مجله کنترل
جلد ۶، شماره ۱، بهار ۱۳۹۱، صفحه ۲۹-۲۱

سیستم‌های تکه‌ای خطی‌تبار مستقیم: کلاس جدیدی از سیستم‌های هایبرید با دینامیک‌های خطی‌تبار و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم

حامد ملااحمدیان کاسب[۱]، علی کریم پور[۲] و ناصر پریز[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق-کنترل ، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، hamed.mollaahmadian@gmail.com
[۲] استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، karimpor@um.ac.ir
[۳] دانشیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۳/۲۱)

چکیده: در بسیاری از موارد، سیستم‌های تکه‌ای خطی تبار (Piece-Wise Affine) از تقریب یک سیستم غیرخطی با تعدادی زیرسیستم خطی‌تبار (Affine) به دست می‌آیند. تقریبی بودن و عدم امکان تحلیل پایداری دقیق از معایب سیستم حاصل بوده و در این مقاله کلاس جدیدی از سیستم‌های هایبرید به عنوان راه‌حل معرفی گردیده است. کلاس پیشنهادی به طور مستقیم و بدون استفاده از متوسط‌گیری از سیستم سوئیچ شونده به دست می‌آید، از این رو سیستم تکه‌ای خطی‌تبار مستقیم (Piece-Wise Affine Direct) نام‌گذاری شده است. کلاس هایبرید پیشنهادی دارای زیرسیستم‌های خطی‌تبار و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم و ثابت در صفحه حالت است. موارد کاربردی بسیاری از جمله مبدل‌های الکترونیک قدرت و فرآیندهای شیمیایی وجود دارند که در فرم پیشنهادی قابل مدلسازی هستند. جهت تحلیل پایداری کلاس پیشنهادی، قضایایی مبتنی بر تابع لیاپانف مربعی ارائه شده است. مسئله تحلیل پایداری و طراحی در مورد این سیستم‌ها به حل یک مسئله بهینه‌سازی محدب از نوع نامساوی‌های ماتریسی خطی منجر می‌گردد. همچنین در این مقاله، مدل ارائه شده با کلاس‌های هایبرید متداول مقایسه شده است. کاربرد کلاس پیشنهادی در مدلسازی و تحلیل پایداری یک مبدل الکترونیک قدرت dc-dc رزونانسی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: سیستم تکه‌ای خطی‌تبار، مرز کلیدزنی قابل تنظیم، تابع لیاپانف مربعی، نامساوی ماتریسی خطی.

Direct Piecewise Affine Systems: A New Class of Hybrid Systems with Affine Dynamics and Regulable Switching Boundaries

Hamed Molla Ahmadian Kaseb, Ali Karimpour and Naser Pariz

Abstract: For many applications, Piece-Wise Affine (PWA) systems are made from approximation of nonlinear dynamics by affine subsystems. Approximation and non-exact stability analysis are the main disadvantages of derived PWA system and as a solution, a new class of hybrid systems are introduced in this article. The proposed class is derived directly from switched model and without averaging then it is named as Direct PWA (DPWA). The new hybrid class has affine subsystems and regulable and/or constant switching boundaries. Many applications such as power electronics and process engineering can be modeled as proposed class. Some theorems are presented for stability analysis that are based on quadratic Lyapunov function. The problem of stability analysis and controller design is redounded to convex optimization in form of linear matrix inequality. The proposed model is compared with conventional hybrid models. Proposed model is used for modeling and stability analysis of a dc-dc resonant power converter.

Keywords: Piece-Wise Affine System, Regulable Switching Boundary, Quadratic Lyapunov Function, Linear Matrix Inequality.

نویسنده عهده دار مکاتبات: حامد ملااحمدیان کاسب

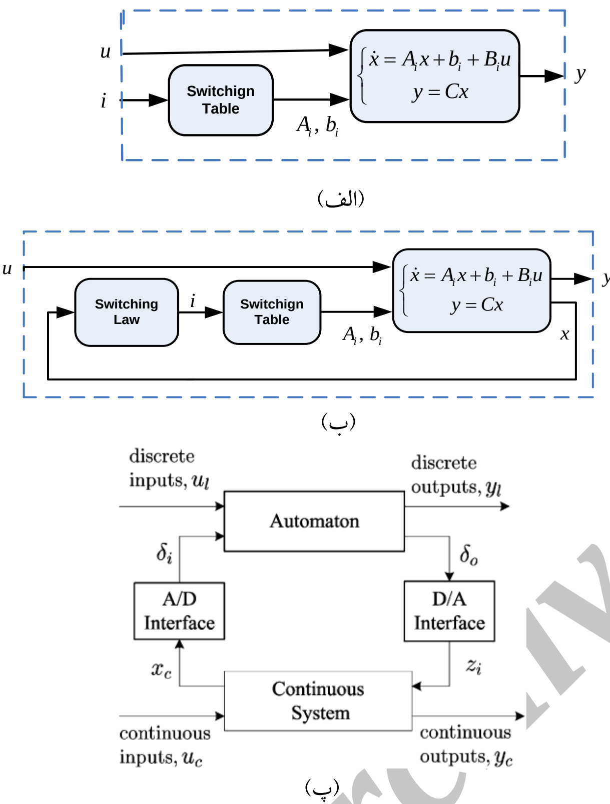
۱ – مقدمه

سیستم‌های هایبرید، دسته‌ای خاص از سیستم‌ها هستند که دارای دینامیک‌های زمان-پیوسته یا گسسته و پیشامدهای گسسته (discrete-event) می‌باشند. دسته وسیعی از سیستم‌ها قابل مدلسازی در فرم سیستم‌های هایبرید بوده و بسیاری از آنها ذاتاً یک سیستم سوئیچ شونده خطی یا خطی‌تبار (Affine) می‌باشند. حوزه الکترونیک قدرت [۱] و کنترل فرآیند [۲] نمونه‌هایی از این سیستم‌ها می‌باشند. از مسائل مهم در این سیستم‌ها، نوع دینامیک (زمان-پیوسته یا گسسته)، ورودی‌های پیوسته و منطقی، قیود بر روی متغیرهای حالت و سیگنال کلیدزنی می‌باشند و بر اساس این ویژگی‌ها، کلاس‌های مختلف هایبرید تعریف شده‌اند.

دیدگاه دیگر دسته بندی بر اساس نحوه نگرش به مسئله مدلسازی، تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده می‌باشد و بر این اساس دو دیدگاه کلی توسط محققین مطرح شده است. دیدگاه اول تبدیل سیستم سوئیچ شونده خطی به یک سیستم غیر هایبرید به کمک تئوری متوسط‌گیری است. در این شرایط از دینامیک‌های سریع سیستم صرف نظر شده و در نتیجه از دقت تحلیل پایداری کاسته می‌شود. همچنین فضای جستجوی کنترل کننده‌های پایدار در مورد سیستم متوسط‌گیری شده کوچک‌تر است [۳]. به طور معمول سیستم حاصل از این فرآیند حتی با وجود خطی بودن زیرسیستم‌های اولیه، غیرخطی است. تحلیل و طراحی بر اساس مدل غیرخطی متوسط‌گیری شده، پیچیده و غیر سیستماتیک بوده و یک روش مواجهه با این مسئله استفاده از تقریب خطی است. استفاده از تقریب خطی امکان استفاده از ابزارهای قدرتمند و متنوع تحلیل این سیستم‌ها را فراهم می‌آورد اما معتبر بودن پاسخ‌ها به ازای تغییرات کوچک پارامترها یا اغتشاشات و عدم امکان تحلیل پایداری سیگنال بزرگ، محدودیت-های این روش می‌باشند. روش دیگر مواجهه با این مسئله، استفاده از تقریب تکه‌ای خطی تبار (PWA[1]) بر روی مدل متوسط‌گیری شده غیرخطی می‌باشد. ابزارهای تحلیل و طراحی خطی برای این دسته از سیستم‌ها تعمیم یافته است [۴-۷]. همچنین این دیدگاه برای مدلسازی و کنترل مبدل‌های الکترونیک قدرت [۸-۱۰] مورد استفاده قرار گرفته است. به دلیل استخراج مدل PWA از سیستم متوسط‌گیری شده، تحلیل پایداری مربوطه سیگنال بزرگ بوده ولی از دینامیک‌های سریع صرف نظر می‌نماید و این امر منجر به افزایش تقریب در تحلیل می‌گردد.

