

## رهیافتی نو برای حل عددی مسائل کنترل بهینه سیستم های پارامتر توزیعی

سید محمد مهدی عباسی<sup>۱</sup>، علی وحیدیان کامیاد<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، s.mmehdi.abasi@gmail.com

<sup>۲</sup> استاد، گروه برق و ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، avkamyad@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۹/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱/۲۱)

**چکیده:** روش های کلاسیک برای حل مسائل کنترل غیرخطی و مخصوصاً مسائل کنترل بهینه سیستم های پارامتر توزیعی غیرخطی در حالت کلی معمولاً کارآمد نیستند. در این مقاله رهیافتی جدید برای حل تقریبی این دسته از مسائل با استفاده از برنامه ریزی غیرخطی معرفی می کنیم. در ابتداء مسئله اصلی را به یک مسئله معادل درحساب تغییرات تبدیل می کنیم و سپس مسئله جدید را گسسته سازی کرده و با استفاده از برنامه ریزی غیرخطی آن را حل می کنیم. علاوه براین می توان مسئله برنامه ریزی غیرخطی را به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل نموده و این امکان را داشت که از نرم افزارهای برنامه ریزی خطی نیز استفاده کرد، در آخر کارآمدی روش با حل مثال عددی نشان داده شده است.

**کلمات کلیدی:** کنترل بهینه، سیستم های پارامتر توزیعی، حساب تغییرات، برنامه ریزی غیرخطی.

## New Approach for Numerical Solution of Distributed Parameter Systems Optimal Control Problems

Seyed Mehdi Abasi, Ali Vahidian Kamyad

**Abstract:** Classical methods are not usually efficient, to solving nonlinear control problems and especially Nonlinear distributed parameter systems Optimal Control Problems (NOCP). In this paper we introduce a new approach for solving this class of problems by using NonLinear Programming Problem (NLPP). First, we transfer the original problem to a new problem in form of calculus of variations. The next step we discrete the new problem and solve it by using NLPP packages. Moreover, a NLPP is transferred to a Linear Programming Problem (LPP) which empowers us to use powerful LP software. Finally, efficiency of our approach is confirmed by some numerical examples.

**Keywords:** optimal control, distributed parameter systems, calculus of variations, nonlinear programming

سازی فیدبک [۱۱]، کنترل مقاوم [۹]، کنترل تطبیقی [۸]، شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک [۶-۷]، برنامه ریزی پویای تکراری [۱۲] و روش تئوری اندازه [۲-۴] اشاره کرد. روش تئوری اندازه اولین بار در سال ۱۹۸۰ توسط رویو<sup>۱</sup> برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم های فشرده مورد استفاده قرار گرفت و در واقع باب جدیدی در تئوری کنترل گشود. در سال ۱۹۸۸ داکتر وحیدیان کامیاد مسئله حرارت را در حالت  $n$  بعدی با استفاده از این روش بررسی کرده است [۴]. در این روش مسئله کنترل بهینه به

### ۱- مقدمه

در چند دهه گذشته محققان و مهندسان کنترل برای حل مسائل کنترل غیر خطی و به دست آوردن کنترلی برای این سیستم ها از تقریب زدن سیستم به صورت سیستم خطی در حول نقطه کار استفاده می کردند و با این روش یک جواب اولیه برای سیستم به دست می آوردند که این روش در همه موارد کارآمد نبود و سیستم نمی توانست مشابه یک سیستم خطی عمل کند [۱۱]. روش های زیادی برای سیستم های کنترل غیرخطی ارائه شده است که از جمله می توان به روش های اویلر لاگرانژ، خطی-

<sup>۱</sup> Rubio

یک مسئله کنترل بهینه در حالت نسبتاً کلی به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$\text{minimize } \int_a^b \int_c^d f(x, t, u(x, t), Y(x, t)) dt dx \quad (2)$$

با این شرط که:

$$Y_t = F\left(x, t, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \quad (3)$$

$$Y(x, t_0) = G(x), \quad x \in \Omega \in [a, b]$$

$$Y(x, t) = u(x, t), \quad t \in [c, d], \quad x \in \partial\Omega$$

شرایط اولیه و مرزی:

در اینجا  $F$  و  $G$  توابعی مفروض می باشند، تابع  $Y: \Omega * T \rightarrow R^+$

تابعی وابسته به زمان است که دو بار نسبت به متغیر  $x$  و یک بار نسبت به متغیر  $t$  مشتق پذیر است و  $\Omega$  یک ناحیه فشرده همبند ساده در فضای  $R$ ،  $\partial\Omega$  مرز ناحیه  $\Omega$  و  $u(x, t)$  یک تابع کنترلی می باشد. در مسائل کنترل بهینه  $f$  می تواند تابع انرژی و یا سوخت باشد که در زیر نشان داده شده است.

