



# مدلسازی تبدیل فاز و کنترل وفقی مقاوم سوئیچینگ عملگرهایی از جنس آلیاژ حافظهدار با و بدون در نظر گرفتن اثر تاخیر زمانی این عملگرها

حسین چهاردولی'، محمد اقتصاد'، مهرداد فرید'

'دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک / دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، Hchehardoli@gmail.com ' استاد / دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، Eghtesad@shirazu.ac.ir '' دانشیار / دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، Farid@shirazu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۰/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۲۰)

چکیده: آلیاژهای حافظهدار دستهای از مواد هوشمند هستند که به دلیل پارهای از خواص ویژه کاربردهای صنعتی زیادی در شاخههای مختلف مهندسی پیدا کردهاند. این مواد کرنش های بزرگ و قابل بازگشت دارند و می توان از آنها در کابردهایی که کرنش زیادی نیاز دارند استفاده کرد. در این مقاله ابتدا با تصحیح فرضیات Lagoudas مدلی بهبود یافته برای تبدیل فاز این مواد هوشمند ارائه و نتایج با مدل معروف کسینوسی Liang-Rogers مقایسه شدهاند. در کاربردهای مهندسی روش های کنترلی مختلفی برای این عملگرها استفاده شده است. در ادامه برای اولین بار به کنترل سوئیچینگ این عملگرها پرداخته ایم. به این منظور کاربرد خاصی از این مواد هوشمند را انتخاب کرده و با انتخاب یک تابع لیاپانوف مشترک برای تمامی زیر سیستم ها به اثبات پایداری سیستم تحت هر سوئیچ دلخواه پرداخته ایم. سپس سیستم سوئیچینگ را بر آن اعمال نموده ایم. در پایان مسئله تاخیر زمانی را برای این عملگرها در نظر گرفته و نشان داده ایم

**واژه های کلیدی:** آلیاژ حافظهدار، مدل سینتیک تبدیل فاز، سیستم سوئیچینگ، تابع لیاپانوف مشترک، کنترل وفقی-مقاوم، تاخیر زمانی.

# Phase Transformation Modeling and Robust Adaptive Switching Control of Shape Memory Alloy Actuators With and Without Considering Time Delay of These Actuators

Hossein Chehardoli, Mohammad Eghtesad, Mehrdad Farid

Abstract: Shape Memory Alloys are widely used in the industry. Different researchers introduce successful models for phase transformation. In this work firstly the Lagoudas assumptions is corrected and an enhanced model for phase transformation of these smart materials is introduced. Secondly we compare results of this model with cosine Liang-Rogers model. Results show a good consistency between this model and cosine Liang-Rogers model. Afterwards for the first time switching control for these operators is investigated. For this reason, special application of smart material is selected and a common Lyapunov function for all subsystems is selected to prove stability of the system under any arbitrary switching. Subsequently robust adaptive switching control is applied on it. Lastly, a time delay problem is supposed and it is shown that even by considering time delay for this switched system, it is globally asymptotically stable.

Key words: Shape memory alloy, Switching System, Common Lyapunov Function, Robust Adaptive Control, Time Delay.

مجله کنترل، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مقدمه

مواد هوشمند ا هر یک خواص ویژهای دارند که آنها را گزینهی مناسبی برای کاربردهای مهندسی کرده است. انواع مختلفی از مواد هوشمند شناخته شدهاند، موادی همچون: آلیاژهای حافظهدار<sup>۲</sup>، پليمرهاى الكترواكتيو<sup>7</sup>، فلزات مگنتواستريكتيو<sup>1</sup>، مواد پيزوالكتريك<sup>6</sup> و غیره. آلیاژهای حافظهدار موادی هستند که اگر دچار تغییر شکل شوند می توانند با حرارت شکل اولیه خود را باز یابی کنند. از این خاصیت در طراحی عملگرهای مکانیکی استفادههای زیادی میشود. رفتار ترمومکانیکی منحصر به فرد این مواد نتیجه تبدیل بین دو

فاز آستنیت (مولد) و فاز مارتنزیت (محصول) و بالعکس میباشد]۱[. این آلیاژها در مقایسه با عملگرهایی چون موتورDC، سلونوئید و امثال آنها چگالی انرژی خیلی بالایی دارند. به عنوان عملگر این مواد کاربردهای وسیعی در صنایع مختلف یافتهاند، همچون رباتیک[۲]، صنایع هوافضا[۳]، کاربردهای پزشکی و اورتوپدی[4] و کاربردهای MEMS<sup>6</sup> [۵]. دو خاصیت مهم آلیاژهای حافظهدار عبارتند از اثر حافظهی شکلی و خاصیت فوق کشسانی. در پدیدهی حافظهی شکلی ماده ابتدا در فاز مارتنزیت قرار دارد که در آن ماده نرم و انعطاف پذیر است، اگر ماده در این حالت تحت بار قرار گیرد دچار تغییر شکل می شود، اما با اعمال حرارت ماده به فاز مولد رفته و شکل ابتدایی خود را بازیابی میکند. پس از سرمایش ماده از فاز آستنیت به مارتنزیت دوقلویی<sup>۷</sup> تبدیل می گردد. پس از اعمال بار مارتنزیت دوقلویی به مارتنزیت غیر دوقلویی ٔ تبدیل گشته و سیکل بالا مجددا تکرار می شود. در خاصیت فوق کشسانی ماده که ابتدا در فاز آستنیت قرار دارد تحت یک تنش خیلی بزرگ مستقیما به فاز مارتنزیت غیر دوقلویی تبدیل می گردد و پس از باربرداری به فاز قبلی خود آستنیت باز می گردد. شکل (۱) این دو خاصیت مواد SMA را نشان میدهد[۶].

با توجه به خواص SMA معادلات حاکمه آنها در دوفاز آستنیت و مارتنزیت متفاوت است و در واقع سیستم بین چند معادله مختلف سوئیچ می کند. در این مقاله این سیستمها را با دید سوئیچینگ در نظر می گیریم. در بررسی پایداری سیستمهای سوئیچینگ روشهای مختلفى وجود دارد، از جمله تابع لياپانوف مشترك، توابع لياپانوف چندگانه و مفهوم زمان توقف. در این مقاله ابتدا با تصحیح فرضیات Lagoudas به ارائهی مدلی بهبود یافته برای تبدیل فاز آلیاژهای حافظهدار پرداخته، سپس با استفاده از توابع لیاپانوف مشترک به اثبات پایداری یک سیستم خاص از این مواد هوشمند می پردازیم و یک قانون کنترل سوئیچینگ طراحی میکنیم. در پایان نشان می-

<sup>1</sup> Smart Materials

- <sup>3</sup> Electro Active Polymers <sup>4</sup> Magnetostrictive
- <sup>5</sup> Piezoelectric
- <sup>6</sup> Micro Electro Mechanical System
- <sup>7</sup> Twinned Martensite
- 8 Detwinned Martensite

دهیم سیستم مورد نظر در حضور تاخیر زمانی نیز یک سیستم پایدار مجانبي فراگير خواهد بود.

