مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۴۶-۳۶

طراحی یک کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز مقاوم از مرتبه‌ی ثابت برای سامانه‌های مقیاس وسیع با عدم قطعیت غیرخطی

مهدی سجودی[۱]، وحید جوهری مجد[۲]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر ، گروه مهندسی کنترل.
[۲] دانشیار، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل، پیام‌نگار: majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۸/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۲۰)

چکیده: هدف این نوشتار ارائه یک روش کنترلی مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای پایدارسازی مقاوم غیرمتمرکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های متشکل از زیرسامانه‌هایی با پویایی خطی و دارای عدم‌قطعیت و با اتصالات غیر خطی با قیود مربعی می‌باشد. این روش از ساختار بازخورد خروجی پویای خطی عمومی به‌همراه عدم‌قطعیت در پارامترها بهره می‌گیرد. در این طراحی درجه قوام بیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله‌ی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به‌صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود. در نهایت، یک مثال عددی قابل مقایسه با کارهای اخیر، برای نشان دادن قابلیت اجرا و اعمال روش و همچنین نشان دادن اثربخشی و بهبود صورت پذیرفته، آورده می‌شود.

کلمات کلیدی: بازخورد خروجی پویا، سامانه‌های مقیاس وسیع ، کنترلگر غیر شکننده ، کنترلگر مرتبه ثابت، نابرابری‌های ماتریسی خطی.

A Fixed-Order Robust Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Large Scale Systems with Nonlinear Uncertainty

Mahdi Sojoodi, Vahid Johari Majd

Abstract: The objective of this paper is to propose a fixed-order non-fragile dynamic output control scheme within the LMI framework for robust decentralized stabilization of systems composed of linear dynamic subsystems coupled by static nonlinear interconnections satisfying quadratic constraints. The procedure utilizes the general linear dynamic feedback structure in presence of parameter uncertainty. In this design, the maximum robustness degree of the closed loop system is obtained through solving the optimization problem under stabilizing conditions given in the form of LMIs, and then the fixed order controller parameters are calculated based on the obtained results. A numerical example illustrates the applicability and effectiveness of the method.

Keywords: Output dynamic feedback, large scale systems, non-fragile controller, fixed-order controller, linear matrix inequality (LMI).

۱- مقدمه

با ظهور ابزار قدرتمند بهینه سازی محدب با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی [۱]، حل مسائل طراحی کنترلگر در قالب نابرابری‌های ماتریسی خطی بسیار جذابیت پیدا کرد. با توجه به اینکه بدست آوردن شرط لازم و کافی در طراحی بازخورد خروجی با استفاده از روشهای بهینه سازی محدب به مسئله‌ای غیرمحدب منجر می‌شود [۲-۳]، پژوهشگران بدنبال ارائه روش‌های ابتکاری برای امکان ساده سازی این مسائل با روشهای مختلف برای حل توسط ابزار نابرابری‌های ماتریسی خطی هستند. مشکل غیر محدب بودن مسائل، با بکارگیری قیود

نویسنده عهده دار مکاتبات: وحید جوهری مجد

ساختاری اطلاعات غیرمتمرکز در طراحی کنترلگر بسیار بیشتر نیز می‌گردد [۴-۵]. در سالهای اخیر پیشرفت‌های زیادی در راستای ارائه روش‌های کنترل پیشرفته در جهت طراحی غیرمتمرکز برای سامانه‌های بهم‌پیوسته (Interconnected) حاصل شده است و ایده‌ها و نتایج جدید بسیاری در این حوزه ارائه شده است. در این میان طراحی کنترلگرهای H_2 و H_∞ با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی برای سامانه‌هائی با ابعاد وسیع مورد توجه تعداد زیادی از پژوهشگران قرار گرفته است [۶]. پس از ارائه نتایج اولیه در [۷]، مقالات بسیاری [۸-۱۰] برای نشان دادن بهبود حاصل شده و تبدیل مسئله غیرمحدب به محدب با استفاده از روشهای ابتکاری متفاوت برای سامانه‌های مختلف ارائه شده است. ساختار مقیاس وسیع در کاربردهای مهم و پیچیده‌ی مانند سامانه‌های قدرت، ساختارهای وسیع و شبکه‌های رایانه‌ای قابل مشاهده است [۱۱-۱۳]. برخی از کارهای مهم صورت گرفته در این حوزه، به طراحی کنترلگر غیرمتمرکز بطور صریح یا ضمنی، برای پایدارسازی کل سامانه در حضور بازخوردهای محلی زیرسامانه‌ها و تغییرات پیکره‌بندی در اتصالات زیرسامانه‌ها پرداخته‌اند [۱۴-۱۶].

در [۸]، سامانه‌های خطی به‌صورت توأمان با ساختار بهم پیوسته غیرخطی مد نظر قرار گرفته است. از آنجا که در اغلب کاربردهای عملی می‌توان زیرسامانه‌ها را حول نقاط کار با یکسری عدم‌قطعیت حول این نقاط، خطی در نظر گرفت، این مدل از اهمیت بالائی برخوردار است. همچنین با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل عملی، اتصالات بین زیر سامانه‌ها دارای ساختارهای ناشناخته و غیرخطی هستند و تنها کران‌هایی از آنها معلوم است، جذابیت این مدل دوچندان می‌شود. همچنین این ساختار امکان بیشینه‌سازی کران روی اتصالات و عدم قطعیت‌ها را فراهم می‌نماید. با توجه به مزایای ساختار مدل ارائه شده در [۸]، بسیاری از مقالات، آن را به عنوان مدل پایه مورد استفاده قرار داده‌اند.

پایدارسازی ساختار مدل ارائه شده، در [۸] بوسیله بازخورد حالت صورت گرفته است. این ساختار مدل در [۱۷] توسط یک بازخورد حالت تخمین زده شده غیرمتمرکز بر پایه‌ی رویتگر طراحی شده برای هر زیرسامانه کنترل گردیده است. همچنین ساختار مدل در [۹و۱۸-۱۹] توسط بازخورد خروجی با رویتگر لون برگر کنترل شده است. روش ارائه شده در [۱۹] با حذف یک سری از شروط ارائه شده در [۹] به ارائه یک روش جدید برای دسته وسیع‌تری از سامانه‌ها پرداخته است. همچنین در [۲۰]، ساختار مدل ارائه شده در [8] با بازخورد خروجی پویای هم مرتبه با سامانه (مرتبه کامل) کنترل شده است. در [۲۱] کنترل مقاوم غیرمتمرکز با رویکرد بازخورد خروجی مرتبه کامل برای دسته‌ای از سامانه‌های با اتصالات داخلی غیرخطی نمواً خطی ارائه شده و نتایج حاصل از آن بر روی یک فرآیند تانک چهارتائی تحت آزمون قرار گرفته است.