دیدگاه دوم، استفاده مستقیم از تئوری سیستم‌های هایبرید و سوئیچ شونده بدون تقریب متوسط‌گیری می‌باشد. کلاس‌های متداول و پرکاربرد سوئیچ شونده خطی (SLS[2]) [۱۱-۱۳]، PWA [۴-۷] و دینامیک-منطق ترکیب شده (MLD[3]) [۱۴-۱۵] توسط محققین ارائه شده است. مدل حاصل از این روش‌ها دینامیک‌های سریع را نیز در نظر می‌گیرند و تحلیل پایداری مبتنی بر آنها سیگنال بزرگ و دقیق است. مشکل استفاده از این روش‌ها پیچیدگی روش‌های تحلیل و طراحی می‌باشد، به طوری که بسیاری از روش‌های ارائه شده جنبه تئوری داشته و امکان تحقق عملی ندارند. در زمینه رفع مشکلات پیاده‌سازی عملی این روش‌ها نیز تحقیقاتی صورت گرفته است [۱۵].

SLS، دسته‌ای پرکاربرد از سیستم‌های هایبرید بوده که دارای زیر-سیستم‌های خطی می‌باشد. در ادامه هر جا واژه SLS به کار برده شده است، منظور سیستم سوئیچ شونده خطی بدون قید در سیگنال کلیدزنی می‌باشد. در شکل ۱-الف توصیف بلوکی این سیستم‌ها نشان داده شده است. این سیستم‌ها بر اساس اعمال ورودی به دینامیک‌های آنها به دو



شکل ۱: توصیف بلوکی کلاس‌های متداول سیستم‌های هایبرید، الف) SLS، ب) سیستم PWA، پ) سیستم MLD

نوع خودگردان[4] و نا خودگردان[5] تقسیم‌بندی می‌شوند. این کلاس، امکان مدلسازی قیود مرتبط با دینامیک‌ها و سیگنال کلیدزنی را ندارد و در نتیجه برای بسیاری از کاربردها قابل استفاده نمی‌باشد. پایدارسازی مربعی به کمک روش تصویر کمینه در [۱۳] ارائه شده و در [۱۶] بر روی مبدل-های الکترونیک قدرت پیاده‌سازی گردیده است.

فرم PWA دارای دینامیک‌های خطی‌تبار و سلول‌هایی با مرزهای ثابت می‌باشد و در [۴-۷] مورد بررسی قرار گرفته است. توصیف بلوکی این سیستم در شکل ۱-ب نشان داده شده است. کلاس PWA در هر دو دیدگاه تقریبی [۸-۱۰] و بدون تقریب (مستقیم) [۱۷] برای کاربردهای مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. برخی سیستم‌ها به طور ذاتی در

[1] Piece-Wise Affine
[2] Switched Linear System
[3] Mixed Logical Dynamical
[4] Autonomous
[5] Non-autonomous

این فرم قرار می‌گیرند ولی کاربردهای بسیاری مثل مبدل‌های الکترونیک قدرت وجود دارند که بدون تقریب متوسط گیری در این فرم قابل مدلسازی نیستند. کلیدزنی در این سیستم‌ها مقید به متغیرهای حالت است. تحلیل پایداری سیستم‌های PWA به طور معمول به وسیله توابع لیاپانف چندگانه (MLF[1]) صورت می‌گیرد. پایداری تکه‌ای مربعی این سیستم‌ها نیز در [۴] بررسی شده است.

فرم MLD با ترکیب متغیرهای منطقی و دینامیک به طور متمرکز همه ویژگی‌های سیستم را مدل و توانایی مدلسازی دسته بزرگ‌تری از سیستم‌ها را داراست. در شکل ۱-پ توصیف بلوکی این سیستم نشان داده شده است. از طرف دیگر، به دلیل حضور توأم متغیرهای منطقی و گسسته دارای پیچیدگی زیادی در زمینه طراحی کنترل کننده و تحلیل پایداری می‌باشد و روش‌های معمول طراحی و تحلیل برای آن قابل استفاده نمی‌باشد.

دسته دیگری از سیستم‌های هایبرید، سیستم‌های سوئیچ شونده خطی با قانون کلیدزنی مقید می‌باشند. یک کلاس پرکاربرد از سیستم‌های هایبرید مقید، کلاس سیستم‌های سوئیچ شونده خطی با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی می‌باشد. مبدل‌های الکترونیک قدرت پایه چون باک و بوست در وضعیت کاری ناپیوسته و مبدل رزونانسی سری نمونه ای از این سیستم‌ها می‌باشند. مسئله تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای کلاس مورد نظر به فرم LMI در [۱۸] ارائه شده است.

در مدلسازی مبدل‌های الکترونیک قدرت با دسته وسیعی از مبدل‌ها مواجه می‌شویم که ذاتاً دارای زیر دینامیک‌های خطی تبار می‌باشند ولی کلیدزنی بر اساس مرزهای ثابت در صفحه حالت صورت نمی‌گیرد. مدل‌های فعلی ارائه شده برای این سیستم‌ها به طور تقریبی این مبدل‌ها را مدل می‌کنند و در نتیجه تحلیل پایداری مبتنی بر آنها دارای تقریب می‌باشد. با تحلیل صفحه حالت این سیستم‌ها مشاهده می‌شود که تغییر ورودی کنترل شونده منجر به تغییر مشخصات مرز کلیدزنی می‌شود. همچنین در دسته‌ای دیگر از مبدل‌ها تغییر ورودی کنترل شونده تنها منجر به تغییر برخی از مرزهای کلیدزنی می‌شود. در نتیجه ارائه مدلی هایبرید که دارای زیرسیستم‌های خطی‌تبار و مرز کلیدزنی ترکیبی (از ثابت و قابل تنظیم) باشد، مناسب به نظر می‌رسد. ایده اولیه تعریف دسته‌ای از سیستم‌های هایبرید که توانایی مدلسازی این پدیده را داشته باشد، توسط نویسندگان در [۱۹] ارائه شده است.