# مدلسازی تبدیل فاز SMA

(2)

معادلات حاکمهی آلیاژهای حافظهدار شامل دو بخش معادلات ساختاری و معادلات سینتیک تبدیل فاز میباشند. عملگرهایی که از جنس آلیاژ حافظهدار ساخته می شوند اغلب به صورت سیم و یک بعدی هستند. بنابراین مدلهای ارائه شده نیز اغلب حالت یک بعدی را در نظر می گیرند. معادله ساختاری معادله ایست دیفرانسیلی مبین ارتباط بین نرخ تنش، کرنش، دما و کسر مارتنزیتی. معادلهی ساختاری اولین بار توسط Tanaka ارائه گردید و به صورت زیر است[7]:

 $\sigma = D\varepsilon + \theta_t T + \Omega\xi$ (1)

،Piola-Kirchhoff و  $\theta_t$  به ترتيب تنش D ، $\xi$  ،T ، $\varepsilon$  ، $\sigma$ کرنش Green، دما، کسر مارتنزیتی، مدول الاستیک و ضریب انبساط حرارتی میباشند و  $\Omega$  ضریبی است که از رابطهی زیر بدست مي آيد:

 $\Omega = -D\varepsilon_{l}$ 

که در آن <sub>I</sub>B بیشینه کرنش بازیابی سیم میباشد. در کاربردهای مهندسی استفاده از مدلهای پدیدار شناختی SMA استفاده بیشتری از مدلهای ترمودینامیکی SMA ها دارند. از معتبرترین مدل های پدیدار شناختی سینتیک تبدیل فاز مدل کسینوسی Liang-Rogers است[۸]. مدلهای موفق دیگری نیز برای تبدیل فاز این مواد توسط افرادی چون Tanaka [۷] و Lagoudas [9] ارائه شدهاند.

Liang مدل کسینوسی خود را به صورت زیر بیان کرد:

 $\xi = \frac{\xi_M}{2} \cos[a_A(T - A_s) + b_A \sigma] + \frac{\xi_M}{2}$ (3)برای فرایند گرمایش یا تبدیل فاز از مارتنزیت به آستنیت و  $\xi = \frac{1-\xi_A}{2}\cos[a_M(T-M_f) + b_M\sigma] + \frac{1+\xi_A}{2}$ (4)برای فرایند سرمایش یا تبدیل از فاز آستنیت به مارتنزیت. در این دو رابطه: A<sub>s</sub> ،M<sub>f</sub> ،M<sub>s</sub> و A<sub>f</sub> به ترتیب دماهای آغاز فاز مارتنزیت، پایان  $a_M$  و  $a_A$  مارتنزیت و پایان فاز آستنیت میباشند، ثابتهای  $a_A$  و عبارتند از:  $a_{\rm M} = rac{\pi}{M_f - M_s}$  و  $a_{\rm A} = rac{\pi}{A_f - A_s}$  عبارتند از:  $a_{\rm M} = rac{\pi}{A_f - A_s}$  $C_{
m M}$  هستند.  $b_M=-rac{a_M}{C_M}$  و (۴) به صورت  $b_A=-rac{a_A}{C_A}$  هستند. (۳) و  $C_A$  ثوابت نشان دهندهی تاثیر فشار روی دماهای انتقال هستند و  $C_A$ برابر شیب منحنی دما-تنش این مواد میباشند.  $\xi_A$  و  $\xi_M$  نیز درصد مارتنزیتی به ترتیب قبل از گرم شدن و سرد شدن است. از جملهی مدلهای موفق دیگر توسط Lagoudas ارائه گرديد[10]. وى در استخراج مدل خود از مفاهيم قانون دوم ترمودینامیک و انرژی آزاد گیبس استفاده کرد و برای هر دو تبدیل

۵٣

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Shape Memory Alloy (SMA)

حسين چهاردولي، محمد اقتصاد، مهرداد فريد

تعريف نمود: مستقیم و معکوس نیروی ترمودینامیکی تبدیل فاز را به صورت زیر





$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho b_M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2) \xi & ; \quad \xi \succ 0 \\ \frac{1}{2} \rho b_A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2) \xi & ; \quad \xi \prec 0 \end{cases}$$

وی برای محاسبهی ثوابت ۵<sub>۸</sub>، ا $\mu_{1}$  و  $\mu_{7}$  از روابط س تبدیل فاز زیر استفاده کرد: ۱- شروع تبدیل فاز مسن

$$\pi(\sigma,T,\xi) = Y$$
 at  $\sigma = 0, T = M_s$ ,  $\xi = 0$ .  
- پایان تبدیل فاز مستقیم در فشار صفر:

(٩)

$$\pi(\sigma,T,\xi) = Y$$
 at  $\sigma = 0, T = M_f$ ,  $\xi = 1$ .  
-۳ شروع تبدیل فاز معکوس در فشار صفر: (۱۰)

$$\pi(\sigma T \mathcal{E})$$

$$\pi(0, 1, \zeta) = -1$$
 *ut*  $0 = 0, 1 = A_s, \zeta = 1.$   
-۴- پایان تبدیل فاز معکوس در فشار صفر:  
(۱۱)

 $\cap T$ 

$$\pi(\sigma,T,\xi) = -Y$$
 at  $\sigma = 0, T = A_f, \xi = 0.$   
پیوستگی انرژی آزاد گیبس در نقطهی ابتدایی تبدیل فاز: ۵- م

$$\pi = \sigma : \Lambda + \frac{1}{2}\sigma : \Delta S : \sigma + + \sigma : \Delta \alpha (T - T_0) - \rho \Delta c \left[ \left( T - T_0 \right) - T \ln(\frac{T}{T_0}) \right] + + \rho \Delta S_0 T - \rho \Delta u_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

که در آن  $\sigma$  تانسور تنش،  $\Delta S$   $\cdot$   $\Delta S$ و  $\Delta c$  به ترتیب تفاوت تانسور سختی، هدایت حرارتی و رسانش گرمایی در دوفاز آستنیت و مارتنزیت هستند.  $\Delta u_o$  •  $\Delta S_o$  به ترتیب تغییرات انتروپی و انرژی داخلی نسبت به وضعیت مرجع هستند.  $T_o$  دمای اولیه، ho چگالی و یک تابع سفتی بر حسب کسر مارتنزیتی میباشد که در ادامه  ${
m f}$ معرفی میشود.