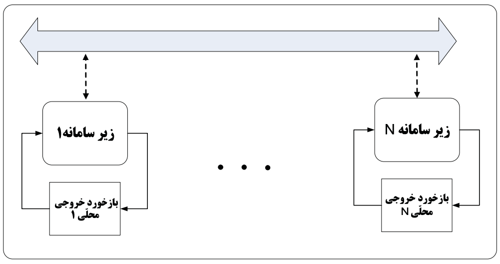
با توجه به بررسی‌های انجام شده و مطالعات صورت گرفته، در زمینه کنترل مرتبه ثابت ساختار مدل [8] و همچنین در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر به منظور طراحی کنترلگر غیرشکننده تحقیق و پژوهشی مشاهده نگردید. اهمیت بسیار زیاد طراحی کنترلگر مرتبه ثابت و غیرشکننده انگیزه انجام این تحقیق بود.

هدف این مقاله ارائه یک روش مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای طراحی بازخورد خروجی پویای غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه برای هر زیرسامانه برای پایدارسازی مقاوم غیرمتمرکز سامانه‌های بهم پیوسته است. برای این منظور بازخورد خروجی خطی پویای غیرمتمرکز غیرشکننده با ساختاری بسیار عمومی و با مرتبه دلخواه ثابت به ساختار مدل پایه ارائه شده در [۸] اعمال گردیده است. در این طراحی درجه قوام بیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله‌ی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به‌صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود.

ساختار این مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم به بیان مسئله و مقدمات لازم برای طراحی پرداخته شده است. نتایج اصلی کار تحت دو قضیه در بخش سوم بیان شده است و بخش چهارم به ارائه یک مثال عددی برای تشریح قابلیت اعمال روش طراحی اختصاص یافته است. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

۲- تعریف مساله

سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد محدود N زیرسامانه مطابق شکل ۱ مفروض است که در آن زیرسامانه‌ها دارای ارتباطات داخلی (که در شکل زیر با خط‌چین‌های دوطرفه نمایش داده شده است) با یکدیگر بوده و برای پایداری کلّ سامانه از باز خوردهای محلی حول هر زیرسامانه بهره گرفته شده است.



شکل ۱: سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد N زیرسامانه با بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز

معادلات هریک از زیرسامانه‌های سامانه غیرخطی به هم پیوسته به‌صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pi} &= A_{ii}x_{pi} + B_i u_i + h_i(t,x_p) \\ h_i(t,x_p) &= \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij}x_{pj} + \bar{h}_i(t,x_p) \\ y_i &= C_i x_{pi}, \qquad i=1,\cdots,N \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن $x_{pi} \in \Re^{n_i}$، $u_i \in \Re^{m_i}$ و $y_i \in \Re^{p_i}$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی زیر سامانه iام جایی‌که $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$، $x_p = \begin{bmatrix} x_{p1}^T & x_{p2}^T & \cdots & x_{pN}^T \end{bmatrix}^T$ بردار حالت کل سامانه بهم‌پیوسته، A_{ii}، A_{ij}، B_i و C_i ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب، و $\bar{h}_i(t,x_p)$ حاوی تمام ترم‌های غیرخطّی و عدم‌قطعیت موجود در هر زیرسامانه فرض گردیده است و فرض شده است که $h_i(t,x_p): \Re^{n+1} \to \Re^{n_i}$ یک تابع برداری تکه‌ای خطی نسبت به هر دو آرگومان t, x_p است و در حوزه پیوستگی خود نابرابری مربعی زیر را برآورده می‌سازد:

$$h_i(t,x_p)^T h_i(t,x_p) \le \bar{\alpha}_i^2 x_p^T \bar{H}_i^T \bar{H}_i x_p, \; i=1,\ldots,N. \tag{2}$$

در رابطه بالا $\bar{H}_i$ ماتریس‌های با ابعاد $v_i \times n$ و معلوم هستند و $\bar{\alpha}_i > 0$ کران هایی هستند که می توانند بسته به مسئله معلوم فرض شوند و یا اینکه هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه‌ی آنها ضمن حفظ پایداری سامانه حلقه بسته‌ی کلّ باشد [8 و۹].

می‌توان سامانه کلّی بهم پیوسته را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = Ax_p + Bu + h(t,x_p) \\ y = Cx_p \end{cases} \tag{3}$$

که در آن $u = \begin{bmatrix} u_1^T & \cdots & u_N^T \end{bmatrix}^T$، $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$ و $y = \begin{bmatrix} y_1^T & \cdots & y_N^T \end{bmatrix}^T$ و $\sum_{i=1}^{N} p_i = p$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی سامانه بهم‌پیوسته هستند. $A = diag(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{NN})$، $B = diag(B_1, B_2, \cdots, B_N)$، $C = diag(C_1, C_2, \cdots, C_N)$ بوده و $h(t,x_p) = \begin{bmatrix} h_1(t,x_p)^T & \cdots & h_N(t,x_p)^T \end{bmatrix}^T$ تابع ارتباطات داخلی (غیرخطی) کل سامانه بهم پیوسته است.

حال $\bar{H}^T = \begin{bmatrix} \bar{H}_1^T & \cdots & \bar{H}_N^T \end{bmatrix}$ و $\bar{\Gamma} = diag(\bar{\gamma}_1 I_{v_1}, \ldots, \bar{\gamma}_N I_{v_N})$ را در نظر بگیرید که $\bar{H}_i$ها برای $i=1,\ldots,N$ در (۲) تعریف شده‌اند. با تعریف $\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i^{-2}$ (I_{v_i} ماتریس واحد $v_i \times v_i$)، همواره می‌توان ماتریس‌های H و Γ را چنان یافت که [9]:

$$h(t,x_p)^T h(t,x_p) \le x_p^T \bar{H}^T \bar{\Gamma}^{-1} \bar{H} x_p \le x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \tag{4}$$

که در آن $H = diag(H_1, H_2, \cdots, H_N)$، ماتریس‌های H_i به ابعاد $v_i \times n_i$، و $\Gamma = diag(\gamma_1 I_{v_1}, \ldots, \gamma_N I_{v_N})$ با $\gamma_i > 0$ و $\alpha_i = \gamma_i^{-1/2}$ هستند. همانطور که در [9] اثبات گردیده است، برای برقراری رابطه (۴)، کافیست رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lambda_{\max}(\bar{H}^T \bar{H}) \min_i \bar{\gamma}_i \le \max_i \gamma_i \min_i \lambda_{\min}(H_i^T H_i) \tag{5}$$

در این مقاله، بدنبال طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای شکننده و غیر شکننده با مرتبه ثابت دلخواه داده شده‌ی n_c برای کنترلگر کلی برای سامانه داده شده در (۳) هستیم تا به‌صورت غیرمتمرکز و تنها با استفاده از اطلاعات خروجی زیرسامانه‌ها ، کلّ سامانه را کنترل نمائیم. در این طراحی مرتبه کنترلگر زیر سیستم i–ام مقدار دلخواه n_{ci} می باشد به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{N} n_{ci} = n_c$.