همان‌طور که قبلاً اشاره گردید، به طور معمول سیستم‌هایی که ذاتاً سوئیچ شونده می‌باشند، به کمک تئوری متوسط‌گیری با یک سیستم غیرخطی غیر سوئیچ شونده مدل می‌شوند. یکی از روش‌های مطالعه سیستم‌های غیرخطی استفاده از تقریب تکه‌ای خطی تبار (Piece-Wise Affine) می‌باشد. کلاس پیشنهادی به طور مستقیم و بدون استفاده از متوسط‌گیری از سیستم سوئیچ شونده به دست می‌آید، از این رو آن را سیستم تکه‌ای خطی‌تبار مستقیم یا Direct Piece-Wise Affine (DPWA) می‌نامیم.

مزیت عمده این روش، توانایی مدلسازی دسته بزرگ‌تری از سیستم‌های عملی نسبت به کلاس‌های PWA و SLS می‌باشد. در مقایسه با کلاس MLD، کلاس پیشنهادی امکان مدلسازی مستقیم ورودی منطقی را ندارد ولی پیچیدگی آن (از دیدگاه مدلسازی و تحلیل) کمتر است. کلاس هایبرید پیشنهادی دارای زیرسیستم‌های خطی‌تبار (Affine) و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم و ثابت در صفحه حالت است. موارد کاربردی بسیاری از جمله مبدل‌های الکترونیک قدرت و فرآیندهای شیمیایی وجود دارند که آنها را می‌توان در فرم پیشنهادی مدلسازی نمود. مسئله تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای کلاس مورد نظر با اهمیت بوده و از این رو قضایایی برای تحلیل پایداری کلاس DPWA ارائه شده است.

تعیین زیرسیستم فعال بر اساس وضعیت متغیرهای حالت برای SLS در [۲۰-۲۱] ارائه شده است. سیستم حاصل در این شرایط، رفتاری مشابه یک سیستم DPWA را بروز می‌دهد. در این شرایط عامل طراحی شونده عبارت از طراحی پارامترهای مرز کلیدزنی می‌باشد. مسئله تعیین بهینه پارامترهای سطوح کلیدزنی به حل یک مسئله gradient-descent تبدیل گردیده است [۲۱]. سیستم هایبرید کنترل شده با روش پیشنهادی مبتنی بر طراحی مرز کلیدزنی بوده و دارای راه حل محاسباتی با پیچیدگی بالا می‌باشد. در [۲۲] نیز یک مبدل الکترونیک قدرت به روش کنترل مرزهای کلیدزنی کنترل گردیده است. روش کنترلی ارائه شده در [۲۱-۲۲] حالت خاصی از سیستم DPWA پیشنهادی می‌باشد.

نوآوری‌های اصلی این مقاله عبارتند از: ۱- ارائه کلاس جدیدی از سیستم‌های هایبرید با مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم و ثابت، ۲- ارائه قضیه‌هایی جهت تحلیل پایداری و طراحی قانون کلیدزنی پایدار ساز برای کلاس جدید معرفی شده، ۳- بیان روابط تحلیل پایداری و طراحی قانون کلیدزنی پایدار ساز در فرم LMI. مقاله به شکل زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲ تعاریف و پیش‌نیازهای مورد نیاز جهت مطالعه بخش‌های بعدی ارائه شده است. در بخش ۳ کلاس پیشنهادی این مقاله یعنی DPWA ارائه شده است. در بخش ۴ قضایایی جهت تحلیل پایداری کلاس پیشنهادی بیان شده است. در بخش ۵، مقایسه‌ای بین کلاس‌های مختلف و DPWA ارائه شده است. در بخش ۶ یک مبدل الکترونیک قدرت dc-dc رزونانسی در کلاس پیشنهادی مدلسازی شده و به کمک قضایای ارائه شده مورد بررسی قرار گرفته و نهایتاً در بخش ۷ نتیجه‌گیری مقاله ارائه گردیده است.

۲- تعاریف و پیش زمینه‌ها

در این بخش تعاریف و پیش‌زمینه‌های مورد نیاز جهت مطالعه قسمت‌های بعدی ارائه شده است.

[1] Multiple Lyapunov Function

تعریف ۱–(نامساوی درایه به درایه[1]): دو بردار ستونی $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}^T$ و $Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \dots & y_n\end{bmatrix}^T$ را با عناصر حقیقی x_i و y_i در نظر بگیرید. در این صورت نامساوی درایه به درایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$X<Y$ اگر و تنها اگر $x_i<y_i$ برای هر $1\le i\le n$. به طور مشابه نامساوی‌های برداری $X\le Y$ و $X=Y$ نیز تعریف می‌شوند.

تعریف ۲–(ماتریس مثبت[2]): ماتریس $A=\left[a_{ij}\right],\ i,j=1,\dots,n$ را مثبت نامند هر گاه $\forall i,j\ \ a_{ij}>0$
.به طور مشابه ماتریس منفی نیز تعریف می‌شود.

تعریف۳–(ماتریس مثبت معین[3]): ماتریس $A=\left[a_{ij}\right],\ i,j=1,\dots,n$ را مثبت معین نامند هر گاه $\forall x\in R^n,\ x^TAx>0$ و از نماد $A>0$ برای نشان دادن آن استفاده می‌نمایند. به طور مشابه ماتریس منفی معین نیز تعریف می‌شود.

تعریف۴–(سیستم هایبرید): سیستم‌های هایبرید در حالت کلی به صورت

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=f(x(t),i(t),u(t))\\ y(t)&=g(x(t),i(t),u(t))\\ i(t^+)&=\varphi(x(t),i(t),u(t),s(t))\end{aligned} \qquad (۱)$$

قابل بیان هستند [۲۳]. در این رابطه $y(t)\in R$، $s(t)\in\{0,1\}^{M_s}$، $u(t)\in R$، $i(t)\in R$ و $x(t)\in R^n$ به ترتیب متغیر خروجی، بردار ورودی منطقی، ورودی پیوسته، شماره زیر سیستم فعال و حالات سیستم می‌باشند. در این رابطه $i\in\{1,2,\dots,M\}$، و $S=\begin{bmatrix}s_1 & s_2 & \dots & s_{M_s}\end{bmatrix}^T$ است، همچنین M_s و M نیز به ترتیب تعداد ورودی منطقی و تعداد زیر سیستم‌ها می‌باشند. البته تعریف کلی‌تری از سیستم‌های هایبرید نیز موجود است که برای اکثر سیستم‌های مورد بررسی در علم کنترل، تعریف فوق کفایت می‌نماید. به طور معمول دو نوع کلیدزنی دلخواه و مقید در مورد سیستم-های هایبرید می‌تواند رخ دهد.

تعریف ۵–(سیستم PWA): توصیف ریاضی کلاس PWA در حالت کلی به صورت:

$$\begin{cases}\dot{x}=A_ix+B_iu+b_i, & if:\ x\in\Omega_i\\ \quad y=Cx\end{cases} \qquad (۲)$$

می‌باشد که Ω_i نواحی مورد نظر را تشکیل داده و مجموعه آنها یک افراز از فضای حالت است.

