \dot{x}^T(t-\tau)(\tau Y_2)^T \dot{x}(t-\tau) \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که Λ_1 بقیه جملات (۲۳) را نشان می‌دهد. با استفاده از روشی مشابه قضیه ۱ و با در نظر گرفتن رابطه بالا برای Λ و جایگزینی

$$\ddot{x}(t) = (d/dt)\left(Ax(t) + A_h x(t-\tau) + A_d \dot{x}(t-\tau) + Ew(t)\right)$$

و

$$x(t) = Ax(t) + A_h x(t-\tau) + A_d \dot{x}(t-\tau) + Ew(t)$$

در Λ_1، نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$J_{zd} \le \int_0^{\infty} \left(\zeta^T \Pi \zeta + x^T(t)(\tau Y_2) x(t) + \dot{x}^T(t-\tau)(\tau Y_2)^T \dot{x}(t-\tau)\right) d\tau \qquad (۲۷)$$

چون $Y_2 = Y_2^T < 0$، برای برقراری $J_{zd}<0$، کافی است نشان دهیم $\zeta^T \Pi \zeta <0$ یا $\Pi<0$. با تعریف تغییر متغیرهای مشابه قضیه قبل و بکارگیری لم شر، نامساوی ماتریسی $\Pi<0$. و LMI در (۲۴) بصورت نامساویهای ماتریسی (۲۱) و (۲۲) نمایش داده می‌شوند. با استفاده از لم شر و در نظر گرفتن تغییر متغیر $\tau^{-1} Y' = Y_2$، LMI در (۲۵) را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$X' - (\tau Y_2) Z'^{-1} \left(\tau Y_2^T\right) > 0$$

با جایگزینی $X_2 = X'/2$، نامساوی ماتریسی زیر بدست خواهد آمد:

$$2X_2 - (\tau Y_2)\left(Z_2^{-1}/2\right)\left(\tau Y_2^T\right) > 0 \qquad (۲۸)$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} & 2X_2 - (\tau Y_2)\left(Z_2^{-1}/2\right)\left(\tau Y_2^T\right) \\ & \ge 2X_2 - \left(\overline{\tau} Y_2\right)\left(Z_2^{-1}/2\right)\left(\overline{\tau} Y_2^T\right) > 0 \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

بنابراین برقراری نامساوی ماتریسی زیر تضمین کننده برقراری نامساوی ماتریسی (۲۸) است.

$$2X_2 - \left(\overline{\tau} Y_2\right)\left(Z_2^{-1}/2\right)\left(\overline{\tau} Y_2^T\right) > 0 \qquad (۳۰)$$

با استفاده از لم شر، نامساوی ماتریسی (۲۲) بدست می‌آید و اثبات کامل می‌شود. ■

نکته ۳: چون در پیاده‌سازی دیجیتال، همواره یک گام تأخیر وجود دارد، τ^{-1} یک مقدار محدود خواهد داشت و ظهور آن در $\dot{V}$ مشکلی ایجاد نمی‌کند.

۴- لم حقیقی کراندار II: رویکرد توصیفی

در این بخش با استفاده از تبدیل توصیفی برای سیستم (۳)، یک لم حقیقی کراندار جدیدی در قالب نامساویهای ماتریسی خطی ارائه می‌دهیم. به همین منظور، سیستم (۳) را با نمایش معادل آن به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = y(t) \\ & 0 = -y(t) + Ax(t) + A_h x(t-\tau) + A_d y(t-\tau) + Ew(t) \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & -Y+P^T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_h & A_d \end{pmatrix} & 0 & P^T\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \tau Z_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ A^T R_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \tau A^T Z_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ * & \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -R_1 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ A_h^T R_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \tau A_h^T Z_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_h^T \\ D_d^T \end{pmatrix} \\ * & * & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_d^T R_2 & \tau A_d^T Z_2 & 0 \\ * & * & * & D_2^T D_2-\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & E^T R_2 & \tau E^T Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -R_1 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\tau Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۳)$$

$$E_n\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_h & A_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} w(t) \qquad (۳۱)$$

که در آن

$$E_n = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

حال با لستفاده از تبدیل فوق به قضیه زیر می‌پردازیم.