ساختار مدل کنترلگر بازخورد خروجی پویای معمولی و نیز غیرشکننده را به ترتیب به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y, \;\; x_c(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = (A_c + \Delta A_c)x_c + (B_c + \Delta B_c)y \\ u = (C_c + \Delta C_c)x_c + (D_c + \Delta D_c)y, \;\; x_c(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

که در آن $x_c \in \Re^{n_c}$ حالات کنترلگر کلّی‌است، $x_c = \begin{bmatrix} x_{c1} & \cdots & x_{cN} \end{bmatrix}^T$ و $x_{ci} \in \Re^{n_{ci}}$ می‌باشد. همچنین $A_c = diag\begin{pmatrix} A_{c1} & \cdots & A_{cN} \end{pmatrix}$، $B_c = diag\begin{pmatrix} B_{c1} & \cdots & B_{cN} \end{pmatrix}$، $C_c = diag\begin{pmatrix} C_{c1} & \cdots & C_{cN} \end{pmatrix}$ و $D_c = diag\begin{pmatrix} D_{c1} & \cdots & D_{cN} \end{pmatrix}$ بوده که A_{ci}، B_{ci}، C_{ci} و D_{ci} پارامترهای کنترلگر هریک از زیرسامانه‌ها می‌باشند و:

$$\|\Delta A_c\| \le \delta_{A_c}, \; \|\Delta B_c\| \le \delta_{B_c}, \; \|\Delta C_c\| \le \delta_{C_c} \text{ و } \|\Delta D_c\| \le \delta_{D_c} \tag{8}$$

عدم قطعیت‌هایی با کران نرم معلوم هستند.

با در نظر گرفتن کنترلگر (۶) و سامانه (۳) به‌صورت توأم، سامانه حلقه بسته را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \begin{bmatrix} h(t,x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = \bar{C}x \end{cases} \tag{9}$$

که در آن $x = \begin{bmatrix} x_{p1}^T & x_{c1}^T & \cdots & x_{pN}^T & x_{cN}^T \end{bmatrix}$، $\bar{A} = diag\begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_N \end{pmatrix}$، $\bar{C} = diag\begin{pmatrix} \bar{C}_1 & \cdots & \bar{C}_N \end{pmatrix}$، $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_i & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_i & A_{ci} \end{bmatrix}$ و $\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i \,\vdots\, 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

تعریف ۱: دسته H_α: برای هر $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_N \end{bmatrix}^T$ و Ξ معلوم، H_α دسته‌ای از توابع تکه‌ای– پیوسته است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_\alpha = \left\{ \begin{matrix} h(t,x_p) \,\middle|\, h \in \Re^n, h^T h \le x_p^T \Xi^T \alpha^T \alpha \Xi x_p \\ \text{in the domains of continuity} \end{matrix} \right\} \tag{10}$$

تعریف فوق ایجاب می‌کند که $h(t,0)=0$ باشد و این شرط الزام می‌کند که $x=0$ بعنوان نقطه تعادل سامانه (۹) باشد.

تعریف ۲: پایداری مقاوم از درجه $\alpha=[\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N]^T$**:** سامانه (۹) با عدم‌قطعیت غیرخطی کراندار ارائه شده در (۴)، پایدار مقاوم از درجه برداری α گفته می‌شود، اگر نقطه تعادل $x=0$، برای تمام $h(t,x_p)\in H_\alpha$ پایدار مجانبی سراسری باشد.

تعریف‌های ۱ و ۲ توسعه یافته تعریف‌های ارائه شده در [8] به‌صورت برداری می‌باشند.

مطابق [۸ و ۲۰]، سامانه حلقه بسته (۹) را به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha=[\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N]^T=\left[1/\sqrt{\gamma_1} \ \cdots \ 1/\sqrt{\gamma_N}\right]^T$ پایدار گویند اگر این سامانه برای تمام $h(t,x_p)$ هائی که در رابطه (۴) صدق می‌کند به‌صورت مجانبی سراسری پایدار باشد. با بیشینه کردن α همزمان با پایدارسازی بخش خطی (۳)، خطای مجاز برای اتصالات داخلی غیرخطی و عدم قطعیت‌های مجاز نیز بیشینه می‌شود.

لم ۱ [4]**: رَوند S** (***S-procedure***) ماتریس‌های متقارن $T_0,\ldots,T_p\in\Re^{n\times n}$ مفروض هستند. شرایط زیر روی $T_0,\ldots,T_p$ در نظر گرفته می‌شوند:

$$\zeta^T T_i\zeta\ge 0,\ i=1,\ldots,p \ \text{بطوریکه}\ \forall\zeta\neq 0,\ \zeta^T T_0\zeta>0 \tag{۱۱}$$

حال در صورتیکه $\tau_1\ge 0,\ldots,\tau_p\ge 0$ هائی وجود داشته باشند، که رابطه:

$$T_0-\sum_{i=1}^{p}\tau_i T_i>0 \tag{۱۲}$$

برقرار باشد، آنگاه رابطه (۱۱) برقرار خواهد بود [4].

۳- نتایج اصلی کار

در این بخش دو قضیه برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی مرتبه ثابت معمولی و غیرشکننده برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) ارائه شده است. با توجه به اینکه، هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه‌ی کران ترم غیرخطی $h(t,x_p)$ بیان گردیده است. می‌توان با یافتن مقدار کمینه ماتریس قطری Γ که سامانه حلقه بسته (۹) به‌ازای آن پایدار است، نسبت به بیشینه کردن درجه قوام α اقدام کرد.