$$f(x, t, Y, u) = \frac{1}{2}(Y^2(x, t) + u^2(x, t)) \quad (4)$$

$f(x, t, Y, u) = |Y(x, t)| + |u(x, t)|$   
می توان بدون از دست دادن حالت کلی مسئله طول بازه ها را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$t \in [0, 1], \quad x \in [0, 1] \quad (5)$$

زیرا می توان تابعی مانند  $K$  تعریف کرد که این تبدیل را انجام می دهد.

$$K: [a, b] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow \frac{x-a}{b-a}$$

## ۱-۲ تبدیل مسئله کنترل بهینه غیر خطی به یک

### مسئله بهینه سازی غیر خطی تعینی<sup>۶</sup> (NDOC) معادل

ابتدا تابعی خطای زیر بر اساس (۳) تعریف می گردد:

$$E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \left|Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right| \quad (6)$$

$$\forall (x, t) \in \Omega \times [0, 1]$$

بر این اساس مسئله زیر را در حساب تغییرات تعریف می کنیم:

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \quad (7)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\right| dt dx$$

شرط لازم و کافی برای آن که  $Y(x, t)$  یک جواب مسئله NPDE

(۳) باشد این است که جواب بهینه مسئله حساب تغییرات (۷) صفر باشد.

**قضیه ۱-** اگر  $h(x, t)$  یک تابع حقیقی و غیر خطی در

بازه  $[a, b] \times [c, d]$  و غیر منفی باشد  $h(x, t) \geq 0$ ، شرط لازم و

کافی برای آنکه  $\int_a^b \int_c^d h(x, t) dt dx = 0$  آن است که تابع  $h(x, t)$

در بازه  $[a, b] \times [c, d]$  مساوی صفر باشد.

**اثبات-** با فرض اینکه  $\int_a^b \int_c^d h(x, t) dt dx = 0$  ولی در نقطه ایی

مانند  $(x_0, t_0)$  در بازه  $[a, b] \times [c, d]$ ،  $h(x_0, t_0) \neq 0$ ، به دلیل

پیوسته بودن تابع  $h(x, t)$  همسایگی  $\varepsilon$  در اطرف نقطه  $(x_0, t_0)$  وجود

فضای جدید به نام فضای اندازه برده می شود و عناصر کنترل بهینه به صورت زوج های مسیر - کنترل در نظر گرفته می شود و آنها را به فضای اندازه انتقال می دهند. از دیگر روش ها می توان به روش برنامه ریزی پویا تکراری اشاره کرد. روش برنامه ریزی پویا برای اولین بار در دهه ۵۰ میلادی برای حل مسائل بهینه سازی ارائه گردید که از آن برای حل مسائل کنترل بهینه با بعد پایین استفاده می شد. با افزایش بعد مسئله برنامه ریزی پویا در مدت طولانی به جواب نادقیق می انجامید، برای غلبه بر این مشکل، لوس<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۹ اولین کسی بود که عقیده استفاده از برنامه ریزی پویا را به صورت تکراری بیان کرد، که بعدها روش برنامه ریزی پویای تکراری<sup>۲</sup> (IDM) نام گرفت [۱۲]. در این الگوریتم فاصله زمانی مفروضه به  $p$  مرحله زمانی با طول مساوی تقسیم می شود و در هر مرحله زمانی، کنترل ثابت فرض می شود. کنترل قطعه ای ثابت یک تقریب خوب با کنترل پیوسته را فراهم می کند و این تقریب با گرفتن گام زمانی کوچک تر اصلاح می شود.

بعضی از روش ها که در بالا به آنها اشاره شد تنها قادر به حل کلاسی خاص از سیستم های غیر خطی هستند. بنابراین طبیعی به نظر می رسد که به دنبال روش دیگری باشیم که قادر باشد مسائل کنترل بهینه اعم از خطی یا غیر خطی پارامتر توزیعی را حل کند، ما در ادامه یک روش جدید برای حل این دسته از مسائل با استفاده از برنامه ریزی غیر-خطی معرفی می کنیم. برای ساده شده نوشتار، ره یافت جدید PAVK<sup>۳</sup> نام گذاری شده است. کلیات این روش در حالت سیستم های با معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش AVK<sup>۴</sup> در چند مقاله منتشر شده است [۱، ۱۰]. تفاوت روش های PAVK و AVK با دیگر روش های عددی، اضافه شدن فرآیند بهینه سازی به مسئله گسسته سازی و تقریب می باشد. در ابتدا مسئله اصلی را با تعریف تابعی خطا به یک مسئله جدید در حساب تغییرات تبدیل می کنیم و سپس مسئله جدید را گسسته سازی کرده و با استفاده از برنامه ریزی غیر خطی آن را حل می کنیم. علاوه بر این می توان مسئله برنامه ریزی غیر خطی را به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل کرده و با استفاده از نرم افزارهای موجود جواب مسئله را بدست آورد.

