

تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده غیرهمزمان برای سیستم‌های کلیدزنی خطی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر با زمان اقامت میانگین

مهدی سیاوش^۱، فرید شیخ الاسلام^۲، جواد عسگری^۳، شهرام حاج شیرمحمدی^۴

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، Mahdi.siavash@yahoo.com

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، Sheikh@cc.iut.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، J-askari@cc.iut.ac.ir

^۴ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، shahramhajshir@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳XX/X/X، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳XX/X/X)

چکیده: یکی از مهمترین مسائل مطرح در سیستم‌های کلیدزنی پایدارسازی سیستم‌های کلیدزنی خطی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر می‌باشد. از طرف دیگر در کنترل سیستم‌های کلیدزنی مبحث غیرهمزمانی و یا تاخیر سوئیچ نسبت به سوئیچ کنترل کننده همواره مشکلاتی در عمل برای پایداری و داشتن عملکرد مطلوب برای سیستم کلیدزنی ایجاد می‌کند. در این مقاله به بررسی پایداری سیستم کلیدزنی خطی آهسته دارای زیرسیستم‌های پایدار و پایدارناپذیر در حالت غیرهمزمانی دو سوئیچ پرداخته شده است. با استفاده از توابع شبه لیاپانوف شرایطی برای تضمین پایداری سیستم کلیدزنی در حالت پیوسته و گسسته بیان شده است که می‌توان با تعیین حداقل زمان لازم برای فعالیت زیرسیستم‌های پایدار بر حسب حداکثر زمان فعالیت زیرسیستم‌های ناپایدار و شیب افزایش و کاهش انرژی زیر سیستم‌ها، پایداری سیستم کلیدزنی را تضمین کرد. آخرین مسئله‌ی بررسی شده در این مقاله طراحی کنترل کننده‌های فیدبک حالتی است که بتوانند شرایط پایداری و همچنین شرایط مورد نظر طراح از جمله حداقل زمان فعالیت زیرسیستم‌های پایدار را فراهم کند. به منظور نشان دادن کارایی روش‌ها، شبیه‌سازی‌هایی در انتهای مقاله آورده شده است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های کلیدزنی خطی، پایداری نمایی، زیرسیستم‌های پایدارنشدنی، کنترل غیرهمزمان، زمان اقامت میانگین.

Asynchronous Control and Stabilization of Linear Switched Systems with Unstabilizable Subsystems by Average Dwell Time Approach

Mahdi Siavash, Farid Sheikholeslam, Javad Askari, Shahram hajshirmohammady

Abstract: Stabilization of switched linear systems is one of the most important problems in the field of switched systems. On the other hand, asynchronous switching between the controller and the system may lead to an unstable closed loop system or degrade the closed loop system's performance. In this paper the problem of stabilizing a switched system with both stabilizable and unstabilizable subsystems and asynchronous switching between the controller and the system is considered. Using Lyapunov-like functions, some criteria are presented to guarantee the stability of the switched system based on the activity time of the stable and unstable subsystems and maximum number of switchings in a given time interval for both discrete-time and continuous-time cases. The last issue, verified in this paper is the design of a state feedback controller which can provide stability criteria, as well as designer's desired criteria, including minimum activity time of the stable

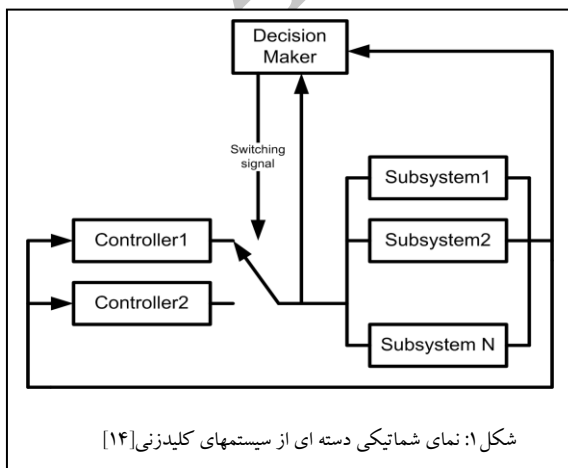
subsystems. In order to illustrate the effectiveness of the proposed method, simulation results are presented at the end of the paper.