قضیه ۱: سامانه حلقه‌باز (۳) و کنترلگری به‌صورت (۶) مفروض است. اگر ماتریس‌های مثبت معین $P=P^T$ به‌صورت:

$$P=diag(P_1,\ldots,P_N),\ P_i=diag(P_{pi},P_{ci}),\ i=1,\ldots,N \tag{۱۳}$$

و ماتریس‌های Y_i، Q_i، W_i و U_i به ازای $i=1,\ldots,N$ و اسکالر مثبت τ_1 وجود داشته باشند به‌طوری‌که مسئله کمینه سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned}&\text{minmize}\ \sum_{i=1}^{N}\hat\gamma_i\\ &\text{subject to}\ \begin{bmatrix} diag(L_1,\ldots,L_N) & P & \tau_1\begin{bmatrix}H^T\\0\end{bmatrix}\\ * & -\tau_1 I & 0\\ * & * & -\hat\Gamma\end{bmatrix}<0\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در آن:

$$L_i=\begin{bmatrix}A_i^T P_{pi}+C_i^T Y_i^T+P_{pi}A_i+Y_iC_i & C_i^T W_i^T+Q_i\\ Q_i^T+W_iC_i & U_i^T+U_i\end{bmatrix},\ i=1,\ldots,N,\quad \hat\Gamma=diag(\hat\gamma_1 I_{v_1},\ldots,\hat\gamma_N I_{v_N}) \tag{۱۵}$$

آنگاه سامانه حلقه‌بسته (۹) به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha=[\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N]^T=\left[1/\sqrt{\gamma_1} \ \cdots \ 1/\sqrt{\gamma_N}\right]^T$ پایدار است که در آن $\Gamma=\tau_1^{-1}\hat\Gamma$ و یا $\gamma_i=\tau_1^{-1}\hat\gamma_i$. در این صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی A_c، B_c، C_c و D_c از روابط زیر بدست می‌آیند که در آن عملگر $\uparrow$ بیانگر شبه معکوس می‌باشد:

$$\begin{aligned}A_{ci}&=P_{ci}^{-1}U_i\\ B_{ci}&=P_{ci}^{-1}W_i\\ C_{ci}&=B_i^{\uparrow}P_{pi}^{-1}Q_i\\ D_{ci}&=B_i^{\uparrow}P_{pi}^{-1}Y_i\end{aligned} \tag{۱۶}$$

اثبات: با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به‌صورت زیر:

$$V=x^T Px \tag{۱۷}$$

با مشتق گیری از (۱۷) و با فرض $z_1=\begin{bmatrix}h(t,x_p)\\0\end{bmatrix}$ و جای‌گذاری معادلات سامانه (۹) در (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot V&=\dot x^T Px+x^T P\dot x\\ &=(\overline{A}x+z_1)^T Px+x^T P(\overline{A}x+z_1)\\ &=\begin{bmatrix}x\\z_1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\overline{A}^T P+P\overline{A} & P\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\z_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۱۸}$$

برای منفی بودن (۱۸) باید نابرابری زیر برقرار باشد:

$$-\begin{bmatrix}x\\z_1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\overline{A}^T P+P\overline{A} & P\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\z_1\end{bmatrix}\ge 0 \tag{۱۹}$$

با توجه به (۴)، روشن است که:

$$z_1^T z_1\le x_p^T H^T\Gamma^{-1}Hx_p \tag{۲۰}$$

همچنین می‌توان رابطه (۲۰) را به‌صورت معادل زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T\Gamma^{-1}H & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (۲۱)$$

با فرض (۱۳) و با به‌کارگیری روابط (۱۹) و (۲۱) در لم ۱ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\dots,L_N) + \tau_1 \begin{bmatrix} H^T\Gamma^{-1}H & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} & P \\ * & -\tau_1 I \end{bmatrix} \leq 0 \qquad (۲۲)$$

حال با بکارگیری مکمل شور در رابطه (۲۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\dots,L_N) & P & \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 \\ * & * & -\tau_1\Gamma \end{bmatrix} \leq 0 \qquad (۲۳)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{pi}A_i + P_{pi}B_iD_{ci}C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi}B_iC_{ci} \\ C_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{ci}B_{ci}C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci}A_{ci} \end{bmatrix}$$
$$,i = 1,\dots,N.$$

(۲۴)

با تغییر متغیّرهایی به‌صورت $\hat{\Gamma} = \tau_1\Gamma$ و به‌صورت زیر:

$$\begin{aligned} Y_i &= P_{pi}B_iD_{ci} \\ Q_i &= P_{pi}B_iC_{ci} \\ W_i &= P_{ci}B_{ci} \\ U_i &= P_{ci}A_{ci} \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

رابطه نابرابری ماتریسی خطّی ارائه شده در (۱۴) حاصل می‌گردد. پایان اثبات□.

در قضیه بعدی به طراحی کنترلگر مرتبه ثابت غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه در حضور عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) می‌پردازیم:

قضیه ۲: سامانه حلقه‌باز (۳) و کنترلگری غیرشکننده به‌صورت (۷) با کران (۸) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین $P = P^T$ به‌صورت (۱۳) و ماتریس‌های Y_i، Q_i، W_i و U_i به ازای $i = 1,\dots,N$ و اسکالرهای مثبت τ_j برای $j = 1,..,5$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که مسئله کمینه سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\text{minmize} \quad \sum_{i=1}^{N} \hat{\gamma}_i$$
$$\textit{subject to}$$
$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\dots,L_N) & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0$$

(۲۶)

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T Y_i^T + P_{pi}A_i + Y_iC_i & C_i^T W_i^T + Q_i \\ Q_i^T + W_iC_i & U_i^T + U_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_2\|C\|\delta_{D_c}^2 I + \tau_5\|C\|\delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1\delta_{C_c}^2 I + \tau_4\delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$
$$,i = 1,\dots,N.$$

آنگاه سامانه حلقه‌بسته (۹) به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \ \cdots \ 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$ پایدار است. که در آن $\gamma_i = \tau_3^{-1}\hat{\gamma}_i$ و یا $\Gamma = \tau_3^{-1}\hat{\Gamma}$. در این‌صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی A_c، B_c، C_c و D_c از رابطه (۱۶) بدست می‌آیند.