## ۲- استفاده از ره یافت PAVK برای حل

### مسئله کنترل بهینه

برای یکسان شدن نوشتار، معادله دیفرانسیل پارامتر توزیعی<sup>۵</sup>

(NPDE) مرتبه دوم در حالت یک بعدی به صورت (۱) در نظر گرفته

شده است.

$$Y_t = F\left(x, t, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Luus

<sup>2</sup> Iterative Dynamic Programming (IDP)

<sup>3</sup> Partial Ali Vahidian Kamyad (PAVK)

<sup>4</sup> Ali Vahidian Kamyad (AVK)

<sup>5</sup> Nonlinear Partial Differential Equation (NPDE)

<sup>6</sup> Nonlinear Deterministic Optimal Control (NDOC)

توجه: در اینجا تقریب انتگرال  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t)dt$  به صورت  $t_k \leq \varphi \leq t_{k+1}$  در نظر گرفته می شود که در آن  $(t_{k+1} - t_k)K(\varphi)$  می باشد؛ لذا مسئله مینیم سازی (۱۱) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \cong \left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \lambda_1 f(Y, u) + \lambda_2 E_0 \left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \quad (12)$$

در ادامه از تقریب های مشتق که به صورت زیر می باشند استفاده شده است.

$$\frac{\partial Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right)}{\partial t} \cong \frac{Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j+1}{L}\right) - Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right)}{1/L} = L * (Y_{i,j+1} - Y_{i,j}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right)}{\partial x^2} \cong \frac{Y\left(\frac{i+1}{M}, \frac{j}{L}\right) - 2Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right) + Y\left(\frac{i-1}{M}, \frac{j}{L}\right)}{(1/M)^2} = M^2 * (Y_{i+1,j} - 2Y_{i,j} + Y_{i-1,j})$$

برای ساده سازی در نوشتن مسائل از نماد زیر استفاده می کنیم:

$$Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right) = Y_{i,j}$$

با استفاده از تقریبات بالا مسئله NDOC (۱۲) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J(Y_{i,j}) \cong \left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \lambda_1 f(Y_{i,j}, u_{i,j}) + \lambda_2 E_0(Y_{i,j}) \quad (14)$$

در حالت کلی مسئله (۱۴) یک مسئله NLP است و می توان به وسیله نرم افزارهایی مانند Matlab یا Lingo یا نرم افزارهای مشابه حل نمود. جواب بهینه مسئله کنترل بهینه غیر خطی عبارتست از  $Y_{i,j}^* = Y^*(x_j^*, t_j^*)$ .

ممکن است مسئله (۱۴) در زمان حل هیچ جوابی نداشته باشد، در این حالت می توان اعداد  $M$  و  $L$  را تغییر داد.

### ۲-۳- رهیافت کنترل خطا

در این رهیافت مقدار تابعی خطا مینیمم نمی شود بلکه از یک مقدار  $\delta$  که عددی مشخص می باشد کمتر می شود. با این تغییر مسئله به فرم زیر تبدیل می شود.

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u\right) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, t, u, Y) dt dx \quad (15)$$

با این شرط که

$$\int_0^1 \int_0^1 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \left| Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \right| dt dx \leq \delta$$

مانند حالت قبل بازه های  $x \in [0,1]$ ،  $t \in [0,1]$  را به ترتیب به  $M$  و  $L$  زیر بازه افراز می کنیم. به این ترتیب مسئله NDOC (۱۵)، به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \int_{\frac{i}{M}}^{\frac{(i+1)}{M}} \int_{\frac{j}{L}}^{\frac{(j+1)}{L}} f(x, t, Y, u) dt dx \quad (16)$$

با این شرط که

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L \int_{\frac{i}{M}}^{\frac{(i+1)}{M}} \int_{\frac{j}{L}}^{\frac{(j+1)}{L}} E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx \leq \delta$$

**توجه:** در این قسمت تقریب انتگرال  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t)dt$  مانند مرحله قبل به صورت  $(t_{k+1} - t_k)K(\varphi)$  در نظر گرفته می شود؛ لذا مسئله مینیم سازی (۱۶) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \cong \quad (17)$$

دارد به طوریکه در این همسایگی مقدار  $h(x, t) > 0$  می باشد. بنابراین  $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h(x, t) dt dx > 0$  که نتیجه می دهد،  $\int_a^b \int_c^d h(x, t) dt dx \geq \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h(x, t) dt dx > 0$  برخلاف فرض می باشد، بنابراین  $h(x, t)$  باید در بازه  $[a, b] \times [c, d]$  مساوی صفر باشد. از طرفی  $h(x, t)$  اگر در بازه  $[a, b] \times [c, d]$  مساوی صفر باشد مقدار  $\int_a^b \int_c^d h(x, t) dt dx$  مساوی صفر می باشد. به این ترتیب مسئله کنترل بهینه را می توان به دو مسئله در حساب تغییرات تبدیل کرد.

$$\text{Minimize } J_1\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \int_0^1 \int_0^1 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \left| Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \right| dt dx \quad (8)$$

$\text{Minimize } J_2(Y, u, t, x) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, t, u(x, t), Y(x, t)) dt dx$