تانسور انتقال است که جهت کرنش تبدیل را مشخص می کند  $\Lambda$ و برای دو تبدیل مستقیم و معکوس از رابطه زیر به دست می-آيد[10]:

Λ

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} H^{\max} \frac{\sigma'}{\overline{\sigma}} \\ H^{\max} \frac{\varepsilon^{t-r}}{\overline{\varepsilon}^{t-r}} \end{cases}$$

$$H^{\max} \frac{\varepsilon^{t-r}}{\overline{\varepsilon}^{t-r}}$$

$$H^{\max} \frac{\sigma'}{\overline{\varepsilon}^{t-r}} = 0$$

$$H^{\max} =$$

deviatoric stress1

www.SID.ir

(17)  

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y_{1} \quad at \ \sigma = 0, T = M_{f}, \ \xi = 1.$$
(17)  

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y_{2} \quad at \ \sigma = 0, T = A_{s}, \ \xi = 1.$$
(18)  

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y_{2} \quad at \ \sigma = 0, T = A_{f}, \ \xi = 0.$$
(19)  

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y_{2} \quad at \ \sigma = 0, T = A_{f}, \ \xi = 0.$$
(19)  

$$\pi(\sigma, T, \xi) = Y_{2} \quad at \ \sigma = 0, T = A_{f}, \ \xi = 0.$$
(19)  

$$Y_{1} = \rho\Delta s_{0}M_{f} - \rho\Delta u_{0}$$
(10)  

$$Y_{2} = \rho\Delta s_{0}A_{f} - \rho\Delta u_{0}$$
(11)  

$$b_{A} = \Delta s_{0}(A_{s} - A_{f})$$
(11)  

$$b_{A} = \Delta s_{0}(M_{s} - M_{f})$$
(11)  

$$b_{M} = \Delta s_{0}(M_{s} - M_{f})$$
(11)  

$$\pi = \sigma.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta s_{0}T - \rho\Delta u_{0} - \frac{\partial f_{1}(\xi)}{\partial \xi} = Y_{1}$$
(11)  

$$\pi = \sigma.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta s_{0}T - \rho\Delta u_{0} - \frac{\partial f_{1}(\xi)}{\partial \xi} = Y_{2}$$
(11)  

$$(11)$$
(12)  

$$\pi = \sigma.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - M_{s}) + -\rho b_{M} \left[1 - (1 - \xi)^{m}\right] = 0, \quad \xi > 0$$
(12)  

$$\left[\sigma\left|.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - A_{f}) + -\rho b_{A} \left[1 - (1 - \xi)^{n_{2}}\right] = 0, \quad \xi \neq 0$$
(12)  

$$\left[\sigma\left|.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - A_{f}) + -\rho b_{A} \left[1 - (1 - \xi)^{n_{2}}\right] = 0, \quad \xi \neq 0$$
(12)  

$$\left[\sigma\left|.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - A_{f}) + -\rho b_{A} \left[1 - (1 - \xi)^{n_{2}}\right] = 0, \quad \xi \neq 0$$
(12)  

$$\left[\sigma\left|.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - A_{f}) + -\rho b_{A} \left[1 - (1 - \xi)^{n_{2}}\right] = 0, \quad \xi \neq 0$$
(12)  

$$\left[\sigma\left|.H + \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - A_{f}) + -\rho b_{A} \left[1 - (1 - \xi)^{n_{2}}\right] = 0, \quad \xi \neq 0$$
(12)  

$$\left[\sigma\left|.H - \frac{1}{2}\Delta S.\sigma^{2} + \rho\Delta S_{0}(T - A_{f}) + -\rho b_{A} \left[1 - (1 - \xi)^{n_{2}}\right] = 0, \quad \xi \neq 0$$
(12)

(79)

 $\rho\Delta S_0 = -H \frac{d\sigma}{dT} = -H.C$  ,  $C = C_A = C_M$ ثابت H وابسته به نمودار تنش-کرنش SMA است شکل(۲)، که برای آلیاژ NiTi بین ۲۳./ و ۶./ میباشد[۱۰] و در اینجا آنرا ۰.۰۴۵ (17)  $f\left(\xi=1\right)\Big|_{\xi \to 0} = f\left(\xi=1\right)\Big|_{\xi \to 0}$   $T=[M_{s}, A_{f}] \quad \text{(Intersection of the sector o$ 

اما دو ایراد عمده بر کار Lagoudas وارد است. اول اینکه همانطور که از معادلات (8) تا (11) مشخص است وی نیروی ترمودینامیکی بحرانی تبدیل فاز (Y) را در هر دو تبدیل مستقیم و معکوس، مساوی و قرینه گرفت. اما با توجه به خواص SMA که فاز آستنیت فازی سخت و فاز مارتنزیت فازی نرم است برابر گرفتن این نیرو برای این دوفاز چندان مورد قبول نیست. ایراد دوم ثابت گرفتن انرژی آزاد گیبس در بازههای دمایی[ $M_s$ ,  $A_f$ ] و  $[M_f$ ,  $A_s]$  به نور جداگانه میباشد. از آن جایی که انرژی آزاد گیبس تابعیت شدیدی از دما دارد باز هم این تقریب چندان مورد قبول نیست بخصوص برای انواعی از این آلیاژها که بازههای دمایی فوق، بزرگ برای هر یک از تبدیلهای مستقیم و معکوس Yهای جداگانهای در برای هر یک از تبدیلهای مستقیم و معکوس Yهای جداگانهای در سایر مجهولات استفاده نمودهایم.

به منظور استخراج رابطهای برای تبدیل فاز مستقیم و معکوس تابع سفتی را به صورت زیر معرفی میکنیم:

$$f(\xi) = \begin{cases} \rho . b_M \left[ \xi - \frac{\left(1 - \xi\right)^{1 + n_1}}{1 + n_1} \right] ; \xi > 0 \\ \rho . b_A \left[ \xi - \frac{\left(1 - \xi\right)^{1 + n_2}}{1 + n_2} \right] ; \xi < 0 \end{cases}$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$ ، اعدادی ثابت هستند، برای یافتن مجهولات مسئله روابط (۸) تا (۱۱) را به صورت زیر باز تعریف میکنیم:

(۱۵)

 $\pi(\sigma, T, \xi) = Y_1$  at  $\sigma = 0, T = M_s, \xi = 0.$ 

.....



شکل ۴: مقایسه مدلهای Lagoudas ،Fractional و مدل کسینوسی Liang-Rogers برای یک مدل خاص SMA در فشار Liang-Rogers

جدول (۱) و (۲) مقایسهای بین دماهای تبدیل فاز پیش بینی شده توسط سه مدل بالا در دو فشار ۲۵ و ۱۰۰ مگاپاسکال را نشان می-دهند.

