مجله کنترل
جلد ۵، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۰، صفحه۶۴-۵۲

مدل‌سازی تبدیل فاز و کنترل وفقی مقاوم سوئیچینگ عملگرهایی از جنس آلیاژ حافظه‌دار با و بدون در نظر گرفتن اثر تاخیر زمانی این عملگرها

حسین چهاردولی[۱]، محمد اقتصاد[۲]، مهرداد فرید[۳]

[۱]دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک / دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، Hchehardoli@gmail.com
[۲] استاد / دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، Eghtesad@shirazu.ac.ir
[۳] دانشیار / دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، Farid@shirazu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۰/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۲۰)

چکیده: آلیاژهای حافظه‌دار دسته‌ای از مواد هوشمند هستند که به دلیل پاره‌ای از خواص ویژه کاربردهای صنعتی زیادی در شاخه‌های مختلف مهندسی پیدا کرده‌اند. این مواد کرنش‌های بزرگ و قابل بازگشت دارند و می‌توان از آن‌ها در کاربردهایی که کرنش زیادی نیاز دارند استفاده کرد. در این مقاله ابتدا با تصحیح فرضیات Lagoudas مدلی بهبود یافته برای تبدیل فاز این مواد هوشمند ارائه و نتایج با مدل معروف کسینوسی Liang-Rogers مقایسه شده‌اند. در کاربردهای مهندسی روش‌های کنترلی مختلفی برای این عملگرها استفاده شده است. در ادامه برای اولین بار به کنترل سوئیچینگ این عملگرها پرداخته‌ایم. به این منظور کاربرد خاصی از این مواد هوشمند را انتخاب کرده و با انتخاب یک تابع لیاپانوف مشترک برای تمامی زیر سیستم‌ها به اثبات پایداری سیستم تحت هر سوئیچ دلخواه پرداخته‌ایم. سپس کنترلر وفقی مقاوم سوئیچینگ را بر آن اعمال نموده‌ایم. در پایان مسئله تاخیر زمانی را برای این عملگرها در نظر گرفته و نشان داده‌ایم سیستم سوئیچینگ تاخیر زمانی مورد نظر با وجود تاخیر زمانی پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

واژه های کلیدی: آلیاژ حافظه‌دار، مدل سینتیک تبدیل فاز، سیستم سوئیچینگ، تابع لیاپانوف مشترک، کنترل وفقی-مقاوم، تاخیر زمانی.

Phase Transformation Modeling and Robust Adaptive Switching Control of Shape Memory Alloy Actuators With and Without Considering Time Delay of These Actuators

Hossein Chehardoli, Mohammad Eghtesad, Mehrdad Farid

Abstract: Shape Memory Alloys are widely used in the industry. Different researchers introduce successful models for phase transformation. In this work firstly the Lagoudas assumptions is corrected and an enhanced model for phase transformation of these smart materials is introduced. Secondly we compare results of this model with cosine Liang-Rogers model. Results show a good consistency between this model and cosine Liang-Rogers model. Afterwards for the first time switching control for these operators is investigated. For this reason, special application of smart material is selected and a common Lyapunov function for all subsystems is selected to prove stability of the system under any arbitrary switching. Subsequently robust adaptive switching control is applied on it. Lastly, a time delay problem is supposed and it is shown that even by considering time delay for this switched system, it is globally asymptotically stable.

Key words: Shape memory alloy, Switching System, Common Lyapunov Function, Robust Adaptive Control, Time Delay.

مقدمه

مواد هوشمند[۱] هر یک خواص ویژه‌ای دارند که آن‌ها را گزینه‌ی مناسبی برای کاربردهای مهندسی کرده است. انواع مختلفی از مواد هوشمند شناخته شده‌اند، موادی همچون: آلیاژهای حافظه‌دار[۲]، پلیمرهای الکترواکتیو[۳]، فلزات مگنتواستریکتیو[۴]، مواد پیزوالکتریک[۵] و غیره. آلیاژهای حافظه‌دار موادی هستند که اگر دچار تغییر شکل شوند می‌توانند با حرارت شکل اولیه خود را باز یابی کنند. از این خاصیت در طراحی عملگرهای مکانیکی استفاده‌های زیادی می‌شود.

رفتار ترمومکانیکی منحصر به فرد این مواد نتیجه تبدیل بین دو فاز آستنیت (مولد) و فاز مارتنزیت (محصول) و بالعکس می‌باشد[۱]. این آلیاژها در مقایسه با عملگرهایی چون موتورDC، سلونوئید و امثال آن‌ها چگالی انرژی خیلی بالایی دارند. به عنوان عملگر این مواد کاربردهای وسیعی در صنایع مختلف یافته‌اند، همچون رباتیک[۲]، صنایع هوافضا[۳]، کاربردهای پزشکی و اورتوپدی[۴] و کاربردهای MEMS[۶] [۵]. دو خاصیت مهم آلیاژهای حافظه‌دار عبارتند از اثر حافظه‌ی شکلی و خاصیت فوق کشسانی. در پدیده‌ی حافظه‌ی شکلی ماده ابتدا در فاز مارتنزیت قرار دارد که در آن ماده نرم و انعطاف‌پذیر است، اگر ماده در این حالت تحت بار قرار گیرد دچار تغییر شکل می‌شود، اما با اعمال حرارت ماده به فاز مولد رفته و شکل ابتدایی خود را بازیابی می‌کند. پس از سرمایش ماده از فاز آستنیت به مارتنزیت دوقلویی[۷] تبدیل می‌گردد. پس از اعمال بار مارتنزیت دوقلویی به مارتنزیت غیر دوقلویی[۸] تبدیل گشته و سیکل بالا مجددا تکرار می‌شود. در خاصیت فوق کشسانی ماده که ابتدا در فاز آستنیت قرار دارد تحت یک تنش خیلی بزرگ مستقیما به فاز مارتنزیت غیر دوقلویی تبدیل می‌گردد و پس از باربرداری به فاز قبلی خود آستنیت باز می‌گردد. شکل (۱) این دو خاصیت مواد SMA را نشان می‌دهد[۶].

با توجه به خواص SMA معادلات حاکمه آن‌ها در دوفاز آستنیت و مارتنزیت متفاوت است و در واقع سیستم بین چند معادله مختلف سوئیچ می‌کند. در این مقاله این سیستم‌ها را با دید سوئیچینگ در نظر می‌گیریم. در بررسی پایداری سیستم‌های سوئیچینگ روش‌های مختلفی وجود دارد، از جمله تابع لیاپانوف مشترک، توابع لیاپانوف چندگانه و مفهوم زمان توقف. در این مقاله ابتدا با تصحیح فرضیات Lagoudas به ارائه‌ی مدلی بهبود یافته برای تبدیل فاز آلیاژهای حافظه‌دار پرداخته، سپس با استفاده از توابع لیاپانوف مشترک به اثبات پایداری یک سیستم خاص از این مواد هوشمند می‌پردازیم و یک قانون کنترل سوئیچینگ طراحی می‌کنیم. در پایان نشان می‌دهیم سیستم مورد نظر در حضور تاخیر زمانی نیز یک سیستم پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

مدل‌سازی تبدیل فاز SMA

معادلات حاکمه‌ی آلیاژهای حافظه‌دار شامل دو بخش معادلات ساختاری و معادلات سینتیک تبدیل فاز می‌باشند. عملگرهایی که از جنس آلیاژ حافظه‌دار ساخته می‌شوند اغلب به صورت سیم و یک بعدی هستند. بنابراین مدل‌های ارائه شده نیز اغلب حالت یک بعدی را در نظر می‌گیرند. معادله ساختاری معادله ایست دیفرانسیلی مبین ارتباط بین نرخ تنش، کرنش، دما و کسر مارتنزیتی. معادله‌ی ساختاری اولین بار توسط Tanaka ارائه گردید و به صورت زیر است[7]:

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} + \theta_t \dot{T} + \Omega\dot{\xi} \qquad (1)$$

σ، ε، T، ξ، D و θ_t به ترتیب تنش Piola-Kirchhoff، کرنش Green، دما، کسر مارتنزیتی، مدول الاستیک و ضریب انبساط حرارتی می‌باشند و Ω ضریبی است که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\Omega = -D\varepsilon_l \qquad (2)$$

که در آن ε_l بیشینه کرنش بازیابی سیم می‌باشد. در کاربردهای مهندسی استفاده از مدل‌های پدیدار شناختی SMA استفاده بیشتری از مدل‌های ترمودینامیکی SMA ها دارند. از معتبرترین مدل‌های پدیدار شناختی سینتیک تبدیل فاز مدل کسینوسی Liang-Rogers است[۸]. مدل‌های موفق دیگری نیز برای تبدیل فاز این مواد توسط افرادی چون Tanaka [۷] و Lagoudas [9] ارائه شده‌اند.