Keywords: Linear switched systems, Exponential stability, Unstabilizable subsystem, Asynchronous switching, Average dwell time.

مشاهده می‌شود، این دسته از سیستم‌های کلیدزنی از تعدادی زیرسیستم و تعدادی کنترل کننده متناسب با هر زیرسیستم تشکیل شده است. هنگامی که زیرسیستم فعال تغییر پیدا می‌کند واحد تصمیم‌گیری^۷ و یا ناظر نیازمند مدت زمانی می‌باشد تا بتواند زیرسیستم فعال را شناسایی کند و متناسب با آن کنترل کننده مربوطه را در حلقه کنترلی قرار دهد. این درحالیست که در فاصله زمانی مذکور کنترل کننده مربوط به زیرسیستم قبلی فعال می‌باشد که امکان دارد برای زیرسیستم فعلی، منجر به ناپایداری شود.

بیشتر تلاش‌های انجام شده در زمینه کنترل غیرهمزمان سیستم‌های کلیدزنی مربوط به زیرسیستم‌هایی می‌باشد که پایدار می‌باشند و یا با استفاده از کنترل کننده‌هایی بتوان آن‌ها را پایدار کرد [۱۵، ۱۶]. در مرجع [۱۷]، با فرض اینکه تمام زیرسیستم‌ها پایدارشدنی می‌باشند شرایط پایداری با استفاده از توابع شبه لیاپانوف و قضیه زمان توقف میانگین ADT^۸ ارائه شده است.

اما در واقعیت بسیاری از سیستم‌ها ناپایدار می‌باشند که به طور ذاتی و یا به علت وجود نامعینی امکان پایدارسازی آن‌ها وجود ندارد، از این رو باید بتوان شرایطی را برای تضمین پایداری سیستم‌های کلیدزنی دارای چنین زیرسیستم‌هایی پیدا کرد. زیرسیستم‌هایی که امکان پایدارسازی آن‌ها وجود ندارند را می‌توان به چند گروه تقسیم‌بندی کرد. ساده‌ترین علتی که منجر به پایدارناپذیر شدن یک سیستم می‌شود، عدم کنترل-پذیری سیستم‌های ناپایدار می‌باشد. گروه دوم سیستم‌های ناپایداری هستند که به طور ذاتی کنترل‌پذیر هستند ولی به علت نامعینی که در سیستم وجود دارد به سیستم پایدارناپذیر تبدیل می‌شود. گروه سوم در بعضی از زیرسیستم‌ها به علت بروز عیب سیستم به سمت ناپایدار شدن می‌رود. در این بازه زمانی انرژی سیستم به طور مداوم افزایش می‌یابد و



شکل ۱: نمای شماتیکی دسته‌ای از سیستم‌های کلیدزنی [۱۴]