بر اساس نوع نواحی Ω_i سیستم‌های PWA به دو زیر کلاس چند وجهی[4] [۴-۷] و بیضوی[5] [۶-۷] دسته‌بندی و به ترتیب به صورت زیر توصیف می‌گردند:

$$\Omega_i=\bigcap_{j=1}^{p_i}\left\{x\in R^n \mid \ \ h_{ij}^Tx-g_{ij}<0\right\} \qquad (۳)$$

$$\Omega_i=\bigcap_{j=1}^{p_i}\left\{x\in R^n \mid \ \ x^TH_{ij}^Tx-g_{ij}<0\right\} \qquad (۴)$$

که در این روابط p_i تعداد مرزهای توصیف کننده مش i-ام، g_{ij} اسکالر، h_{ij} بردار و H_{ij} ماتریس می‌باشند و مبین مرزها هستند. همان‌طور که در رابطه (۲) دیده می‌شود، ورودی کنترل شونده در کلاس PWA متداول به طور مستقیم در دینامیک سیستم وارد می‌شود، اما در مورد کلاس پیشنهادی، ورودی به طور مستقیم در دینامیک وارد نمی‌شود و در عوض در مرز کلیدزنی ظاهر می‌شود. در ادامه کلاس پیشنهادی مورد نظر این مقاله معرفی گردیده است.

۳- معرفی کلاس جدید پیشنهادی

کلاس پیشنهادی از تعمیم سیستم‌های هایبرید با قید در سیگنال کلیدزنی فراهم می‌شود. توصیف ریاضی این سیستم‌ها به صورت:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_ix(t)+b_i,\ if:\ x\in\Omega_i\\ y(t)=Cx(t)\end{cases} \qquad (۵)$$

می‌باشد که شماره زیر سیستم فعال بر اساس ناحیه قرارگیری متغیرهای حالت مشخص می‌گردد. توصیف نواحی به صورت

$$\Omega_i=\bigcap_{j=1}^{p_i}\left\{x\in R^n \mid \ \ (h_{ij}^T+\hat{h}_{ij}^T)x-g_{ij}<0\right\} \qquad (۶)$$

برای نواحی چند وجهی و

$$\Omega_i=\bigcap_{j=1}^{p_i}\left\{x\in R^n \mid \ \ x^T(H_{ij}^T+\hat{H}_{ij}^T)x-g_{ij}<0\right\} \qquad (۷)$$

برای نواحی بیضوی می‌باشد. در این روابط g_{ij} بخش غیرقابل تنظیم اسکالر مرز، h_{ij} بخش غیرقابل تنظیم بردار مرز، H_{ij} بخش غیرقابل تنظیم ماتریس مرز، $\hat{h}_{ij}$ بخش قابل تنظیم بردار مرز و $\hat{H}_{ij}$ بخش قابل تنظیم ماتریس مرز با ابعاد مناسب می‌باشند. $\hat{h}_{ij}$ یا $\hat{H}_{ij}$ نقشی معادل با ورودی u در سیستم PWA متداول دارند. با ادغام بخش قابل تنظیم و غیرقابل تنظیم (۶) و (۷)، هر ناحیه دارای توصیف متمرکز معادل به صورت (۸) و (۹) می‌باشند.

$$\Omega_i=\left\{x\in R^n \mid \ \ H_i^{polyhedral,c\ T}x-g_i^{polyhedral,c}<0\right\} \qquad (۸)$$

$$\Omega_i=\left\{x\in R^n \mid \ \ x^TH_i^{ellipsoidal,c\ T}x-g_i^{ellipsoidal,c}<0\right\} \qquad (۹)$$

که در این رابطه < نامساوی درایه به درایه، $H_i^{polyhedral,c}=\left[h_{i1}+h_{i1}^* \quad h_{i2}+h_{i2}^* \quad \dots \quad h_{ip_i}+h_{ip_i}^*\right]$، و $H_i^{ellipsoidal,c}=\left[H_{i1}+H_{i1}^* \quad H_{i2}+H_{i2}^* \quad \dots \quad H_{ip_i}+H_{ip_i}^*\right]$

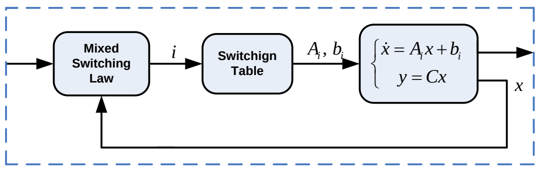
[1] Element-wise inequality
[2] Positive Matrix
[3] Positive Definite Matrix
[4] Polyhedral
[5] Ellipsoidal

$g_i^{polyhedral,c} = g_i^{ellipsoidal,c} = \begin{bmatrix} g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ip_i} \end{bmatrix}^T$ است. معادله (۵) همراه با معادله (۶) (یا توصیف معادل آن (۸))، یک سیستم DPWA چندوجهی می‌باشد. به طور مشابه، معادله (۵) همراه با معادله (۷) (یا توصیف معادل آن (۹))، یک سیستم DPWA بیضوی می‌باشد. از دید کاربردی بسیاری از سیستم‌ها ذاتاً قابل مدلسازی در فرم DPWA چندوجهی می‌باشند. از دید تحلیل پایداری فرم DPWA بیضوی فرم مناسب‌تری به دلیل توصیف مربعی، با تابع لیاپانف مربعی می‌باشد. کلاس سیستم‌های هایبرید DPWA نسبت به سیستم‌های PWA معمول کلی‌تر است و به جای مرزهای ثابت کلیدزنی دارای مرزهای ترکیبی یعنی ترکیبی از ثابت و متغیر می‌باشد. در شکل ۲ ساختار کلاس هایبرید پیشنهادی نشان داده شده است. برای حالت خاصی که سیستم دارای دو متغیر حالت بوده و تعداد زیرسیستم‌ها ۴ است، نحوه تخصیص فضای حالت به ازای مرز طراحی شده و ذاتی سیستم، در شکل ۳ نشان داده شده است. در این شکل دو مرز کلیدزنی ثابت (ذاتی) و متغیر (طراحی) نشان داده شده‌اند. با تغییر مرز طراحی که به صورت خط‌چین نشان داده شده است، امکان کنترل متغیرهای حالت فراهم می گردد.

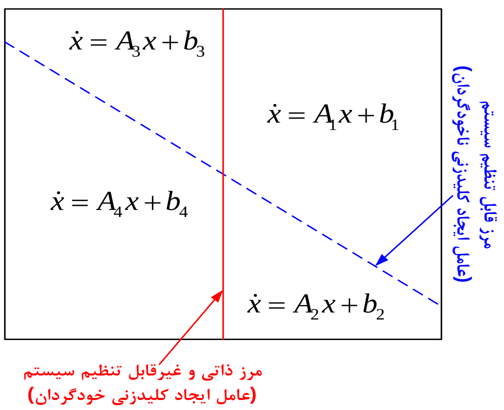
نکته ۱: با فرض $p_i = 1, h_{ij} = 0$ در روابط (۶)، سیستم خطی با کنترل کننده مد لغزشی[1] حالت خاصی از سیستم DPWA می‌باشد.

۴- پایداری کلاس پیشنهادی

در این بخش قضایایی جهت بررسی پایداری سیستم‌های DPWA با مرزهای چند وجهی و بیضوی ارائه شده است. نکته قابل توجه در مورد قضایای پیشنهادی محدب بودن روابط ارائه شده برای بررسی پایداری می‌باشد.