اثبات: مشابه نحوه‌ی اثبات قضیه ۱ و با فرض:

$$z_1 = \Delta C_c x_c \ , \ z_2 = \Delta D_c C x_p \ , \ z_3 = h(t, x_p), \qquad (۲۸)$$
$$z_4 = \Delta A_c x_c \ , \ z_5 = \Delta B_c C x_p \ ,$$

می‌توان نوشت:

$$\dot{V} = (\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})^T Px + x^T P(\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})$$
$$= \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

(۲۹)

برای منفی بودن (۲۹) نابرابری زیر باید برقرار باشد:

$$-\begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \geq 0$$

(۳۰)

با در نظر گرفتن رابطه (۲۸)، (۴) و (۸) خواهیم داشت:

$$z_1^T z_1 \leq \delta_{C_c}^2 x_c^T x_c \ , \ z_2^T z_2 \leq \|C\|\delta_{D_c}^2 x_p^T x_p \ ,$$
$$z_3^T z_3 \leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \ , \ z_4^T z_4 \leq \delta_{A_c}^2 x_c^T x_c \ , \qquad (۳۱)$$
$$z_5^T z_5 \leq \|C\|\delta_{B_c}^2 x_p^T x_p \ ,$$

حال مشابه روند اثبات در قضیه ۱، با استفاده از لم ۱ در روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۱)، همچنین با بکارگیری مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\ldots,L_N) & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_3\Gamma \end{bmatrix} \le 0 \tag{۳۲}$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{Pi} A_i + P_{pi} B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_i^T P_{Pi} + P_{ci} B_{ci} C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_5 \|C\| \delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix} \quad ,i = 1,\ldots,N. \tag{۳۳}$$

با اعمال تغییر متغیّرهای رابطه (۲۵) در (۳۳) و تغییر متغیّر به‌صورت $\hat{\Gamma} = \tau_3 \Gamma$، به رابطه (۲۶) خواهیم رسید. پایان اثبات.□

نکته ۱: در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض $C = I$ از طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طرّاحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر می‌یابد.

توجه ۱: در این مقاله برای شناسائی نابرابری‌های ماتریسی خطی ارائه شده در قضیه ۱ و ۲ به محیط نرم‌افزار، از جعبه ابزار یالمیپ [۲۲] (Yalmip) و برای حلّ آن‌ها از جعبه ابزار LMILab در محیط نرم‌افزار متلب (Matlab) استفاده گردیده است.

۴- مثال عددی

به منظور شبیه‌سازی و به منظور قابلیت مقایسه، حرکت دو پاندول معکوس که توسط فنر به یکدیگر متصل شده‌اند در نظر گرفته شده است که می‌تواند در پرش‌های ناگهانی با اندازه و جهت غیر قابل پیش‌بینی، میله‌ی پاندول را بالا و پایین بلغزاند. یک مدل خطی و نرمالیزه شده از هر یک از زیرسامانه‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۸]:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{p1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + h_1(t, x_p), \\ &y_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p1}(t), \\ &h_1(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p, \\ &\dot{x}_{p2}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p2}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + h_2(t, x_p), \\ &y_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p2}(t), \\ &h_2(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p. \end{aligned} \tag{۳۴}$$

در روابط بالا $e(t, x_p) : \Re^5 \to [0,1]$ پارامترهای نرمالیزه شده اتصالات را نشان می‌دهند. می‌توان فرم کلی سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) + h(t, x_p) \tag{۳۵}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t)$$

که در آن:

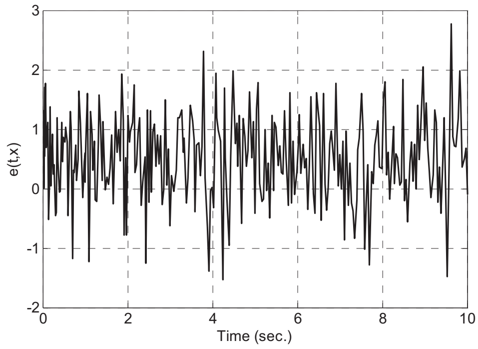
$$h(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p \tag{۳۶}$$

می‌خواهیم یک قانون کنترل غیرمتمرکز بدست آوریم که سامانه را برای همه مقادیر $e(t, x_p) \in [0,1]$ در حضور عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر پایدار کند.

بازخورد حالت خطی غیرمتمرکز مقاوم ایستا بر اساس روش ارائه شده در [8]، درجه قوام $\alpha^* = \alpha_1 = \alpha_2 = 4.4950$ و ماتریس ضرایب $K = \begin{bmatrix} -725.9085 & -40.4346 \end{bmatrix}$ را بدست می‌دهد، و قطب‌های حلقه بسته حاصل $\{-20 \pm 17.8093i\}$ می‌باشد. امّا به سادگی می‌توان دید که به علت وجود مد ناپایدار در سامانه حلقه باز که اطلاعات آن در خروجی ظاهر نمی‌گردد، این سامانه با هیچ بازخورد خطی خروجی ایستا قابل پایدارسازی نمی‌باشد. اما این‌کار با بازخورد خطی خروجی پویا امکان‌پذیر می‌باشد، پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی پویا مرتبه کامل که از قضیه ۱ [۲۰] با فرض $H = I$ بدست آمده است به‌صورت $Ac=10^4\times[-0.4670\ \ -1.4182;-1.0131\ \ -3.1931]$، $Bc=10^4\times[-3.3926;1.5118]$، $Cc=[243.5166\ \ 767.0817]$ و $Dc=-333.7029$ می‌باشد، که این کنترلگر قطب‌های سامانه حلقه بسته را در مقادیر زیر قرار می‌دهد:

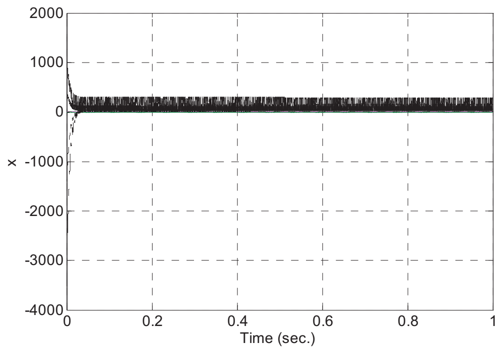
$$\{-3.6543 \times 10^4; -0.0390 \times 10^4; -0.7455 \pm 0.5605i\}$$

از یک سیگنال نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵ که در شکل ۲ نشان داده شده است برای شبیه سازی سیگنال $e(t, x_p)$ استفاده شده است. شکل ۳ و شکل ۴ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر مرتبه کامل قضیه ۱ [۲۰] را نشان می‌دهند. چنانچه در شکل ۳ نیز مشاهده می‌شود بزرگ بودن پارامترهای کنترلگر، بازه تغییرات وسیعی را برای حالت‌های سامانه حلقه بسته موجب شده است.

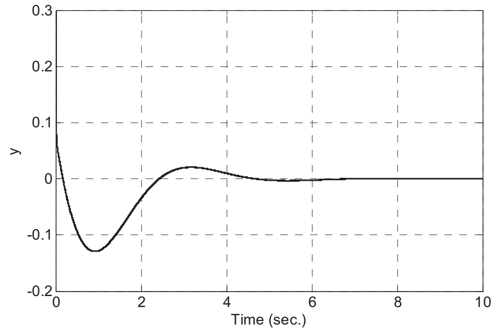


شکل ۲: سیگنال نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵

نتایج حاصل از قضیه ۱ با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ در جدول ۱ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر برای هر زیر سامانه به همراه محل قرارگیری قطب‌های حلقه بسته نشان داده شده است.