در ادامه دو رهیافت برای حل مسائل چند هدفه ارائه می شود یکی از رهیافت ها، با استفاده از وزن دهی به هدف ها، مسئله چند هدفه را به یک مسئله یک هدف تبدیل می کنیم، که با توجه به اهمیت هدف ها وزن ها انتخاب می شوند. با توجه به اینکه در این مثال توابع هدف، تابعی خطا و تابع انرژی یا سوخت می باشد می توان با توجه به اینکه اهمیت مسئله کمتر شدن مقدار خطا و یا کمینه شدن مقدار انرژی یا سوخت باشد ضرایب را انتخاب کرد. در رهیافتی دیگر می توان مقدار خطا مسئله را کنترل کرد و مقدار خطا را از یک مقدار مشخص کمتر بدست آورد. در ادامه این دو رهیافت ارائه شده است.

### ۲-۲- رهیافت تبدیل مسئله چند هدفه به مسئله یک هدفه

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u\right) = \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1 f(x, t, u, Y) dt dx + \lambda_2 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \lambda_1 f(x, t, u, Y) + \int_0^1 \int_0^1 \lambda_2 \left| Y_t - F\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \right| dt dx \quad (9)$$

در معادله (۹)،  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  وزن هایی می باشند که در روابط زیر صدق می کنند:

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (10)$$

### ۲-۲-۱- تبدیل مسئله NDOC به یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی<sup>۱</sup>

در ابتدا بازه های  $x \in [0,1]$ ،  $t \in [0,1]$  را به ترتیب به  $M$  و  $L$  زیر بازه افراز می کنیم. به این ترتیب مسئله NDOC (۹)، به صورت زیر تبدیل می شود:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x, \quad t_j = t_{j-1} + \Delta t \quad (11)$$

$$x_1 = \frac{1}{M}, \quad \Delta x = \frac{1}{M}, \quad t_1 = \frac{1}{L}, \quad \Delta t = \frac{1}{L}$$

$$i = 2, 3, \dots, M, \quad j = 2, 3, \dots, L$$

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^L \int_{\frac{i}{M}}^{\frac{(i+1)}{M}} \int_{\frac{k}{L}}^{\frac{(k+1)}{L}} \{\lambda_1 f(Y, u) + \lambda_2 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)\} dt dx$$

<sup>1</sup> NonLinear Programming (NLP)

$$\Delta x = \left(\frac{1-0}{20}\right), \quad \Delta t = \left(\frac{1-0}{20}\right) \quad (23)$$

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} \int_{\frac{i-1}{20}}^{\frac{i}{20}} \int_{\frac{j-1}{20}}^{\frac{j}{20}} \{0.5 * |u(x,t)| + 0.5 * \left| \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} dt dx$$

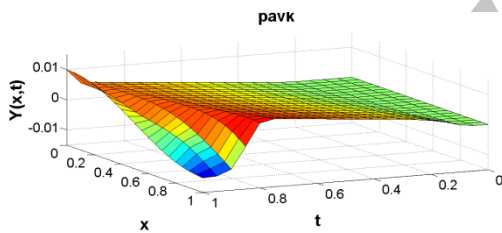
بعد از انجام تقریب انتگرال و تقریب مشتق مسئله به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\text{Minimize } J(Y_{i,j}) \cong \quad (24)$$

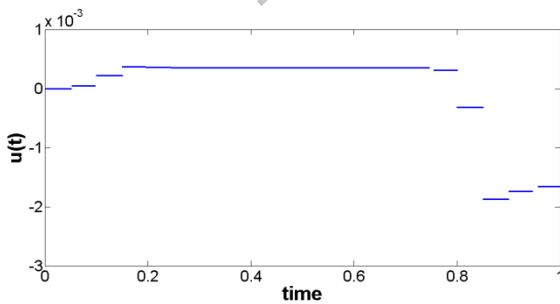
$$\left(\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}\right) \cdot \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} 0.5 * |u_{i,j}| + 0.5 * E_0(Y_{i,j})$$

مسئله بدست آمده با استفاده از نرم افزار LINGO حل شده است، که نتایج آن در شکل های (۱) و (۲) آورده شده است.

در این قسمت هدف تست کردن تابع کنترل بدست آمده در شکل (۲) می باشد، به این صورت که اگر تابع کنترل بدست آمده را به سیستم اعمال کنیم آیا مسئله به حالت نهایی مطلوب می رسد. مسئله حرارت با تابع کنترل و شرایط اولیه و این بار بدون در نظر گرفتن مقدار نهایی حل می شود که نتیجه آن در شکل های (۳) و (۴) آورده شده است. همان طور که از نمودارها مشخص است با اعمال تابع کنترل به سیستم، خواسته مسئله به طور مطلوب برآورده نشده است. در ادامه این مسئله مجدداً حل شده و این بار تعداد افزایشها ۴۰ قسمت در نظر گرفته شده است، و بار دیگر تابع کنترل جدید به سیستم اعمال می شود که نتایج حاصل در شکل های (۵) و (۶) آورده شده است. همان طور که از نمودارها پیداست با افزایش تعداد افزایشها خواسته مسئله تا حدود زیادی برآورده شده است. این مسئله با روش تئوری اندازه و روش برنامه ریزی پویای تکراری نیز حل شده است که مقدار تابع هدف حاصل از این روش در جدول (۱) آورده شده است [۱۳،۵].