⁷ Decision Maker

⁸ Average Dwell Time

۱- مقدمه

سیستم‌های هایبرید دسته مهمی از سیستم‌های صنعتی را تشکیل می‌دهند که با استفاده از تعامل دینامیک‌های پیوسته و دینامیک‌های گسسته پیشامد توصیف می‌شوند. دسته پرکاربرد از این سیستم‌ها را سیستم کلیدزنی خطی تشکیل می‌دهد که از خانواده‌ای از زیرسیستم‌ها و یک ناظر^۱ تشکیل شده است، که وظیفه آن تولید سیگنال کلیدزنی و انجام سوئیچ بین زیرسیستم‌ها می‌باشد [۱، ۲]. برای مدل‌سازی و کنترل بسیاری از فرآیندهای دینامیکی از سیستم‌های کلیدزنی استفاده می‌کنند [۳-۷]. سیستم‌های کلیدزنی براساس نوع سیگنال کلیدزنی به دو دسته دلخواه و دارای محدودیت تقسیم بندی می‌شود. روش‌های بررسی پایداری در این گونه سیستم‌ها بر اساس نوع سیستم کلیدزنی متفاوت است ولی مانند سایر سیستم‌های غیرخطی معمولاً بر اساس انتخاب تابع لیاپانوف می‌باشد. برای سیستم‌های کلیدزنی با سوئیچ دلخواه از توابع لیاپانوف مشترک^۲ CLF [۸]، توابع لیاپانوف سوئیچی^۳ SLF [۹] و برای سیستم‌های کلیدزنی با سوئیچ دارای محدودیت از لیاپانوف چندگانه^۴ MLF [۱۰] و توابع شبه لیاپانوف^۵ [۱۱] استفاده می‌کنند. سیستم‌های کلیدزنی آهسته نیز دسته وسیعی از سیستم‌های کلیدزنی دارای محدودیت می‌باشد که در آن بازه زمانی بین دو لحظه کلیدزنی باید از یک فاصله زمانی مشخص بیشتر باشد. یکی از پرکاربردترین قضایای پایداری در زمینه سیستم‌های کلیدزنی آهسته، قضیه زمان اقامت میانگین^۶ ADT می‌باشد که در آن برای تضمین پایداری باید میانگین زمانی بین دو لحظه کلیدزنی از یک مقدار مشخص به نام زمان اقامت میانگین بیشتر باشد [۱۲].

فرض بسیار مرسوم می‌باشد که در طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های کلیدزنی مطرح می‌شود این است که سوئیچ بین زیرسیستم‌ها و کنترل کننده‌ها به طور همزمان صورت می‌گیرد. در بسیاری از فرآیندها مشاهده می‌شود که کنترل کننده‌هایی که با این فرض طراحی می‌شوند در هنگام پیاده‌سازی قادر به پایدارسازی سیستم نمی‌باشند. در [۱۳] نمونه‌ای در مکانیزم‌های شیمیایی بیان شده است که به علت وجود این غیرهمزمانی کنترل کننده‌های طراحی شده در عمل سبب ناپایداری سیستم شده‌اند. همانطور که در شکل ۱ نمای شماتیکی دسته‌ای از سیستم‌های کلیدزنی

¹ Supervisor

² Common Lyapunov function (CLF)

³ Switch Lyapunov Function (SLF)

⁴ Multiple Lyapunov function (MLF)

⁵ Lyapunov-like function

⁶ Average Dwell Time

تضمین پایداری نمایی سیستم کلیدزنی محاسبه شده است. همچنین به علت اینکه از قضیه زمان اقامت میانگین به جای زمان اقامت در قضایا پایداری استفاده شده است دیگر نیازی به فعالیت هر یک از سیستم‌ها به میزان زمان مشخص نیست بلکه باید میانگین فعال بودن بازه زمانی آن‌ها از یک مقدار مشخص بیشتر باشد. در ادامه کنترل کننده‌های فیدبک حالتی برای تضمین پایداری و رسیدن به عملکرد مطلوب برای سیستم‌های کلیدزنی در حالت پیوسته و گسسته زمان بیان شده است. در بخش دوم مقاله به بیان پیش‌نیازها و تعاریف مربوط به سیستم‌های کلیدزنی پرداخته شده است. در بخش سوم قضایای مربوط به پایداری و طراحی کنترل کننده در حالت پیوسته زمان و در بخش چهارم نیز این قضایا در حالت گسسته زمان بیان شده است. در انتها نیز دو مثال برای نشان دادن کارآیی قضایای مطرح شده بیان شده است.

۲- بیان تعاریف و پیش‌نیازها:

تعریف ۱ - سیستم‌های کلیدزنی خطی را به فرم معادلات

$$\delta x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \quad (2)$$

توصیف می‌شود.