شکل ۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]

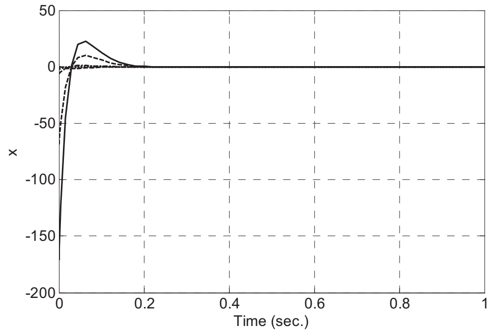


شکل ۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]

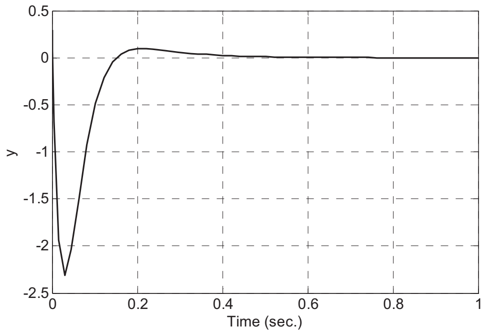
جدول ۱: پارامترهای کنترلگروقطب‌های حلقه‌بسته‌با اعمال قضیه ۱ به سامانه نمونه

مرتبه کنترلگر	قطب‌های حلقه بسته	پارامترهای کنترلگر
0	0 ± 3.1626	Dc = -11.0025
1	(-98.5963 ±626.2838i) -136.8172	Ac=-334.0098 Bc=-115.8581 Cc=-761909.8291 Dc=-428932.9973
2	-5375.1735 (-69.9510 ±502.8512i) -28.2745	Ac=[-2728.1704 -4701.1121 -1602.6708 -2815.1797] Bc=[-2777.8063 -1631.8701]^T Cc=[-737860.0973 -1341458.1817] Dc=-1019733.2438
بازخورد حالت (C=I)	-1.4483 -6.5642	K=Dc = [-10.5076 -8.0126]

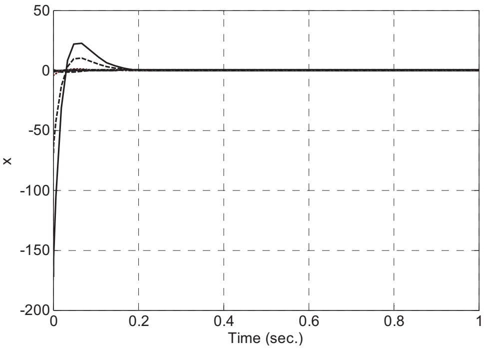
شکل ۵ و شکل ۶ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کلّ را برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه، و شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته را با کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه نشان می‌دهد.



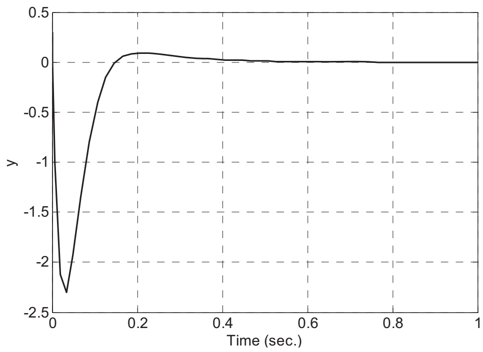
شکل ۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱



شکل ۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

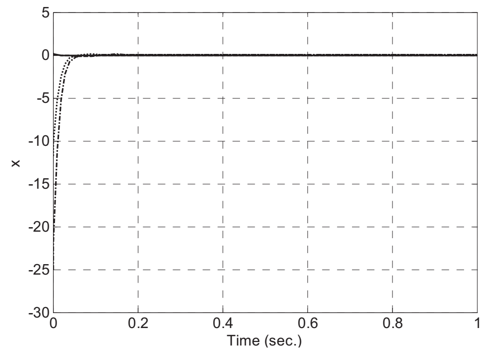


شکل ۷: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

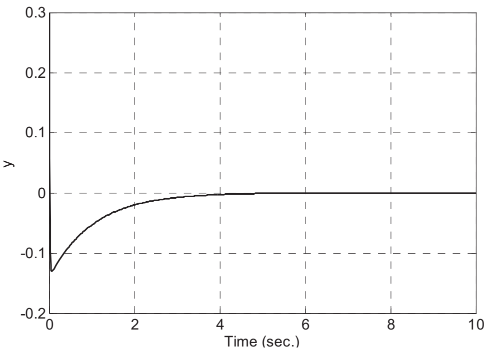


شکل ۸: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

علاوه بر قابلیت طراحی کنترلگر از مرتبه‌های دلخواه، شکل‌ها نشان می‌دهند که هم بازه تغییرات حالت‌ها بسیار کمتر از [۲۰] است و هم زمان نشست به‌مراتب کمتری در این طراحی حاصل شده است. همچنین در شکل ۹ و شکل ۱۰ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر بازخورد حالت بر اساس قضیه ۱ نمایش داده شده است. با توجه به در اختیار داشتن اطلاعات بیشتری از سامانه در طراحی کنترلگر بازخورد حالت، بدیهیست پاسخ‌های این طراحی به مراتب بهتر از کنترلگر بازخورد خروجی باشد که می‌توان این بهبود را در شکل ۹ و شکل ۱۰ با مقایسه بازه تغییرات حالت‌ها و زمان نشست آن‌ها با مقادیر قبلی مشاهده کرد.



شکل ۹- حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱



شکل ۱۰: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱

در این قسمت برای نشان دادن کارآئی روش ارائه شده، شبیه سازی در حضور عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر و با استفاده از قضیه ۲ انجام شده است. نتایج حاصل از قضیه ۲ با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ و $\delta_{A_c} = 0.01$، $\delta_{B_c} = 0.01$، $\delta_{C_c} = 0.01$ و $\delta_{D_c} = 0.01$، در جدول ۲ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر به همراه محل قرار گیری قطب‌های حلقه بسته آورده شده است.