شکل (۱) نمودار تابع توزیع حرارتی



شکل (۲) نمودار تابع کنترل بهینه

$$\left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L f(Y, u)$$

با این شرط که

$$\left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \leq \delta$$

در ادامه برای ساده سازی در نوشتن مسئله از نماد زیر استفاده می کنیم.

$$Y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{L}\right) = Y_{i,j} \quad (18)$$

با استفاده از تقریب های مشتق مسئله NDOC (۱۷)، به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J(Y_{i,j}) \cong \left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L f(Y_{i,j}, u_{i,j}) \quad (19)$$

با این شرط که

$$\left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L E_0(Y_{i,j}) \leq \delta$$

در حالت کلی مسئله (۱۹) یک مسئله NLP است و می توان به وسیله نرم افزارهایی مانند Matlab یا Lingo و یا نرم افزارهای مشابه حل نمود.

### ۳- شبیه سازی

معادله حرارت [۱۳،۵]

مسئله رساندن دمای یک جسم به حالت مطلوب و در زمانی معین در بسیاری از موارد مطرح است. به عنوان مثال در صنایع شیشه سازی، رآکتورهای شیمیایی، پزشکی و... در واقع مسئله به صورت رساندن دمای یک جسم با حداقل انرژی به یک مقدار مطلوب است. در ادامه مسئله کنترل بهینه حرارت با استفاده از رهیافت جدید حل شده است. هدف در این مسئله رساندن دمای یک میله از مقدار اولیه صفر به یک مقدار مطلوب است که در عین حال مقدار مصرف انرژی نیز باید کمینه شود.

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (20)$$

$x \in [0,1], t \in [0,1], u \in [-1,1]$

$$Y_x(t, 0) = 0, \quad Y_x(t, 1) = u(t)$$

$$Y(0, x) = 0, \quad Y(1, x) = 0.01 \cos(\pi x)$$

$$J = \min \int_0^1 \int_0^1 |u(x,t)| dt dx$$

رهیافت PAVK

$$\text{Minimize } J_1\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = \quad (21)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 E_0\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) dt dx = \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right| dt dx$$

و

$$\text{Minimize } J_2(u, x, t) = \int_0^1 \int_0^1 |u(x,t)| dt dx$$

استفاده کردن از ضرایب  $\lambda$  برای تبدیل مسئله دو هدفه به مسئله یک هدفه.

$$\text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u\right) = \quad (22)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \lambda_1 |u(x,t)| + \lambda_2 \left| \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right| dt dx$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5 \Rightarrow \text{Minimize } J\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u\right) =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \{0.5 * |u(x,t)| + 0.5 * \left| \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right\} dt dx$$

در این مسئله طول بازه به بیست قسمت افزایش شده است.

$J = 0.616 * 10^{-2}$	روش PAVK با ۴۰ افراز
-----------------------	----------------------

معادله موج [۱۳]

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (۲۵)$$

$$x \in [0, \pi], t \in [0, \pi], u \in [-1, 1]$$

شرایط اولیه و مرزی

$$Y_t(0, x) = 0, \quad Y_t(\pi, x) = 0$$

$$Y(t, 0) = u(t), \quad Y(t, \pi) = u(t)$$

$$Y(0, x) = \sin(x), \quad Y(\pi, x) = -\sin(x)$$

$$J = \min \int_0^\pi \int_0^\pi u(x, t)^2 dt dx$$

رهیافت PAVK

$$\text{Minimize } J_1 \left( Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) = \quad (۲۶)$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi E_0 \left( Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) dt dx = \int_0^\pi \int_0^\pi \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right| dt dx$$

$$\text{Minimize } J_2(u, x, t) = \int_0^\pi \int_0^\pi u(x, t)^2 dt dx$$

$$\text{Minimize } J \left( Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u \right) = \quad (۲۷)$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ \lambda_1 u(x, t)^2 + \lambda_2 \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right| \right\} dt dx$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5 \Rightarrow \text{Minimize } J \left( Y, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, u \right) =$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ 0.5 * u(x, t)^2 + 0.5 * \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right| \right\} dt dx$$

در این مسئله طول بازه به بیست قسمت افراز شده است.

$$\Delta x = \left( \frac{\pi-0}{20} \right), \quad \Delta t = \left( \frac{\pi-0}{20} \right) \quad (۲۸)$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x, \quad t_j = t_{j-1} + \Delta t$$

$$i = 2, 3, \dots, 20, \quad j = 2, 3, \dots, 20$$

$$x_1 = \frac{\pi}{20}, \quad t_1 = \frac{\pi}{20}$$

$$\text{Minimize } J \left( Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} \left[ \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{i+1} \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{j+1} 0.5 * u(x, t)^2 + 0.5 * \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right| \right] dt dx$$