قضیه ۳. سیستم (۳) را در نظر بگیرید. برای یک مقدار مشخص $\gamma>0$، شرط $J(w)<0$ برای تابع معیار عملکرد (۴) به ازای همه مقادیر غیر صفر $w \in L_2[0,\infty)$ و همه مقادیر $\tau>0$ برقرار است، اگر ماتریسهای مثبت معین متقارن $Z_1 \in \Re^{n\times n}$ ، Z_2، R_1، R_2، Q، P_1 و ماتریسهای $P_3, P_2, Y, X \in \Re^{n\times n}$ وجود داشته باشند چنانچه نامساویهای ماتریسی(۳۴) و (۳۳) را ارضا نمایند.

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (۳۴)$$

که در آن

$$\Phi_1 = P^T\begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ I & -I \end{bmatrix} P + \tau X + Y + Y^T$$

و $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$.

اثبات. سیستم (۳) را با نمایش معادل (۳۱) نشان می‌دهیم. حال با انتخاب تابع لیاپانوف-کراسوسکی برای سیستم (۳۱) بصورت زیر

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \qquad (۳۵)$$

با

$$V_1 = \begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t) \end{bmatrix} E_n P \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad (۳۶)$$

$$V_2 = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} y^T(\alpha) Z_1 y(\alpha)\, d\alpha\, d\beta + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} \dot{y}^T(\alpha) Z_2 \dot{y}(\alpha)\, d\alpha\, d\beta \qquad (۳۷)$$

$$V_3 = \int_{t-\tau}^{t} x^T(\alpha) Q x(\alpha)\, d\alpha + \int_{t-\tau}^{t} y^T(\alpha) R_1 y(\alpha)\, d\alpha + \int_{t-\tau}^{t} \dot{y}^T(\alpha) R_2 \dot{y}(\alpha)\, d\alpha \qquad (۳۸)$$

که در آن Q، R_1، R_2، Z_1 و Z_2 ماتریسهای مثبت معین متقارن با ابعاد مناسب هستند و

$$E_n = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix},\ P_1 = P_1^T > 0$$

با مشتق‌گیری از V_1 داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2x^T(t) P_1 \dot{x}(t) \\ &= 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t) \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t) \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} y(t) \\ Ax(t) + A_h x(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \\ &\quad + 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t) \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} 0 \\ -y(t) + A_d y(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t) \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} 0 \\ Ew(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

طبق فرمول نیوتن-لایبنیتز می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} x(t-\tau) &= x(t) - \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\alpha)\, d\alpha \\ y(t-\tau) &= y(t) - \int_{t-\tau}^{t} \dot{y}(\alpha)\, d\alpha \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

با استفاده از (۴۰)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\dot V_1 &= 2x^T(t)P_1\dot x(t) = 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}P^T\begin{bmatrix}\dot x(t)\\ 0\end{bmatrix}\\
&= 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}P^T\begin{bmatrix}0 & I\\ A+A_h & -I+A_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&-2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}P^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ A_h & A_d\end{bmatrix}\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}\dot x(\alpha)\\ \dot y(\alpha)\end{bmatrix}d\alpha\\
&+2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}P^T\begin{bmatrix}0\\ E\end{bmatrix}w(t)
\end{aligned}$$

با تعریف $x_{cl}^T(t)=\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}$، $a(\alpha)=x_{cl}^T(t)$،

$N=P^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ A_h & A_d\end{bmatrix}$ و $b(\alpha)=\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}\dot x(\alpha)\\ \dot y(\alpha)\end{bmatrix}d\alpha$ در لم ۱، داریم

$$\begin{aligned}
\dot V_1 &\le 2x_{cl}^TP^T\begin{bmatrix}0 & I\\ A+A_h & -I+A_d\end{bmatrix}x_{cl}\\
&+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x_{cl}^T(t) & \dot x_{cl}^T(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y-N\\ Y^T-N^T & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{cl}(t)\\ \dot x_{cl}(\alpha)\end{bmatrix}d\alpha\\
&+2x_{cl}^T(t)P^T\begin{bmatrix}0\\ E\end{bmatrix}w(t)\\
&=2x_{cl}^TP^T\begin{bmatrix}0 & I\\ A & -I\end{bmatrix}x_{cl}+\tau x_{cl}^T(t)Xx_{cl}(t)\\
&+2x_{cl}^T(t)Yx_{cl}(t)+2x_{cl}^T(t)(-Y+N)x_{cl}(t-\tau)\\
&+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}y^T(\alpha) & \dot y^T(\alpha)\end{bmatrix}Z\begin{bmatrix}y(\alpha)\\ \dot y(\alpha)\end{bmatrix}d\alpha\\
&+2x_{cl}^T(t)P^T\begin{bmatrix}0\\ E\end{bmatrix}w(t)
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

