

# طراحی کنترل کننده فازی سلسله مراتبی با آموزش پسخور خطا بر اساس تابع لیاپانوف برای کلاسی از سیستم‌های غیر خطی مرتبه بالا

محمد منشوری<sup>۱</sup>، محمد تشنه‌لب<sup>۲</sup>، مهدی علیاری شوره‌دلی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، mohammad@ee.kntu.ac.ir

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، teshnehlab@eetd.kntu.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مهندسی برق، گروه میکاترونیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، aliyary@eetd.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۲/۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۴/۶/۳۱)

**چکیده:** در این نوشتار، یک کنترل کننده فازی سلسله مراتبی به همراه کنترل کننده کلاسیک PD با روش آموزش پسخور خطا برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی تک ورودی-تک خروجی و در حضور اغتشاش محدود ارایه شده است. برای پایداری سیستم تحت کنترل، تابع لیاپانوفی در نظر گرفته شده است که ضمن تضمین پایداری، قانون به روز رسانی تمامی پارامترهای تالی سیستم فازی سلسله مراتبی نیز از آن استخراج شده است. پارامترهای تالی سیستم فازی سلسله مراتبی که در بلوک‌های مختلف واقع شده‌اند به صورت غیرخطی-در-پارامتر در خروجی ظاهر می‌شوند. برای استخراج قوانین تطبیق برای آنها با قضیه مطرح شده، پارامترها به صورت خطی-در-پارامتر ظاهر شده‌اند. برای جملات تقریب زده شده، حد بالای در نظر گرفته شده است. حد بالای جملات تقریب نیز در تابع لیاپانوف در نظر گرفته شده و برای آنها قانون تطبیق استخراج شده است تا محافظه کاری تقریب کاهش پیدا کند. نشان داده شده است که قضیه ارایه شده به تمامی ساختارهای سیستم‌های فازی سلسله مراتبی با هر تعداد لایه و حتی به سیستم فازی معمول نیز قابل اعمال است. در ضمن به کار بردن سیستم فازی سلسله مراتبی باعث کاهش قواعد و در نتیجه کاهش پارامترها می‌گردد. در نهایت الگوریتم ارایه شده بر روی دو سیستم (بازوی ربات انعطاف پذیر و سیستم تعلیق خودرو یک چهارم فعال) شبیه‌سازی شده و نتایج آن با روش کلاسیک مدل‌گزشی مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی بیانگر کارایی مطلوب کنترل کننده ارایه شده است.

**کلمات کلیدی:** کنترل کننده فازی سلسله مراتبی، کاهش قواعد، آموزش پسخور خطا، تابع لیاپانوف و قانون تطبیق.

## Designing Hierarchical Fuzzy Controller with Feedback Error Learning Based on Lyapunov Function for a Class of High-order Nonlinear System

M. Mansouri, M. Teshnehlab, M. Aliyari Shoorehdeli

**Abstract:** In this study, a hierarchical fuzzy controller associated with PD classical controller with feedback error learning method for class of canonical SISO nonlinear system in presence of bounded disturbance is presented. The stability of whole system is guaranteed through a Lyapunov function. The adaptation laws of all parameters of consequent part of hierarchical fuzzy system are derived using it. Tunable parameters of hierarchical fuzzy system are appeared in nonlinear form at the output. Using the mentioned theorem, they are appeared in linear form. There is an upper bound for the residual terms. They are considered in Lyapunov function and the adaptation law is derived for them. It is shown that, the proposed theorem is applicable to the hierarchical fuzzy system with any structure and any number of layers and even to the ordinary fuzzy systems. Also, using

hierarchical fuzzy controllers leads to reduction of number of rules and parameters in a fuzzy system. Finally, the proposed method is applied on two systems (flexible joint robot and quarter active suspension system). The results are compared with classical sliding mode method. They reveal the efficiency of the suggested algorithm.

**Keywords:** Hierarchical fuzzy controller, rule reduction, feedback error learning, Lyapunov function and adaptation law.

## ۱- مقدمه

امروزه شاهد کاربرد روز افزون سیستم‌های فازی در کنترل سیستم‌های صنعتی هستیم. سیستم‌های صنعتی معمولاً سیستم‌های غیرخطی مرتبه بالا هستند. لذا، سیستم‌های فازی در کاربردهای صنعتی، مواجه با سیستم‌های مرتبه بالا می‌شوند. در حالت کلی چنانچه یک سیستم فازی  $n$  ورودی و برای هر ورودی  $m$  تابع عضویت داشته باشد، تعداد کل قواعد برابر با  $m^n$  خواهد بود. بنابراین تعداد قوانین با افزایش تعداد ورودی‌ها به صورت نمایی افزایش خواهد یافت که به این پدیده "افزایش بعد" گفته می‌شود. این پدیده یک مشکل اساسی در کاربرد سیستم‌های فازی در کاربردهای صنعتی می‌باشد.

برای غلبه بر این مشکل، Zhou و Raju در سال ۱۹۹۱، برای اولین بار سیستم‌های فازی سلسله مراتبی<sup>۱</sup> (HFS) را مطرح کردند [۱]. در این نوع سیستم‌های فازی، بجای استفاده از یک سیستم فازی با تعداد ورودی‌های بیشتر و در نتیجه قواعد بالا از چندین سیستم فازی با همان تعداد ورودی و در نتیجه قواعد کمتر استفاده می‌شود که موجب می‌شود تعداد قواعد با رشد ورودی‌ها به صورت خطی زیاد شود [۲]. خاصیت تقریب‌گر عمومی بودن<sup>۳</sup> سیستم‌های فازی سلسله مراتبی نیز در مراجع [۲-۵] مورد بررسی قرار گرفته است.

امروزه، محققان بسیاری در زمینه سیستم‌های فازی سلسله مراتبی مقالات فراوانی ارائه کرده‌اند و کاربردهای این سیستم‌ها، از کارهای کلاس بندی تا کنترل سیستم‌ها توسعه یافته است. در مراجع [۶ و ۷] مرور نسبتاً جامعی راجع به موضوعات و تحقیقات انجام شده در سیستم‌های فازی سلسله مراتبی انجام شده است. در واقع، ویژگی کاهش قواعد سیستم‌های سلسله مراتبی منجر به کاربردها روزافزون آنها در سیستم‌های مختلف شده است.

تنظیم برخظ<sup>۴</sup> پارامترهای سیستم‌های فازی یکی از ضرورت‌های اساسی برای به کار بردن آنها در کاربردهای واقعی و کنترلی شمرده می‌شود. نیاز روش‌های آموزش بر پایه گرادیان نزولی به ژاکوبین سیستم، از کاربردی بودن آنها می‌کاهد چرا که محاسبه ژاکوبین بسیار پیچیده و در

مواردی غیرممکن می‌باشد. آموزش پسخور خطا<sup>۵</sup> (FEL) یکی از روش‌های مطرح شده برای غلبه بر این مشکل می‌باشد که به آموزش برخظ پارامترها بدون نیاز به محاسبه ژاکوبین سیستم می‌پردازد. از نقطه نظر کنترلی، FEL را می‌توان کنترل کننده تطبیقی در نظر گرفت که به آموزش پارامترهای مسیر پیشرو با استفاده از کنترل کننده مسیر پسخور می‌پردازد. این استراتژی کنترلی شامل یک کنترل کننده هوشمند و یک کنترل کننده کلاسیک می‌باشد که به ترتیب در مسیر پیشرو و در مسیر فیدبک قرار دارند. Kawato برای اولین بار این استراتژی کنترلی را برای کنترل کننده شبکه عصبی چندلایه در کنار یک کنترل کننده PD به کار برد [۸]. پایداری این الگوریتم نیز در مراجع [۹ و ۱۰] بررسی شده است. در مرجع [۱۱] نیز برای کنترل فرکانس شبکه قدرت، نویسندگان از FEL برای آموزش پارامترهای شبکه عصبی پویا استفاده کرده‌اند. در [۱۲] نویسندگان پارامترهای شبکه عصبی انعطاف‌پذیر را با این روش آموزش داده‌اند.