نماد δ در حالتی که سیستم، زمان پیوسته یا زمان گسسته باشد به ترتیب به صورت عملگر مشتق‌گیر $\delta x(t) = \dot{x}(t)$ و عملگر شیفت‌دهنده $\delta x(t) = x(t+1)$ اعمال می‌شود. همچنین $\sigma(t)$ سیگنال کلیدزنی است که توسط ناظر تولید می‌شود و مقادیری از مجموعه $P = \{1, \dots, N\}$ که N نشان‌دهنده تعداد زیرسیستم‌های یک سیستم کلیدزنی است، را اختیار می‌کند. در ضمن $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $u(t) \in R^m$ بردار ورودی کنترلی و $y(t) \in R^n$ بردار خروجی می‌باشد [۱].

تعریف ۲ - برای هر سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ و هر زمان $T \geq t$ اگر تعداد سوئیچ در فاصله‌ی زمانی (t, T) را با $N_{\sigma}(t, T)$ نمایش داده شود؛ آنگاه بیان می‌شود سیگنال $\sigma(t)$ دارای زمان توقف میانگین τ_a خواهد بود اگر دو ثابت N_0 و τ_a وجود داشته باشد که

$$N_{\sigma}(t, t_0) \leq N_0 + \frac{t-t_0}{\tau_a} \quad (3)$$

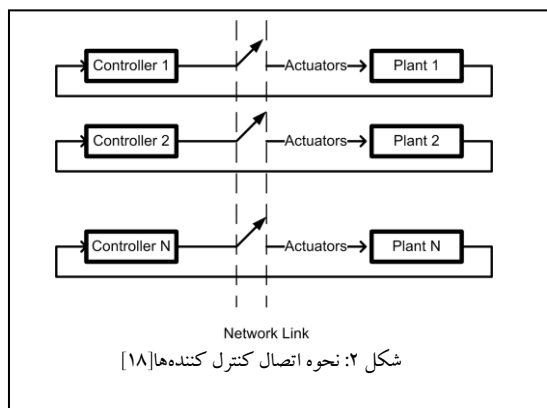
برقرار باشد. در رابطه (۳) دو عدد N_0 و τ_a به ترتیب بیان‌گر زمان توقف میانگین و مرز برخورد می‌باشد [۱].

لم شو [۲۰]: ماتریس‌های ثابت S, Q و R را با ابعاد مناسب در نظر بگیرید که Q و R ماتریس‌های متقارن می‌باشند. در نظر بگیرید. سه عبارت زیر معادل هم خواهند بود.

سیستم به سمت ناپایدار شدن می‌رود. همچنین پایدارناپذیری زیر سیستم‌ها در بسیاری از کاربردهای کنترلی از جمله کنترل تحت شبکه^۱ NCS اتفاق می‌افتد. به دلیل محدودیت شبکه، اطلاعات کنترل کننده‌ها در زمان‌های خاصی روی شبکه قرار می‌گیرد و این باعث می‌شود در یک زمان توان همه‌ی حلقه‌های کنترلی را بست. بنابراین در لحظاتی تعدادی از زیرسیستم‌های ممکن است ناپایدار شوند و امکان پایدارسازی آن وجود ندارد، نمایی از این روش کنترلی در شکل ۲ آورده شده است [۱۸]. یک راهکار برای این منظور مدل‌سازی به روش سیستم کلیدزنی است. زمانی که کنترل کننده در دسترس نیست، سیستم حلقه باز است و امکان پایدارسازی آن نیز وجود ندارد را به عنوان یک گروه زیرسیستم ناپایدار سیستم کلیدزنی و هنگامی که کنترل کننده در دسترس است، سیستم حلقه بسته و پایدار می‌باشد را به عنوان یک گروه زیرسیستم پایدار سیستم کلیدزنی در نظر گرفت.