جدول ۱: مقایسه دماهای تبدیل فاز در فشار ۲۵ مگاپاسکال

دما – مدل	$\mathbf{M}_{\mathbf{f}}$	Ms	As	$\mathbf{A_{f}}$
Cosine	44.00	۵۴.۵۰	۰۵. ۲۰	۰۵.۰۸
Lagoudas	44.77	54.27	۲۷.۰۷	۲۲.۰۸
Fractional	44.77	54.27	۸۲. ۷۰	۸۰.۲۸

جدول ۲: مقایسه دماهای تبدیل فاز در فشار ۱۰۰ مگایاسکال

دما – مدل	M <sub>f</sub>	Ms	As	$\mathbf{A_{f}}$
Cosine	۵۲	۶۲	۷۸	٨٨
Lagoudas	۵۱.۲۳	۶۱.۲۳	۷۷.۲۳	۸۷.۲۳
Fractional	۵۱.۲۴	91.74	۷۷.۲۴	۸۷.۲۴

در مورد تبدیل فاز آلیاژهای SMA شرایط مختلفی توسط محققانی جون Brinson Liang-Rogers ، Tanaka و Elahinia ذكر شده است. کامل ترین این شروط را Elahinia در سال ۲۰۰۴ ارائه نمود[۶]. ما نیز در این مقاله از شروط تبدیل فاز Elahinia استفاده کردهایم. جدول (۳) مقایسهای بین این شروط را نشان می-دهد.

ذکر این نکته ضروری است که مدل پارهای قابلیت مدل کردن حلقههای فرعی هیسترزیس<sup>۳</sup> را دارا میباشد. فرض کنید ماده در تبدیل مستقیم(تبدیل آستنیت به مارتنزیت) قرار دارد در این حالت شرط اول از شرایط تبدیل فاز Elahinia صادق است[۱۲] بنابراین کسر مارتنزیتی از اولین معادلهی (25) بدست می آید. اما اگر قبل از اینکه کسر مارتنزیتی به یک برسد تبدیل فاز معکوس رخ دهد یعنی



همانطور که قبلا بیان شد برای محاسبه مجهولات  $n_1$  و  $n_2$  به جای رابطهی (۱۲) از روش برازش منحنی استفاده می کنیم. اگر مدل-سازی را برای یک نمونه از SMA انجام دهیم[11]، در نهایت به مقادير  $n_1 = n_2 = 0.8$  مىرسيم و اين مدل جديد را مدل پاره-ای مینامیم. شکلهای (۳) و (۴) مقایسهای بین مدلهای Liang-Rogers , Lagoudas ، Fractional در فشارهای ۲۵ و ۱۰۰ مگاپاسکال نشان میدهند.



شکل ۳: مقایسه مدلهای Lagoudas ،Fractional و مدل کسینوسی Liang-Rogers برای یک مدل خاص SMA در فشار Liang-Rogers

<sup>1</sup> Curve fitting

<sup>2</sup> Fractional

<sup>3</sup> Minor hysteresis loop

معادلهی دوم از شرایطElahinia ارضا گردد در این حالت کسر مارتنزیتی از دومین معادلهی (۱–۱۳) بدست خواهد آمد.

جناول ۲ شرايك تبايل فار اليارهاي فالصدفار					
تغییر حالت از آستنیت به مارتنزیت	تغییر حالت از مار تنزیت به آستنیت	نگارنده			
$\begin{split} \dot{\sigma} &> 0 \\ \sigma &\geq (T-M_s) \frac{A_m}{B_m} \end{split}$	$\begin{split} \dot{\sigma} &< 0 \\ \\ \sigma &\leq -(T-A_s) \frac{A_a}{B_a} \end{split}$	Tanaka (1986)			
$\dot{T} < 0$ $M_{s} + \frac{\sigma}{C_{M}} \ge T \ge M_{f} + \frac{\sigma}{C_{M}}$	$\dot{T} > 0$ $A_{f} + \frac{\sigma}{C_{A}} \ge T \ge A_{s} + \frac{\sigma}{C_{A}}$	Liang (1990)			
$\label{eq:cm} \begin{split} \dot{\sigma} &> 0\\ C_M(T-M_f) \geq \sigma \geq C_M(T-M_s) \end{split}$	$\label{eq:calibration} \begin{split} \dot{\sigma} &< 0 \\ C_A(T-A_s) \geq \sigma \geq C_A(T-A_f) \end{split}$	Brinson (1993)			
$\dot{T} - \frac{\dot{\sigma}}{C_{M}} < 0$ $M_{s} + \frac{\sigma}{C_{M}} \ge T \ge M_{f} + \frac{\sigma}{C_{M}}$	$\dot{T} - \frac{\dot{\sigma}}{C_A} > 0$ $A_f + \frac{\sigma}{C_A} \ge T \ge A_s + \frac{\sigma}{C_A}$	Elahinia (2004)			

### جدول ۳- شرایط تبدیل فاز آلیاژهای حافظهدار

## کنترل وفقی-مقاوم سوئیچینگ عملگری از جنس SMA

در این بخش یک سیستم تفاضلی از این عملگرها را انتخاب کردهایم، شکل (۵) [11]. نحوهی کار سیستم به گونهایست که در هر لحظه فقط به یک سیم جریان داده می شود، سیمی که گرم می-شود از فاز مارتنزیت وارد آستنیت شده و طول آن کاهش



شکل ۵: سیستم انتخابی با عملگر SMA -[11]

می یابد و با اعمال نیرو به سیم دیگر سیم دوم را از فاز آستنیت به مارتنزیت می برد، با عوض شدن جهت جریان از سیم یک به دو این سیکل تکرار می گردد.

لفظ سوئیچینگ به سیستمی اطلاق میگردد که معادلهی دیفرانسیلی حاکمهی آن معادلهای واحد نباشد و از چند معادلهی دیفرانسیل مختلف تشکیل شده باشد. رفتار سیستم با ارضا شدن شرایطی بین این معادلات سوئیچ میکند. بنابراین قانون کنترلی واحدی بر سیستم حاکم نیست و با هر سوئیچ، معادلات و به تبع آن قانون کنترلی عوض میشود. از جملهی سیستمهای سوئیچینگ میتوان به ترموستات، پاندول مقید، برخورد الاستیک و مبدل -DC اشاره کرد. در ادامه برای اولین بار با استفاده از مفاهیم کنترل سوئیچینگ به کنترل یک نمونهی خاص از کاربردهای آلیاژ حافظه-دار میپردازیم.

برای یک عملگر SMA در حالت کلی چهار زیر سیستم قابل تصور است، ۱- ماده در فاز مارتنزیت قرار دارد، ۲- ماده در حال تبدیل به فاز آستنیت است،۳- ماده در فاز آستنیت قرار دارد، ۴-ماده در حال تبدیل از آستنیت به مارتنزیت است. بنابراین در حالت کلی یک عملگر SMA چهار زیرسیستم دارد که در هر زیر سیستم رفتار ماده متفاوت خواهد بود که با ارضاء شرایط تبدیل فاز Elahinia عملگر بین این زیر سیستمها سوئیچ می کند[12].