در این تحقیق از کنترل کننده فازی سلسله مراتبی به همراه کنترل کننده کلاسیک PD با آموزش پارامترها به روش آموزش پسخور خطا استفاده شده است. کلاس سیستم غیرخطی در نظر گرفته شده یک سیستم غیرخطی تک ورودی-تک خروجی در حضور اغتشاش محدود می‌باشد که به فرم نرمال در نظر گرفته شده است. با استفاده از قضیه مطرح شده توسط نویسندگان در [۱۳] که در آن رابطه‌ای برای خطای تخمین تابع توسط سیستم فازی سلسله مراتبی ارائه شده است، خطای بین سیگنال کنترلی ایده‌آلی که با استفاده از کنترل کننده کلاسیک به دست آمده است با رابطه مذکور جایگزین شده است. بدین صورت پارامترهای سیستم فازی سلسله مراتبی که در لایه‌های میانی قرار دارند، به صورت خطی-در-پارامتر در خروجی ظاهر شده و پایداری سیستم با این کنترل-کننده ثابت می‌شود. همچنین پایداری سیستم تحت کنترل با استفاده از تابع لیاپانوف تضمین و قانون به روزرسانی<sup>۶</sup> پارامترهای سیستم فازی سلسله مراتبی نیز استخراج می‌شود.

ادامه مقاله بدین صورت است که: در بخش بعد به بیان مسئله و کلاسی از سیستم‌های غیرخطی مورد مطالعه و فرضیه‌های در نظر گرفته شده می‌پردازیم. سپس در بخش ۳ به معرفی روش آموزش پسخور خطا اشاره می‌شود. در بخش ۴ توضیح مختصری از سیستم‌های فازی سلسله

<sup>۱</sup>Curse of dimensionality

<sup>۲</sup>Hierarchical fuzzy systems

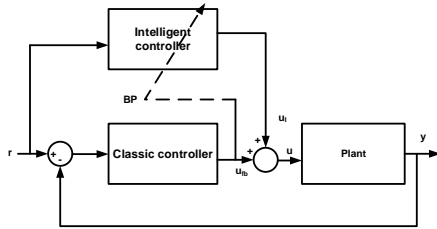
<sup>۳</sup>General function approximator

<sup>۴</sup>On-line

<sup>۵</sup>Feedback error learning

<sup>۶</sup>Adaptation law

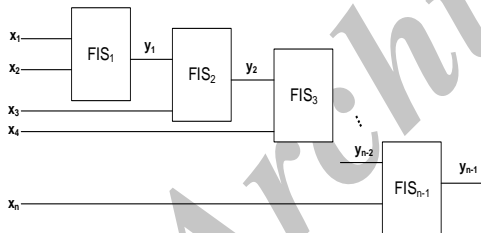
مزایایی است که عبارتند از: (۱) ساختار کنترل تطبیقی ارابه شده ترکیبی از ساختارهای کنترل کننده تطبیقی قبلی مستقیم و غیرمستقیم می‌باشد. (۲) مدل معکوس سیستم به صورت بلادرنگ و بدون نیاز به محاسبه ژاکوبین محاسبه می‌گردد. مراجع [۹ و ۱۰] پایداری ساختار ارابه شده را بررسی کرده‌اند.



شکل ۱: بلوک دیاگرام کلی رهیافت پسخور خطا

#### ۴- سیستم فازی سلسله مراتبی

در این بخش به ارابه توضیح مختصری پیرامون سیستم‌های فازی سلسله مراتبی می‌پردازیم. سیستم فازی سلسله مراتبی نمونه با n-1 لایه را به صورت شکل ۲ در نظر بگیرید. در این سیستم در هر لایه یک بلوک فازی موجود می‌باشد و هر بلوک فازی دارای دو ورودی است. در این شکل هر FIS نشان دهنده یک سیستم فازی است. ثابت شده است که با این ساختار تعداد کل قواعد کمینه خواهد بود [۳].



شکل ۲: بلوک دیاگرام سیستم فازی سلسله مراتبی

در حالت کلی، اگر بلوک‌های فازی واقع در هر لایه را سیستم فازی مددانی با موتور استنتاج ضرب-جمع، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز در نظر بگیرید، خروجی لایه p-ام به صورت (۲) به دست خواهد آمد.

$$y_p = \frac{\sum_{i_p=1}^{\tau_p} \mu_{A_{i_p}}^{i_p}(x_{p+1}) \cdot \mu_{B_{i_p}}^{i_p}(y_{p-1}) \theta_p^{i_p}}{\sum_{i_p=1}^{\tau_p} \mu_{A_{i_p}}^{i_p}(x_{p+1}) \cdot \mu_{B_{i_p}}^{i_p}(y_{p-1})} \quad (2)$$

که در آن  $\tau_p$  تعداد قواعد موجود در لایه p-ام،  $\mu_{A_{i_p}}^{i_p}(\cdot)$  تابع عضویت ورودی  $p+1$ ،  $\mu_{B_{i_p}}^{i_p}(\cdot)$  تابع عضویت خروجی لایه  $p-1$

مراتبی داده شده است. در ادامه و در بخش ۵ روش کنترل پیشنهاد شده مورد بررسی قرار گرفته و قضیه‌ای برای اثبات پایداری سیستم حلقه بسته ارابه شده است. در بخش ۶ چگونگی به‌روزرسانی مقاوم قوانین مطرح شده است. سپس روش پیشنهاد شده در بخش شبیه‌سازی بر روی دو سیستم مکانیکی اعمال شده است. در نهایت، نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

#### ۲- بیان مسئله

در این بخش به معرفی مدل ریاضی کلاسی از سیستم‌های غیرخطی که کنترل کننده ارابه شده را می‌توان به آن اعمال کرد و هدف کنترلی مدنظرمان می‌پردازیم. سیستم غیرخطی موردنظر یک سیستم تک ورودی-تک خروجی و به شکل نرمال است که در رابطه (۱) نشان داده شده است.

$$x^{(n)}(t) = f(X) + g(X)u(t) + d(t) \quad (1)$$

$$y(t) = x(t)$$

که در آن  $X = [x(t) \dot{x}(t) \dots, x^{(n-1)}]$  بردار متغیرهای حالت،  $u(t)$  سیگنال کنترلی،  $f(X)$  تابع غیرخطی نامعلوم،  $g(X)$  بهره کنترلی نامعلوم و  $d(t)$  سیگنال اغتشاش محدود به طوری که  $|d(t)| < D$  می‌باشد.  $D$  کران بالایی اغتشاش و نامعلوم فرض شده است. هدف کنترلی این است که خروجی سیستم،  $y$ ، خروجی مطلوب،  $y_d$  را دنبال کند. به عبارت بهتر، با در نظر گرفتن خطای ردیابی به صورت  $e = y_d - y$ ، مسئله اصلی طراحی سیگنال کنترلی  $u(t)$  است به نحوی که با میل کردن زمان به سمت بینهایت، خطای ردیابی به سمت صفر همگرا شود. لازم به ذکر است که برای حذف اثر اغتشاش فرض زیر را در نظر بگیریم:

**فرض:** بهره کنترلی دارای کران پایین نامعلوم می‌باشد به بیان دیگر  $0 < g_L < g(X)$  که در آن عدد ثابت  $g_L$  کران پایین بهره کنترلی است.