Liang مدل کسینوسی خود را به صورت زیر بیان کرد:

$$\xi = \frac{\xi_M}{2}\cos[a_A(T - A_s) + b_A\sigma] + \frac{\xi_M}{2} \qquad (3)$$

برای فرایند گرمایش یا تبدیل فاز از مارتنزیت به آستنیت و

$$\xi = \frac{1-\xi_A}{2}\cos\left[a_M\left(T - M_f\right) + b_M\sigma\right] + \frac{1+\xi_A}{2} \qquad (4)$$

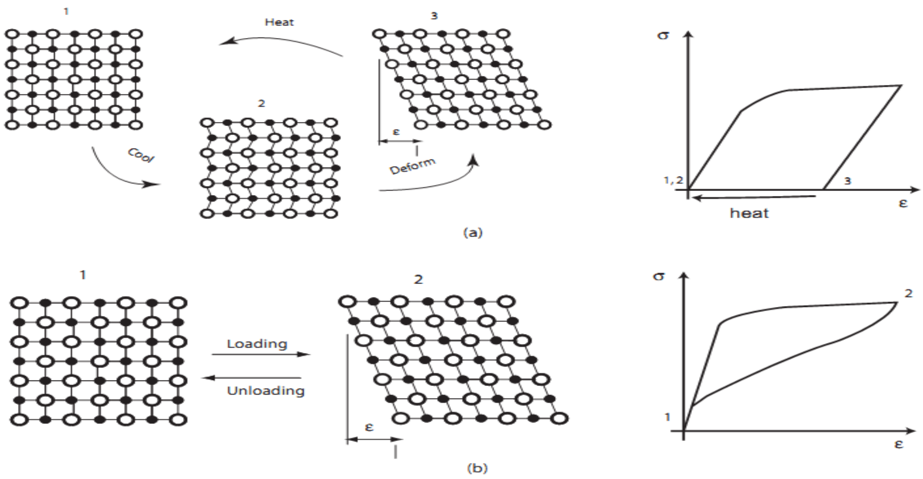
برای فرایند سرمایش یا تبدیل از فاز آستنیت به مارتنزیت. در این دو رابطه: M_s، M_f، A_s و A_f به ترتیب دماهای آغاز فاز مارتنزیت، پایان فاز مارتنزیت و پایان فاز آستنیت می‌باشند، ثابت‌های a_A و a_M عبارتند از: $a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s}$ و $a_M = \frac{\pi}{M_f - M_s}$. دو ثابت دیگر معادله‌ی (۳) و (۴) به صورت $b_A = -\frac{a_A}{C_A}$ و $b_M = -\frac{a_M}{C_M}$ هستند. C_M و C_A ثوابت نشان دهنده‌ی تاثیر فشار روی دماهای انتقال هستند و برابر شیب منحنی دما-تنش این مواد می‌باشند. ξ_A و ξ_M نیز درصد مارتنزیتی به ترتیب قبل از گرم شدن و سرد شدن است.

از جمله‌ی مدل‌های موفق دیگر توسط Lagoudas ارائه گردید[10]. وی در استخراج مدل خود از مفاهیم قانون دوم ترمودینامیک و انرژی آزاد گیبس استفاده کرد و برای هر دو تبدیل

---

[1] Smart Materials
[2] Shape Memory Alloy (SMA)
[3] Electro Active Polymers
[4] Magnetostrictive
[5] Piezoelectric
[6] Micro Electro Mechanical System
[7] Twinned Martensite
[8] Detwinned Martensite

مستقیم و معکوس نیروی ترمودینامیکی تبدیل فاز را به صورت زیر تعریف نمود:



شکل ۱: a- خاصیت حافظه‌ی شکلی و b- خاصیت فوق کشسانی[۶]

(۵)

$$\pi = \sigma : \Lambda + \frac{1}{2}\sigma : \Delta S : \sigma + \\ + \sigma : \Delta\alpha(T - T_0) - \rho\Delta c\left[\left(T - T_0\right) - T\ln(\frac{T}{T_0})\right] + \\ + \rho\Delta S_0 T - \rho\Delta u_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

که در آن σ تانسور تنش، ΔS ، $\Delta\alpha$ و Δc به ترتیب تفاوت تانسور سختی، هدایت حرارتی و رسانش گرمایی در دوفاز آستنیت و مارتنزیت هستند. Δu_o ، ΔS_o به ترتیب تغییرات انتروپی و انرژی داخلی نسبت به وضعیت مرجع هستند. T_o دمای اولیه، ρ چگالی و f یک تابع سفتی بر حسب کسر مارتنزیتی می‌باشد که در ادامه معرفی می‌شود.

Λ تانسور انتقال است که جهت کرنش تبدیل را مشخص می‌کند و برای دو تبدیل مستقیم و معکوس از رابطه زیر به دست می‌آید[10]:

(۶)

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} H^{\max} \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}} \\ H^{\max} \frac{\varepsilon^{t-r}}{\bar{\varepsilon}^{t-r}} \end{cases}$$

H^{max} ضریبی وابسته به نوع ماده، σ' تنش انحرافی[1]، $\bar{\sigma}$ تنش فن میز، ε^{t-r} کرنش تبدیل و $\bar{\varepsilon}^{t-r}$ کرنش تبدیل موثر است. Lagoudas, در ارائه‌ی مدل خود فرض کرد تبدیل فاز زمانی رخ می‌دهد که نیروی ترمودینامیکی (۵) در هر دو فاز مارتنزیت و آستنیت به مقداری بحرانی برسد. برای محاسبه این نیرو وی تابعی درجه دو بر حسب کسر مارتنزیتی برای تابع سفتی f به صورت زیر در نظر گرفت :

(۷)

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho b_M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2)\xi \quad ; \quad \dot{\xi} \succ 0 \\ \frac{1}{2}\rho b_A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2)\xi \quad ; \quad \dot{\xi} \prec 0 \end{cases}$$

وی برای محاسبه‌ی ثوابت b_A، b_M، μ_1 و μ_2 از روابط سینتیکی تبدیل فاز زیر استفاده کرد:

۱- شروع تبدیل فاز مستقیم در فشار صفر:

(۸)

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y \quad at \ \sigma = 0, T = M_s, \quad \xi = 0.$$

۲- پایان تبدیل فاز مستقیم در فشار صفر:

(۹)

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y \quad at \ \sigma = 0, T = M_f, \quad \xi = 1.$$

۳- شروع تبدیل فاز معکوس در فشار صفر:

(۱۰)

$$\pi(\sigma, T, \xi) = -Y \quad at \ \sigma = 0, T = A_s, \quad \xi = 1.$$

۴- پایان تبدیل فاز معکوس در فشار صفر:

(۱۱)

$$\pi(\sigma, T, \xi) = -Y \quad at \ \sigma = 0, T = A_f, \quad \xi = 0.$$

۵- پیوستگی انرژی آزاد گیبس در نقطه‌ی ابتدایی تبدیل فاز:

[1] deviatoric stress

(۱۲)

$$f\left(\xi=1\right)\Big|_{\dot{\xi}\succ 0}=f\left(\xi=1\right)\Big|_{\dot{\xi}\prec 0}$$

در واقع وی انرژی آزاد گیبس را در دو بازه‌ی دمایی $T=[M_s , A_f]$ و $T=[M_f, A_s]$ به طور جداگانه ثابت در نظر گرفت[۱۰].

در نهایت Lagoudas مدل سینتیک تبدیل فاز خود را به صورت زیر ارائه نمود[۱۰]:

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{\rho b_M}\begin{bmatrix}|\sigma|.H+\dfrac{1}{2}\Delta S.\sigma^2+\\ +\rho.\Delta S_0\left(T-M_S\right)\end{bmatrix};\ \dot{\xi}\succ 0\\ \xi=\dfrac{1}{\rho b_A}\begin{bmatrix}|\sigma|.H+\dfrac{1}{2}\Delta S.\sigma^2+\\ +\rho.\Delta S_0\left(T-A_f\right)\end{bmatrix};\ \dot{\xi}\prec 0\end{cases} \qquad (۱۳)$$

اما دو ایراد عمده بر کار Lagoudas وارد است. اول اینکه همانطور که از معادلات (8) تا (11) مشخص است وی نیروی ترمودینامیکی بحرانی تبدیل فاز(Y) را در هر دو تبدیل مستقیم و معکوس، مساوی و قرینه گرفت. اما با توجه به خواص SMA که فاز آستنیت فازی سخت و فاز مارتنزیت فازی نرم است برابر گرفتن این نیرو برای این دوفاز چندان مورد قبول نیست. ایراد دوم ثابت گرفتن انرژی آزاد گیبس در بازه‌های دمایی$[M_s , A_f]$ و $[M_f , A_s]$ به طور جداگانه می‌باشد. از آن جایی که انرژی آزاد گیبس تابعیت شدیدی از دما دارد باز هم این تقریب چندان مورد قبول نیست بخصوص برای انواعی از این آلیاژها که بازه‌های دمایی فوق، بزرگ است. در این مقاله در صدد رفع این دو ایراد برآمدیم. به همین دلیل برای هر یک از تبدیل‌های مستقیم و معکوس Yهای جداگانه‌ای در نظر گرفته و به جای معادله‌ی (۱۲) از ابزار بهینه سازی برای یافتن سایر مجهولات استفاده نموده‌ایم.