مراجع محدودی به بررسی همزمان دو موضوع تاخیر بین دو سوئیچ و پایدارناپذیری برخی از زیرسیستم‌ها پرداخته اند. در [۱۹] به بررسی پایداری سیستم کلیدزنی آهسته داری زیرسیستم‌های ناپایدار با استفاده از قضیه زمان اقامت^۲ پرداخته شده است. از آنجایی که قضیه زمان اقامت بر خلاف قضیه زمان اقامت میانگین که بر اساس زمان میانگین بین دو لحظه کلیدزنی است، باید زمان انجام بین هر دو لحظه کلیدزنی از یک بازه زمانی مشخص بیشتر باشد محدودیت‌های بسیاری را در نحوه عملکرد سیستم کلیدزنی به سیستم تحمیل می‌کند. از این رو با توجه به بررسی‌های انجام شده مقاله‌ای که به موضوع پایداری سیستم‌های کلیدزنی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر در حالت غیرهمزمانی دو سوئیچ و با استفاده از قضیه زمان اقامت میانگین یافت نشد.

در این مقاله به بررسی پایداری سیستم‌های کلیدزنی خطی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر در حضور تاخیر بین دو سوئیچ زیرسیستم و کنترل کننده با استفاده از قضیه زمان توقف میانگین پرداخته شده است. برای تضمین پایداری زیرسیستم‌های سیستم کلیدزنی را به دو دسته پایدار و ناپایدار تقسیم بندی شده است. با استفاده از توابع شبه لیاپانوف و شیب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم‌ها و حداکثر زمان فعالیت زیرسیستم‌های ناپایدار، حداقل زمان لازم برای فعالیت زیرسیستم‌های پایدار برای



شکل ۲: نحوه اتصال کنترل کننده‌ها [۱۸]

^۱ Network Control System

^۲ Dwell Time

^۳ Chatter bound

چهار بازه زمانی شکل ۳ را در حالت غیرهمزمانی $T_{u\uparrow}(t_l, t_{l+1})$ و $T_{s\uparrow}(t_l, t_{l+1})$ به ترتیب برای زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار و همچنین در حالت همزمانی به دو قسمت $T_{u\downarrow}(t_l, t_{l+1})$ و $T_{s\downarrow}(t_l, t_{l+1})$ را به ترتیب برای زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار تقسیم بندی می‌شود. همان طور که مشخص است توابع انرژی زیر سیستم‌ها همانند شکل ۳ به صورت مکرر و با فعالیت هر یک از زیر سیستم‌ها پایدار و ناپایدار در سیستم کلیدزنی پدید می‌آیند که در شکل ۳ فقط یک حالت آن ترسیم شده است.

قضیه ۱: سیستم کلیدزنی خطی دارای روابط به فرم (۱) و ثابت‌های

$\mu \geq 1$ و $\alpha > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0$ آنگاه اگر برای هر $i \in P$ $\sigma(t) = i$ که زیرسیستم پایدار و برای هر $j \in P$ $\sigma(t) = j$ که زیرسیستم ناپایدار فعال می‌شود توابع لیاپانوف $V_i: R^n \rightarrow R$ و $V_j: R^n \rightarrow R$ و همچنین دو تابع K_1 و K_2 از کلاس K_∞ وجود داشته باشند که

$$K_1(|x_t|) \leq V_i(x_t), \quad K_2(|x_t|) \leq V_j(x_t) \quad (7)$$

$$K_1(|x_t|) \leq V_j(x_t), \quad K_2(|x_t|) \leq V_i(x_t)$$

$$\dot{V}_i(x_t) \leq -\alpha(V_i(x_t)), \quad \forall t \in T_{s\downarrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (8)$$

$$\dot{V}_i(x_t) \leq \beta_1(V_i(x_t)), \quad \forall t \in T_{s\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (9)$$

$$\dot{V}_j(x_t) \leq \beta_2(V_j(x_t)), \quad \forall t \in T_{u\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (10)$$

$$\dot{V}_j(x_t) \leq -\beta_3(V_j(x_t)), \quad \forall t \in T_u(t_l, t_{l+1}) \quad (11)$$

$$V_i(x_{t_l}) \leq \mu(V_j(x_t)), \quad \forall (i, j) \in P \times P, i \neq j \quad (12)$$

آنگاه اگر رابطه (۱۳) و (۱۴) برقرار شود سیستم پایدار نامایی خواهد شد.