#### ۳- آموزش پسخور خطا

ایده اولیه آموزش پسخور خطا الهام گرفته از عملکرد مغز در پدیده‌های مختلف و اجرای کارهای کنترلی می‌باشد. عملکرد مغز را می‌توان با استفاده از ساختار کنترل دو درجه آزادی یا به عبارت بهتر با استفاده از دو کنترل کننده مدلسازی نمود. این ساختار را دانشمند ژاپنی به نام Kawato در سال ۱۹۸۷ مطرح کرد و آن را آموزش پسخور خطا نامگذاری کرد. در این ساختار کنترلی، یک سیستم کنترلی به عنوان معکوس سیستم تحت کنترل در مسیر پیشرو و کنترل کننده دیگر در مسیر پسخور قرار گرفته است. دلیل نامگذاری آن نیز استفاده از خطا در آموزش معکوس فرآیند می‌باشد. در شکل ۱ ساختار FEL نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود دو کنترل کننده کلاسیک و هوشمند در نظر گرفته شده است که کنترل کننده هوشمند در مسیر پیشرو قرار دارد و هدف آن ایجاد معکوس سیستم می‌باشد. این ساختار کنترلی را می‌توان در رسته کنترل کننده‌های تطبیقی در نظر گرفت که دارای

۴) ام و اندیس مربوط به تابع عضویتی است که در قانون  $T_{ip}$ -ام ظاهر شده است. رابطه (۲) را می‌توان به صورت برداری (۳) نیز نوشت:

$$y_p = \theta_p^T \Gamma_p(x_{p+1}, y_{p-1}) \quad (3)$$

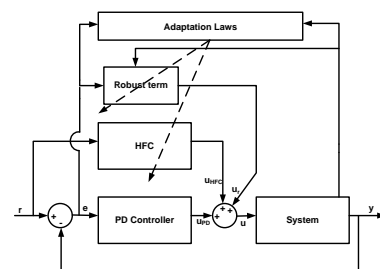
که در آن  $\theta_p \in R^{r_p \times 1}$  بردار مراکز دسته پارامترهای قسمت تالی و  $\Gamma_p \in R^{1 \times r_p}$  بردار قسمت نرمالیزه مربوط به بخش مقدم می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود، خروجی هر بلوک فازی به همراه متغیر ورودی بعدی وارد بلوک فازی لایه بعدی می‌گردد و فقط در لایه اول ورودی‌های فازی هر دو متغیرهای ورودی می‌باشند.

**فرض:** در تمامی قضایای مطرح شده در این مقاله، از آنجا که به غیر صفر بودن مخرج در (۲) یا به عبارت بهتر کامل بودن قواعد و همچنین مشتق پذیر بودن توابع تعلق نیاز است، در نتیجه تمامی توابع عضویت به صورت گاوسی در نظر گرفته شده است.

با دقت در روابط ذکر شده مشاهده می‌شود که پارامترهای بخش تالی لایه‌های میانی به صورت غیرخطی-در-پارامتر ظاهر می‌شوند. بدین معنی که خروجی سیستم فازی سلسله مراتبی نسبت به پارامترها، غیرخطی است. به عبارت دیگر نمی‌توان خروجی را به صورت حاصلضرب بردار پارامترها در بردار رگرورها نوشت که این مسئله استخراج قانون تطبیق را برای پارامترها در روش‌های تطبیقی برپایه لیپانوف دشوار می‌سازد.

### ۵- الگوریتم پیشنهادی

در این بخش کنترل کننده پیشنهاد شده در این مقاله را توضیح خواهیم داد. بلوک دیاگرام الگوریتم پیشنهادی در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل قابل مشاهده است، کنترل کننده فازی سلسله مراتبی در مسیر پیشرو و کنترل کننده کلاسیک PD به عنوان کنترل کننده مسیر پسخور قرار گرفته‌اند. مجموع سه جمله خروجی: کنترل کننده فازی سلسله مراتبی ( $u_{HFC}$ )، کنترل کننده کلاسیک PD و جمله مربوط به کنترل کننده مقاوم ( $u_r$ ) می‌باشد. بلوک قوانین به‌روز رسانی برپایه قضیه ارایه شده در ادامه، پارامترهای کنترل کننده‌های فازی سلسله مراتبی و مقاوم را به‌روز رسانی می‌کند.



شکل ۳: بلوک دیاگرام الگوریتم پیشنهادی

همان‌طور که در شکل ۳ قابل مشاهده است، سیگنال کنترلی که به سیستم تحت کنترل وارد می‌گردد، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u = u_{HFC} + u_{pd} + u_r \quad (4)$$

که در آن،  $u_{HFC}$  سیگنال کنترلی ناشی از کنترل کننده فازی،  $u_{pd}$  سیگنال کنترلی ناشی از کنترل کننده کلاسیک تناسبی-مشتقی و  $u_r$  سیگنال کمکی برای جبران عدم قطعیت موجود می‌باشد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، خطای ردیابی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = y_d - y \quad (5)$$

خروجی کنترل کننده کلاسیک که تناسبی-مشتقی در نظر گرفته شده است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{pd} = k_p e + k_d \dot{e} \quad (6)$$

که در آن  $k_p$  و  $k_d$  ثابت‌های تناسبی و مشتقی هستند. بردار  $\bar{u}_{pd}$  به صورت (۷) تعریف می‌شود:

$$\bar{u}_{pd} = [u_{pd}, \dot{u}_{pd}, \dots, u_{pd}^{(n-1)}]^T_{n \times 1} \quad (7)$$

با استفاده از خطی سازی فیدبک، فرمان کنترلی ایده‌آل که اثر توابع غیرخطی موجود در سیستم را حذف می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^* = \frac{1}{g(X)} [-f(X) + y_m^{(n)} - g(X)u_{pd} + K^T \bar{u}_{pd} + u_{pd}^{(n)} - e^{(n)}] \quad (8)$$

که در آن،  $y_m^{(n)}$  بیان کننده مشتقات زمانی  $n$  ام  $y_m$  و  $K = [k_n, k_{n-1}, \dots, k_1]^T_{n \times 1}$  می‌باشد. با جایگذاری (۸) در (۱) معادله مشخصه دینامیک پسخور خطا به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{pd}^{(n)} + k_1 u_{pd}^{(n-1)} + \dots + k_n u_{pd} = 0 \quad (9)$$

بردار  $K$  طوری تعیین می‌شود که (۹) هرویتز باشد. از آنجایی که  $u_{pd}$  تابعی از خطا و مشتق

$$x^{(n)} = y_m^{(n)} + K^T \bar{u}_{pd} + u_{pd}^{(n)} - e^{(n)} + g(X)(u - u^*) + d(t) \quad (10)$$

با استفاده از (۱۰) و با ساده سازی آن، رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$u_{pd}^{(n)} = -K^T \bar{u}_{pd} + g(x)[u^* - u] - d(t) \quad (11)$$

که در آن،  $u$  سیگنال کنترلی اعمالی به سیستم می‌باشد. هنگامی که  $u$  به مقدار ایده آل خود،  $u^*$  میل کند با استفاده از (۱۱) و (۱)،

دینامیک خروجی کنترل کننده کلاسیک به صورت زیر به دست می

آید:

$$\theta_{f_n} = 2\bar{\theta}_{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-2} C_i \cdot \bar{\theta}_i + \varepsilon^* + \bar{\Gamma}_{n-1} \cdot \bar{\theta}_{n-1} \quad (۱۶)$$

$$\theta_{f_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-2} C_i \cdot \bar{\theta}_i \quad (۱۷)$$

$$\theta_{f_i} = C_i \bar{\theta}_i \quad \text{for } i = 1, \dots, n-2 \quad (۱۸)$$

$$\dot{u}_{pd} = \Lambda \bar{u}_{pd} + B \left[ u^* - u - \frac{d(t)}{g(X)} \right] \quad (۱۲)$$

که در آن ماتریس  $\Lambda$  به فرم همبسته و بردار  $B$  به صورت زیر به

دست می آید:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ -k_n - k_{n-1} & \dots & \dots & -k_2 - k_1 \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(X) \end{bmatrix}$$

که در روابط بالا  $\bar{\theta}_i$  کران بالای پارامترهای بهینه  $i$ -ام، یا به عبارت بهتر  $\|\theta_i^*\| \leq \bar{\theta}_i$ ،  $\varepsilon^*$  کران بالای خطای بین سیستم فازی سلسله مراتبی ایده آل و تابع واقعی یا به عبارت بهتر  $|\varepsilon_f(x)| \leq \varepsilon^*$  که در آن  $\varepsilon_f(x) \triangleq f(x) - \theta_{n-1}^* \Gamma_{n-1}$  کران بالای تابع گاوسی و  $C_i$  ها کران بالای مشتق تابع گاوسی هستند.