در این مرحله با استفاده از تقریب انتگرال مسئله مینیمم سازی (۲۸)،

به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Minimize } J \left( Y, \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) \cong \quad (۲۹)$$

$$\left( \frac{\pi}{20} \cdot \frac{\pi}{20} \right) \cdot \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} \left[ 0.5 * u_{i,j}^2 + 0.5 * \left| \frac{\partial^2 Y_{i,j}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y_{i,j}}{\partial x^2} \right| \right]$$

در ادامه از تقریب های مشتق که به صورت زیر می باشند استفاده

شده است.

$$\frac{\partial^2 Y \left( \frac{i}{20}, \frac{j}{20} \right)}{\partial t^2} \cong \frac{Y \left( \frac{i}{20}, \frac{j+1}{20} \right) - 2Y \left( \frac{i}{20}, \frac{j}{20} \right) + Y \left( \frac{i}{20}, \frac{j-1}{20} \right)}{\left( \frac{1}{20} \right)^2} = \quad (۳۰)$$

$$20^2 * (Y_{i,j+1} - 2Y_{i,j} + Y_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial^2 Y \left( \frac{i}{20}, \frac{j}{20} \right)}{\partial x^2} \cong \frac{Y \left( \frac{i+1}{20}, \frac{j}{20} \right) - 2Y \left( \frac{i}{20}, \frac{j}{20} \right) + Y \left( \frac{i-1}{20}, \frac{j}{20} \right)}{\left( \frac{1}{20} \right)^2} =$$

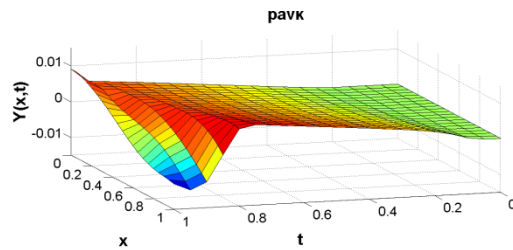
$$20^2 * (Y_{i+1,j} - 2Y_{i,j} + Y_{i-1,j})$$

برای ساده سازی در نوشتن مسائل از نماد زیر استفاده می کنیم:

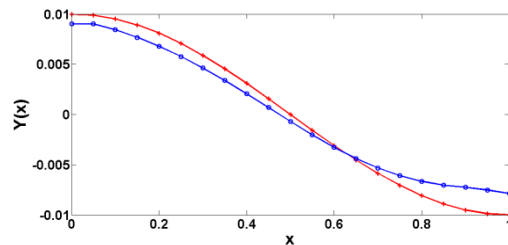
$$Y \left( \frac{i}{M}, \frac{j}{L} \right) = Y_{i,j} \quad (۳۱)$$

با استفاده از تقریبات بالا مسئله NDOC (۲۹) به صورت زیر تبدیل

می شود:



شکل (۳) نمودار تابع توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK

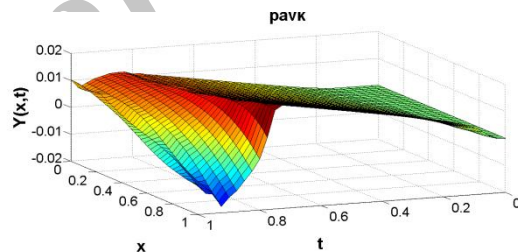


شکل (۴) نمودار اختلاف بین توزیع حرارتی مطلوب و بدست آمده

از روش PAVK

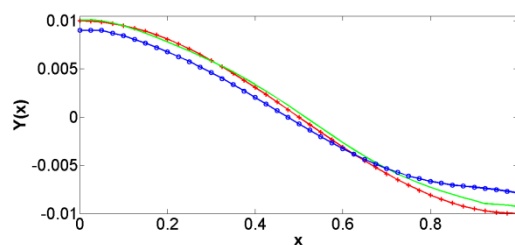
–+ نمودار توزیع حرارتی مطلوب

– 0 نمودار توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK



شکل (۵) نمودار تابع توزیع حرارتی بدست آمده با تقسیم بازه ها به

۴۰ افراز با روش PAVK



شکل (۶) نمودار اختلاف بین توزیع حرارتی مطلوب و بدست آمده

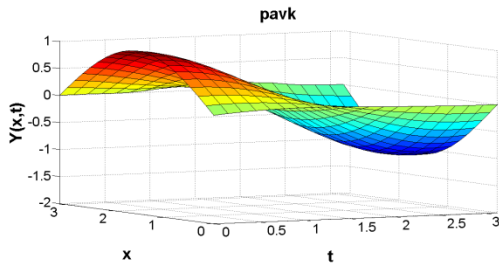
–+ نمودار توزیع حرارتی مطلوب

– 0 نمودار توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK با ۲۰ افراز

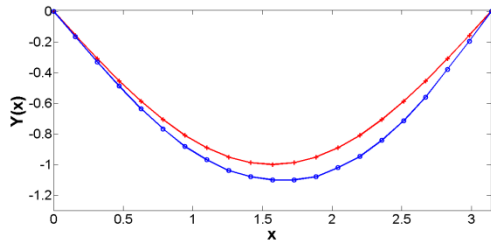
– – نمودار توزیع حرارتی بدست آمده از روش PAVK با ۴۰ افراز