به منظور استخراج رابطه‌ای برای تبدیل فاز مستقیم و معکوس تابع سفتی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

(۱۴)

$$f(\xi)=\begin{cases}\rho.b_M\left[\xi-\dfrac{\left(1-\xi\right)^{1+n_1}}{1+n_1}\right]\ ;\ \dot{\xi}\succ 0\\ \rho.b_A\left[\xi-\dfrac{\left(1-\xi\right)^{1+n_2}}{1+n_2}\right]\ ;\ \dot{\xi}\prec 0\end{cases}$$

که در آن n_1 و n_2 اعدادی ثابت هستند، برای یافتن مجهولات مسئله روابط (۸) تا (۱۱) را به صورت زیر باز تعریف می‌کنیم:

(۱۵)

$$\pi(\sigma,T,\xi)=Y_1 \quad at\ \sigma=0, T=M_s,\quad \xi=0.$$

(۱۶)

$$\pi(\sigma,T,\xi)=Y_1 \quad at\ \sigma=0, T=M_f,\quad \xi=1.$$

(۱۷)

$$\pi(\sigma,T,\xi)=Y_2 \quad at\ \sigma=0, T=A_s,\quad \xi=1.$$

(۱۸)

$$\pi(\sigma,T,\xi)=Y_2 \quad at\ \sigma=0, T=A_f,\quad \xi=0.$$

با حل این معادلات داریم:

(۱۹)

$$Y_1=\rho\Delta s_0 M_f-\rho\Delta u_0$$

(۲۰)

$$Y_2=\rho\Delta s_0 A_f-\rho\Delta u_0$$

(۲۱)

$$b_A=\Delta s_0\left(A_s-A_f\right)$$

(۲۲)

$$b_M=\Delta s_0\left(M_s-M_f\right)$$

و در نهایت با حل معادلات زیر[۱۰]:

(۲۳)

$$\pi=\sigma.H+\frac{1}{2}\Delta S.\sigma^2+\rho.\Delta s_0.T-\rho\Delta u_0-\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial\xi}=Y_1$$

برای تبدیل مستقیم و

$$\pi=\sigma.H+\frac{1}{2}\Delta S.\sigma^2+\rho.\Delta s_0.T-\rho\Delta u_0-\frac{\partial f_2(\xi)}{\partial\xi}=Y_2 \qquad (۲۴)$$

برای تبدیل معکوس به معادلات تبدیل فاز زیر می‌رسیم:

(۲۵)

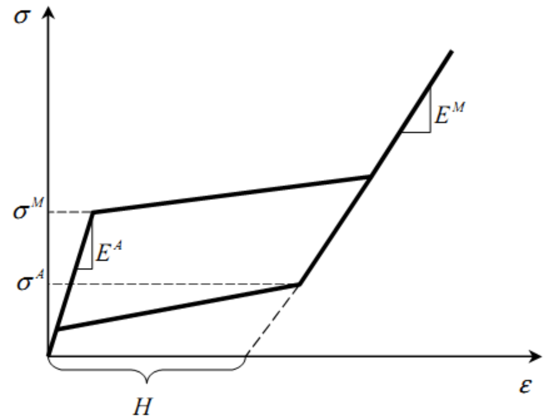
$$\begin{cases}|\sigma|.H+\dfrac{1}{2}\Delta S.\sigma^2+\rho\Delta S_0(T-M_s)+\\ -\rho b_M\left[1-(1-\xi)^{n_1}\right]=0, \qquad \dot{\xi}\succ 0\\ |\sigma|.H+\dfrac{1}{2}\Delta S.\sigma^2+\rho\Delta S_0(T-A_f)+\\ -\rho b_A\left[1-(1-\xi)^{n_2}\right]=0, \qquad \dot{\xi}\prec 0\end{cases}$$

در کاربردهای مهندسی محاسبه‌ی ΔS_0 بسیار مشکل است. به همین دلیل در زیر رابطه‌ای بر حسب این کمیت و شیب منحنی تنش-دمای آلیاژهای حافظه‌دار بدست آورده‌ایم:

(۲۶)

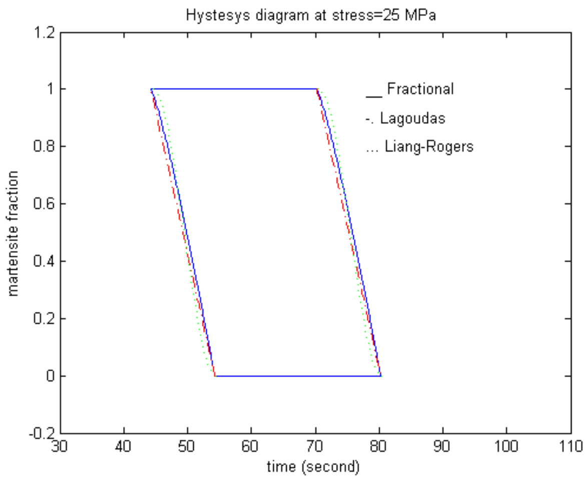
$$\rho\Delta S_0=-H\frac{d\sigma}{dT}=-H.C \quad ,C=C_A=C_M$$

ثابت H وابسته به نمودار تنش-کرنش SMA است شکل(۲)، که برای آلیاژ NiTi بین ۰.۳٪ و ۰.۶٪ می‌باشد[۱۰] و در اینجا آنرا ۰.۰۴۵ در نظر می‌گیریم.



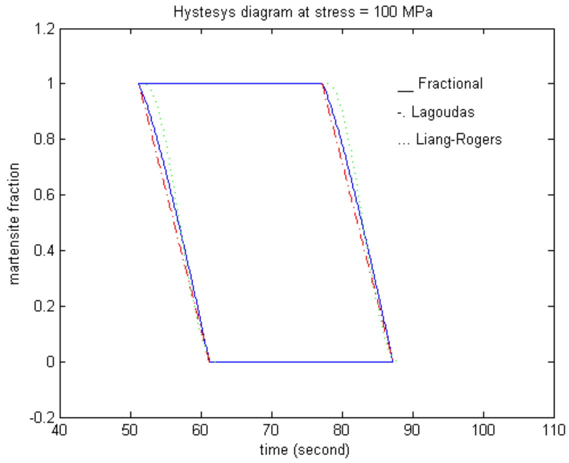
شکل ۲: نمودار تست تنش تک محوری SMA[۱۰]

همانطور که قبلا بیان شد برای محاسبه مجهولات n_1 و n_2 به جای رابطه‌ی (۱۲) از روش برازش منحنی[۱] استفاده می‌کنیم. اگر مدل‌سازی را برای یک نمونه از SMA انجام دهیم[۱۱]، در نهایت به مقادیر $n_1= n_2 =0.8$ می‌رسیم و این مدل جدید را مدل پاره‌ای[۲]می‌نامیم. شکل‌های (۳) و (۴) مقایسه‌ای بین مدل‌های Fractional، Lagoudas و Liang-Rogers در فشارهای ۲۵ و ۱۰۰ مگاپاسکال نشان می‌دهند.



شکل ۳: مقایسه مدل‌های Fractional، Lagoudas و مدل کسینوسی Liang-Rogers برای یک مدل خاص SMA در فشار ۲۵ MPa

[1] Curve fitting
[2] Fractional



شکل ۴: مقایسه مدل‌های Fractional، Lagoudas و مدل کسینوسی Liang-Rogers برای یک مدل خاص SMA در فشار ۱۰۰ MPa

جدول (۱) و (۲) مقایسه‌ای بین دماهای تبدیل فاز پیش‌بینی شده توسط سه مدل بالا در دو فشار ۲۵ و ۱۰۰ مگاپاسکال را نشان می‌دهند.

جدول ۱: مقایسه دماهای تبدیل فاز در فشار ۲۵ مگاپاسکال

دما – مدل	M_f	M_s	A_s	A_f
Cosine	۴۴.۵۰	۵۴.۵۰	۷۰.۵۰	۸۰.۵۰
Lagoudas	۴۴.۲۷	۵۴.۲۷	۷۰.۲۷	۸۰.۲۷
Fractional	۴۴.۲۸	۵۴.۲۸	۷۰.۲۸	۸۰.۲۸

جدول ۲: مقایسه دماهای تبدیل فاز در فشار ۱۰۰ مگاپاسکال

دما – مدل	M_f	M_s	A_s	A_f
Cosine	۵۲	۶۲	۷۸	۸۸
Lagoudas	۵۱.۲۳	۶۱.۲۳	۷۷.۲۳	۸۷.۲۳
Fractional	۵۱.۲۴	۶۱.۲۴	۷۷.۲۴	۸۷.۲۴

در مورد تبدیل فاز آلیاژهای SMA شرایط مختلفی توسط محققانی چون Tanaka، Liang-Rogers، Brinson و Elahinia ذکر شده است. کامل‌ترین این شروط را Elahinia در سال ۲۰۰۴ ارائه نمود[۶]. ما نیز در این مقاله از شروط تبدیل فاز Elahinia استفاده کرده‌ایم. جدول (۳) مقایسه‌ای بین این شروط را نشان می‌دهد.