شکل ۲: توصیف ساختار کلاس هایبرید DPWA



شکل ۳: سیستم DPWA چندوجهی و وضعیت فعال شدن زیر سیستم‌ها بر حسب متغیرهای حالت در صفحه حالت

۴-۲ پایداری سیستم DPWA با مرزهای چندوجهی

قضیه ۱- (پایداری سیستم DPWA با مرزهای چند وجهی): سیستم توصیف شده با معادلات (۵) و (۶) دارای پایداری مجانبی سرتاسری می‌باشد، اگر LMI های زیر دارای جواب باشند. در ضمن در صورت برقراری روابط زیر علاوه بر تضمین پایداری، نرخ همگرایی در هر مش Ω_i برابر α_i است.

$$\begin{bmatrix} P & q \\ q^T & r \end{bmatrix} > 0, P > 0 \qquad (۱۰)$$

$$\begin{bmatrix} -A_i^T P - PA_i - \alpha_i P & -Pb_i - A_i^T q - \alpha_i q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ -b_i^T P - q^T A_i - \alpha_i q^T & -2b_i^T q - \alpha_i r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & W_i & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & W_i \end{bmatrix} > 0, \qquad (۱۱)$$
$$W_i > 0$$

در روابط (۱۰) و (۱۱)، $\alpha_i > 0$ اسکالر ثابت دلخواه، p_i تعداد مرزهای توصیف کننده مش i-ام، $P \in R^{n\times n}, q \in R^n, r \in R$ متغیرهای بهینه‌سازی، $W_i \in R^{p_i \times p_i}$ ماتریس متقارن مثبت معین، W_i^{-1} ماتریس مثبت، $\bar{g}_i = \begin{bmatrix} 1 & g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ip_i} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p_i}$ و $\bar{H}_i \in R^{p_i \times n}$ متغیر بهینه‌سازی فرم دار به صورت $\bar{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & h_{i1} + h_{i1}^* & h_{i2} + h_{i2}^* & \dots & h_{ip_i} + h_{ip_i}^* \end{bmatrix}^T$ می‌باشد.

اثبات قضیه ۱- برای اثبات پایداری مجانبی، تابع لیاپانف زیر برای همه نواحی تعریف می گردد:

$$V(x) = x^T P x + 2q^T x + r \qquad (۱۲)$$

که P یک ماتریس متقارن مثبت معین است. نظر به پیوستگی تابع لیاپانف فوق، باید برقراری شرایط مثبت بودن تابع لیاپانف و منفی بودن مشتق آن بررسی گردند. تابع لیاپانف (۱۲) دارای نرخ همگرایی α_i در Ω_i می‌باشد اگر

$$x \in \Omega_i \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x) < -\alpha_i V(x) \qquad (۱۳)$$

بر طبق [۵] در صورتی $x \in \Omega_i$ است که رابطه

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{H}_i^T \Lambda_i \bar{H}_i & -\bar{H}_i^T \Lambda_i \bar{g}_i \\ -(\bar{H}_i^T \Lambda_i \bar{g}_i)^T & \bar{g}_i^T \Lambda_i \bar{g}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \qquad (۱۴)$$

برقرار باشد که در این رابطه Λ_i ماتریس مثبت، $\bar{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & h_{i1} + h_{i1}^* & h_{i2} + h_{i2}^* & \dots & h_{ip_i} + h_{ip_i}^* \end{bmatrix}^T$ و $\bar{g}_i = \begin{bmatrix} 1 & g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ip_i} \end{bmatrix}^T$ می‌باشد. شرط مثبت بودن تابع لیاپانف برقراری رابطه (۱۰) و شرط منفی بودن مشتق آن، به کمک توصیف مش (۱۴) و S-procedure [۲۴-۲۵]، برقراری رابطه زیر است [۲۶]:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i + \alpha_i P + \bar{H}_i^T \Lambda_i \bar{H}_i & Pb_i + A_i^T q + \alpha_i q - \bar{H}_i^T \Lambda_i \bar{g}_i \\ b_i^T P + q^T A_i + \alpha_i q^T - \bar{g}_i^T \Lambda_i \bar{H}_i & 2b_i^T q + \alpha_i r + \bar{g}_i^T \Lambda_i \bar{g}_i \end{bmatrix} < 0 \qquad (۱۵)$$

[1] Sliding Mode Control

نامساوی (۱۴) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\Lambda_i & 0\\ 0 & \Lambda_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}>0 \qquad (۱۶)$$

به کمک رابطه (۱۶)، رابطه (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&-\begin{bmatrix}A_i^T P+PA_i+\alpha_i P & Pb_i+A_i^T q+\alpha_i q\\ b_i^T P+q^T A_i+\alpha_i q^T & 2b_i^T q+\alpha_i r\end{bmatrix}\\ &-\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\Lambda_i & 0\\ 0 & \Lambda_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}>0\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در ادامه اگر Λ_i را معکوس پذیر و Λ_i^{-1} را مثبت معین در نظر بگیریم، بنا به schur complement [۲۷]، از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix}-A_i^T P-PA_i-\alpha_i P & -Pb_i-A_i^T q-\alpha_i q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ -b_i^T P-q^T A_i-\alpha_i q^T & -2b_i^T q-\alpha_i r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & \Lambda_i^{-1} & 0\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & \Lambda_i^{-1}\end{bmatrix}>0 \qquad (۱۵)$$

حال با تعریف $\Lambda_i=W_i^{-1}$، برای پایدار بودن سیستم باید دو LMI زیر برقرار باشند.

$$\begin{bmatrix}-A_i^T P-PA_i-\alpha_i P & -Pb_i-A_i^T q-\alpha_i q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ -b_i^T P-q^T A_i-\alpha_i q^T & -2b_i^T q-\alpha_i r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & W_i & 0\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & W_i\end{bmatrix}>0;, W_i>0 \qquad (۱۹)$$

در نتیجه پایداری ثابت می‌گردد. با توجه به اینکه α_i پارامتر طراحی بوده و در معادلات مثبت در نظر گرفته می‌شود لذا سیستم علاوه بر پایداری لیاپانفی دارای پایداری مجانبی نیز می‌باشد. با توجه به اینکه تابع لیاپانف داده شده برای تمام R^n شرایط فوق را برآورده می‌نماید لذا پایداری سرتاسری است.

نکته ۲: با توجه به آزاد بودن پارامتر α_i اگر بتوان برنامه را به ازای مقادیر مختلف آن اجرا نمود و کوچک‌ترین α_i در بین مقادیر مختلف آن، در هر دفعه اجرا به دست آورد آنگاه سیستمی با بهترین نرخ همگرایی ممکن حاصل می‌گردد.

نکته ۳: مثبت بودن ماتریس W_i^{-1} معادل با مثبت بودن عناصر قطر اصلی و منفی بودن عناصر قطر فرعی ماتریس W_i است (با شرط $W_i>0$). که شرط اخیر در قالب روابط LMI قابل بیان است.

نکته ۴: در صورتی که سیستم DPWA دارای مرزهای قابل تنظیم نباشد به سیستم PWA مورد اشاره در [۴] تبدیل می‌گردد. در نتیجه، قضیه ۱ به منظور تحلیل پایداری سیستم‌های PWA نیز قابل کاربرد است.

نکته ۵: قضیه ۱، پایداری سرتاسری سیستم DPWA را بررسی می‌نماید. در شرایطی که پایداری محلی حول نقطه کار x_{ref} مد نظر باشد، می‌بایست از تابع لیاپانف $V(x)=(x-x_{ref})^T P(x-x_{ref})$ [۲۶] استفاده گردد یا به عبارت دیگر در قضیه ۱ ماتریس‌های توصیف کننده تابع لیاپانف در این شرایط جدید به صورت $P_{new}=P,\ q_{new}=-P^T x_{ref}, r_{new}=x_{ref}^T P x_{ref}$ در نظر گرفته شوند.