که در آن

$$\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^T & Z\end{bmatrix}\ge 0 \tag{۴۲}$$

با فرض $Z=\begin{bmatrix}Z_1 & 0\\ 0 & Z_2\end{bmatrix}$، می‌توان نشان داد که مشتق V_2 و V_3 برابرند با

$$\begin{aligned}
\dot V_2 &= \begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \tau Z_1+\tau A^TZ_2A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&+\tau y^T(t-\tau)A_h^TZ_2A_hy(t-\tau)\\
&+\tau\dot y^T(t-\tau)A_d^TZ_2A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2\tau y^T(t)A^TZ_2A_hy(t-\tau)\\
&+2\tau y^T(t)A^TZ_2A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2\tau y^T(t-\tau)A_h^TZ_2A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2\tau y^T(t)A^TZ_2E\dot w(t)+2\tau y^T(t-\tau)A_h^TZ_2E\dot w(t)\\
&+2\tau\dot y^T(t-\tau)A_d^TZ_2E\dot w(t)+\tau\dot w^T(t)E^TZ_2E\dot w(t)\\
&-\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}y^T(\alpha) & \dot y^T(\alpha)\end{bmatrix}Z\begin{bmatrix}y(\alpha)\\ \dot y(\alpha)\end{bmatrix}d\alpha
\end{aligned} \tag{۴۳}$$

و

$$\begin{aligned}
\dot V_3 &= \begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & R_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&-\begin{bmatrix} x^T(t-\tau) & y^T(t-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & R_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{bmatrix}\\
&+y^T(t)A^TR_2Ay(t)+y^T(t-\tau)A_h^TR_2A_hy(t-\tau)\\
&+\dot y^T(t-\tau)A_d^TR_2A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2y^T(t)A^TR_2A_hy(t-\tau)+2y^T(t)A^TR_2A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2y^T(t-\tau)A_h^TR_2A_d\dot y(t-\tau)+2y^T(t)A^TR_2E\dot w(t)\\
&+2y^T(t-\tau)A_h^TR_2E\dot w(t)+2\dot y^T(t-\tau)A_d^TR_2E\dot w(t)\\
&+\dot w^T(t)E^TR_2E\dot w(t)-\dot y^T(t-\tau)R_2\dot y(t-\tau)
\end{aligned} \tag{۴۴}$$

چون $\dot V=\dot V_1+\dot V_2+\dot V_3$، از نامساوی (۴۱) و تساویهای (۴۳) و (۴۴) حد بالای زیر را برای $\dot V$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
\dot V &\le 2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}P^T\begin{bmatrix}0 & I\\ A & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&+\tau\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}Y\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&+2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}(-Y+N)\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{bmatrix}\\
&+2\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}P^T\begin{bmatrix}0\\ E\end{bmatrix}w(t)\\
&+\begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & R_1+\tau Z_1+A^T(R_2+\tau Z_2)A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\
&-\begin{bmatrix} x^T(t-\tau) & y^T(t-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & R_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{bmatrix}\\
&+y^T(t-\tau)A_h^T(R_2+\tau Z_2)A_hy(t-\tau)\\
&+\dot y^T(t-\tau)A_d^T(R_2+\tau Z_2)A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2y^T(t)A^T(R_2+\tau Z_2)A_hy(t-\tau)\\
&+2y^T(t)A^T(R_2+\tau Z_2)A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2y^T(t-\tau)A_h^T(R_2+\tau Z_2)A_d\dot y(t-\tau)\\
&+2y^T(t)A^T(R_2+\tau Z_2)E\dot w(t)\\
&+2y^T(t-\tau)A_h^T(R_2+\tau Z_2)E\dot w(t)\\
&+2\dot y^T(t-\tau)A_d^T(R_2+\tau Z_2)E\dot w(t)\\
&+\dot w^T(t)E^T(R_2+\tau Z_2)E\dot w(t)-\dot y^T(t-\tau)R_2\dot y(t-\tau)
\end{aligned} \tag{۴۵}$$