$$\frac{n(\ln \mu) + \beta_3 T_u + \tau_u(\beta_2 - \beta_3) + (n-1)\tau_s(\alpha + \beta_1)x(t)}{\alpha(n-1)} \leq T_s \quad (13)$$

$$\frac{K(n \ln \mu + \tau_u(\beta_2 - \beta_3) + (n-1)\tau_s(\alpha + \beta_1))}{n((K-1)\alpha - \beta_3)} \leq \tau_u \quad (14)$$

در رابطه (۱۳) اگر N_σ تعداد کل سوئیچ سیستم باشد، فرض می‌شود سیستم به تعداد N_σ/n بار به زیرسیستم‌های ناپایدار سوئیچ می‌کند. همچنین T_u ماکزیمم زمان فعال بودن زیرسیستم ناپایدار، T_s مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار و τ_s, τ_u ماکزیمم زمان غیرهمزمانی در زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار می‌باشند. همچنین در رابطه (۱۴) فرض شده است $1/K$ کل مدت زمان فعالیت سیستم، زیرسیستم ناپایدار فعال می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم در زمان $t \in [t_l, t_{l+1}]$ زیرسیستم پایدار فعال

می‌باشد، پس از رابطه (۸) و (۹) انتگرال گرفته می‌شود

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq e^{\beta_1 \tau_s - \alpha(t-t_l - \tau_s)} V_{\sigma(t_l)}(x_{t_l}) \quad (15)$$

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq e^{-\alpha(T_{L+1})} e^{\tau_s(\beta_1 + \alpha)} V_{\sigma(t_l)}(x_{t_l})$$

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (4)$$

$$R(x) > 0$$

$$R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) > 0 \quad (5)$$

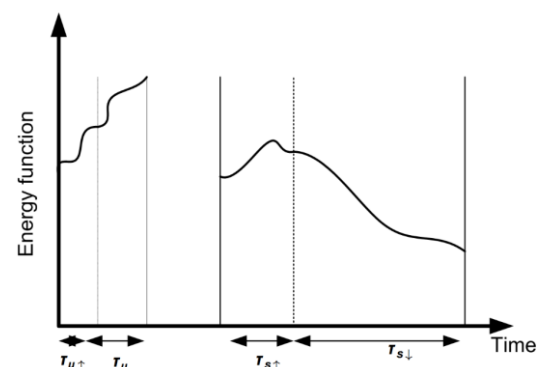
$$Q(x) > 0$$

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} < 0 \quad (6)$$

توجه شود نامعادلات (۴) و (۵) غیر خطی می‌باشند و با استفاده از این لم می‌توان نامعادله را بصورت خطی تبدیل کرد.

۳- قضایای پایداری و طراحی کنترل کننده در سیستم‌های پیوسته زمان

در این قسمت برای بررسی پایداری سیستم کلیدزنی، زیرسیستم‌ها را به دو دسته کلی زیرسیستم‌های پایدار و ناپایدار تقسیم بندی می‌شود. منظور از زیرسیستم‌های پایدار، زیرسیستم‌هایی است که یا به طور ذاتی پایدار هستند و یا با استفاده از کنترل کننده می‌توان پایدار کرد و منظور از زیرسیستم‌های ناپایدار، زیرسیستم‌هایی است که به دلایل ذکر شده در مقدمه امکان پایداری آن‌ها وجود ندارد. برای اثبات پایداری سیستم کلیدزنی در این حالت باید از توابع شبه لیاپانوف که اجازه افزایش انرژی زیرسیستم‌ها در هنگام فعال بودن را می‌دهند، استفاده کرد. همانطور که بیان شد در حالت کنترل غیرهمزمان سیستم کلیدزنی، چون ناظر نیازمند مدت زمانی می‌باشد که زیرسیستم فعال را تشخیص دهد و سپس کنترل کننده مربوط به آن زیرسیستم را در حلقه قرار دهد، کنترل کننده مربوط به زیرسیستم قبلی در مدار همچنان قرار دارد و در نتیجه انرژی زیرسیستم فعال افزایش پیدا می‌کند. در چنین سیستمی تابع لیاپانوف سیستم کلیدزنی دارای دو زیرسیستم پایدار و ناپایدار، در سه قسمت در حال افزایش می‌باشد و تنها در قسمتی که زیرسیستم پایدار فعال است و با کنترل کننده مربوط به خود به صورت همزمان فعالیت می‌کند، کاهش می‌یابد، نمایی از انرژی این سیستم را در شکل ۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۳: تابع انرژی زیرسیستم‌ها در حالت کنترل غیرهمزمان

که در رابطه (۱۵)، T_{L+1} بیانگر طول بازه از t تا t_1 هست.