با توجه به اینکه معادلات هر زیر سیستم با سایر زیرسیستمها متفاوت است با یک سیستم سوئیچینگ مواجه هستیم. متداول ترین روش در بررسی پایداری سیستمهای سوئیچینگ یافتن تابع لیاپانوف مشترک است که برای تمامی زیر سیستمها صادق باشد. شایان ذکر است اگر برای سیستم سوئیچینگ نتوان تابع لیاپانوف مشترک یافت باید از مفاهیم دیگری همچون توابع لیاپانوف چندگانه و مفهوم زمان توقف بهره جست[13]. منظور از زمان توقف حداقل زمان لازم برای توقف در زیر سیستم پس از سوئیچینگ است تا انرژی ناشی از عمل سوئیچ بین زیر سیستمها میرا شود. اگر عمل شود. باید توجه داشت که صرف پایداری تمامی زیر سیستمها متضمن پایداری سیستم سوئیچینگ نیست. بالعکس می توان سیستم سوئیچینگ با زیر سیستمهای ناپایدار را تحت سوئیچینگ مقید پایدار کرد. شکلهای (۶) تا (۹) دو مطلب اخیر را بیان می-



(۳.)

$$\begin{split} mc_p \ T &= Ri^2 - h_c A_c (T - T_\infty) \\ \text{ كه در آن i جریان اعمالی به سیم، R مقاومت سیم و K سطح جانبی سیم است. گشتاور اعمالی توسط دو سیم بر دیسک برابر است با:
$$\begin{aligned} y &= (f_1 - f_2)r = (\sigma_1 - \sigma_2)Ar \qquad (\texttt{m1}) \\ y &= (f_1 - f_2)r = (\sigma_1 - \sigma_2)Ar \qquad (\texttt{m7}) \\ y &= (f_1 - f_2)r = (\sigma_1 - \sigma_2)Ar \qquad (\texttt{m7}) \\ \text{ rescaled all of the second of the second$$$$

که در آن 
$$\stackrel{\square}{\mathcal{E}_1}$$
 نرخ کرنش سیم (۱) است:

$$\begin{split} & if \ u \ge 0, \rightarrow i_1 = \sqrt{u} \ , i_2 = 0, \\ & h_a = Ar\alpha_1 \frac{\Omega \xi_{1T}(T_1, \xi_1) + \theta_t}{1 - \Omega \xi_{1\sigma}(T_1, \xi_1)} \end{split}$$

(۳۵)

$$if \ u \prec 0, \rightarrow i_2 = \sqrt{-u} , i_1 = 0,$$
$$h_a = Ar\alpha_2 \frac{\Omega \xi_{2T}(T_2, \xi_2) + \theta_t}{1 - \Omega \xi_{2\sigma}(T_2, \xi_2)}$$
(79)

$$g_{a} = Ar(\frac{D}{1 - \Omega\xi_{1\sigma}(T_{1}, \sigma_{1})} + \frac{D}{1 - \Omega\xi_{2\sigma}(T_{2}, \sigma_{2})})$$
(TY)
$$(TY)$$

$$\begin{split} d_{a} &= -Ar\beta_{1} \frac{-2\beta_{1}r(-1,\xi_{1},y) - q_{1}}{1 - \Omega\xi_{1\sigma}(T_{1},\xi_{1})} (T_{1} - T\infty) \\ &+ Ar\beta_{2} \frac{\Omega\xi_{2T}(T_{2},\xi_{2}) + \theta_{t}}{1 - \Omega\xi_{2\sigma}(T_{2},\xi_{2})} (T_{2} - T\infty) \\ D_{m} \quad g \quad D_{a} \quad \delta \quad D = \frac{D_{a} + D_{m}}{2} \quad g\alpha = \frac{R}{mc_{p}}, \ \beta = \frac{h_{c}A_{c}}{mc_{p}} \\ \text{output} \quad \delta = \frac{1}{2} \quad \delta = \frac{$$



$$\xi_{T}(T,\sigma) = \begin{cases} if A_{s} < T - \frac{\sigma}{C_{A}} < A_{f}, T - \frac{\sigma}{C_{A}} > 0 \\ \frac{1 - \xi_{A}}{2} \sin(a_{M}(T - M_{f} - \frac{\sigma}{C_{M}}))a_{M} \\ if M_{f} < T - \frac{\sigma}{C_{A}} < M_{s}, T - \frac{\sigma}{C_{A}} > 0 \\ 0, \quad otherwise \end{cases}$$

(۲۹)

$$\begin{split} \xi_{\sigma}(T,\sigma) &= \\ \begin{cases} -\frac{1}{C_{A}}\xi_{T}, & \text{if } A_{s} < T - \frac{\sigma}{C_{A}} < A_{f}, & T - \frac{\sigma}{C_{A}} > 0 \\ -\frac{1}{C_{M}}\xi_{T}, & \text{if } M_{f} < T - \frac{\sigma}{C_{A}} < M_{s}, & T - \frac{\sigma}{C_{A}} > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{split}$$

معادلهی انتقال حرارت آلیاژهای حافظهدار به صورت زیر است:

و

اغتشاش d کراندار خواهد بود و کران بالای آن را  $\mathrm{D}_{\mathrm{m}}$  در نظر میگیریم:

(۴۵)  $|d_k(t)| < D_{m,k}$ با توجه به این که  $g_{1k}$  و  $g_{1k}$  برای هر زیر سیستم تغییرات کمی دارند آنها را به عنوان پارامترهای وفقی در نظر می گیریم. تابع لیاپانوف زیر برای هر چهار زیر سیستم صادق است: (۴۶)

$$V = \frac{1}{2} X_{k}^{t} P X_{k} + \frac{1}{2\omega} \tilde{g}_{k}^{2} + \frac{1}{2\gamma} \tilde{h}_{k}^{2}$$

که در آن P یک ماتریس متقارن و مثبت موکد و پاسخ معادلهی لیاپانوف زیر است:

با مشتق گرفتن از (46) داریم:

 $A^t \cdot P + P \cdot A = -I$ 

(۴۸)

$$V = -\sum_{i=1}^{3} x_{i,k}^{2} + X_{k}^{t} PB \begin{bmatrix} g_{k} \cdot x_{2,k} + h_{k} \cdot u_{k} + d_{k} + \\ + K \cdot X_{k} \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \overset{\circ}{g_{k}} \cdot \overset{\circ}{g_{k}} + \frac{1}{\gamma} \overset{\circ}{h}_{k} \cdot h_{k}$$

$$\stackrel{\circ}{g_{k}} \overset{\circ}{g_{k}} \overset{\circ}{g_{k}} + \frac{1}{\gamma} \overset{\circ}{h}_{k} \cdot h_{k}$$

$$\stackrel{\circ}{g_{k}} \overset{\circ}{g_{k}} \overset{\circ}$$

رامترهای سیستماند. قوانین وفقی به صورت زیر محاسبه میشوند: (۴۹)

$$\hat{g}_{k} = \omega X_{k}^{t} PBx_{2,k}$$
,  $\hat{h}_{k} = \gamma X_{k}^{t} PBu_{k}$  که در آن  $u_{k}$  قانون کنترلی زیرسیستم kla است که در ادامه محاسبه خواهد شد. با استفاده از روابط (49) داریم:

 $(\Delta \cdot )$ 

$$V \leq X_k^t PB \begin{bmatrix} \hat{g}_k \cdot x_{2,k} + \hat{h}_k \cdot u_k + \\ +Sgn(X_k^t PB) \cdot D_{m,k} + K_k X_k \end{bmatrix}$$