با بکارگیری روشی مشابه بخش قبل، داریم

$$\begin{aligned}
J_{zd}(w) &\le \int_0^\infty\left(z^Tz-\gamma^2w^Tw-\gamma^2\dot w^T\dot w+\dot V(t)\right)d\tau\\
&=\int_0^\infty \xi^T\Pi\xi\, d\tau
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

با

$$\xi=\begin{bmatrix}x(t) & y(t) & x(t-\tau) & y(t-\tau) & \dot y(t-\tau) & w(t) & \dot w(t)\end{bmatrix}$$

و بلوک ماتریسی

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & -Y+P^T\begin{pmatrix}0&0\\A_h&A_d\end{pmatrix} & 0 & P^T\begin{bmatrix}0\\E\end{bmatrix} & 0 & \begin{pmatrix}Q&0\\0&R_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\bar{\tau}Z_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\A^TR_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\bar{\tau}A^TZ_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C^T\\0\end{pmatrix} \\ * & \begin{pmatrix}-Q&0\\0&-R_1\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix}0\\A_h^TR_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\bar{\tau}A_h^TZ_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}D_h^T\\D_d^T\end{pmatrix} \\ * & * & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_d^TR_2 & \bar{\tau}A_d^TZ_2 & 0 \\ * & * & * & D^TD-\gamma^2I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2I & 0 & 0 & E^TR_2 & \bar{\tau}E^TZ_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & \begin{pmatrix}-Q&0\\0&-R_1\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{۴۷}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & -Y+P^T\begin{pmatrix}0&0\\A_h&A_d\end{pmatrix} & 0 & P^T\begin{bmatrix}0\\E\end{bmatrix} & 0 \\ * & \begin{pmatrix}-Q&0\\0&-R_1\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & D^TD-\gamma^2I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2I \end{bmatrix} + \Lambda^T\nabla^{-1}\Lambda < 0$$

که در آن

$$\Phi_1 = P^T\begin{bmatrix}0&I\\A&-I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&A^T\\I&-I\end{bmatrix}P + \tau X + Y + Y^T$$

$$\Lambda^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}Q&0\\0&R_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\tau Z_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\A^TR_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\tau A^TZ_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C^T\\0\end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix}0\\A_h^TR_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\tau A_h^TZ_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}D_h^T\\D_d^T\end{pmatrix} \\ 0 & 0 & A_d^TR_2 & \tau A_d^TZ_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^TR_2 & \tau E^TZ_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}Q&0\\0&R_1\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

واضح است که اگر $\Pi<0$ آنگاه $J<0$. با استفاده لم شر، LMI در (۳۳) بدست می‌آید. چون $Z = \begin{bmatrix}Z_1&0\\0&Z_2\end{bmatrix}$، نامساوی ماتریسی خطی (۴۲) بصورت (۳۴) نمایش داده می‌شود به‌این ترتیب اثبات کامل می‌گردد. ■

نکته ٤: قضیه ۳ یک لم حقیقی کراندار جدیدی را برای سیستمهای هم‌تراز معرفی می‌نماید. این قضیه مزایای اشاره شده در نکته ۲ را دارا میباشد به‌علاوه اینکه LMIهای حاصل از این قضیه نرم H_∞ کوچکتری را نسبت به قضایای قبلی برای سیستم (۳) تضمین می‌نمایند. این نتایج به تفصیل در بخش بعد مورد بحث قرار خواهند گرفت.

بدلیل یکنوایی ماتریسها نسبت به τ در (۴۵)، قضیه ۲ منجر به نتیجه زیر می‌گردد.