در این شبیه سازی پارامترهای عدم‌قطعیت برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Delta A_c = 0.01\sin(3t),\ \Delta B_c = 0.01\sin(5t),\ \Delta C_c = 0.01\cos(t),\ \Delta D_c = 0.01\sin(t) \qquad (۳۷)$$

جدول ۲: پارامترهای کنترلگروقطب‌های‌حلقه‌بسته‌با اعمال قضیه ۲ به سامانه نمونه

مرتبه کنترلگر	قطب‌های حلقه بسته	پارامترهای کنترلگر
0	$0 \pm 1.44i$	Dc = -3.0781
1	-68.4570 (-17.3106 ±49.44i)	Ac = -103.0782 Bc = -44.8305 Cc = -7568.5345 Dc = -5115.0377
2	(-39.2785 ±54.6544i) -44.2478 -7.3939	Ac =[-32.3502 -47.8556 -46.5729 -97.8487] Bc=[-41.5950 -67.5857]^T Cc =[-4569.1215 -8714.0399] Dc = -7978.2686
بازخورد حالت (C=I)	-1.21 -5.98	K=Dc = [-8.2358 -7.19]

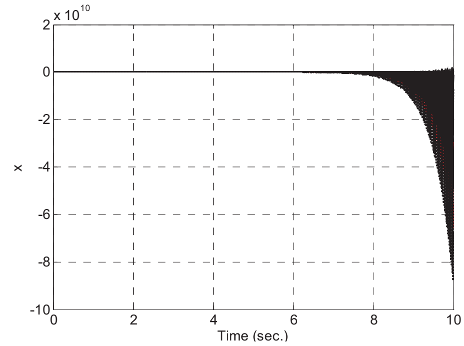
همچنین برای کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه پارامترهای عدم‌قطعیت به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Delta A_c = 0.01\begin{bmatrix} 0.5\sin(3t) & 0.5\sin(5t) \\ 0.5\sin(2t) & 0.5\cos(t) \end{bmatrix},\quad \Delta B_c = 0.01\begin{bmatrix} 0.7\sin(3t) \\ 0.7\cos(t) \end{bmatrix}, \qquad (۳۸)$$

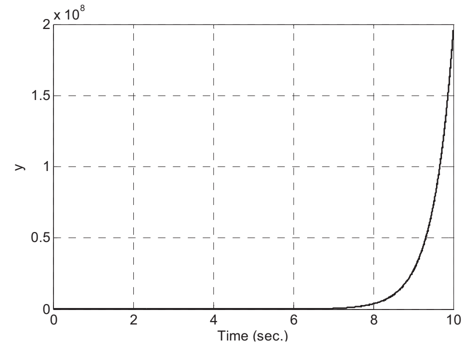
$$\Delta C_c = 0.01[0.7\cos(t) \quad 0.7\sin(4t)],$$
$$\Delta D_c = 0.01\sin(t)$$

در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نتایج حاصل از شبیه سازی نتایج [20] با عدم‌قطعیت (۳۸) مشاهده می‌گردد. شکل ۱۱ و شکل ۱۲ بیانگر ناپایداری سامانه حلقه بسته با در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در ساختار کنترلگر است. بدیهیست طراحی ارائه شده در [20] شکننده بوده و برای کاربردهای عملی مناسب نمی‌باشد.

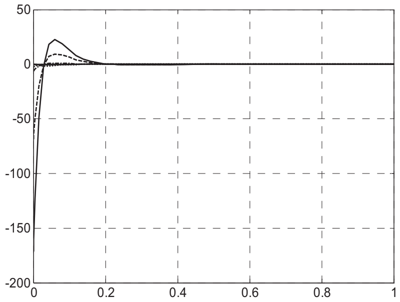
همچنین شکل ۱۳ تا شکل ۱۸ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کلّ را برای مرتبه های مختلف کنترلگر بازخورد خروجی پویا برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲ و در حضور عدم‌قطعیت (۳۷) و (۳۸) نشان می‌دهد. علاوه بر قابلیت‌های مختلف روش ارائه شده که در شکلهای ارائه شده برای نتایج قضیه ۱ بیان گردید، مشاهده می‌شود که با وجود عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر، پاسخ‌های بدست آمده همچنان کارآئی بالای کنترلگر طراحی شده را نشان می‌دهد. غیرشکننده بودن کنترلگر طراحی شده این امکان را به ما می‌دهد تا در کاربردهای عملی به‌راحتی از نتایج این روش بهره‌مند شویم.

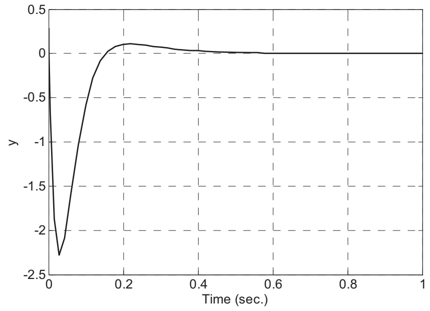


شکل ۱۱: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [20] در حضور عدم‌قطعیت

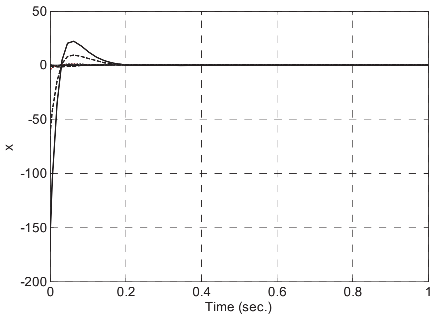


شکل ۱۲: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [20] در حضور عدم‌قطعیت

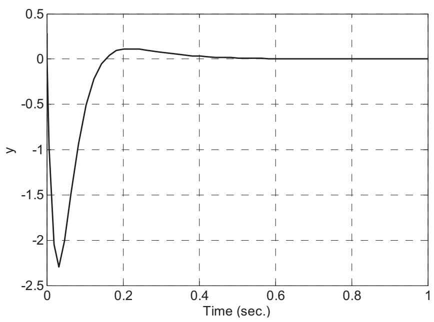

شکل ۱۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



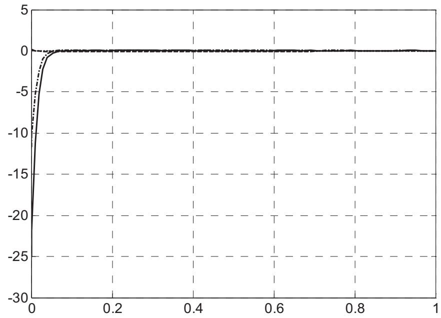
شکل ۱۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



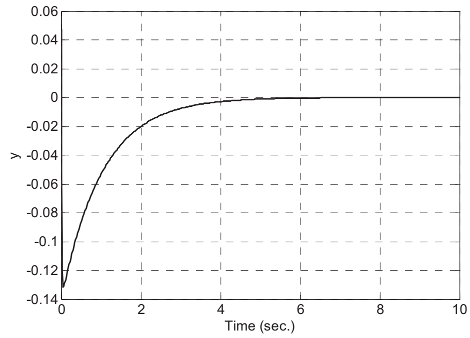
شکل ۱۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۷: حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۸: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲

چنانچه ملاحظه می‌شود، نتایج بدست آمده از دو جهت قابل بررسی می‌باشد: اول اینکه قطب‌های حلقه‌بسته بدست آمده در مقایسه با کارهای مرتبه کامل قبلی دورتر از محور موهومی است که در نتیجه پایداری بسیار بهتری را به‌دست می‌دهد و پاسخ سامانه نیز بسیار سریع‌تر و پایدارتر است، دومین مسئله وجود کنترلگر از مرتبه‌های مختلف است که می‌توان مرتبه کنترلگر را برای زیرسامانه‌های متفاوت با توجه به نیاز در کاربردهای مختلف تنظیم نمود. چنانچه ملاحظه می‌شود پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد خروجی پویا بسیار سریعتر از کنترلگر بازخورد حالت است ولی پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد حالت به مراتب بالازدگی و پایین‌زدگی کمتری را دارا می‌باشد. همچنین با توجه به غیرشکننده بودن کنترلگر حاصل از قضیه ۲، مشکلات ناشی از اجرا در عمل به حداقل خواهد رسید. چنانچه در نتایج حاصل مشاهده گردید نتایج حاصل از [20] در حضور عدم قطعیت بسیار شکننده بوده و پاسخ سامانه ناپایدار گردیده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کنترلی برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های مرکب از زیرسامانه‌های خطی با اتصالات داخلی غیرخطی دارای عدم‌قطعیت که قیود مربعی را برآورده می‌سازند، طراحی شده است. این طرح از ساختار عمومی بازخورد خروجی پویا بهره گرفته است. در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض اینکه تمامی حالت‌ها به‌صورت مستقیم در خروجی در دسترس باشند، طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طرّاحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر خواهد یافت. روند طراحی با تعیین مرتبه کنترلگر، درجه‌های قوام و پارامترهای کنترلگر مورد نظر را بدست می‌دهد. همچنین کنترلگرهای غیرمتمرکز حاصل از این طراحی، پایداری سامانه کل را نیز تضمین می‌نماید. در این مقاله، یک مثال برای نشان دادن چگونگی پایدارسازی یک سامانه متشکل از زیر سامانه‌های بهم پیوسته با کنترل غیرمتمرکز ارائه گردیده و با نتایج حاصل از کارهای قبلی مقایسه شده است. این روش برای کاربردهای عمومی در طراحی کنترلگر برای سامانه‌های مقیاس وسیع و سامانه‌های غیر مقیاس وسیع بسیار مناسب است.

مراجع

[1] Gahinet, Pascal, Nemirovski, Arkadi, Laub, Alan J., Chilali, Mahmoud, *LMI control toolbox*, The Math Works, Natick, MA, 1995.

[2] Gahinet, P., Apkarian, P., 1994, “A linear matrix inequality approach to H∞ control”, *Internat. J. Robust Nonlinear Control,* 4, 421-448.

[3] Iwasaki, T., Skelton, R.E., 1994, “All controllers for the general H∞ control Problem: LMI existence conditions and state space formulas”, *Automatica*, 30, 1307-1317.

[4] Boyd, Stephen, El Ghaoui, Laurent, Feron, Eric, Balakrishnan, Venkataramanan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[5] Dullerud, Geir E., Paganini, Fernando, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer, N.Y, 2000.

[6] Geromel, J.C., Bernussou, J.C., de Oliveira, M.C., 1999, “H2-norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: Decentralized and reliable control”, *IEEE Trans. Automat. Control,* 44, 1449-1454.

[7] Geromel, J.C., Bernussou, J., Peres, P.L.D., 1994, “Decentralized control through parameter space optimization”, *Automatica,* 30, 1565-1578.

[8] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2000, “Robust stabilization of nonlinear systems”, *Math. Probl. Eng.*, 6, 461-493.

[9] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2001, “Autonomous decentralized control”, *Proc. ASME Intern. Mech. Eng. Congress,* 761-765.

[10] Zhai, G., Ikeda, M., Fujisaki, Y., 2001, “Decentralized controller design: A matrix inequality design using a homotopy method”, *Automatica,* 37, 565-572.

[11] D'Andrea, R., Dullerud, G.E., 2003, “Distributed control design for spatially interconnected systems”, *IEEE Trans. Automat. Control.*, 48, 1478-1495.

[12] Zecevic, A.I., Neskovic, G., Siljak, D.D., 2004, “Robust decentralized exciter control with linear feedback”, *IEEE Trans. Power Syst.*, 19, 1096-1103.

[13] Stipanovic, D.M., Teo, Inhalan R., Tomlin, C., 2004, “Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles”, *Automatica,* 40, 1285-1296.

[14] Siljak, D.D., Zecevic, A.I., 2004, “Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback”, *in: Proc. 10th*

IFAC Symposium on Large Scale Systems, Osaka, Japan, 1-10.

[15] Zecevic, A.I., Siljak, D.D., 2004, "Design of robust static output feedback for large-scale systems", *IEEE Trans. Automat. Control.*, 49, 2040-2044.

[16] Siljak, Dragoslav D., *Decentralized Control of Complex Systems*, Academic Press, New York, 1991.

[17] Pagilla, P.R., Zhu, Y., 2005, "A decentralized output feedback controller for a class of large-scale interconnected nonlinear systems", *Trans. ASME, J. Dynam. Syst.Meas. Control*, 127, 167-172.

[18] Stankovic, S.S., Stipanovic, D.M., Siljak, D.D., 2007, "Decentralized Dynamic Output Feedback for Robust Stabilization of a Class of Nonlinear Interconnected Systems", *Automatica*, 43, 861-867.

[19] Zhu, Y., Pagilla, P.R., 2007, "Decentralized output feedback control of a class of large scale interconnected systems", *IMA J. Math. Control Inform.*, 24, 57-69.

[20]Stankovic, S. S., Siljak, D. D., 2009, "Robust stabilization of nonlinear interconnected systems by decentralized dynamic output feedback", *Systems & Control Letters*, 58, 271-275.

[21]Labibi, B., Marquez, H. J., Chen, T., 2009, "Decentralized robust output feedback control for control affine nonlinear interconnected systems", *Journal of Process Control*, 19, 865–878.

[22]Lofberg, John, *What is YALMIP?,* Linkopings univeritet, http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php?n=Main. What, 2001.