مهمترین نتیجه‌ای که این قضیه در بر دارد، این است که برای تقریب‌های در نظر گرفته شده که ناشی از جملات مرتبه بالای بسط تیلور و برخی عبارات دیگر می‌باشد، حد بالا به صورت خطی-در-پارامتر می-تواند بیان شود.

حال سیستم تحت کنترل با استفاده از کنترل کننده پیشنهادی در شکل-۳ را در نظر گرفته و پایداری الگوریتم کنترلی را مورد بررسی قرار می-دهیم. قضیه ۲ که در ادامه مطرح می‌گردد، به این مسئله می‌پردازد. همچنین این قضیه ضمن تضمین پایداری سیستم تحت کنترل، قانون به-روزسانی پارامترها را نیز بیان می‌دارد.

**قضیه ۲:** سیستم غیرخطی مطرح شده در (۱) را تحت ساختار کنترلی شکل ۳ در نظر بگیرید که در آن سیستم فازی سلسله مراتبی با توابع عضویت گاوسی در نظر گرفته شده است. اگر قوانین به‌روزسانی پارامترها را طبق روابط (۱۹) تا (۲۳) اعمال کنیم، آنگاه تمامی متغیرهای سیستم تطبیقی محدود باقی مانده و خطای ردیابی سیستم تحت کنترل نیز به سمت صفر میل می‌کند.

$$u_r(t) = \rho \cdot \text{sign}(\bar{u}_{pd}^T PB) + \hat{\theta}_f^T Y_f \text{sign}(\bar{u}_{pd}^T PB) \quad (۱۹)$$

$$\hat{\theta}_{n-1} = \eta_{n-1} \bar{u}_{pd}^T PB \cdot \left( \hat{\Gamma}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{n-1}}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \right) \quad (۲۰)$$

$$\hat{\theta}_i = \eta_i \bar{u}_{pd}^T PB \cdot \left( \hat{\theta}_{n-1}^T \left( \frac{\partial \Gamma_{n-1}}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \right) \right)^T ; i = 1, \dots, n-2 \quad (۲۱)$$

$$\hat{\theta}_f = \eta_f \cdot |\bar{u}_{pd}^T PB| \cdot Y_f \quad (۲۲)$$

$$\dot{\rho} = \eta_p \cdot |\bar{u}_{pd}^T PB| \quad (۲۳)$$

همان‌طور که در بخش ۳ اشاره شد، پارامترهای لایه‌های میانی کنترل کننده فازی سلسله مراتبی به صورت غیرخطی در پارامتر در خروجی ظاهر می‌شوند. این امر سبب می‌شود تا استخراج قانون تطبیق با استفاده از تابع لیاپانوف به طور مستقیم ممکن نباشد. لذا از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۱[۱۳]:** اگر خطای تخمین پارامترها را به صورت  $\hat{\theta} \triangleq \theta^* - \hat{\theta}$  تعریف کنیم خطای تخمین تابع یعنی  $\varepsilon(x) \triangleq f(x) - \hat{f}(x)$  هنگامی که از سیستم فازی سلسله مراتبی با توابع عضویت گاوسی برای تخمین تابع استفاده می‌شود به صورت (۱۴) می‌تواند بیان شود:

$$\varepsilon(x) = \hat{\theta}_{n-1}^T \left( \hat{\Gamma}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{n-1}}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \right) + \hat{\theta}_{n-1}^T \left( \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{n-1}}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \right) + R \quad (۱۴)$$

که در آن  $R$  یک عبارت باقیمانده است که شرط زیر را برقرار می‌سازد:

$$|R| \leq \theta_f^* \cdot Y_f \quad (۱۵)$$

که در رابطه (۱۵)  $\theta_f^*$  یک بردار ثابت نامعلوم ولی کراندار از کران‌های بالای پارامترهای بهینه و برخی حدود بالای ثابت به‌صورت  $\theta_f^* = [\theta_{f_n}, \theta_{f_{n-1}}, \dots, \theta_{f_1}]^T$  که عناصر آن در روابط (۱۶)-(۱۸) تعریف شده‌اند و  $Y_f = [1, \|\hat{\theta}_{n-1}\|, \|\hat{\theta}_{n-2}\|, \dots, \|\hat{\theta}_1\|]^T$  بردار تابعی معلوم است.

$$\frac{d(t)}{g(x)} \Big] - \frac{1}{\eta_{n-1}} \tilde{\theta}_{n-1}^T \dot{\hat{\theta}}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*)$$

اثبات:

تابع لیاپانوف مثبت معینی به فرم (۲۴) در نظر گرفته شده است:

$$V = \frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T P \bar{u}_{pd} + \frac{1}{2\eta_{n-1}} \tilde{\theta}_{n-1}^T \tilde{\theta}_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{1}{2\eta_p} (\dot{\rho})^2 \quad (24)$$

حال، اگر روابط به‌روزرسانی (۱۹) تا (۲۳) را در (۲۹) جایگذاری کنیم، رابطه (۳۰) نتیجه خواهد شد:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B [R - u_r -$$

که در آن،  $\tilde{\theta}_{n-1}$  خطای پارامترهای لایه آخر کنترل کننده فازی سلسله مراتبی،  $\tilde{\theta}_i$  خطای پارامترهای لایه‌های کنونی کنترل کننده فازی سلسله مراتبی،  $\tilde{\theta}_f$  خطای پارامترهای مرتبه اول،  $\tilde{\theta}_p$  خطای پارامترهای مرتبه دوم،  $\rho$  پارامتر فازی سلسله مراتبی است. توجه شود که چون پارامترهای لایه آخر سلسله مراتبی به صورت خطی-در-پارامتر و پارامترهای لایه‌های دیگر به صورت غیرخطی-در-پارامتر می‌باشند لذا به صورت جداگانه در تابع لیاپانوف در نظر گرفته شده‌اند. با گرفتن مشتق زمانی از تابع لیاپانوف پیشنهادی، (۲۵) به دست خواهد آمد:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T P \dot{\bar{u}}_{pd} + \frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T P \dot{\bar{u}}_{pd} - \frac{1}{\eta_{n-1}} \tilde{\theta}_{n-1}^T \dot{\hat{\theta}}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*) \quad (25)$$

با جایگذاری دینامیک پسخور خطا از (۱۲) در (۲۲)، رابطه (۲۳) به

دست می‌آید:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T \Lambda^T P \bar{u}_{pd} + \frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T P \Lambda \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B \left[ u^* - u - \frac{d(t)}{g(x)} \right] - \frac{1}{\eta_{n-1}} \tilde{\theta}_{n-1}^T \dot{\hat{\theta}}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*) \quad (26)$$

معادله لیاپانوف را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Lambda^T P + P \Lambda = -Q \quad (27)$$

که در آن،  $P$  و  $Q$  ماتریس‌های مثبت معین و متقارن می‌باشند. با

استفاده از معادله لیاپانوف تعریف شده در (۲۷) و جایگذاری آن در (۲۶)،

رابطه (۲۸) به دست می‌آید:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B [u^* - u - \frac{d(t)}{g(x)}] - \frac{1}{\eta_{n-1}} \tilde{\theta}_{n-1}^T \dot{\hat{\theta}}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*) \quad (28)$$

چنانچه  $u$  را طبق (۴) در (۲۸) جایگذاری کنیم، با توجه به اینکه

سیستم فازی سلسله مراتبی سعی در تخمین سیگنال کنترلی ایده‌آل (۸)

دارد، لذا با توجه به قضیه ۱ و رابطه (۱۴) به رابطه (۲۹) خواهیم رسید:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B [\varepsilon - \frac{d(t)}{g(x)}] - \frac{1}{\eta_{n-1}} \tilde{\theta}_{n-1}^T \dot{\hat{\theta}}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*) = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B \left[ \tilde{\theta}_{n-1}^T \left( \hat{\Gamma}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{n-1}}{\partial \theta_i^*} |_{\theta=\hat{\theta}} \tilde{\theta}_i \right) + \tilde{\theta}_{n-1}^T \left( \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \Gamma_{n-1}}{\partial \theta_i^*} |_{\theta=\hat{\theta}} \tilde{\theta}_i \right) \right] + R - u_r - \quad (29)$$

تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B R + \bar{u}_{pd}^T P B [-\rho \cdot \text{sign}(\bar{u}_{pd}^T P B) - \tilde{\theta}_f^T Y_f \text{sign}(\bar{u}_{pd}^T P B) - \frac{d(t)}{g(x)}] - \frac{1}{\eta_f} (\theta_f^* - \hat{\theta}_f)^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*) = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \bar{u}_{pd}^T P B R - \rho \cdot |\bar{u}_{pd}^T P B| - \tilde{\theta}_f^T Y_f |\bar{u}_{pd}^T P B| - \bar{u}_{pd}^T P B \frac{d(t)}{g(x)} - \frac{1}{\eta_f} (\theta_f^* - \hat{\theta}_f)^T \dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\eta_p} \dot{\rho}(\rho - \rho^*) \leq -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + |\bar{u}_{pd}^T P B| |R| - \rho \cdot |\bar{u}_{pd}^T P B| - \tilde{\theta}_f^T Y_f |\bar{u}_{pd}^T P B| + |\bar{u}_{pd}^T P B| \frac{D}{M} - \frac{1}{\eta_f} \theta_f^{*T} (\eta_f |\bar{u}_{pd}^T P B| Y_f) + \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T (\eta_f |\bar{u}_{pd}^T P B| Y_f) + \frac{1}{\eta_p} (\eta_p |\bar{u}_{pd}^T P B|) \rho - \frac{1}{\eta_p} \rho^* (\eta_p |\bar{u}_{pd}^T P B|) \leq -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + |\bar{u}_{pd}^T P B| \theta_f^{*T} Y_f - \rho |\bar{u}_{pd}^T P B| - \tilde{\theta}_f^T Y_f |\bar{u}_{pd}^T P B| + |\bar{u}_{pd}^T P B| \frac{D}{M} - \theta_f^{*T} |\bar{u}_{pd}^T P B| Y_f + \rho |\bar{u}_{pd}^T P B| - \rho^* |\bar{u}_{pd}^T P B| = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} - \rho^* |\bar{u}_{pd}^T P B| + \frac{D}{M} |\bar{u}_{pd}^T P B| \end{aligned} \quad (30)$$

از آنجایی که  $\rho^*$  یک عدد مثبت نامعلوم می‌باشد و می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که  $\rho^* > \frac{D}{M}$  برقرار باشد. در این صورت داریم:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} \quad (31)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود مشتق تابع لیاپانوف غیرمثبت،  $\dot{V} \leq 0$  شد. لازم به ذکر است که در (۳۰) از رابطه (۱۵) قضیه ۱ و همچنین محدود بودن سیگنال‌های اغتشاش از بالا و بهره کنترلی از پایین استفاده شده است. رابطه (۳۱) همگرایی پارامترهای تالی کنترل کننده فازی سلسله مراتبی را به مقادیر بهینه تضمین کرده و ضرورت صفر شدن خطای پسخور خطا را نشان می‌دهد. از آنجا که  $u_{pd}$  معادله دیفرانسیلی مرتبه اولی بر حسب خطا است، صفر شدن آن صفر شدن خطا را اثبات می‌کند. حال برای نشان دادن صفر شدن مجانبی خطا از لم باربالات استفاده می‌کنیم. بدین منظور تابع پیوسته و غیرمنفی  $V_1$  را مانند زیر تعریف می‌شود:

اعمال قوانین به‌روز رسانی مطرح شده در (۳۴) تا (۳۷) باعث ایجاد یک سری پارامترها اضافی شده و در نتیجه اثبات مطرح شده در قضیه ۲ را تحت تاثیر قرار می‌دهد و لازم است مجدداً تحت بررسی قرار گیرد. به عبارت دقیق‌تر رابطه (۳۰) به صورت (۳۸) درمی‌آید:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} + \sigma \bar{\theta}_{n-1}^T \bar{\theta}_{n-1} + \sigma \sum_{i=1}^{n-2} \bar{\theta}_i^T \bar{\theta}_i + \sigma \bar{\theta}_f^T \bar{\theta}_f - \sigma \rho (\rho - \rho^*) \quad (38)$$

با اندکی ساده‌سازی ریاضی خواهیم داشت:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} - \frac{\sigma}{2} [\bar{\theta}_{n-1}^T \bar{\theta}_{n-1} + \bar{\theta}_{n-1}^T \bar{\theta}_{n-1} - \theta_{n-1}^{*T} \theta_{n-1}^*] - \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^{n-2} [\bar{\theta}_i^T \bar{\theta}_i + \bar{\theta}_i^T \bar{\theta}_i - \theta_i^{*T} \theta_i^*] - \frac{\sigma}{2} [\bar{\theta}_f^T \bar{\theta}_f + \bar{\theta}_f^T \bar{\theta}_f - \theta_f^{*T} \theta_f^*] - \frac{\sigma}{2} [(\rho - \rho^*)^2 + \rho^2 - \rho^{*2}] \quad (39)$$

رابطه (۳۹) را با تعریف متغیرهای جدید و عملیات ریاضی می‌توان به صورت (۴۰) بازنویسی کرد:

$$\dot{V} \leq -cV + \rho_r \quad (40)$$

که در آن،

$$\rho_r = \frac{\sigma}{2} \theta_{n-1}^{*T} \theta_{n-1}^* + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i^{*T} \theta_i^* + \frac{\sigma}{2} \theta_f^{*T} \theta_f^* + \frac{\sigma}{2} \rho^{*2} \quad (41)$$

$$c = \frac{\min(\sigma, 1) \cdot \min(\eta_i, \eta_f, \eta_p)}{2} \quad (42)$$

بنابراین، تابع لیاپانوف تا زمانی که  $V \leq \rho_r/c$  است همگرا می‌شود. مقدار  $c$  مقدار کوچکتر از یک است که باعث می‌شود کسر مذکور بزرگتر شود و از آنجا که مقدار آن وابسته به نرخ‌های آموزش و  $\sigma$  است می‌توان این بازه را به اندازه کافی بزرگ طراحی کرد. بزرگ شدن این بازه منجر به بزرگ شدن ناحیه جذب تابع لیاپانوف می‌شود. در نتیجه با انتخاب مقدار کوچک  $c$  ناحیه جذب بزرگ می‌شود. بنابراین ناحیه‌ای از شرایط اولیه که به ازای آن‌ها می‌توان پایداری سیستم را تضمین کرد بزرگتر می‌شود.

## ۲- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش به شبیه‌سازی دو مثال کاربردی می‌پردازیم و روش کنترلی پیشنهادی را بر روی آنها اعمال می‌کنیم. برای نشان دادن کارایی روش‌های پیشنهاد شده، آنها را با کنترل کننده کلاسیک مدل‌گزشی [۱۵] مقایسه کرده‌ایم. مثال اول بازوی ربات انعطاف پذیر است که یک سیستم مکانیکی پر استفاده در صنعت و محیط‌های دانشگاهی است. مثال دوم سیستم تعلیق خودروی یک چهارم فعال است که در صنعت و مقالات بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال اول: شکل ۴ شماتیک کلی بازوی ربات انعطاف پذیر را نشان می‌دهد. مجموعه  $q = \{q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2\}$  را به عنوان مجموعه مختصات توسعه یافته برای این سیستم تعریف می‌شود که در آن  $q_1$  زاویه بازو،  $q_2 = \left(\frac{1}{m}\right) \theta_1$  تغییر زاویه ای روتور،  $m$  نسبت چرخ دنده،  $q_2 - q_1$  جابجایی الاستیکی بازو می‌باشند [۱۶].

$$V_1(t) = V(t) - \int_0^t (\dot{V}(t) + \frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd}) dt \quad (32)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V}_1(t) = -\frac{1}{2} \bar{u}_{pd}^T Q \bar{u}_{pd} \quad (33)$$