بنابراین قانون کنترلی برای هر زیر سیستم به صورت زیر خواهد بود که در برابر ترم اغتشاش *d* مقاوم است:

$$u_k = -\frac{1}{\hat{h}_k} \left[ \hat{g}_k \cdot x_{2,k} + Sgn(X_k^t PB) \cdot D_{m,k} + K_k X_k \right]$$

قوانین وفقی و کنترلی (۴۹) و (۵۱) باعث میشوند مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمهاکید شود بنابراین برای اثبات پایداری از لم باربالات' استفاده میکنیم[14]. تابع لیاپانوف (۴۶) مثبت معین

<sup>1</sup> Barbalat lemma

(۳۸)  

$$I \theta = y, \rightarrow I \theta = y = h_a u + g_a r \theta + d_a,$$

$$\rightarrow \theta = hu + g \theta + d$$

$$h = \frac{h_a}{I}, g = \frac{g_a r}{I}, d = \frac{d_a}{I}$$

$$\Rightarrow \sigma = I = I = 0$$

$$\Rightarrow \sigma = I = 0$$

$$\Rightarrow T = [\theta, \theta]$$

$$= I = 0$$

$$= I = 0$$

$$\Rightarrow T = I = 0$$

$$\Rightarrow T = I = 0$$

$$= I = 0$$

$$\Rightarrow T = I = 0$$

$$X = A \cdot X + B \cdot f$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} B = (0 & 0 & 1)^t \\ f = g \cdot x_2 + h \cdot u + d \end{cases}$$
(F1)

که در آن :

که در آن h ،g و d توابعی پیچیده بر حسب دما، تنش، کسر مارتنزیتی و سایر خواص ماده هستند. به منظور طراحی کنترل سوئیچینگ سیستم فوق، معادلات را برای کلیهی زیر سیستمهای چهارگانهی ذکر شده مینویسیم:

$$\overset{\sqcup}{X_k} = A.X_k + B.f_k + B.K_k.X_k \,, \quad k = 1,2,3,4$$
که در آن k شمارهی هر زیر سیستم است و شرط انجام سوئیچینگ

بین زیر سیستمهای چهارگانه شروط Elahinia[12] می باشد. (۴۳)

$$f_{k} = g_{k} x_{2,k} + h_{k} u_{k} + d_{k} - K_{k} X_{k}$$
(ff-1)
$$K_{k} = place(A, B, p_{k})$$
(44-2)
$$A_{k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{1k} & -k_{2k} & -k_{3k} \end{pmatrix}$$

d مبارت b مبارت b مبارت b ماین استدلال که عبارت b متایری در پایداری سیستم ندارد آن را حذف کرده است [۱۱]. با توجه به اینکه سیگنال b تابعی از حالات سیستم نیست آن را به عنوان یک اغتشاش خارجی اعمالی به سیستم در نظر می گیریم و به طراحی کنترلری می پردازیم که در برابر این اغتشاش مقاوم باشد. با توجه به این که دمای سیم SMA هرگز بینهایت نمی شود بنابراین

حسین چهاردولی، محمد اقتصاد، مهرداد فرید

جدول (۴) مشخصات SMA-[۱۱]

Parameter: Symbol=value (unit) Mass per unit length:  $m = 6.8231 \times 10^4$  (Kg/m) Density:  $\rho = 6/45 \text{ (g/cm}^3)$ Circumferential area:  $A_c = 1.1545*10^{-3} (m^2)$ Diameter of SMA wire:  $d = 381 \times 10^{-6}$  (m) Initial strain:  $\varepsilon_0 = 0/04$ Initial stress: 25 (MPa) Martensite start temperature:  $M_s = 52$ Martensite finish temperature:  $M_f = 42$ Austenite start temperature:  $A_s = 68$ Austenite start temperature:  $A_f = 78$ Austenite young modulus:  $D_a = 75$  (GPa) Martensite young modulus:  $D_m = 28$  (GPa) Thermal expansion factor:  $\theta_t = 6 (\mu Pa/^{\circ}C)$ Austenite curve fitting parameters:  $C_A = 10(MPa/^{\circ}C)$ Martensite curve fitting parameters:  $C_M = 10(MPa/^{\circ}C)$ Specific heat:  $c_p = 320 (J/kg {}^{\circ}C)$ Resistance per unite length:  $R = 7/9 (\Omega/m)$ Ambient temperature:  $T_{\infty} = 20({}^{o}C)$ Heat convection parameter:  $h = 48 (W/m^{20}C)$ Pulley radius: r = 0/015 (m)

شکل(۱۰) نتیجهی اعمال کنترلر فوق را در مسئله تعقیب یک سیگنال سینوسی نشان میدهد، شکل (۱۰–۱۱) و (1–11) قوانین کنترلی، شکل (۱۲) منحنی دمای دو سیم و شکل (۱۳) نمودار تخمین پارامتر h را نشان میدهد، از آنجایی که تخمین h هیچگاه صفر نمی شود بنابراین قانون کنترلی (۵۱) مطمئنا منفرد<sup>۲</sup> نخواهد



شکل ۱۰: مسئله تعقیب سیگنال سینوسی پس از اعمال کنترل(51)

همانطور که از شکل (۱۰) پیداست در ابتدا مدتی طول میکشد تا پاسخ سیستم بر ورودی مرجع منطبق گردد. علت این است که مدت زمانی لازم است تا سیمها گرم شده و تبدیل فاز آغاز گردد.

(۵۳)

$$V = -\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \to \int_{0}^{\infty} \sum_{1}^{3} x_i^2 dt = V(0) - V(\infty) \prec \infty$$

(۵۴)

بنابراين:

$$\int_{0}^{\infty} x_{1}^{2} dt \prec \infty \rightarrow x_{1} \in L_{2}$$

$$(\Delta\Delta)$$

$$\begin{cases} (x_{1}, x_{2}) \in L_{\infty} \\ x_{1} \in L_{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x_{1} = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} x_{1} = 0$$

و این یعنی قانون کنترلی سوئیچینگ (۵۱) سیستم سوئیج (۴۲) را پایدار مجانبی خواهد کرد.

با توجه به اینکه تابع لیاپانوف (۴۶) مشترک بین تمامی زیر سیستمهاست بنابراین قانون کنترلی مقاوم (۵۱) سیستم سوئیچینگ (۴۲) را پایدار مجانبی خواهد کرد. در نتیجه سیستم سوئیچینگ (۴۲) تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر<sup>۱</sup> خواهد بود. جدول (۴) خواص سیمهای SMA را نشان می-دهد[۱۱].