نتیجه ۲: سیستم (۳) را در نظر بگیرید. برای یک مقدار اسکالر $\bar{\tau}$، تابع معیار $J(w)$ به ازای همه مقادیر غیر صفر $w \in L_2[0,\infty)$ و همه $0<\tau(t)<\bar{\tau}$ غیر مثبت است، اگر ماتریسهای مثبت معین متقارن Z_1 ،Z_2 ،R_1 ،R_2 ،Q ،$P_1 \in \Re^{n\times n}$ و ماتریسهای Y ،$X \in \Re^{n\times n}$ و P_2 ،$P_3 \in \Re^{n\times n}$ وجود داشته باشند، چنانچه نامساویهای ماتریسی (۴۷) و (۴۸) را ارضا نمایند.

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & \begin{pmatrix}Z_1&0\\0&Z_2\end{pmatrix} \end{bmatrix} \ge 0 \tag{۴۸}$$

که در آن

$$\Phi_1 = P^T\begin{bmatrix}0&I\\A&-I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&A^T\\I&-I\end{bmatrix}P + \bar{\tau}X + Y + Y^T$$

و $P = \begin{bmatrix}P_1&0\\P_2&P_3\end{bmatrix}$.

نکته ٥: در مواردی که تأخیر سیستم ثابت اما نامشخص است ولی در عوض حد بالای آن معلوم باشد، شرایط ارائه شده در قضیه ۲ و نتیجه ۲ اهمیت قابل توجهی پیدا خواهند کرد.

۵- مثالهای عددی

در این بخش به منظور بررسی میزان کاهش محافظه‌کاری لم‌های حقیقی کراندار ارائه شده در این مقاله، مثالهای زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم.

مثال ۱: سیستم هم‌تراز (۳) را در نظر می‌گیریم چنانکه

$$A_0=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix}\quad A_h=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}-0.5 & 1\end{bmatrix}^T$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$$

و با A_d=0، D_h=0 و D_d=0 این مثال برگرفته از مراجع [۲۱] و [۸] می‌باشد. همچنین ما یک لم حقیقی کراندار از نتایج بدست آمده در [۲۲] استخراج کرده‌ایم که نتاج شبیه‌سازی آن نیز در جدول ۱ آمده است. برای τ=۰/۸۴۶، مقدار مینیمم γ حاصل از نتایج این مقاله و نتایج ارائه شده در تحقیقات دیگر در جدول زیر آمده است.

جدول ۱ مقایسه نتایج این مقاله با سایر مقالات

لم‌های حقیقی کراندار	γ
Shaked, Yaesh and de Souza [۲۱]	۲
Du and Zhang [۲۲]	۱/۰۴۷۵
Fridman and Shaked [۸]	۰/۲۵
Theorem 1	۰/۲۸۱۸
Theorem 3	۰/۲۶۱۹

با توجه به جدول ۱ و مقادیر حداقل حاصل از قضایای ۱ و ۳ برای γ، می‌توان نتیجه گرفت که لم‌های حقیقی کراندار حاصل در این مقاله دارای محافظه‌کاری کمتری نسبت به لم‌های ارائه شده در [۲۱] 0و لم حاصل از نتایج [۲۲] هستند. با توجه به اینکه نرم H_∞ سیستم ۰/۲۳۶۴ است، مقدار مینیمم γ حاصل از قضایای ۱ و ۳ به خوبی نزدیک به مقدار بدست آمده در [۸] و مقدار واقعی آن می‌باشند. در مورد مزیتی که در نکته ۲ اشاره گردید، نتایج ارائه شده در [۲۱] و [۲۲] اساساً برای سیستمهایی ارائه شده‌اند که تأخیر تنها در متغیر حالت ظاهر می‌گردد ونه مشتق آن. به همین دلیل این نتایج قابل ارزیابی با معیارهای نکته ۲ نیستند. اگرچه با استفاده از لم‌های حقیقی کراندار حاصل از قضایای ۱ و ۳ یک مقدار مینیمم بزرگتری برای γ نسبت به نتایج [۸] بدست می‌آید، این لم‌ها مزیت اشاره شده در نکته ۲ را دارا می‌باشند.