سمت راست رابطه (۱۲) از عبارات محدود تشکیل شده است. از طرف دیگر  $V_1$  از سمت حد پایین به صفر محدود است و  $\dot{V}_1 \leq 0$  پس با توجه به لم باربالات هنگامی که زمان به سمت بینهایت میل نماید  $V_1$  به سمت صفر میل می‌کند و در نتیجه خطای پسخور و در نهایت خطای ردیابی به سمت صفر همگرا می‌شود. ▲

**تعمیم قضیه:** در قضیه بیان شده کنترل کننده فازی سلسله مراتبی به صورت  $n-1$  در نظر گرفته شده است. اما در واقع قضیه این قابلیت را دارد که به هر کنترل کننده فازی سلسله مراتبی با هر تعداد لایه اعمال شود. فقط کافی است که در (۲۰) حد بالای مجموع (سیگما) که نشان دهنده تعداد لایه‌ها منهای یک است تغییر کند. مهمترین نتیجه‌ای که این تعمیم دارد این است که می‌توان آن را به کنترل کننده فازی کلاسیک نیز اعمال کرد. بدین صورت که چون تعداد لایه‌ها برابر ۱ است حد بالای مجموع برابر با صفر شده و مجموع صفر می‌شود و فقط پارامترهای لایه آخر به‌روز رسانی می‌شود. بنابراین همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، قضیه حالت کلی داشته و می‌توان آن را به هر ساختاری از سیستم فازی اعمال کرد.

## ۶- مقاوم‌سازی قوانین تطبیق

در بخش قبل در قضیه مطرح شده فرض کردیم که سیستم فازی سلسله مراتبی کنترل کننده مطلوب را با تقریب بسیار خوبی تخمین می‌زند. اما در عمل خطای مدل‌سازی همیشه و به‌طور اجتناب‌ناپذیری وجود دارد که ناشی از عوامل و نامعینی‌هایی است که در نظر گرفته نشده است و ممکن است باعث ایجاد ناپایداری در روش آموزش گردند. برای اجتناب از این وضعیت، روش‌هایی برای مقاوم‌سازی روش‌های آموزشی در نظر گرفته می‌شود [۱۴]. در این مقاله از یکی از مهمترین این روش‌ها تحت عنوان  $\sigma$ -modification استفاده شده است. بدین ترتیب قوانین به‌روز رسانی که در قضیه ۲ در روابط (۲۰) تا (۲۳) مطرح شدند به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\dot{\hat{\theta}}_{n-1} = \eta_{n-1} \bar{u}_{pd}^T P B \left( \hat{r}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial r_{n-1}}{\partial \theta_i^*} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \hat{\theta}_i \right) - \sigma \eta_{n-1} \hat{\theta}_{n-1} \quad (34)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \eta_i \bar{u}_{pd}^T P B \left( \hat{\theta}_{n-1}^T \left( \frac{\partial r_{n-1}}{\partial \theta_i^*} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right) \right) - \sigma \eta_i \hat{\theta}_i; \text{ for } i = 1, \dots, n-2 \quad (35)$$

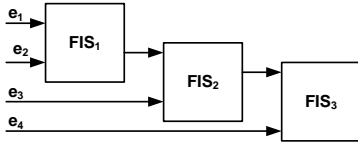
$$\dot{\hat{\theta}}_f = \eta_f |\bar{u}_{pd}^T P B| Y_f - \sigma \eta_f \hat{\theta}_f \quad (36)$$

$$\dot{\rho} = \eta_p |\bar{u}_{pd}^T P B| - \sigma \eta_p \rho \quad (37)$$

اغتشاش در نظر گرفته شده برای این شبیه‌سازی به صورت رابطه (۴۷) در نظر گرفته شده است.

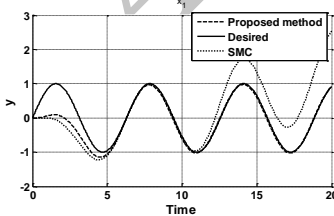
$$d(t) = \begin{cases} 4 & t > 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (47)$$

همان‌طور که در رابطه (۴۵) قابل مشاهده است سیستم داری ۴ متغیر حالت می‌باشد لذا سیستم فازی سلسله مراتبی با سه بلوک فازی مانند شکل ۵ برای آن در نظر گرفته شده است.



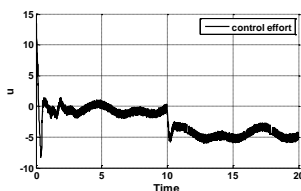
شکل ۵: بلوک دیاگرام کنترل کننده فازی سلسله مراتبی در نظر گرفته شده

در شبیه‌سازی‌ها شرایط اولیه متغیرهای اولیه را صفر در نظر گرفتیم. سیگنال مطلوبی که جهت ردیابی مد نظر قرار داده شده است سیگنال سینوسی می‌باشد. در شکل ۶ نتیجه ردیابی سیستم بازوی ربات انعطاف‌پذیر به سیگنال سینوسی و در شکل ۸ پاسخ پله آن با کنترل کننده پیشنهاد شده و همچنین نتایج با کنترل کننده مدل‌گزشی مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود کنترل کننده پیشنهادی در مقایسه با کنترل کننده مدل‌گزشی در حضور اغتشاش جواب بسیار مطلوبی داده است. در واقع کنترل کننده پیشنهاد شده در مقابله با اغتشاش نسبت به کنترل کننده مدل‌گزشی مقاوم‌تر است. لازم به ذکر است که در اینجا ما اغتشاش را آنقدر بزرگ در نظر گرفته‌ایم تا به مرزی برسیم که کنترل کننده مدل‌گزشی جوابگو نباشد در حالی که همان‌طور که دیده می‌شود کنترل کننده پیشنهادی پاسخ مطلوب می‌دهد. دلیل این امر وجود جمله‌ای در سیگنال کنترلی به عنوان جمله مقاوم و همچنین تطبیقی بودن کنترل کننده پیشنهاد شده می‌باشد. از طرف دیگر استفاده از کنترل کننده فازی سلسله مراتبی در مقایسه با سیستم فازی معمولی منجر به کاهش تعداد قوانین از ۸۱ قانون به ۲۷ قانون و در نتیجه کاهش تعداد پارامترها شده است.

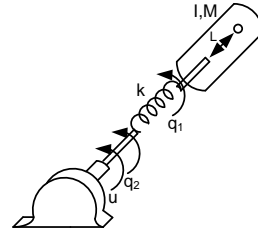


شکل ۶: ردیابی سینوسی مثال اول: (-) روش پیشنهادی. (-)

سیگنال مطلوب. (...) روش مدل‌گزشی



شکل ۷: سیگنال کنترلی مربوط به ردیابی سینوسی مثال اول



شکل ۴: شماتیک بازوی ربات انعطاف پذیر

با استفاده از معادلات اوپلر، مدل تحلیلی بازوی انعطاف پذیر به صورت (۴۳) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgL\sin(q_1) + K(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) = u \end{cases} \quad (43)$$

معادلات فضای حالت را می‌توان به صورت (۴۴) تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{K}{I}(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (44)$$

متغیرهای حالت به این صورت در نظر گرفته شده اند که  $x_1 = q_1$  و  $x_3 = q_2$ . فضای حالت ارایه شده در (۴۴)، شرایط سیستم (۱) را برآورده نمی‌کند. به عبارت دیگر سیستم را باید به فرم نرمال در آوریم. سیستم به فرم نرمال در (۴۵) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 &= -\left(\frac{MgL}{I}\cos(z_1) + \frac{K}{I} + \frac{K}{J}\right)z_3 - \\ &\frac{MgL}{I}\left(z_2^2 - \frac{K}{J}\right)\sin(z_1) + \frac{K}{IJ}u \end{aligned}$$

که در آن متغیرهای حالت به صورت رابطه (۴۶) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (46)$$