از دشواریهای کنترل سیستم سوئیچینگ یافتن تابع لیاپانوف مشترک برای تمامی زیر سیستمهاست که نامساوی مناسب را ارضا کند. این مسئله جدای از یافتن تابع لیاپانوف برای یک سیستم غیر سوئیچینگ است. از تبعات منفی این نوع تابع لیاپانوف این است که اگر نتوان برای تمامی زیر سیستمها یک تابع لیاپانوف مشترک یافت باید به سراغ توابع لیاپانوف چندگانه رفت که باید در نقاط سوئیچینگ تشکیل یک دنباله نزولی دهند.

Journal of Control, Vol. 5, No. 4, Winter 2012

<sup>2</sup> Singular

۶١



تاخیر زمانی در سیستمهای سوئیچینگ SMA

همانطور که پیشتر گفته شد برای سیستمهای سوئیچینگ تحت عملگر SMA چهار نوع تاخیر زمانی قابل تصور است: ۱-تاخیر ناشی از سنسورها، ۲-تاخیر ناشی از عملگر SMA، ۳-تاخیر ناشی از اعمال قانون کنترل، ۴-تاخیر ناشی از عمل سوئیچینگ بین زیرسیستمها. در اینجا تاخیر زمانی ناشی از عملگر SMA را در نظر گرفته و از سایر تاخیرهای فوق صرفنظر میکنیم.

منظور از تاخیر زمانی SMA مدت زمان لازم برای گرم شدن عملگر فوق است. به سیستم (۴۲) بر می گردیم و با لحاظ تاخیر زمانی به کنترل آن می پردازیم. در بررسی سیستمهای تاخیر زمانی باید منشا تاخیر را یافت تا بتوان معادلات سیستم را بر اساس آن بازنویسی کرد. معادلات سیستم در غیاب تاخیر زمانی به صورت زیر است:

(56)

 $I \theta = g_a \varepsilon + h_a u + d_a$ 

همانطور که بیان شد در اینجا فقط تاخیر ناشی از عملگر SMA را در نظر می گیریم. تاخیر این عملگر باعث تاخیر در تغییر طول و کرنش سیم می شود. بنابراین معادله (۵۶) به فرم زیر تبدیل می-گردد.

$$I\theta = g_a \varepsilon_\tau + h_a u + d_a \tag{57}$$

که در آن £ کرنش تاخیری سیم است. معادلهی (۵۷) در فرم فضای حالت به صورت زیر تبدیل میگردد:









شکل ۱۲: منحنی دمای دو سیم پس از اعمال کنترل (۵۱)

(66)  

$$V \leq z_{2k} \{z_{1k} + \hat{h}_k u_k + sign(z_{2k}).D_{mk} + (x_{2k} + x_{3k})(1 + k_1) + \frac{1}{2} z_{2k} \hat{g}^2 + \frac{1}{2} \frac{x_{2k,\tau}^2}{z_{2k}} \}$$
(67)  

$$u_k = -\frac{1}{h_k} \{z_{1,k} + sign(z_{2k}).D_{mk} + (1 + k_1).(x_{2k} + x_{3k}) + \frac{1}{2} z_{2k} \hat{g}^2 + \frac{1}{2} \frac{x_{2k}^2}{z_{2k}} + k_2 z_{2,k} \}$$

cc.

اما همانطور که از رابطهی (۶۷) مشخص است در مخرج قانون کنترلی عبارت z<sub>2</sub> ظاهر شده است. بنابراین با میل این ترم به صفر قانون کنترلی بیکران شده و سیستم ناپایدار میگردد. برای اثبات پایداری قضیهی زیر را بیان میکنیم:

قضیه ی ۱:  
برای سیستم سوئیچینگ مرتبه ی سه (۵۸) اگر قانون کنترلی مقاوم  
به صورت زیر تعریف گردد:  

$$u_{k} = \begin{cases}
-\frac{1}{h_{k}} \{z_{1,k} + sign(z_{2k}).D_{mk} + (1+k_{1}).(x_{2k} + x_{3k}) \\
+\frac{1}{2}z_{2k}g^{2} + \frac{1}{2}\frac{x_{2k}^{2}}{z_{2k}} + k_{2}z_{2,k}\}, & |z_{2k}| \ge \lambda_{ak} \\
0, & |z_{2k}| \prec \lambda_{ak}
\end{cases}$$
(68)

به همراه قوانین وفقی (۶۱)، آنگاه تمامی سیگنالهای سیستم حلقه بسته (۵۸) کراندار خواهند بود (<sup>'</sup>GUUB) و از یک محدودهی مشخص خارج نخواهند شد.

برای اثبات سه حالت در نظر میگیریم. ۱- هر سه سیگنال Z<sub>1</sub> X<sub>1</sub> و Z2 خارج از محدودهی λ<sub>a</sub> باشند. با تعریف تابع لیاپانوف به صورت (۶۵) و مشتق آن به صورت (۶۶) با اعمال قانون کنترلی (۶۷) و قوانین وفقی (۶۱) داریم:

(69)

......

$$\vec{V} \leq -k_2 z_{2k}^2$$

بنابراین گرادیان تابع لیاپانوف منفی بوده و متغیرهای حالت به محدودهی فوق همگرا می شوند. ۲- متغیرهای فوق داخل بازهی  $\lambda_a$  باشند. بنابراین در این محدوده باقی خواهند ماند و با خروج از آن

<sup>1</sup> Globally uniformly ultimately bounded

معادلات به فرم پسخور اکید هستند، بنابراین در این قسمت از روش گام به عقب وفقی برای کنترل سیستم (۵۸) استفاده می کنیم و در نهایت به تابع لیاپانوف مشترک زیر برای سیستم (۵۸) می سیم: (59)  $V = \frac{1}{2}x_{1k}^2 + \frac{1}{2}z_{1k}^2 + \frac{1}{2}z_{2k}^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{h}_k^2 + \frac{1}{2\gamma}g_k^2$ 

که در آن 
$$x_1 \cdot x_1 \in Z_2$$
 متغیرهای سیستم میباشند و  
(60)  
 $Z_{1k} = x_{1k} + x_{2k}$   
 $Z_{2k} = x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} - k_1(x_{1k} + x_{2k})$   
که در آن  $k_1$  گینی مثبت است. با مشتق گیری از (۵۹) و استخراج  
قوانین وفقی داریم:

$$\overset{\square}{h_k} = \gamma z_{2k} u_k \quad , \quad \overset{\square}{g_k} = \gamma z_{2k} x_{2k,\tau}$$
(62)

$$= z_{2k} \{ z_{1k} + \hat{h}_k u_k + \hat{g}_k x_{2k,\tau} + d_k + (x_{2k} + x_{3k})(1 + k_1) \}$$

اما فرض بر آن است که مقدار تاخیر زمانی ۲ نامعلوم است. بنابراین ترمهایی که دارای تاخیر زمانی هستند نباید در قانون کنترلی ظاهر شوند. بنابراین در (۶۲) با استفاده از نامساوی یانگ

(03)  
a.b≤
$$\frac{1}{2}a^2$$
+ $\frac{1}{2}b^2$   
ترم x<sub>2k</sub>, را از سایر ترمها جدا میکنیم. داریم:

(64)

اثىات:

(62)

$$\vec{V} \le z_{2k} \{ z_{1k} + h_k u_k + sign(z_{2k}) . D_{mk} + (x_{2k} + x_{3k})(1 + k_{1k}) \} + \frac{1}{2} (z_{2k} \hat{g})^2 + \frac{1}{2} x_{2k,\tau}^2$$

حال یک ترم *Lyapunov-Krsovskii* به تابع لیاپانوف (۵۹) اضافه میکنیم:

و

۱۳۹۰ مجله کنترل، چلد ۵ شماره ۴، زمستان ۱۳۹۰

Journal of Control, Vol. 5, No. 4, Winter 2012

مجددا به داخل محدوده میل خواهند کرد. ۳- برخی از متغیرها داخل و برخی دیگر خارج از محدودهی فوق باشند که بازهم استدلال شبیه موارد ۱و ۲ خواهد بود.