جدول (۱) مقایسه مقادیر تابع هدف

$J = 3.75 * 10^{-2}$	روش برنامه ریزی پویای تکراری
$J = 7.93 * 10^{-2}$	روش تئوری اندازه
$J = 0.537 * 10^{-2}$	روش PAVK با ۲۰ افراز



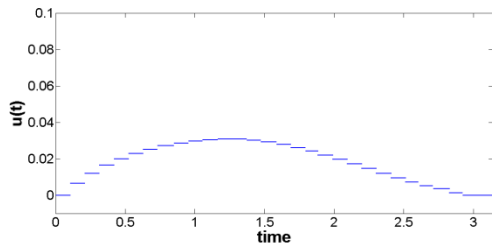
شکل (۱۰): نمودار معادله موج بدست آمده



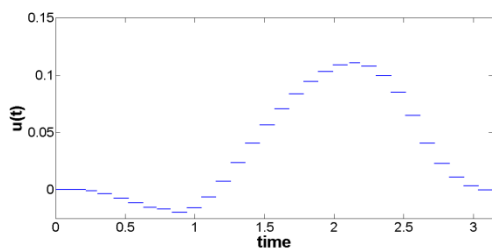
شکل (۱۱): نمودار اختلاف بین توزیع موج مطلوب و بدست آمده

+ - نمودار معادله موج مطلوب

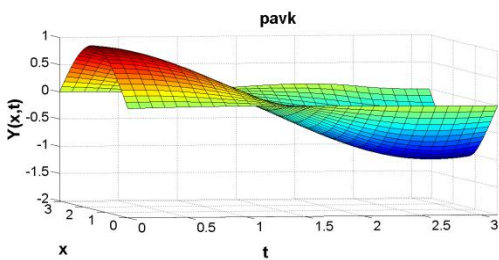
o - نمودار معادله موج به دست آمده از روش PAVK با ۲۰ افزایش



شکل (۱۲) نمودار تابع کنترل بهینه با ۳۰ افزایش در ابتدای بازه



شکل (۱۳) نمودار تابع کنترل بهینه با ۳۰ افزایش در انتهای بازه

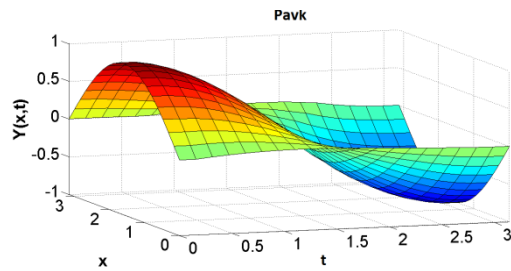


شکل (۱۴) نمودار تابع توزیع موج بدست آمده با ۳۰ افزایش

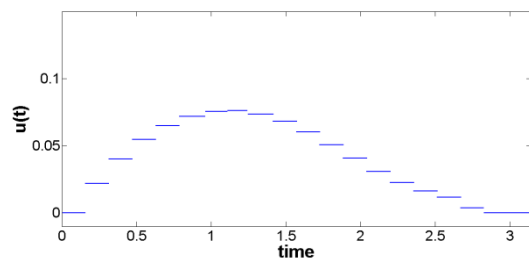
$$\text{Minimize } J(Y_{i,j}) \cong \tag{۳۲}$$

$$\left(\frac{\pi}{20} \cdot \frac{\pi}{20}\right) \cdot \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} 0.5 * u_{i,j}^2 + 0.5 * E_0(Y_{i,j})$$

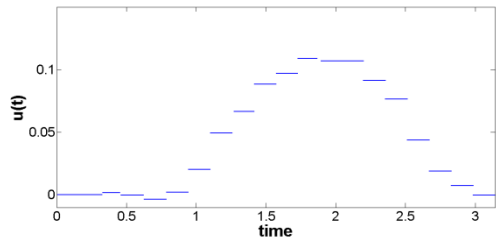
در ادامه نتایج حاصل از این روش آورده شده است.