مثال ۲: برای مقایسه نتایج قضیه ۱ با قضیه ۳، سیستم (۳) را در نظر می‌گیریم با

$$A_0=\begin{bmatrix}-0.4 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}\quad A_h=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}\quad A_d=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.5 & 0.2\end{bmatrix}$$
$$E=\begin{bmatrix}-0.5 & 1\end{bmatrix}^T\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T\qquad D=0.4$$
$$D_h=\begin{bmatrix}0.1 & 0\end{bmatrix}\qquad D_d=\begin{bmatrix}0.3 & 0.7\end{bmatrix}$$

بر خلاف مثال ۱، D_h، D_d و A_d ماتریسهای غیرصفر هستند و به همین دلیل با این مثال می‌توان قابلیت‌های این دو قضیه را بطور دقیق‌تر مورد ارزیابی قرار داد. مقدار مینیمم γ حاصل از اعمال قضایای ۱ و ۳ برای یک مقدار مشخص τ در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲ مقایسه مینیمم γها

τ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
γ (Theorem 1)	۲/۴۵	۳/۱۲	۳/۹۷	۵/۰۵	۶/۴۷	۸/۳۷
γ (Theorem 3)	۱/۶۴	۲/۰۴	۲/۵۵	۳/۱۹	۳/۹۷	۴/۹۴

نتایج موجود در جدول ۲ نشان می‌دهد که شرایط بدست آمده در قضیه ۳ مقدار نُرم H_∞ کمتری را برای سیستم (۳) نسبت به شرایط قضیه ۱ تضمین مینماید و این بدین معنی است که محافظه‌کاری لم حقیقی کراندار با رویکرد توصیفی در قضیه ۳ بصورت قابل توجهی نسبت به قضیه ۱ کاهش یافته است. از آنجا که برخلاف مثال ۱ همه ماتریسها در این مثال غیر صفر هستند، کارآمدی نمایش توصیفی در این مثال بهتر نشان داده شده است.

با اعمال قضیه ۲ و نتیجه ۲، برای یک مقدار مشخص γ، حد اکثر تأخیر $\bar{\tau}$ بصورتی که در جدول ۳ آمده است محاسبه می‌شود.

جدول ۲ مقایسه حد اکثر $\bar{\tau}$ ها

γ	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵	۵
$\bar{\tau}$ (Theorem 2)	۰/۱۱	۰/۱۸	۰/۲۵	۰/۳۰	۰/۳۵	۰/۳۹
$\bar{\tau}$ (Corollary 2)	۰/۲۹	۰/۳۷	۰/۴۴	۰/۵۰	۰/۵۶	۰/۶۰

جدول ۳ نشان می‌دهد برای یک مقدار مشخص γ، حد اکثر تأخیر بدست آمده با استفاده از نتیجه ۲ بزرگتر از حد اکثر تأخیری است که از قضیه ۲ حاصل می‌گردد. به عبارت دیگر، با بکارگیری نتیجه ۲، پایداری سیستم به ازای تأخیر بزرگتری نسبت به آنچه که از قضیه ۲ بدست می‌آید تضمین می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، دو لم حقیقی کراندار برای سیستمهای تأخیردار هم‌تراز مورد توجه قرار گرفته است. لم اول با استفاده از نتایج ارائه شده در [۱۶] در قالب نامساویهای ماتریسی خطی بدست آمده است. با بکارگیری یک تبدیل مدل توصیفی، شرایط کافی جدیدی به عنوان لم حقیقی کراندار دوم حاصل شده است. همانطور که در این مقاله بحث گردید، لم‌های حقیقی کراندار ارائه شده در این مقاله در سنتز کنترل‌کننده‌های H_∞ ای که پارامترهای آنها در همه ضرایب ترمهای تأخیردار ظاهر می‌شوند، بسیار کارآمد می‌باشد. این ویژگی، وجه تمایز اصلی نتایج این مقاله با لم‌های مشابه ارائه شده در سایر مقالات است. اگرچه شرایط بدست آمده در این مقاله شرایط لازم نیستند، میزان محافظه‌کاری نتایج نسبت به نتایج بدست آمده در مقالات دیگر کم می‌باشد. مثالهای عددی نیز کارآمدی روش ارائه شده در این مقاله را تأیید می‌کند. به‌علاوه در این مثالها نشان داده شده است که محافظه‌کاری لم حقیقی کراندار با رویکرد توصیفی که در قضیه ۳ و نتیجه ۲ به آن پرداخته شده است، بصورت قابل توجهی نسبت به نتایج قضایای ۱ و ۲ کاهش یافته است.