ذکر این نکته ضروری است که مدل پاره‌ای قابلیت مدل کردن حلقه‌های فرعی هیسترزیس[۳] را دارا می‌باشد. فرض کنید ماده در تبدیل مستقیم(تبدیل آستنیت به مارتنزیت) قرار دارد در این حالت شرط اول از شرایط تبدیل فاز Elahinia صادق است[۱۲] بنابراین کسر مارتنزیتی از اولین معادله‌ی (25) بدست می‌آید. اما اگر قبل از اینکه کسر مارتنزیتی به یک برسد تبدیل فاز معکوس رخ دهد یعنی

[3] Minor hysteresis loop

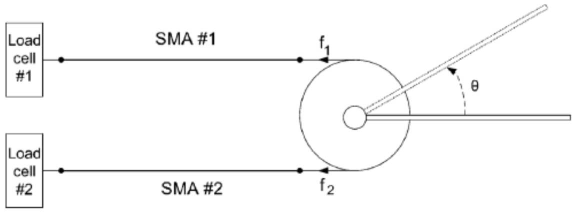
معادله‌ی دوم از شرایطElahinia ارضا گردد در این حالت کسر مارتنزیتی از دومین معادله‌ی (۱-۱۳) بدست خواهد آمد.

جدول ۳- شرایط تبدیل فاز آلیاژهای حافظه‌دار

نگارنده	تغییر حالت از مارتنزیت به آستنیت	تغییر حالت از آستنیت به مارتنزیت
Tanaka (1986)	$\dot{\sigma} < 0$ $\sigma \le -(T - A_s)\frac{A_a}{B_a}$	$\dot{\sigma} > 0$ $\sigma \ge (T - M_s)\frac{A_m}{B_m}$
Liang (1990)	$\dot{T} > 0$ $A_f + \frac{\sigma}{C_A} \ge T \ge A_s + \frac{\sigma}{C_A}$	$\dot{T} < 0$ $M_s + \frac{\sigma}{C_M} \ge T \ge M_f + \frac{\sigma}{C_M}$
Brinson (1993)	$\dot{\sigma} < 0$ $C_A(T - A_s) \ge \sigma \ge C_A(T - A_f)$	$\dot{\sigma} > 0$ $C_M(T - M_f) \ge \sigma \ge C_M(T - M_s)$
Elahinia (2004)	$\dot{T} - \frac{\dot{\sigma}}{C_A} > 0$ $A_f + \frac{\sigma}{C_A} \ge T \ge A_s + \frac{\sigma}{C_A}$	$\dot{T} - \frac{\dot{\sigma}}{C_M} < 0$ $M_s + \frac{\sigma}{C_M} \ge T \ge M_f + \frac{\sigma}{C_M}$

کنترل وفقی-مقاوم سوئیچینگ عملگری از جنس SMA

در این بخش یک سیستم تفاضلی از این عملگرها را انتخاب کرده‌ایم، شکل (۵) [11]. نحوه‌ی کار سیستم به گونه‌ایست که در هر لحظه فقط به یک سیم جریان داده می‌شود، سیمی که گرم می‌شود از فاز مارتنزیت وارد آستنیت شده و طول آن کاهش



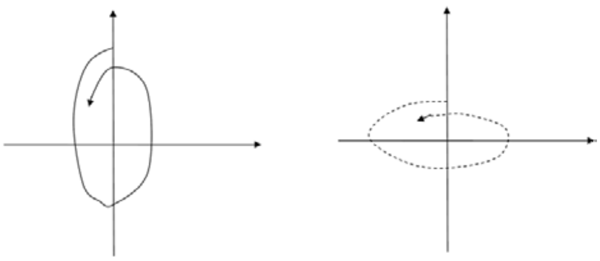
شکل ۵: سیستم انتخابی با عملگر SMA -[11]

می‌یابد و با اعمال نیرو به سیم دیگر سیم دوم را از فاز آستنیت به مارتنزیت می‌برد، با عوض شدن جهت جریان از سیم یک به دو این سیکل تکرار می‌گردد.

لفظ سوئیچینگ به سیستمی اطلاق می‌گردد که معادله‌ی دیفرانسیلی حاکمه‌ی آن معادله‌ای واحد نباشد و از چند معادله‌ی دیفرانسیل مختلف تشکیل شده باشد. رفتار سیستم با ارضا شدن شرایطی بین این معادلات سوئیچ می‌کند. بنابراین قانون کنترلی واحدی بر سیستم حاکم نیست و با هر سوئیچ، معادلات و به تبع آن قانون کنترلی عوض می‌شود. از جمله‌ی سیستم‌های سوئیچینگ می‌توان به ترموستات، پاندول مقید، برخورد الاستیک و مبدل DC-DC اشاره کرد. در ادامه برای اولین بار با استفاده از مفاهیم کنترل سوئیچینگ به کنترل یک نمونه‌ی خاص از کاربردهای آلیاژ حافظه‌دار می‌پردازیم.

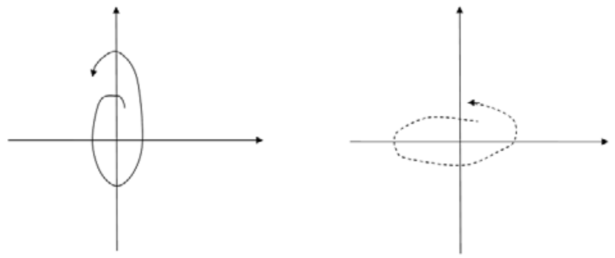
برای یک عملگر SMA در حالت کلی چهار زیر سیستم قابل تصور است، ۱- ماده در فاز مارتنزیت قرار دارد، ۲- ماده در حال تبدیل به فاز آستنیت است،۳- ماده در فاز آستنیت قرار دارد، ۴- ماده در حال تبدیل از آستنیت به مارتنزیت است. بنابراین در حالت کلی یک عملگر SMA چهار زیرسیستم دارد که در هر زیر سیستم رفتار ماده متفاوت خواهد بود که با ارضاء شرایط تبدیل فاز Elahinia عملگر بین این زیر سیستم‌ها سوئیچ می‌کند[12].

با توجه به اینکه معادلات هر زیر سیستم با سایر زیرسیستم‌ها متفاوت است با یک سیستم سوئیچینگ مواجه هستیم. متداول‌ترین روش در بررسی پایداری سیستم‌های سوئیچینگ یافتن تابع لیاپانوف مشترک است که برای تمامی زیر سیستم‌ها صادق باشد. شایان ذکر است اگر برای سیستم سوئیچینگ نتوان تابع لیاپانوف مشترک یافت باید از مفاهیم دیگری همچون توابع لیاپانوف چندگانه و مفهوم زمان توقف بهره جست[13]. منظور از زمان توقف حداقل زمان لازم برای توقف در زیر سیستم پس از سوئیچینگ است تا انرژی ناشی از عمل سوئیچ بین زیر سیستم‌ها میرا شود. اگر عمل سوئیچ در زمانی کمتر از زمان توقف رخ دهد سیستم ناپایدار می‌شود. باید توجه داشت که صرف پایداری تمامی زیر سیستم‌ها متضمن پایداری سیستم سوئیچینگ نیست. بالعکس می‌توان سیستم سوئیچینگ با زیر سیستم‌های ناپایدار را تحت سوئیچینگ مقید پایدار کرد. شکل‌های (۶) تا (۹) دو مطلب اخیر را بیان می‌کنند.