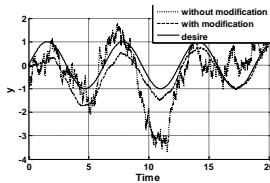
$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{K}{I}(x_1 - x_3) \\ z_4 &= -\frac{MgL}{I}x_2\cos(x_1) - \frac{K}{I}(x_2 - x_4) \end{aligned}$$

مقادیر عددی در نظر گرفته شده برای پارامترها در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر عددی پارامترهای سیستم ربات انعطاف پذیر [۱۶]

| پارامترها | مقادیر عددی         |
|-----------|---------------------|
| $g$       | $9.8 \text{ m/s}^2$ |
| $M$       | $1 \text{ Kg}$      |
| $K$       | $1 \text{ N/m}$     |
| $J$       | $1 \text{ Kg m}^2$  |
| $I$       | $1 \text{ Kg m}^2$  |
| $L$       | $1 \text{ m}$       |





شکل ۱۰: پاسخ مثال اول در حضور نویز با و بدون استفاده از روش

مقاوم‌سازی

**مثال دوم:** در این مثال مسئله رگولاسیون سیستم تعلیق یک چهارم خودرو را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در شکل ۱۱ شماتیک کلی این سیستم نشان داده شده است. در (۴۹) معادلات حاکم بر سیستم تعلیق یک چهارم آورده شده است [۱۷]. در این معادلات  $x_1$  و  $x_2$  به ترتیب جابجایی و سرعت عمودی جرم معلق و  $x_3$  و  $x_4$  به ترتیب جابجایی و سرعت عمودی جرم غیرمعلق،  $k_s$  ثابت مشخصه نیروی غیرخطی فنر،  $B_s$  ثابت مشخصه میرایی غیرخطی کمک‌فنر،  $k_t$  ثابت فنری تایر خودرو،  $Z_r$  دامنه دست انداز،  $m_s$  و  $m_u$  به ترتیب جرم‌های معلق و غیرمعلق می‌باشند.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_s} (-k_s(x_1 - x_3)^3 - B_s(x_2 -$$

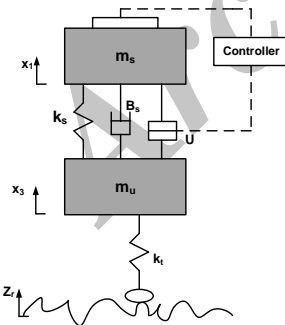
$$x_4)^5 + u(t)) \tag{49}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_u} (k_s(x_1 - x_3)^3 + B_s(x_2 -$$

$$x_4)^5 - K_t x_3 + K_t Z_r - u(t)) + d(t)$$

$$y = x_1$$



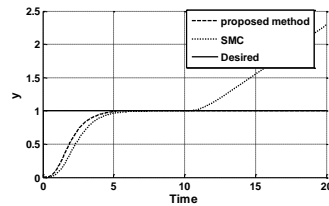
شکل ۱۱: شماتیک سیستم تعلیق خودرو یک چهارم

همان‌طور که مشاهده می‌شود معادلات به فرم نرمال نشان داده شده در (۱) نیستند و مانند مثال قبل لازم است به شکل در آورده شوند. در (۵۰) روابط به شکل ۱ درآمده نشان داده شده است [۱۷].

$$\dot{z}_1 = z_2$$

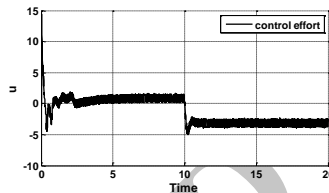
$$\dot{z}_2 = z_3 \tag{50}$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$



شکل ۸: پاسخ پله مثال اول: (---) روش پیشنهادی. (-) سیگنال

مطلوب. (...) روش مدل‌گزینی



شکل ۹: سیگنال کنترلی مربوط به پاسخ پله مثال اول

لازم به توضیح است که در لحظات اولیه که پارامترهای سیستم فازی سلسله مراتبی هنوز آموزش نیافته‌اند کنترل کننده PD نقش اصلی در کنترل را دارد و لذا پاسخ مناسب در لحظات اولیه وابسته به طراحی پارامترهای کنترل کننده PD دارد. در شکل‌های ۷ و ۹ سیگنال‌های کنترلی شبیه‌سازی‌ها نشان داده شده‌اند. همان‌طور که قابل مشاهده است سیگنال کنترلی دارای نوسان زیادی است که ناشی از وجود جمله مقاوم در کنترل کننده است. از آنجا که این جمله داری تابع علامت sign است، پدیده وزوزا اتفاق می‌افتد برای اجتناب از ایجاد پدیده وزوز و از بین بردن نوسانات می‌توان از تابع اشباع sat استفاده کرد. این تابع نوسانات را از بین می‌برد ولی باعث ایجاد خطای ماندگار بسیار اندکی می‌شود.

همچنین در شکل ۱۰ برای نشان دادن کاربرد روش مقاوم‌سازی ذکر شده نویز فرآیند به سیستم اضافه کرده‌ایم بدین ترتیب معادلات سیستم در رابطه (۴۵) با رابطه (۴۸) جایگزین می‌شود.

$$\dot{z}_1 = z_2 + n(t)$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \tag{48}$$

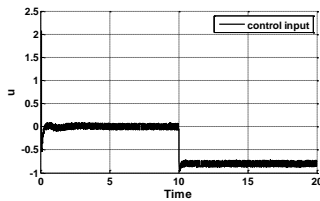
$$\dot{z}_4 = -\left(\frac{MgL}{I} \cos(z_1) + \frac{K}{I} + \frac{K}{J}\right) z_3 -$$

$$\frac{MgL}{I} \left(z_2^2 - \frac{K}{J}\right) \sin(z_1) + \frac{K}{IJ} u + n(t)$$

که در آن  $n(t)$  با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ است. در واقع

در این شبیه‌سازی مقدار انحراف معیار نویز را به قدری افزایش می‌دهیم تا موجب بروز پدیده گریز پارامتری شود و در این حالت  $\sigma$ -modification مانع خارج شدن پارامترها از ناحیه مطلوب می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، به دلیل مقدار قابل توجه نویز پاسخ‌ها با پاسخ مطلوب فاصله دارند اما روش مقاوم‌سازی منجر به جلوگیری از گریز پارامترها از ناحیه همگرایی شده است.

<sup>1</sup> Chattering



شکل ۱۳: سیگنال کنترلی مربوط به مثال دوم

در این مثال شرایط اولیه جابجایی عمودی در ۱۰ سانتی‌متری قرار داده شده است. همانند آنچه که در مثال قبل ذکر شد در لحظه‌های اولیه که پارامترهای سیستم فازی سلسله مراتبی هنوز آموزش ندیده‌اند کنترل کننده PD نقش اصلی را در کنترل دارد و در نتیجه پاسخ مناسب در شروع کار سیستم وابسته به طراحی پارامترهای کنترل کننده PD است. در شکل ۱۳ نیز سیگنال کنترلی مربوط به این مثال نشان داده می‌شود. در این مثال نیز سیگنال کنترلی بخاطر پدیده وزوز دارای نوسان زیادی است. در اینجا نیز برای اجتناب از ایجاد پدیده وزوز و از بین بردن نوسانات می‌توان از تابع اشباع sat استفاده کرد که این کار باعث ایجاد خطای ماندگار بسیار اندکی می‌شود.