حال اگر بازه انتگرال گیری را یک بازه به عقب برگردانده شود با توجه به رابطه (۱۰) و (۱۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq e^{-\alpha(T_{L+1})} e^{\tau_s(\beta_1+\alpha)} \mu e^{\beta_2\tau_u+\beta_3(t_1-t_1-\tau_u)} \\ &V_{\sigma(t_1)}(x_{t_1}) \\ V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq e^{-\alpha(T_{L+1})} e^{\tau_s(\beta_1+\alpha)} \mu e^{\beta_3(T_L)} e^{\tau_u(\beta_2-\beta_3)} \\ &V_{\sigma(t_1)}(x_{t_1}) \end{aligned} \quad (۱۶)$$

که در رابطه (۱۶)، T_L بیانگر طول بازه از t_1 تا t_{l+1} هست.

در ادامه اگر فرض شود تعداد N_σ/n از زیرسیستم‌ها ناپایدار باشد، آنگاه اگر بازه‌های انتگرال گیری را تا t_0 به عقب برگردانده شود؛ با توجه به اینکه ماکزیمم طول بازه زیرسیستم ناپایدار را T_u و مینیمم طول بازه زیرسیستم پایدار T_s تعریف شده است، رابطه

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq \mu^{N_\sigma} e^{\frac{N_\sigma}{n}\beta_3 T_u} e^{\tau_u \frac{N_\sigma}{n}(\beta_2-\beta_3)} e^{\frac{(n-1)N_\sigma}{n}\alpha(T_s)} \\ &e^{\frac{(n-1)N_\sigma}{n}(\alpha+\beta_1)\tau_s} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

بدست می‌آید و اگر N_σ را با استفاده از قضیه زمان توقف میانگین (۳) جایگذاری شود، رابطه

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq \mu^{N_0} e^{\frac{N_0}{n}\beta_3 T_u} e^{\tau_u \frac{N_0}{n}(\beta_2-\beta_3)} \\ &e^{\frac{(n-1)N_0}{n}\alpha(T_s)} e^{\frac{(n-1)N_0}{n}(\alpha+\beta_1)\tau_s} \\ &(\mu e^{\frac{\beta_3 T_u}{n}} e^{\frac{(\beta_2-\beta_3)\tau_u}{n}} e^{\frac{(n-1)\alpha(T_s)}{n}} e^{\frac{(n-1)(\alpha+\beta_1)\tau_s}{n}})^{\frac{t-t_0}{\tau_a}} \\ &V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

حاصل می‌شود. برای برقراری پایداری مجانبی سراسری وقتی که t به سمت بینهایت برود، باید $V_{\sigma(t)}$ به سمت صفر میل کند. در رابطه (۱۸) قسمت اول عبارت زمانی که t به سمت بینهایت برود، عدد ثابتی است و برای اینکه $V_{\sigma(t)}$ به سمت صفر میل کند، باید مجموع توان‌های e منفی باشد یعنی

$$\begin{aligned} \ln(\mu) + \frac{\beta_3 T_u}{n} + \frac{(\beta_2-\beta_3)\tau_u}{n} \\ - \frac{(n-1)\alpha(T_s)}{n} + \frac{(n-1)(\alpha+\beta_1)\tau_s}{n} < 0 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که با بردن عبارت T_s به یک سمت تساوی، رابطه (۱۳) حاصل می‌شود.