#### نتايج شبيهسازى

در این قسمت نتایج شبیهسازی را برای مقدار  $\tau_k = 0/1$  ثانیه آورده مىشود. شکل زیر نتیجهی اعمال قانون کنترل سوئیچینگ (67) را بر سيستم (58) نشان مىدهد.



شکل ۱۴: نمودار پاسخ سیستم (۵۸) پس از اعمال کنترل (۶۷)

در ابتدا سیستم ساکن بوده و پس از زمانی حدود ۸/. ثانیه عمل مىكند دليل، مدت زمان لازم براى گرم شدن سيم است. همانطور که از شکل(۱۴) پیداست پنجه به زاویهی مطلوب ۱۰ درجه نمی-رسد اما به آن خیلی نزدیک می گردد. شکل(۱۵) نمودار دمای سیم-های SMA را نشان میدهد. شکل(۱۷) نتایج اعمال کنترل سوئیچینگ بدون در نظر گرفتن تاخیر زمانی را بر سیستم (۵۸) نشان میدهد. همانطور که مشخص است لحاظ کردن تاخیر زمانی باعث می شود زمان نشست و فراجهش سیستم افزایش یابد.





شکل ۱۸: دمای سیستم پس از اعمال کنترل بدون تاخیر زمانی

#### نتيجه گيري و جمع بندي

در این مقاله ابتدا با تصحیح فرضیات Lagoudas مدلی کامل تر برای تبدیل فاز آلیاژهای حافظهدار ارائه نمودیم، نتایج نهایی نشان از نزدیکی این مدل با مدل کسینوسی Liang-Rogers داشت. سپس در ادامه برای اولین بار به کنترل سوئیچینگ این عملگرها پرداخته و کنترلر وفقی- مقاوم سوئیچینگ را برای کاربردی خاص از

- [9] MA. Qidwai, DC. Lagoudas, "Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms," *Inter. Journal for Numerical Methods in Engineering*; Vol. 47, pp. 1123–68, 2000.
- [10] C. Dimitris, Lagoudas, Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications, Springer, ch. 3, 2008.
- [11] M. Moallem and V. A. Tabrizi, "Tracking Control of an Antagonistic Shape Memory Alloy Actuator Pair", *IEEE Transactions on control system technology*, vol. 17, No. 1, pp. 184-190, 2009.
- [12] M. H. Elahinia, M. Ahmadian, "Application of the extended Kalman filter to control of a shape memory alloy arm.", *Journal of Smart Materials and Structures*, Vol. 15, No. 5, pp. 1370-1384, 2006.
- [13] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Springer-verlage, 2003.
- [14] M. Moallem and V. A. Tabrizi, "Nonlinear Position Control of Antagonistic Shape Memory Alloy Actuators", *Proceeding of the* 2007 *American Control Conference, pp.* 88-93, 2007.
- [15] M. Kristic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design*, Weily, Interscience, pp 489-492, 1995.
- [16] S. Kim, S. A. Campbell, X. Liu, "Stability of a Class of Linear Switching Systems With Time Delay", *IEEE Tran. On cir. And sys., Vol.* 53, pp. 384-393, 2006.
- [17] Y. U. Sun, L. Wang, G. Xie, "Stability of Switched Systems With Time-Varing Delays: Delay Dependent Common Lyapunov Functional Approach", Proc. Of 2006 American Control Conference, USA, pp. 1544-1549, 2006.
- [18] P. Yan, H. Ozbay, "Stability Analyses of Switched Time-Delay Systems", Proc. Of 47<sup>th</sup> IEEE Conf. on Desi. And control, Mexico, pp. 2740-2745, 2008.
- [19] Q. C. Zhong, *Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer, 2006.
- [20] Magdi S. Mahmoud, Switched Time-Delay Systems, Springer, Y.V.
- [21] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Timedelay systems*, Springer, 2007.
- [22] H, Khalil, *Nonlinear Systems*, 3<sup>rd</sup> Edition, Springer, 2002.

این عملگرها طراحی نمودیم، نتایج نهایی پایداری سیستم سوئیچینگ تحت کنترلر فوق را نشان داد، سپس در ادامه به معرفی منابع تاخیر زمانی در سیستمهای سوئیچینگ پرداخته و قانون کنترلی مقاومی در برابر تاخیر زمانی عملگر آلیاژ حافظهدار طراحی نمودیم. نشان دادیم با وجود تاخیر زمانی متغیرهای حالت سیستم کراندار خواهند شد.

#### مراجع

- [1] L. C. Brinson, "One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermo mechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable," *Jour. of Intell. Material Sys. and Struct, Vol.* 4, No. 2, pp. 229-242, 1993.
- [2] M. H. Elahinia, M. Ahmadian, "Application of the extended Kalman filter to control of a shape memory alloy arm", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 15, No. 5, pp. 1370-1384, 2006.
- [3] J. H. Mabe, F. Calkins, G. Butler, "Boeing's variable geometry chevron morphing aero structure for jet noise reduction", *Struct., Dynamics and Mat., Conf., Newport* Island, pp. 1– 19, 2006.
- [4] T.B. Wolfe, M.G. Faulkner and J. Wolfaardt, "Development of a shape memory alloy actuator for a robotic eye prosthesis", *Smart Materials and Structures*, Vol. 12, No. 4, pp. 266-272, 2005.
- [5] I. Roch, Ph. Bidaud, D. Collard, L. Buchaillot, "Fabrication and characterization of an SU-8 gripper actuated by a shape memory alloy thin film," *J. Micromech. Microeng.* Vol. 5, No. 3, pp. 83-97, 2003.
- [6] M. H. Elahinia, "Effect of system dynamics on shape memory alloy behavior and control." *PhD Thesis, Virginia Polytech, Blacksburg*, USA, pp. 13-16, 2004.
- [7] K. Tanaka, "A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior," *J. Struct. Mach. Mater. Sci.* Vol. 18, pp. 251-263, 1949.
- [8] C. Liang and A. Rogers, "One dimensional thermo mechanical constitutive relations for shape memory materials," ASME Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 1, No. 4, pp. 207-234, 1990.