#### ۸- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق کنترل کننده تطبیقی فازی سلسله مراتبی در کنار کنترل کننده کلاسیک PD برای یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی تک ورودی-تک خروجی در حضور اغتشاش محدود ارائه کرده‌ایم. کنترل کننده PD در واقع برای ایجاد یک حاشیه امن در لحظات اولیه که سیستم فازی به طور کامل آموزش ندیده است بسیار مناسب می‌باشد. در واقع ایده کنترل کننده مطرح شده بر پایه آموزش پسخور خطا می‌باشد اما بجای آموزش پارامترهای سیستم فازی سلسله مراتبی با روش گرادیان نزولی که در آموزش پسخور خطا مرسوم است، از تابع لیپانوف برای استخراج قوانین به‌روز رسانی پارامترها استفاده شده است. تابع لیپانوف مطرح شده باعث تضمین پایداری سیستم تحت کنترل می‌شود. از آنجا که خطای پارامترها نیز در تابع لیپانوف در نظر گرفته شده است لذا همگرایی پارامترها به سمت مقدار مطلوبشان نیز تضمین می‌گردد. همچنین جهت جلوگیری از خروج پارامترها از ناحیه همگرایی از روش *modification - σ* استفاده شده است. اثبات مطرح شده پس از اعمال *modification - σ* دوباره مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که تابع لیپانوف مطرح شده در ناحیه ذکر شده باعث تضمین پایداری می‌گردد. همچنین نشان داده شده است که روابط مطرح شده حالت کلی داشته و به هر سیستم فازی سلسله مراتبی با هر تعداد لایه و به خصوص به سیستم فازی معمولی قابل اعمال است. استفاده از کنترل کننده فازی سلسله مراتبی در مقایسه با کنترل کننده فازی معمولی باعث کاهش تعداد قواعد و در نتیجه پارامتر می‌شود.

لذا دستاوردهای مقاله را می‌توان بدین صورت ذکر کرد:

- ارائه سیستم فازی سلسله مراتبی تطبیقی مبتنی بر آموزش پسخور خطا

$$\dot{z}_4 = -\frac{k_t}{m_u} [k_s(x_1 - x_3)^3 + B_s(x_2 - x_4)^5 - k_t] + \frac{k_t}{m_u} u(t) + d(t)$$

که در آن، متغیرها به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$x_1 = \frac{1}{m_s} (z_1 + \frac{m_u z_3}{k_t})$$

$$x_2 = \frac{1}{m_s} (z_2 + \frac{m_u z_4}{k_t}) \quad (51)$$

$$x_3 = -\frac{z_3}{k_t}$$

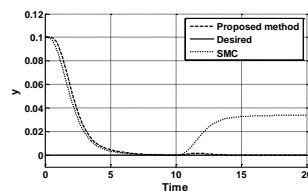
$$x_4 = -\frac{z_4}{k_t}$$

مقادیر متغیرهای سیستم نیز که در شبیه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند در جدول ۲ آمده است. از آنجا که در این مثال نیز سیستم ۴ متغیر حالت دارد، کنترل کننده سلسله مراتبی در این مثال نیز مانند شکل ۵ است. همچنین شرایط اولیه متغیرهای حالت نیز صفر فرض شده است. همچنین اغتشاش وارد بر سیستم نیز مانند (۴۷) در نظر گرفته شده است.

جدول ۲: مقادیر عددی پارامترهای سیستم تعلیق یک چهارم [۱۷]

| پارامترها | مقادیر عددی |
|-----------|-------------|
| $m_u$     | 40 Kg       |
| $m_s$     | 400 Kg      |
| $B_s$     | 1000 Ns/m   |
| $k_s$     | 18000 N/m   |
| $k_t$     | 200000 N/m  |

در شکل ۱۲ نتایج شبیه‌سازی آورده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت مقایسه کنترل کننده پیشنهادی با کنترل کننده مدل‌غزشی نشان می‌دهد که کنترل کننده ما نسبت به کنترل کننده کلاسیک در مقابل اغتشاش مقاوم‌تر می‌باشد. در این مثال نیز اغتشاش آنقدر بزرگ در نظر گرفته شده است تا به مرز برسیم که کنترل کننده مدل‌غزشی جوابگو نباشد در حالی که همان‌طور که دیده می‌شود کنترل کننده پیشنهادی پاسخ مطلوبی می‌دهد. همچنین با استفاده از کنترل کننده فازی سلسله مراتبی تعداد قوانین فازی در مقایسه با سیستم فازی معمولی از ۸۱ قانون به ۲۷ قانون کاهش پیدا کرده است که منجر به کاهش تعداد کل پارامترهای آموزش پذیر شده است.



شکل ۱۲: رگولاسیون مثال دوم: (---) روش پیشنهادی. (-) سیگنال

مطلوب. (---) روش مدل‌غزشی

- [14] Farrell J. A., Polycarpou M. M., Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches. John Wiley and Sons INC. Publication, 2006.
- [15] Khalil H. K., 'Nonlinear Systems' (3rd Edition). PTR Prentice-Hall, 2001.
- [16] Khanesar M. A., Teshnehlab M., Kaynak O., Direct Model Reference Takagi-Sugeno Fuzzy Control of SISO Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Fuzzy Syst. 2011;19 (5): 914-924.
- [17] Zahiripour S. A., Jalali A. A., Designing an optimal proportional-integral sliding surface for a quarter car active suspension system with suspension components possessing uncertain constants and nonlinear characteristics, NASHRIYYAH-I MUHANDISI-I BARQ VA MUHANDISI-I KAMPYUTAR-I 2012, 10 (2).

- تضمین پایداری سیستم تحت کنترل در ردیابی سیگنال مرجع
- تضمین همگرایی پارامترهای سیستم فازی سلسله مراتبی به مقادیر بهینه
- افزایش مقاوم بودن الگوریتم کنترلی ارابه شده در مقایسه با کنترل کننده‌های کلاسیک
- کاهش تعداد قواعد و پارامترهای سیستم فازی
- قابلیت اعمال قضیه مطرح شده به هر ساختار سیستم سلسله مراتبی و حتی به سیستم‌های فازی کلاسیک
- مقاوم‌سازی قوانین به‌روز رسانی پارامترها برای اجتناب از وقوع پدیده گریز پارامتری

کنترل کننده پیشنهادی بر روی دو سیستم (بازوی ربات انعطاف پذیر و سیستم تعلیق خودرو) اعمال شده است. در شبیه‌سازی‌ها کنترل کننده پیشنهادی با روش مدل‌غزشی مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی قابلیت روش پیشنهاد شده را هنگامی که دامنه اغتشاش به اندازه کافی بزرگ باشد را نشان می‌دهد.

## مراجع

- [1] Raju G. V. S., Zhou J., Kisner R. A., Hierarchical fuzzy control, Int. J. Control 1991;54 (5): 1201-1216.
- [2] Wang L. X., Universal approximation by hierarchical fuzzy systems, Fuzzy Set Syst. 1998; 93 (2): 223-230.
- [3] Wang L. X., Analysis and design of hierarchical fuzzy systems, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1999;7 (5): 617-624.
- [4] Wei C., Wang L. X. A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems, Inform. Sciences 2000; 123 (3-4): 241-248.
- [5] Joo M. G., Lee J. S., Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule, Fuzzy Set Syst. 2002; 130 (2): 175-188.
- [6] Torra V., A Review of the construction of hierarchical fuzzy systems, Int. J. Intel. Syst. 2002; 17 (5): 531-543.
- [7] Wang D., Zeng X. J., Keane J. A., A Survey of Hierarchical Fuzzy Systems, Int. J. Comp. Cog. 2006; 4: 18-29.
- [8] Kawato M. A. Hierarchical neural-network model for control and learning of voluntary movement, Biol. Cybernet 1987; 57 pp. 169-85.
- [9] Aiko Miyamura Ideta., Stability of feedback error learning method with time delay, Neuro computing, 2006; 69(13-15) pp. 1645-54.
- [10] Aiko Miyamura, Hidenori Kimura., Stability of feedback error learning scheme, Syst Control Lett, 2002; 45(4) pp. 303-16.
- [11] Sabahi K., Teshnehlab M., shoorhedeli M.A., Recurrent fuzzy neural network by using feedback error learning approaches for LFC in interconnected power system Energy Conversion and Management, 2009; 50(4), pp. 938-946.
- [12] Teshnehlab M., Watanabe K., Neural network controller with flexible structure based on feedback error learning approach, Journal of Intelligent and Robotic Systems 1996; 15(4): 367-387.
- [13] Mansouri M., Teshnehlab M., Shoorehdeli M.A.. "Adaptive variable structure hierarchical fuzzy control for a class of high-order nonlinear dynamic systems." ISA transactions 2014.