۴-۲ پایداری سیستم DPWA با مرزهای بیضوی

قضیه ۲–(پایداری سیستم DPWA با مرزهای بیضوی): سیستم توصیف شده با معادلات (۵) و نواحی مشخص شده در (۷) دارای پایداری مجانبی سرتاسری می‌باشد، اگر LMI های روابط (۱۰) و (۲۰) دارای جواب باشند. در ضمن در صورت برقراری روابط زیر علاوه بر تضمین پایداری، نرخ همگرایی در هر مش Ω_i برابر α_i است.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A_i^T P+PA_i+\alpha_i P & Pb_i+A_i^T q+\alpha_i q\\ b_i^T P+q^T A_i+\alpha_i q^T & 2b_i^T q+\alpha_i r\end{bmatrix}\\ &-\sum_{j=1}^{p_i}\theta_j\begin{bmatrix}H_{ij}+H_{ij}^* & 0\\ 0 & -g_{ij}\end{bmatrix}<0\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در روابط فوق $\alpha_i>0$ اسکالر ثابت دلخواه، p_i تعداد مرزهای توصیف کننده مش i-ام و $P\in R^{n\times n}, q\in R^n, r\in R$ و $0<\theta_j$ متغیر بهینه‌سازی می‌باشند.

اثبات قضیه ۲- برای اثبات پایداری مجانبی، تابع لیاپانف (۱۲) برای همه نواحی تعریف می‌گردد که P یک ماتریس متقارن و مثبت معین است. نظر به پیوستگی تابع لیاپانف (۱۲)، باید برقراری شرط مثبت بودن تابع لیاپانف برقراری رابطه (۱۰) و منفی بودن مشتق آن برقراری رابطه زیر است.

$$\begin{bmatrix}A_i^T P+PA_i+\alpha_i P & Pb_i+A_i^T q+\alpha_i q\\ b_i^T P+q^T A_i+\alpha_i q^T & 2b_i^T q+\alpha_i r\end{bmatrix}<0,\ if: x\in\Omega_i \qquad (۲۱)$$

همچنین در صورتی که $x\in\Omega_i$ باشد آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{j=1}^{p_i}\theta_j\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}H_{ij}+H_{ij}^* & 0\\ 0 & -g_{ij}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}<0 \qquad (۲۲)$$

که در این رابطه $\theta_j>0$ می‌باشد. به کمک توصیف مش (۲۲) و S-procedure [۲۴-۲۵]، شرط (۲۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A_i^T P+PA_i+\alpha_i P & Pb_i+A_i^T q+\alpha_i q\\ b_i^T P+q^T A_i+\alpha_i q^T & 2b_i^T q+\alpha_i r\end{bmatrix}\\ &-\sum_{j=1}^{p_i}\theta_j\begin{bmatrix}H_{ij}+H_{ij}^* & 0\\ 0 & -g_{ij}\end{bmatrix}<0\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

در ضمن در صورت برقراری روابط فوق علاوه بر تضمین پایداری می‌توان نشان داد که نرخ همگرایی در هر مش Ω_i برابر α_i است. در نتیجه پایداری ثابت می‌گردد. با توجه به اینکه $\alpha_i>0$ پارامتر طراحی بوده و در معادلات مثبت در نظر گرفته می‌شود لذا سیستم علاوه بر پایداری لیاپانفی دارای پایداری مجانبی می‌باشد. با توجه به اینکه تابع لیاپانف داده شده برای تمام R^n شرایط فوق را برآورده می‌نماید لذا پایداری سرتاسری است.

نکته ۶: سیستم DPWA چندوجهی دارای ورودی کنترل شونده‌ای می‌باشد که در مرز کلیدزنی ظاهر می‌شود. در صورتی که این سیستم به وسیله یک سیستم DPWA بیضوی کنترل گردد، سیستم حاصل یک

سیستم DPWA بیضوی خواهد بود. به بیان دیگر، با جایگذاری $\hat{h}_{ij}=C_c z$ (که C_c و z به ترتیب ماتریس خروجی و متغیر حالت کنترل کننده هستند،) در رابطه (۶) فرم مربعی ایجاد می‌شود که این فرم نشانگر یک سیستم DPWA بیضوی می‌باشد.

۵- مقایسه DPWA با کلاس‌های هایبرید متداول

در این بخش کلاس معرفی شده با کلاس‌های متداول سیستم‌های هایبرید مقایسه شده و نتایج آن در جدول ۱ دیده می‌شود. همان طور که در جدول ۱ دیده می‌شود، اشکال اصلی فرم‌های پرکاربردی چون سوئیچ شونده خطی مقید به حالت-ورودی منطقی و MLD این است که این مدل‌ها دارای متغیرهای حالت پیوسته و ورودی کنترل شونده منطقی می‌باشند، که این مسئله سبب پیچیدگی تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده می‌گردد. به منظور طراحی کنترل کننده برای این کلاس‌ها می‌بایست از ابزار بهینه‌سازی پیچیده‌ای چون برنامه‌ریزی ترکیبی-مربعی اعداد صحیح (MIQP[1]) [۲۸] استفاده گردد. در مقابل نقطه قوت کلاس پیشنهادی در همگن بودن (همه متغیرها از یک نوع و پیوسته می‌باشند) متغیرهای حالت و ورودی کنترل شونده سیستم است، که این مسئله سبب سادگی تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای کلاس پیشنهادی می‌گردد. همه مدل‌های مورد بررسی در جدول ۱ دارای ورودی پیوسته می‌باشند. در مورد همه کلاس‌های متداول ورودی پیوسته در دینامیک مدل به طور مستقیم وارد می‌گردد در حالی که در مدل DPWA، ورودی پیوسته در دینامیک مدل به طور مستقیم وارد نشده و در مرز کلیدزنی وارد می‌گردد. کلاس پیشنهادی ماهیتاً دارای کلیدزنی مقید می‌باشد و از این رو با سیستم سوئیچ شونده خطی مقید به حالت-ورودی منطقی در جدول مقایسه شده است. سیستم PWA دارای کلیدزنی نا خودگردان نمی‌باشد زیرا در این سیستم کلیدزنی بر حسب ناحیه قرارگیری متغیر حالت صورت می‌گیرد و این کلیدزنی کاملاً خودگردان است. اما در مورد سیستم DPWA، کلیدزنی به هر دو روش خودگردان و نا خودگردان روی می‌دهد. نوع خودگردان آن مشابه سیستم PWA بر حسب ناحیه قرارگیری متغیر حالت روی می‌دهد و نوع نا خودگردان آن به وسیله تغییر مرز کلیدزنی صورت می‌گیرد. از دید کاربردی انتخاب هر یک از کلاس‌های جدول فوق وابسته به ماهیت سیستم مورد بررسی دارد. در این زمینه بین پیچیدگی و دقت مدلسازی مصالحه صورت می‌گیرد. مدل DPWA در حالت کلی دارای دقت مدلسازی بالاتری نسبت به PWA و SLS می‌باشد ولی پیچیدگی آن نیز بیشتر است. مدل پیشنهادی نسبت به سوئیچ شونده خطی مقید و MLD دارای پیچیدگی کمتری می‌باشد ولی در مورد بعضی کاربردها منجر به محدودیت مدلسازی یا احیاناً تقریب در مدلسازی می‌گردد.