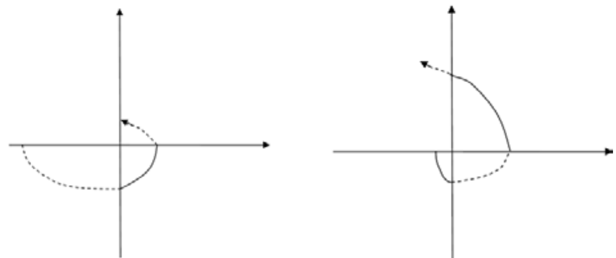


شکل ۶: مسیر دو زیر سیستم پایدار[۱۳]

شکل ۷: الف- سیستم سوئیچینگ ناپایدار   شکل ب- سیستم سوئیچینگ پایدار



شکل ۸: مسیر دو زیر سیستم ناپایدار[۱۳]



شکل ۹: الف- سیستم سوئیچینگ ناپایدار شکل ب- سیستم سوئیچینگ پایدار

معادلات سیستم بالا به صورت زیر استخراج شده‌اند[۱۱]:

با مشتق گیری از روابط (۳) و (۴) داریم:

(۲۷)

$$\dot{\xi}=\xi_T(T,\sigma)\dot{T}+\xi_\sigma(T,\sigma)\dot{\sigma}$$

که در آن:

(۲۸)

$$\xi_T(T,\sigma)=\begin{cases}-\dfrac{\xi_M}{2}\sin\left(a_A\left(T-A_s-\dfrac{\sigma}{C_A}\right)\right)a_A \\ \qquad if\ A_s<T-\dfrac{\sigma}{C_A}<A_f,\dot{T}-\dfrac{\dot{\sigma}}{C_A}>0 \\ \dfrac{1-\xi_A}{2}\sin\left(a_M\left(T-M_f-\dfrac{\sigma}{C_M}\right)\right)a_M \\ \qquad if\ M_f<T-\dfrac{\sigma}{C_A}<M_s,\dot{T}-\dfrac{\dot{\sigma}}{C_A}>0 \\ 0, \qquad otherwise\end{cases}$$

و

(۲۹)

$$\xi_\sigma(T,\sigma)=\begin{cases}-\dfrac{1}{C_A}\xi_T, if\ \ A_s<T-\dfrac{\sigma}{C_A}<A_f,\dot{T}-\dfrac{\dot{\sigma}}{C_A}>0 \\ -\dfrac{1}{C_M}\xi_T,\ \ if\ M_f<T-\dfrac{\sigma}{C_A}<M_s,\dot{T}-\dfrac{\dot{\sigma}}{C_A}>0 \\ 0\ \ ,\ \ otherwise\end{cases}$$

معادله‌ی انتقال حرارت آلیاژهای حافظه‌دار به صورت زیر است:

(۳۰)

$$mc_p\dot{T}=R.i^2-h_cA_c(T-T_\infty)$$

که در آن i جریان اعمالی به سیم، R مقاومت سیم و A_c سطح جانبی سیم است. گشتاور اعمالی توسط دو سیم بر دیسک برابر است با:

$$y=(f_1-f_2)r=(\sigma_1-\sigma_2)Ar \qquad (۳۱)$$

$$\dot{y}=(\dot{f}_1-\dot{f}_2)r=(\dot{\sigma}_1-\dot{\sigma}_2)Ar \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری روابط (۲۷) و (۳۰) در (۱) و در نهایت در (۳۲) و محاسبات مربوطه معادلات نهایی سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آید[۱۱]:

(۳۳)

$$\dot{y}=h_au+g_a\dot{\varepsilon}_1+d_a$$

که در آن $\dot{\varepsilon}_1$ نرخ کرنش سیم (۱) است:

(۳۴)

$$if\ u\geq 0,\rightarrow i_1=\sqrt{u}\ ,i_2=0,$$
$$h_a=Ar\alpha_1\frac{\Omega\xi_{1T}(T_1,\xi_1)+\theta_t}{1-\Omega\xi_{1\sigma}(T_1,\xi_1)}$$

و

(۳۵)

$$if\ u\prec 0,\rightarrow i_2=\sqrt{-u}\ ,i_1=0,$$
$$h_a=Ar\alpha_2\frac{\Omega\xi_{2T}(T_2,\xi_2)+\theta_t}{1-\Omega\xi_{2\sigma}(T_2,\xi_2)}$$

(۳۶)

$$g_a=Ar\left(\frac{D}{1-\Omega\xi_{1\sigma}(T_1,\sigma_1)}+\frac{D}{1-\Omega\xi_{2\sigma}(T_2,\sigma_2)}\right)$$

(۳۷)

$$d_a=-Ar\beta_1\frac{\Omega\xi_{1T}(T_1,\xi_1)+\theta_t}{1-\Omega\xi_{1\sigma}(T_1,\xi_1)}(T_1-T\infty)$$
$$+Ar\beta_2\frac{\Omega\xi_{2T}(T_2,\xi_2)+\theta_t}{1-\Omega\xi_{2\sigma}(T_2,\xi_2)}(T_2-T\infty)$$

$\alpha=\dfrac{R}{mc_p},\beta=\dfrac{h_cA_c}{mc_p}$ و $D=\dfrac{D_a+D_m}{2}$، که D_a و D_m مدول یانگ در دوفاز آستنیت و مارتنزیت می‌باشند. معادله کلی سیستم به صورت زیر است:

(۳۸)

$$I\ddot{\theta}=y\,,\rightarrow I\dddot{\theta}=\dot{y}=h_a u+g_a r\dot{\theta}+d_a\,,$$
$$\rightarrow\dddot{\theta}=hu+g\dot{\theta}+d$$
$$h=\frac{h_a}{I}\,,\,g=\frac{g_a r}{I}\,,\,d=\frac{d_a}{I}$$

متغیرهای حالت سیستم را به صورت بردار X تعریف می‌کنیم:

(۳۹)

$$X=[\theta\ \dot{\theta}\ \ddot{\theta}]$$

معادلات سیستم فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۴۰)

$$\dot{X}=A.X+B.f$$

که در آن :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{cases}B=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}^t\\ f=g.x_2+h.u+d\end{cases} \qquad (۴۱)$$

که در آن g، h و d توابعی پیچیده بر حسب دما، تنش، کسر مارتنزیتی و سایر خواص ماده هستند. به منظور طراحی کنترل سوئیچینگ سیستم فوق، معادلات را برای کلیه‌ی زیر سیستم‌های چهارگانه‌ی ذکر شده می‌نویسیم:

(۴۲)

$$\dot{X}_k=A.X_k+B.f_k+B.K_k.X_k\,,\quad k=1,2,3,4$$

که در آن k شماره‌ی هر زیر سیستم است و شرط انجام سوئیچینگ بین زیر سیستم‌های چهارگانه شروط Elahinia[12] می باشد.

(۴۳)

$$f_k=g_k.x_{2,k}+h_k.u_k+d_k-K_k.X_k$$

(۴۴-1)

$$K_k=place(A,B,p_k)$$

(44-2)

$$A_k=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-k_{1k}&-k_{2k}&-k_{3k}\end{pmatrix}$$

Moallem، در تحلیل سیستم فوق با این استدلال که عبارت d تاثیری در پایداری سیستم ندارد آن را حذف کرده است [۱۱]. با توجه به اینکه سیگنال d تابعی از حالات سیستم نیست آن را به عنوان یک اغتشاش خارجی اعمالی به سیستم در نظر می‌گیریم و به طراحی کنترلری می‌پردازیم که در برابر این اغتشاش مقاوم باشد. با توجه به این که دمای سیم SMA هرگز بینهایت نمی‌شود بنابراین اغتشاش d کراندار خواهد بود و کران بالای آن را D_m در نظر میگیریم:

(۴۵)

$$\left|d_k(t)\right|<D_{m,k}$$

با توجه به این که g_{1k} و h_{1k} برای هر زیر سیستم تغییرات کمی دارند آن‌ها را به عنوان پارامترهای وفقی در نظر می‌گیریم. تابع لیاپانوف زیر برای هر چهار زیر سیستم صادق است:

(۴۶)

$$V=\frac{1}{2}X_k{}^tPX_k+\frac{1}{2\omega}\tilde{g}_k{}^2+\frac{1}{2\gamma}\tilde{h}_k{}^2$$

که در آن P یک ماتریس متقارن و مثبت موکد و پاسخ معادله‌ی لیاپانوف زیر است:

(۴۷)

$$A^t.P+P.A=-I$$

با مشتق گرفتن از (46) داریم:

(۴۸)

$$\dot{V}=-\sum_{i=1}^{3}x_{i,k}^2+X_k{}^tPB\begin{bmatrix}g_k.x_{2,k}+h_k.u_k+d_k+\\+K.X_k\end{bmatrix}+$$
$$+\frac{1}{\omega}\dot{\tilde{g}}_k.\dot{g}_k+\frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{h}}_k.h_k$$

که در آن $\tilde{g}=\hat{g}-g\,,\tilde{h}=\hat{h}-h$ که $\hat{g}$ و $\hat{h}$ تخمین‌های پارامترهای سیستم‌اند. قوانین وفقی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

(۴۹)

$$\dot{\hat{g}}_k=\omega X_k{}^tPBx_{2,k}\,,\,\dot{\hat{h}}_k=\gamma X_k{}^tPBu_k$$

که در آن u_k قانون کنترلی زیرسیستم kام است که در ادامه محاسبه خواهد شد. با استفاده از روابط (49) داریم:

(۵۰)

$$\dot{V}\le X_k^tPB\begin{bmatrix}\hat{g}_k.x_{2,k}+\hat{h}_k.u_k+\\+Sgn(X_k^tPB).D_{m,k}+K_kX_k\end{bmatrix}$$