مراجع

[1] Park, J.H., 2005, "LMI Optimization Approach to Asymptotic Stability of Certain Neutral Delay Differential Equation with Time-Varying Coefficients", *Applied Mathematics and Computation*, 160, 1, 355–361.

[2] Zhang, Z., Wang, W., Yang, B., 2007, "Delay and its Time-Derivative Dependent Robust Stability of Neutral Control System", *Applied Mathematics and Computation*, 147, 1, 1326–1332.

[3] Li, Y., Xu, S., Zhang, B., Chu, Y., 2008, "Robust Stabilization and H_∞ Control for Uncertain Fuzzy Neutral Systems with Mixed Time Delays", *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 2730-2748.

[4] Dumitrescu, B., 2005 "Bounded Real Lemma for FIR MIMO Systems", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 12, No. 7, 496-499.

[5] Fridman, E., 2001, "New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems", *Systems & Control Letters*, 43, 4, 309-319.

[6] Han, Q.L., 2005, "On Stability of Linear Neutral Systems with Mixed Time Delays: A Discretized Lyapunov Functional Approach", *Automatica*, 41, 7, 1209-1218.

[7] Fridman, E., 2006, "Descriptor Discretized Lyapunov Functional Method: Analysis and Design", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, 5, 890-897.

[8] Fridman E., and Shaked, U., 2002, "A Descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time-Delay Systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 47, 2, 253-270

[9] Jiang, X., Han, Q. L., 2005, "On H_∞ Control for Linear Systems with Interval Time-Varying Delay", *Automatica*, 41, 12, 2099-2106.

[10] Xu, S., Lam, J. and Zou, Y., 2006, "New Results on Delay-dependent Robust H_∞ Control for Systems with Time-Varying Delays", *Automatica*, 42, 2, 343-348.

[11] Xu, S., Lam, J. and Yang, C., 2001, "H_∞ and Positive-Real Control for Linear Neutral Delay Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46, 8, 1321-1326.

[12] Wang, Q., Lam, J., Xu, S., and Zhang, L., 2006, "Delay-Dependent γ-Suboptimal H_∞ Model Reduction for Neutral Systems with Time-Varying Delays", *Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems,* Measurement *and Control*, 128, 2, 394-399.

[13] Fridman, E., Shaked, U., 2001, "New Bounded Real Lemma Representations for Time-Delay Systems and Their Applications", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46, 12, 1973-1979.

[14] Guo, L., and Chen, W. H., 2003, "Output Feedback H_∞ Control for a class of Uncertain Nonlinear discrete-Time Delay Systems", *Transactions of Institute of Measurement and Control,* 25, 2, 107-121.

[15] Guo, L., 2002, "H_∞ Output Feedback Control for Delay Systems with Nonlinear and Parametric Uncertainties", *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 149, 3, 226-236.

[16] Shariati, A., Taghirad, H. D. and Labibi, B., 2009, "Delay-Dependent Stabilization of Linear Input-Delayed Systems with Composite State-Derivative Feedback: Constant and time-Varying Delays", *17th Iranian Conference on Electrical Engineering*, 260-265, IUST, Tehran, Iran.

[17] Moon, Y.S., Park, P., Kwon, W.H., Lee, Y.S., 2001, "Delay dependent robust stabilization of uncertain state delayed systems", *International Journal of Control* 74, 1447-1455.

[18] Boyd, S.P., EL. Ghaoui, L., Feron, E., 1994, Balakrishnan, V., *Liner Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, Pensylvania.

[19] Skogestad, S., Postlethwaite, I., 2005, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Willy & Sons, England.

[20] Shariati, A., Taghirad, H. D. and Labibi, B., "Delay-Dependent H_∞ Control of Linear Systems with Time-Varying Delay Using State-Derivative Feedback",

Submitted to Journal of Optimization Theory and Applications.

[21] Shaked, U., Yaesh, I. and de Souza, C., 1998, "Bounded Real Criteria for Linear Time-Delay Systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43, 7, 1016-1022.

[22] Du, H., Zhang, N., 2007, "H_∞ control of active vehicle suspensions with actuator time delay", *Journal of Sound and Vibration,* 301, 1-2, 236-252.