۶- مطالعه موردی یک مبدل الکترونیک قدرت dc-dc رزونانسی

جدول ۱: مقایسه کلاس‌های مختلف هایبرید

ویژگی	SLS	PWA	سوئیچ شونده خطی مقید به حالت-ورودی منطقی	MLD	DPWA
دینامیک	خطی	خطی‌تبار	خطی	خطی	خطی‌تبار
قید بر روی سیگنال کلیدزنی	ندارد	دارد	دارد	دارد	دارد
قید بر روی متغیرهای حالت	ندارد	دارد	دارد	دارد	دارد
ورودی منطقی	دارد	ندارد	دارد	دارد	ندارد
کلیدزنی خودگردان	ندارد	دارد	دارد	دارد	دارد
کلیدزنی نا خودگردان	دارد	ندارد	دارد	دارد	دارد
تحلیل پایداری	ساده	ساده	پیچیده	پیچیده	ساده

شماتیک یک مبدل رزونانسی سری در شکل ۴ نشان داده شده است و معادلات غیرخطی توصیف کننده آن به صورت

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{L}\left\{sV_g-x_2-r_{Loss}x_1-sign(x_1)(x_3+2V_f)\right\},\ s\in\{-1,0,1\} \qquad (۲۴)$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{1}{C}(x_1);\ \frac{dx_3}{dt}=\frac{1}{C_0}\left(|x_1|-\frac{x_3}{R}\right)$$

می‌باشد [۱۹]، که در این رابطه $V_f, r_{Loss}, V_g, L, R, s, x_3, x_2, x_1$ به ترتیب عبارتند از جریان سلف، ولتاژ خازن شبکه رزونانس، ولتاژ خروجی، ورودی منطقی، مقاومت خروجی، سلف، منبع ورودی، مقاومت معادل تلفات و افت ولتاژ مستقیم دیود می‌باشند. با فرض $x\in R^3$ و تعریف ورودی منطقی به صورت زیر:

$$s=\begin{cases}+1 & Kx+m>\gamma\\ 0 & -\gamma\le Kx+m\le\gamma\\ -1 & Kx+m<-\gamma\end{cases} \qquad (۲۵)$$

رابطه (۲۴) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\mathbf{A}_i x(t)+\mathbf{b}_i\\ y(t)=\mathbf{C}x(t)\end{cases}$$
$$,\ if:\ x\in\Omega_i=\{x\mid H_i^{polyhedral,c\ T}x-g_i^{polyhedral,c}\prec 0\} \qquad (۲۶)$$
$$,\ i=1,2,\ldots,6$$

ماتریس‌های رابطه فوق در جدول ۲ تعریف شده‌اند و $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ است. رابطه (۲۶) یک سیستم DPWA با مرزهای چندوجهی را نمایش می‌دهد. پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی همراه با تعریف آنها در جدول ۳ بیان شده است. با استفاده از قضیه ۱، پارامترهای طراحی K و m (که در ساختار متغیرهای $H_i^{polyhedral,c}$

[1] Mixed Integer Quadratic Programming

و $g_i^{polyhedr,al}$ قرار دارند) طراحی می‌گردند.. با حل LMI مربوطه به کمک جعبه ابزار Robust Control نرم افزار MATLAB نتیجه زیر حاصل گردیده است:

$$K=\begin{bmatrix}1 & -0.899 & 0\end{bmatrix},\ m=0.7674,\ \gamma=0 \qquad (۲۷)$$

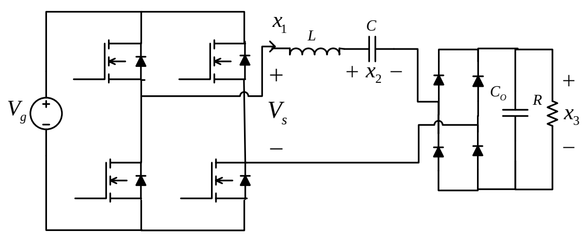
همچنین متغیرهای بهینه سازی و پارامترهای میانی روابط LMI به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$P=10^{-10}\begin{bmatrix}0.935 & 0.030 & -0.135\\ 0.030 & 1.487 & -0.160\\ -0.135 & -0.160 & 5.153\end{bmatrix};q=10^{-10}\begin{bmatrix}-0.0074\\ -0.3698\\ 0.0339\end{bmatrix}$$
$$,W=10^{8}\begin{bmatrix}2.8181 & -0.7654 & -0.7459\\ -0.7654 & 2.8521 & -0.7656\\ -0.7459 & -0.7656 & 2.8182\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

بر اساس شبیه‌سازی صورت گرفته، تصویر مسیر حالت در صفحه x_1-x_2 به همراه مرز ذاتی و طراحی شده در شکل ۵ نشان داده شده است. در این شکل فضای حالت به چهار ناحیه تقسیم شده و در هر مش یکی از چهار زیرسیستم فعال می‌باشد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله کلاس جدیدی از سیستم‌های هایبرید که توانایی مدلسازی دسته وسیعی از سیستم‌های عملی را دارد، معرفی گردید. توصیف ریاضی کلاس پیشنهادی در دو فرم چندوجهی و بیضوی ارائه و برای هر حالت قضیه‌ای جهت تحلیل پایداری بر اساس حل تعدادی LMI ارائه گردیده است. با مقایسه کلاس پیشنهادی با کلاس‌های متداول سیستم‌های هایبرید، مزایا و نقاط ضعف کلاس پیشنهادی مشخص گردید. یک مبدل الکترونیک قدرت در فرم پیشنهادی مدل، تحلیل و شبیه‌سازی گردید. کلاس پیشنهادی نسبت به کلاس PWA کلی‌تر بوده و توانایی مدلسازی دسته بزرگ‌تری از سیستم‌های عملی را دارا می‌باشد. تعمیم کنترل کننده‌های کلاسیک بر روی کلاس پیشنهادی توسط نویسندگان در حال تحقیق و بررسی می‌باشد.



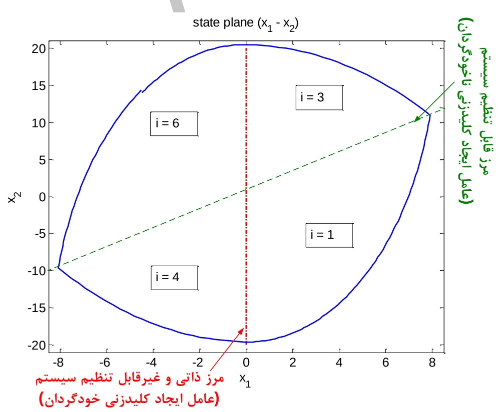
شکل ۴: مبدل الکترونیک قدرت dc-dc رزونانسی سری

جدول ۲: ماتریس‌های توصیف کننده رابطه (۲۶) با تعریف $K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$