بنابراین قانون کنترلی برای هر زیر سیستم به صورت زیر خواهد بود که در برابر ترم اغتشاش d مقاوم است:

(۵۱)

$$u_k=-\frac{1}{\hat{h}_k}\left[\hat{g}_k.x_{2,k}+Sgn(X_k^tPB).D_{m,k}+K_kX_k\right]$$

قوانین وفقی و کنترلی (۴۹) و (۵۱) باعث می‌شوند مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه‌اکید شود بنابراین برای اثبات پایداری از لم باربالات[1] استفاده می‌کنیم[14]. تابع لیاپانوف (۴۶) مثبت معین

[1] Barbalat lemma

است و مشتق آن (۴۸) منفی نیمه‌اکید. بنابراین متغیرهای سیستم غیرافزایشی با زمان خواهند بود، یعنی:

(۵۲)
$$(x_1, x_2) \in L_\infty$$

جایگذاری (۴۹) و (۵۱) در (۴۸) نتیجه می‌دهد:

(۵۳)
$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \to \int_0^\infty \sum_1^3 x_i^2 dt = V(0) - V(\infty) \prec \infty$$

بنابراین:

(۵۴)
$$\int_0^\infty x_1^2 dt \prec \infty \to x_1 \in L_2$$

(۵۵)
$$\begin{cases} (x_1, x_2) \in L_\infty \\ x_1 \in L_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_1 = 0$$

و این یعنی قانون کنترلی سوئیچینگ (۵۱) سیستم سوئیچینگ (۴۲) را پایدار مجانبی خواهد کرد.

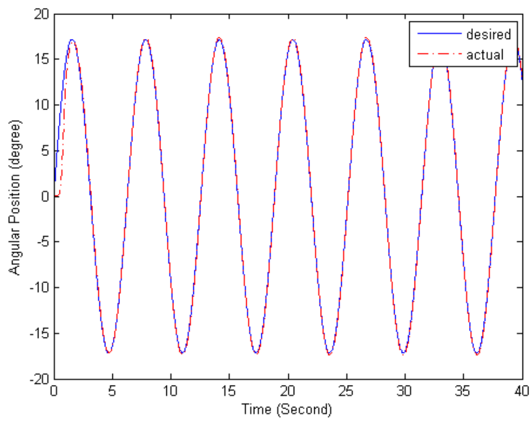
با توجه به اینکه تابع لیاپانوف (۴۶) مشترک بین تمامی زیر سیستم‌هاست بنابراین قانون کنترلی مقاوم (۵۱) سیستم سوئیچینگ (۴۲) را پایدار مجانبی خواهد کرد. در نتیجه سیستم سوئیچینگ (۴۲) تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر[۱] خواهد بود. جدول (۴) خواص سیم‌های SMA را نشان می‌دهد[۱۱].

از دشواری‌های کنترل سیستم سوئیچینگ یافتن تابع لیاپانوف مشترک برای تمامی زیر سیستم‌هاست که نامساوی مناسب را ارضا کند. این مسئله جدای از یافتن تابع لیاپانوف برای یک سیستم غیر سوئیچینگ است. از تبعات منفی این نوع تابع لیاپانوف این است که اگر نتوان برای تمامی زیر سیستم‌ها یک تابع لیاپانوف مشترک یافت باید به سراغ توابع لیاپانوف چندگانه رفت که باید در نقاط سوئیچینگ تشکیل یک دنباله نزولی دهند.

جدول (۴) مشخصات SMA-[۱۱]

Parameter: Symbol=value (unit)
Mass per unit length: m = 6.8231*10^4 (Kg/m)
Density: ρ = 6/45 (g/cm^3)
Circumferential area: A_c = 1.1545*10^{-3} (m^2)
Diameter of SMA wire: d = 381*10^{-6} (m)
Initial strain: ε_o = 0/04
Initial stress: 25 (MPa)
Martensite start temperature: M_s = 52
Martensite finish temperature: M_f = 42
Austenite start temperature: A_s = 68
Austenite start temperature: A_f = 78
Austenite young modulus: D_a = 75 (GPa)
Martensite young modulus: D_m = 28 (GPa)
Thermal expansion factor: θ_t = 6 (μPa/^{o}C)
Austenite curve fitting parameters: C_A= 10(MPa/^{o}C)
Martensite curve fitting parameters: C_M = 10(MPa/^{o}C)
Specific heat: c_p = 320 (J/kg ^{o}C)
Resistance per unite length: R = 7/9 (Ω/m)
Ambient temperature: $T_\infty = 20(\,^oC)$
Heat convection parameter: h = 48 (W/m^{2o}C)
Pulley radius: r =0 /015 (m)

شکل(۱۰) نتیجه‌ی اعمال کنترلر فوق را در مسئله تعقیب یک سیگنال سینوسی نشان می‌دهد، شکل (۱۱-a) و (11-b) قوانین کنترلی، شکل (۱۲) منحنی دمای دو سیم و شکل (۱۳) نمودار تخمین پارامتر h را نشان می‌دهد، از آنجایی که تخمین h هیچگاه صفر نمی‌شود بنابراین قانون کنترلی (۵۱) مطمئنا منفرد[۲] نخواهد شد.

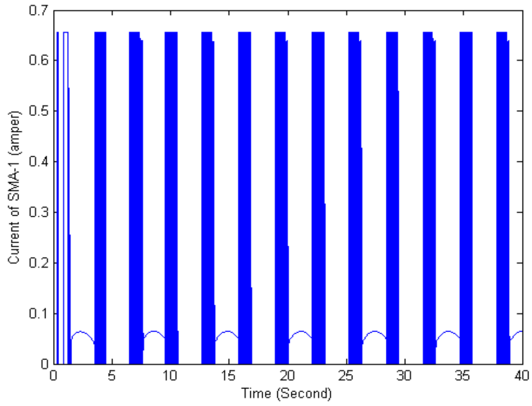


شکل ۱۰: مسئله تعقیب سیگنال سینوسی پس از اعمال کنترل(51)

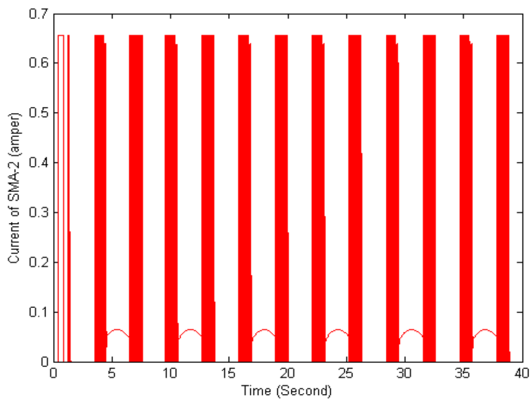
همانطور که از شکل (۱۰) پیداست در ابتدا مدتی طول می‌کشد تا پاسخ سیستم بر ورودی مرجع منطبق گردد. علت این است که مدت زمانی لازم است تا سیم‌ها گرم شده و تبدیل فاز آغاز گردد.

[1] Globally asymptotically stable

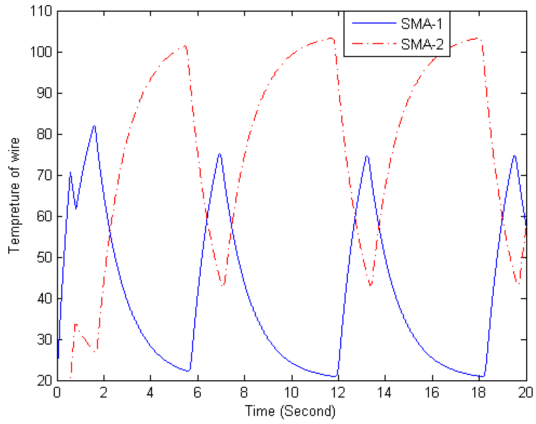
[2] Singular



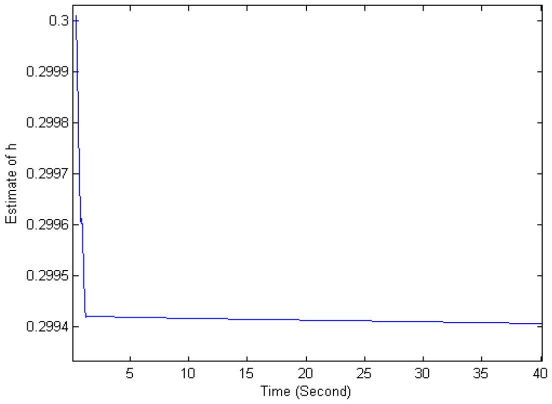
شکل ۱۱- a: سیگنال کنترل اعمالی به سیم شماره (۱)



شکل ۱۱- b: سیگنال کنترل اعمالی به سیم شماره (۲)



شکل ۱۲: منحنی دمای دو سیم پس از اعمال کنترل (۵۱)



شکل ۱۳: نمودار تخمین پارامتر h

تاخیر زمانی در سیستم‌های سوئیچینگ SMA

همانطور که پیشتر گفته شد برای سیستم‌های سوئیچینگ تحت عملگر SMA چهار نوع تاخیر زمانی قابل تصور است: ۱-تاخیر ناشی از سنسورها، ۲-تاخیر ناشی از عملگر SMA، ۳-تاخیر ناشی از اعمال قانون کنترل، ۴-تاخیر ناشی از عمل سوئیچینگ بین زیرسیستم‌ها. در اینجا تاخیر زمانی ناشی از عملگر SMA را در نظر گرفته و از سایر تاخیرهای فوق صرفنظر میکنیم.