شکل (۷): نمودار معادله موج



شکل (۸): نمودار تابع کنترل بهینه در ابتدای بازه



شکل (۹): نمودار تابع کنترل بهینه در انتهای بازه

در این بخش هدف تست کردن تابع کنترل بدست آمده در شکل های (۸) و (۹) می باشد، به این صورت که اگر تابع کنترل بدست آمده را به سیستم اعمال کنیم آیا مسئله به حالت نهایی مطلوب می رسد. نتیجه حاصل در شکل های (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. همان طور که از نمودارها مشخص است با اعمال تابع کنترل به سیستم، خواسته مسئله برآورده نشده است که در ادامه این مسئله مجدداً با تعداد تقسیمات بیشتر حل شده و تابع کنترل به سیستم اعمال می شود که نتایج حاصل در شکل های (۱۴) و (۱۵) آورده شده است. همان طور که از نمودارها پیداست با افزایش تعداد افزایش های بازه ها خواسته های مسئله تا حدود زیادی برآورده شده است.

این مسئله با روش برنامه ریزی پویای تکراری نیز حل شده است که مقدار تابع هدف حاصل از این روش در جدول (۲) آورده شده است [۱۳].

**مراجع**

[1] Badakhshan KP, Kamyad AV, Azemi A. Using AVK method to solve nonlinear problems with uncertain parameters. *Applied Mathematics and Computation*. 2007. 189:27–34.

[2] Borzabadi AH, Kamyad AV, Farahi MH. Optimal control of the heat equation in an inhomogeneous body. *Korean J Comput Appl Math*. 2004. 15(1-2):127-146.

[3] Gachpazan M, Kamyad AV. Solving of second order nonlinear PDE problems by using artificial controls with controlled error. *Korean J Comput Appl Math*. 2004. 15(1-2):173-184.

[4] Kamyad AV. Boundary control problems for the multi-dimensional diffusion equation. *Leeds Univ (United Kingdom)*. 1988.

[5] Kamyad AV, Mehne HH. A linear programming approach to the controllability of time-varying system. *Int J Eng Sci*. 2003. 14(3):143–151.

[6] Khalil HK. *Nonlinear Systems*: Prentice Hall. 1996.

[7] Kokotovi P, Arcak M. Constructive nonlinear control: A historical perspective (survey paper). *Automatica*. 2001. 37(5):637–662.

[8] Leith D, Leithead W. Survey of gain-scheduling analysis and design. *Int J Control*. 2000. 73(11):1001–1025.

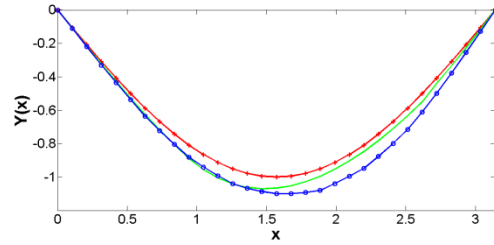
[9] Loxton R, Teo KL, Rehbock V. Robust suboptimal control of nonlinear systems. *Applied Mathematics and Computation*. 2011. 217(14):6566-6576.

[10] Ramezani MR, Kamyad AV. Approximation of general nonlinear control systems with linear time varying systems. *Electrical Engineering (ICEE), 2010. 18th Iranian Conference on ICEE*. 680-685.

[11] Slotine J-JE. *Applied nonlinear control*. New jersey. 1991.

[12] Luus, R. Optimal Control by Dynamic Programming Using Accessible Grid Points and Region Reduction. *Hungarian Journal of Industrial Chemistry*, 1989, 17,523-543.

[۱۳] صدیقه اصغری نیا، حل مسائل کنترل بهینه ای که با معادلات دیفرانسیل جزئی همراهی می شوند به روش برنامه ریزی پویای تکراری، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده ریاضی، ۱۳۸۲.



شکل (۱۵) نمودار اختلاف بین توزیع موج مطلوب و بدست آمده

- + نمودار معادله موج مطلوب
- 0- نمودار معادله موج به دست آمده آمده از روش PAVK با ۲۰ افراز
- نمودار معادله موج به دست آمده آمده از روش PAVK با ۳۰ افراز

جدول (۲) مقایسه مقادیر تابع هدف

$J = 0.915$	روش برنامه ریزی پویای تکراری
$J = 0.14$	روش PAVK با ۲۰ افراز
$J = 0.258$	روش PAVK با ۳۰ افراز

**۴- نتیجه گیری**

هدف اصلی در این مقاله تبدیل مسئله کنترل بهینه به یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی جهت بدست آوردن یک جواب تقریبی از مسئله می باشد. در ابتدا مسئله کنترل بهینه را به یک مسئله در حساب تغییرات تبدیل کردیم و سپس مسئله حاصل به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل شد و در نهایت با کمک نرم افزار های موجود مسئله را حل کردیم. بهینه سازی در این روش به هیچ وجه با خطی سازی درگیر نیست. یافتن کنترل های هموار در این روش از مزایای دیگر آن می باشد. همان طور که با ارائه مثال هایی نشان داده شد در این روش هر چه تعداد تقسیمات بازه ها (نقاط افراز) بیشتر شود، جواب به دست آمده بهتر می شود، ولی در عین حال پیچیدگی محاسباتی مسئله نیز افزایش می یابد.