شماره زیرسیستم	$g_i^{polyhedral,c}$	$H_i^{polyhedral,c}$	b_i	A_i
۱	$\begin{bmatrix}0\\ -\gamma+m\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ & -K & \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{V_g-2V_f}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-r_{LOSS}}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0 & 0\\ \frac{1}{C_0} & 0 & \frac{-1}{C_0R}\end{bmatrix}$
۲	$\begin{bmatrix}0\\ \gamma+m\\ \gamma-m\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ & -K & \\ & K & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-2V_f}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-r_{LOSS}}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0 & 0\\ \frac{1}{C_0} & 0 & \frac{-1}{C_0R}\end{bmatrix}$
۳	$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\gamma-m\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ & K & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-V_g-2V_f}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-r_{LOSS}}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0 & 0\\ \frac{1}{C_0} & 0 & \frac{-1}{C_0R}\end{bmatrix}$
۴	$\begin{bmatrix}0\\ -\gamma+m\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & -K & \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{V_g+2V_f}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-r_{LOSS}}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0 & 0\\ \frac{-1}{C_0} & 0 & \frac{-1}{C_0R}\end{bmatrix}$
۵	$\begin{bmatrix}0\\ \gamma+m\\ \gamma-m\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ & -K & \\ & K & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{2V_f}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-r_{LOSS}}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0 & 0\\ \frac{-1}{C_0} & 0 & \frac{-1}{C_0R}\end{bmatrix}$
۶	$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\gamma-m\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ & K & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-V_g+2V_f}{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-r_{LOSS}}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0 & 0\\ \frac{-1}{C_0} & 0 & \frac{-1}{C_0R}\end{bmatrix}$

جدول ۳: پارامترهای مورد استفاده در شبیه سازی و تعاریف آنها

نشانه	پارامتر	مقدار
C	خازن تانک	$560nF$
L	سلف تانک	$14.7\mu H$
C_f	خازن فیلتر خروجی	$47\mu F$
V_g	ولتاژ تغذیه	$48V$
V_o	ولتاژ خروجی	$20V$
ω_s	فرکانس زاویه ای کلیدزنی	$2\pi\times100KHz$
ω_r	فرکانس زاویه ای رزونانس	$2\pi\times54KHz$
R	مقاومت خروجی	6Ω
V_f	ولتاژ مستقیم دیودها	$1.25V$
r_{LOSS}	مقاومت معادل تلفات	0.76Ω



شکل ۵: نمودار تصویر مسیر حالت در صفحه x_1-x_2 برای مبدل مورد نظر به همراه مرز ذاتی، مرز طراحی شده و شماره زیرسیستم فعال در هر ناحیه (i)

مراجع

[1] M. Senesky, G. Eirea, and T. John Koo, 2003, “Hybrid modeling and control of power electronics”, Hybrid Systems: Computations and Control, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag: Berlin, in the proceeding of 6th International Workshop, pp. 450–465.

[2] Panagiotis D. Christofides and Nael H. El-Farra, Control of Nonlinear and Hybrid Process Systems Designs for Uncertainty, Constraints and Time-Delays (Lecture Notes in Control and Information Sciences 324), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[3] M. Hejri and H. Mokhtari, 2009, “Global hybrid modeling and control of a buck converter: A novel concept”, International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 37, pp 968–986.

[4] A. Rantzer and M. Johansson, April 2000 , “Piecewise linear quadratic optimal control ,” IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 45, no. 4, pp. 629–637.

[5] L. Rodrigues and J.P. How, 2003, “Observer-based control of piecewise-affine systems”, International Journal of Control, vol. 76, no. 5, pp. 459–477.

[6] S. LeBel and L. Rodrigues, Feb. 2009, “PWL and PWA H∞ controller synthesis for uncertain PWA slab systems: LMI approach”, International Journal of Control, vol. 88, no. 3, pp. 482-492.

[7] L. Rodrigues and S. Boyd, 2005, “Piecewise-affine state feedback for piecewise-affine slab systems using convex optimization”, Systems & Control Letters, vol. 54, no. 9, pp. 835–853.

[8] F. Tahami and B. Molaei, Feb. 2007, “Piecewise affine system modeling and control of pwm converters" Journal of Circuits, Systems and Computers, vol. 16, no. 1, pp. 113-128.

[9] F. Tahami, S. Poshtkouhi, and H. Molla-Ahmadian, May. 2011, “Piecewise affine control design for power factor correction rectifiers", Journal of Power Electronic, vol. 11, no. 3, pp. 327-334.

[10] H. Molla-Ahmadian and M. B. Naghibi, 2011, “Optimal piecewise affine large signal modeling of PFC rectifiers based on reinforcement learning”, Power electronics and drives systems technology conference, Tehran Uni,Tehran, Iran, pp. 512 - 517.

[11] Zhendong Sun, Shuzhi S.Ge, Switched Linear Systems: Control and Design, Springer-Verlag Publication, 2004.

[12] H. Lin, and P. J. Antsaklis,2009, ” Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results”, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 54, no. 2, pp. 308-322.

[13] S. Pettersson and B. Lennartson, 2001, “Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy”, in Proceeding of American Control Conference, pp. 223–228.

[14] A. Bemporad and M. Morari, 1999, “Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints”, Automatica, vol. 35, no. 3, pp. 407–427.

[15] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari, 2002, “Model predictive control based on linear programming—The explicit solution”, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 47, no.12, pp. 1974–1985.

[۱۶] ح. ملا احمدیان، ع. کریم پور و ن. پریز، اردیبهشت ۸۹، "کنترل مبدل‌های الکترونیک قدرت به کمک تئوری سیستم‌های هایبرید و استراتژی تصویر کمینه"، هجدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان.

[17] B. D. Schutter and T.J.J. van den Boom, 2004, “MPC for continuous piecewise-affine systems”, Systems & Control Letters, vol. 52, no. 3, pp. 179-192.

[۱۸] ح. ملا احمدیان، ع. کریم پور و ن. پریز، ۱۳۹۰، " پایدارسازی و کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی: دیدگاه مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی"، مجله کنترل ISSN 2008-8345، جلد ۵، شماره ۲، ص ۱۲-۲۱.

[19] H. Molla-Ahmadian, A. Karimpour, N. Pariz, F. Tahami, 2012, “Hybrid Modeling of dc-dc series resonant converter: direct piecewise affine approach”, IEEE Trans. Of Circuit and System I: regular papers, in press

[20] A. Schild, J. Lunze, 2008, “Switching Surface Design for Periodically Operated Discretely Controlled Continuous Systems”, Hybrid Systems: Computation and Control, LNCS, Springer-Verlag, vol. 4981, pp. 471-485.

[21] A. Schild, Jan Lunze, 2007, “Stabilization of Limit cycles of Discretely Controlled Continuous Systems by Controlling Switching Surfaces”, Hybrid Systems: Computation and Control, Springer-Verlag, , vol. 4416, pp. 515-528.

[22] J. M. Galvez, M. Ordonez, F. Luchino, J. E. Quaicoe, 2011, “Improvements in Boundary Control of Boost Converters Using the Natural Switching Surface”, IEEE Trans. On. Pow. Elec., Vol. 26, No. 11, Nov, pp. 3367-3376.

[23] L. Greco, “Stability and Stabilization Issues in Switched Systems”, PHD thesis, Bioingegneria, Robotica e Sistemi di Automazione Industriale - Ciclo XVII, 2005.

[24] V. A. Yakubovich, 1997, “The S procedure in non-linear control theory”, Vestnik Leningrad Univ. Math, vol 4, pp 73-93 (In Russian).

[25] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia, The SIAM press, 1994.

[26] L. Rodrigues, "Dynamic Output Feedback Controller Synthesis for Piecewise Affine Systems", PhD Thesis, Stanford university, June 2002.

[27] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia, The SIAM press, 1994.

[28] R. Fletcher and S. Leyffer, 1998, “Numerical Experience with lower bounds for MIQP branch and bound”, SIAM Journal of Optimization vol. 8, no. 2, pp. 604-616.