منظور از تاخیر زمانی SMA مدت زمان لازم برای گرم شدن عملگر فوق است. به سیستم (۴۲) بر می‌گردیم و با لحاظ تاخیر زمانی به کنترل آن می‌پردازیم. در بررسی سیستم‌های تاخیر زمانی باید منشا تاخیر را یافت تا بتوان معادلات سیستم را بر اساس آن بازنویسی کرد. معادلات سیستم در غیاب تاخیر زمانی به صورت زیر است:

$$I\ddot{\theta} = g_a \dot{\varepsilon} + h_a . u + d_a \tag{56}$$

همانطور که بیان شد در اینجا فقط تاخیر ناشی از عملگر SMA را در نظر می‌گیریم. تاخیر این عملگر باعث تاخیر در تغییر طول و کرنش سیم می‌شود. بنابراین معادله (۵۶) به فرم زیر تبدیل می‌گردد.

$$I\ddot{\theta} = g_a \dot{\varepsilon}_\tau + h_a . u + d_a \tag{57}$$

که در آن ε_τ کرنش تاخیری سیم است. معادله‌ی (۵۷) در فرم فضای حالت به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2,k} = x_{3,k} \\ \dot{x}_{3,k} = h_k u_k + g_k \dot{x}_{2k,\tau} + d_k \end{cases} \tag{58}$$

معادلات به فرم پسخور اکید هستند، بنابراین در این قسمت از روش گام به عقب وفقی برای کنترل سیستم (۵۸) استفاده می‌کنیم و در نهایت به تابع لیاپانوف مشترک زیر برای سیستم (۵۸) می‌رسیم:

(59)
$$V=\frac{1}{2}x_{1k}^2+\frac{1}{2}z_{1k}^2+\frac{1}{2}z_{2k}^2+\frac{1}{2\gamma}\tilde{h}_k^{\,2}+\frac{1}{2\gamma}\tilde{g}_k^{\,2}$$

که در آن z_1 ، x_1 و z_2 متغیرهای سیستم می‌باشند و

(60)
$$z_{1k}=x_{1k}+x_{2k}$$
$$z_{2k}=x_{1k}+x_{2k}+x_{3k}-k_1(x_{1k}+x_{2k})$$

که در آن k_1 گینی مثبت است. با مشتق گیری از (۵۹) و استخراج قوانین وفقی داریم:

(61)
$$\dot{\hat{h}}_k=\gamma z_{2k}u_k \quad , \quad \dot{\hat{g}}_k=\gamma z_{2k}x_{2k,\tau}$$

و

(62)
$$\dot{V}=z_{2k}\{z_{1k}+\hat{h}_k u_k+\hat{g}_k x_{2k,\tau}+d_k+(x_{2k}+x_{3k})(1+k_1)\}$$

اما فرض بر آن است که مقدار تاخیر زمانی τ نامعلوم است. بنابراین ترم‌هایی که دارای تاخیر زمانی هستند نباید در قانون کنترلی ظاهر شوند. بنابراین در (۶۲) با استفاده از نامساوی یانگ

(63)
$$a.b\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$$

ترم $x_{2k,\tau}$ را از سایر ترم‌ها جدا می‌کنیم. داریم:

(64)
$$\dot{V}\le z_{2k}\{z_{1k}+\hat{h}_k u_k+sign(z_{2k}).D_{mk}+(x_{2k}+x_{3k})(1+k_{1k})\}+\frac{1}{2}(z_{2k}\hat{g})^2+\frac{1}{2}x_{2k,\tau}^{\,2}$$

حال یک ترم *Lyapunov-Krsovskii* به تابع لیاپانوف (۵۹) اضافه می‌کنیم:

(65)
$$V=\frac{1}{2}x_{1k}^2+\frac{1}{2}z_{1k}^2+\frac{1}{2}z_{2k}^2+\frac{1}{2\gamma}\tilde{h}_k^{\,2}+\frac{1}{2\gamma}\tilde{g}_k^{\,2}+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}x_{2k}^2(s)ds$$

بنابراین رابطه‌ی (۶۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

(66)
$$\dot{V}\le z_{2k}\{z_{1k}+\hat{h}_k u_k+sign(z_{2k}).D_{mk}+(x_{2k}+x_{3k})(1+k_1)+\frac{1}{2}z_{2k}\hat{g}^2+\frac{1}{2}\frac{x_{2k,\tau}^{\,2}}{z_{2k}}\}$$

و قانون کنترلی به صورت زیر بدست می‌آید:

(67)
$$u_k=-\frac{1}{h_k}\{z_{1,k}+sign(z_{2k}).D_{mk}+(1+k_1).(x_{2k}+x_{3k})+\frac{1}{2}z_{2k}\hat{g}^2+\frac{1}{2}\frac{x_{2k}^2}{z_{2k}}+k_2z_{2,k}\}$$

اما همانطور که از رابطه‌ی (۶۷) مشخص است در مخرج قانون کنترلی عبارت z_2 ظاهر شده است. بنابراین با میل این ترم به صفر قانون کنترلی بیکران شده و سیستم ناپایدار می‌گردد. برای اثبات پایداری قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه‌ی ۱:
برای سیستم سوئیچینگ مرتبه‌ی سه (۵۸) اگر قانون کنترلی مقاوم به صورت زیر تعریف گردد:

$$u_k=\begin{cases}-\frac{1}{h_k}\{z_{1,k}+sign(z_{2k}).D_{mk}+(1+k_1).(x_{2k}+x_{3k})+\frac{1}{2}z_{2k}\hat{g}^2+\frac{1}{2}\frac{x_{2k}^2}{z_{2k}}+k_2z_{2,k}\}, & |z_{2k}|\ge\lambda_{ak}\\ 0, & |z_{2k}|\prec\lambda_{ak}\end{cases}$$
(68)

به همراه قوانین وفقی (۶۱)، آنگاه تمامی سیگنال‌های سیستم حلقه بسته (۵۸) کراندار خواهند بود (GUUB[1]) و از یک محدوده‌ی مشخص خارج نخواهند شد.

اثبات:
برای اثبات سه حالت در نظر می‌گیریم. ۱- هر سه سیگنال x_1 z_1 و z_2 خارج از محدوده‌ی λ_a باشند. با تعریف تابع لیاپانوف به صورت (۶۵) و مشتق آن به صورت (۶۶) با اعمال قانون کنترلی (۶۷) و قوانین وفقی (۶۱) داریم:

(69)
$$\dot{V}\le-k_2z_{2k}^2$$

بنابراین گرادیان تابع لیاپانوف منفی بوده و متغیرهای حالت به محدوده‌ی فوق همگرا می‌شوند. ۲- متغیرهای فوق داخل بازه‌ی λ_a باشند. بنابراین در این محدوده باقی خواهند ماند و با خروج از آن

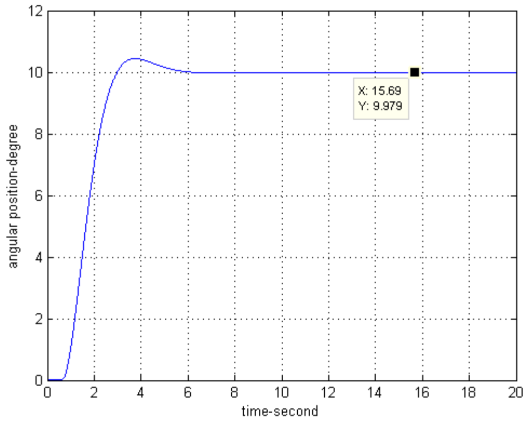
[1] Globally uniformly ultimately bounded

مجددا به داخل محدوده میل خواهند کرد. ۳- برخی از متغیرها داخل و برخی دیگر خارج از محدوده‌ی فوق باشند که بازهم استدلال شبیه موارد ۱و ۲ خواهد بود.

نتایج شبیه‌سازی

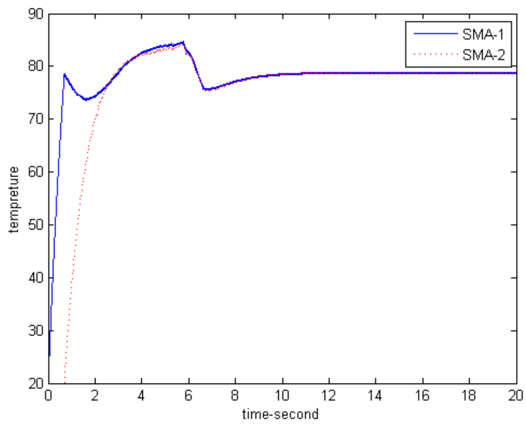
در این قسمت نتایج شبیه‌سازی را برای مقدار $\tau_k = 0/1$ ثانیه آورده می‌شود.

شکل زیر نتیجه‌ی اعمال قانون کنترل سوئیچینگ (67) را بر سیستم (58) نشان می‌دهد.

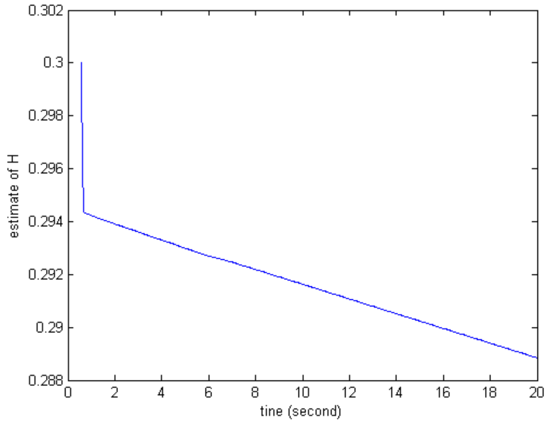


شکل ۱۴: نمودار پاسخ سیستم (۵۸) پس از اعمال کنترل (۶۷)

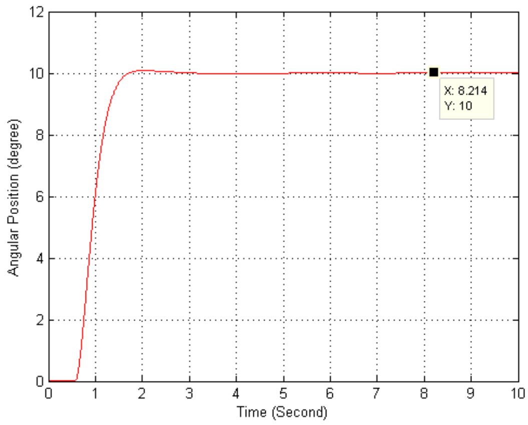
در ابتدا سیستم ساکن بوده و پس از زمانی حدود ۰/۸ ثانیه عمل می‌کند دلیل، مدت زمان لازم برای گرم شدن سیم است. همانطور که از شکل(۱۴) پیداست پنجه به زاویه‌ی مطلوب ۱۰ درجه نمی‌رسد اما به آن خیلی نزدیک می‌گردد. شکل(۱۵) نمودار دمای سیم‌های SMA را نشان می‌دهد. شکل(۱۷) نتایج اعمال کنترل سوئیچینگ بدون در نظر گرفتن تاخیر زمانی را بر سیستم (۵۸) نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است لحاظ کردن تاخیر زمانی باعث می‌شود زمان نشست و فراجهش سیستم افزایش یابد.



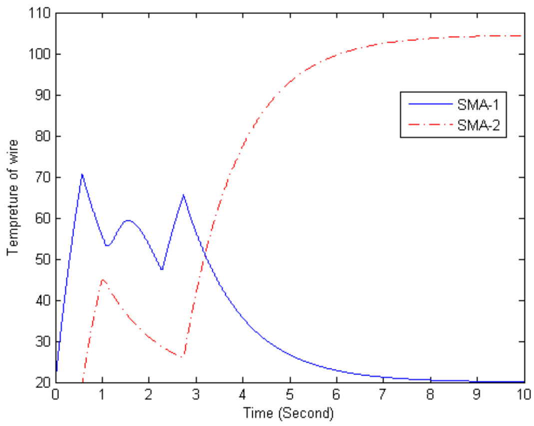
شکل ۱۵: دمای سیم‌ها پس از اعمال کنترل (۶۷)



شکل ۱۶: تخمین h_k



شکل ۱۷: نمودار پاسخ سیستم (۵۸) بدون لحاظ تاخیر زمانی



شکل ۱۸: دمای سیستم پس از اعمال کنترل بدون تاخیر زمانی

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله ابتدا با تصحیح فرضیات Lagoudas مدلی کامل‌تر برای تبدیل فاز آلیاژهای حافظه‌دار ارائه نمودیم، نتایج نهایی نشان از نزدیکی این مدل با مدل کسینوسی Liang-Rogers داشت. سپس در ادامه برای اولین بار به کنترل سوئیچینگ این عملگرها پرداخته و کنترلر وفقی- مقاوم سوئیچینگ را برای کاربردی خاص از

این عملگرها طراحی نمودیم، نتایج نهایی پایداری سیستم سوئیچینگ تحت کنترلر فوق را نشان داد، سپس در ادامه به معرفی منابع تاخیر زمانی در سیستم‌های سوئیچینگ پرداخته و قانون کنترلی مقاومی در برابر تاخیر زمانی عملگر آلیاژ حافظه‌دار طراحی نمودیم. نشان دادیم با وجود تاخیر زمانی متغیرهای حالت سیستم کراندار خواهند شد.

مراجع

[1] L. C. Brinson, "One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermo mechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable," *Jour. of Intell. Material Sys. and Struct, Vol*. 4, No. 2, pp. 229-242, 1993.

[2] M. H. Elahinia, M. Ahmadian, "Application of the extended Kalman filter to control of a shape memory alloy arm", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 15, No. 5, pp. 1370-1384, 2006.

[3] J. H. Mabe, F. Calkins, G. Butler, "Boeing's variable geometry chevron morphing aero structure for jet noise reduction", *Struct., Dynamics and Mat., Conf., Newport* Island, pp. 1–19, 2006.

[4] T.B. Wolfe, M.G. Faulkner and J. Wolfaardt, "Development of a shape memory alloy actuator for a robotic eye prosthesis", *Smart Materials and Structures*,Vol. 12, No. 4, pp. 266-272, 2005.

[5] I. Roch, Ph. Bidaud, D. Collard, L. Buchaillot, "Fabrication and characterization of an SU-8 gripper actuated by a shape memory alloy thin film," *J. Micromech. Microeng*. Vol. 5, No. 3, pp. 83-97, 2003.

[6] M. H. Elahinia, "Effect of system dynamics on shape memory alloy behavior and control." *PhD Thesis, Virginia Polytech, Blacksburg*, USA, pp. 13-16, 2004.

[7] K. Tanaka, "A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior," *J. Struct. Mach. Mater. Sci.* Vol. *18*, pp. *251-263*, ۱۹۸۶.

[8] C. Liang and A. Rogers, "One dimensional thermo mechanical constitutive relations for shape memory materials," *ASME Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* Vol. *1,* No. 4, pp. *207-234*, *1990.*

[9] MA. Qidwai, DC. Lagoudas, "Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms," *Inter. Journal for Numerical Methods in Engineering*; *Vol*. 47, pp. 1123–68, 2000.

[10] C. Dimitris, Lagoudas, *Shape Memory Alloys*. *Modeling and Engineering Applications*, Springer, ch. 3, 2008.

[11] M. Moallem and V. A. Tabrizi, "Tracking Control of an Antagonistic Shape Memory Alloy Actuator Pair", *IEEE Transactions on control system technology*, vol. 17, No. 1, pp. 184-190, 2009.

[12] M. H. Elahinia, M. Ahmadian, "Application of the extended Kalman filter to control of a shape memory alloy arm.", *Journal of Smart Materials and Structures,* Vol. 15, No. 5, pp. 1370-1384, 2006.

[13] D. Liberzon, *Switching in systems and control,* Springer-verlage, 2003.

[14] M. Moallem and V. A. Tabrizi, "Nonlinear Position Control of Antagonistic Shape Memory Alloy Actuators", *Proceeding of the* 2007 *American Control Conference, pp.* 88-93, 2007.

[15] M. Kristic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design,* Weily, Interscience, pp 489-492, 1995.

[16] S. Kim, S. A. Campbell, X. Liu, "Stability of a Class of Linear Switching Systems With Time Delay", *IEEE Tran. On cir. And sys., Vol.* 53, *pp.* 384-393, 2006.

[17] Y. U. Sun, L. Wang, G. Xie, "Stability of Switched Systems With Time-Varing Delays: Delay Dependent Common Lyapunov Functional Approach", *Proc. Of* 2006 *American Control Conference, USA, pp.* 1544-1549, 2006.

[18] P. Yan, H. Ozbay, "Stability Analyses of Switched Time-Delay Systems", *Proc. Of* 47th *IEEE Conf. on Desi. And control, Mexico, pp.* 2740-2745, 2008.

[19] Q. C. Zhong, *Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer, 2006.

[20] Magdi S. Mahmoud, *Switched Time-Delay Systems,* Springer, ۲۰۱۰.

[21] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Time-delay systems,* Springer, 2007.

[22] H, Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Springer, 2002.