از طرفی برای رسیدن به پایداری نمایی با توجه به تعریف آن به صورت $\|x(t)\| \leq c (\|x(t_0)\|) e^{-\lambda t}$ و اتخاذ تابع لیاپانوف به صورت $V_p(x_t) = x^T p x$ برای برقراری پایداری نمایی مقدار λ و c از رابطه (۲۱) و (۲۲) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{2\tau_a} (\ln \mu + \frac{1}{n}\beta_3 T_u) + \tau_u \frac{1}{n}(\beta_2-\beta_3) \\ - \frac{(n-1)}{n}\alpha(T_s) + \tau_s \frac{(n-1)}{n}(\alpha+\beta_1) \end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} c_0 = \mu^{N_0} e^{\frac{N_0}{n}\beta_3 T_u} e^{\tau_u \frac{N_0}{n}(\beta_2-\beta_3)} \\ \times e^{\frac{(n-1)N_0}{n}\alpha(T_s)} e^{\frac{(n-1)N_0}{n}(\alpha+\beta_1)\tau_s} \end{aligned} \quad (۲۱)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_0}{\lambda_{\min}(p)}}$$

حال برای بدست آوردن زمان اقامت میانگین مجاز بین دو سوئیچ، با توجه به اینکه فرض می‌شود $1/K$ کل مدت زمان فعالیت سیستم، زیرسیستم ناپایدار فعال می‌باشد، رابطه (۱۷) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq \mu^{N_\sigma} e^{\frac{\beta_3(t-t_0)}{K}} e^{\tau_u \frac{N_\sigma}{n}(\beta_2-\beta_3)} e^{\frac{(K-1)}{K}\alpha(t-t_0)} \\ &e^{\frac{(n-1)N_\sigma}{n}(\alpha+\beta_1)\tau_s} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \end{aligned} \quad (۲۲)$$

بازنویسی کرد و با استفاده از رابطه (۳) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq \mu^{N_0} e^{\tau_u \frac{N_0}{n}(\beta_2-\beta_3)} e^{\frac{(n-1)N_0}{n}(\alpha+\beta_1)\tau_s} \\ &(\mu e^{\frac{(\beta_2-\beta_3)\tau_u}{n}} e^{\frac{(n-1)(\alpha+\beta_1)\tau_s}{n}})^{\frac{t-t_0}{\tau_a}} \\ &e^{\frac{1}{K}\beta_3(t-t_0)} e^{\frac{(K-1)}{K}\alpha(t-t_0)} \\ &V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \end{aligned} \quad (۲۳)$$

و برای برقراری پایداری نمایی زمانی که t به سمت بینهایت برود، باید $V_{\sigma(t)}$ به سمت صفر میل کند. از این رو در رابطه (۲۳) باید مجموع توان‌های شامل توان t منفی باشد، که همان رابطه (۱۴) قضیه ۱ می‌باشد.

$$\frac{K(n \ln \mu + \tau_u(\beta_2-\beta_3) + (n-1)\tau_s(\alpha+\beta_1))}{n((K-1)\alpha - \beta_3)} \leq \tau_a$$

نکته ۱: در این قضیه مشاهده می‌شود که می‌توان با کنترل مینیمم مدت زمان فعالیت زیرسیستم پایدار نسبت به ماکزیمم مدت زمان فعالیت زیرسیستم ناپایدار و ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم‌ها، سیستم کلیدزنی را پایدار کرد. از طرف دیگر چون در اثبات این قضیه از ADT استفاده شده است، میانگین مدت زمان سوئیچ بین زیرسیستم‌ها نیز باید از یک مقدار مشخص بیشتر باشد.

در قضیه ۱ مشاهده شد که با انتخاب تابع لیاپانوف، مقادیر α ، β_1 ، β_2 و β_3 مشخص می‌شوند و آنگاه در روابط (۱۴، ۱۳) تنها مقدار ماکزیمم و مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم‌ها دست طراح می‌باشد. از این رو دنبال روش طراحی کنترل کننده فیدبک حالتی هستیم که طراح بتواند شیب افزایش و کاهش انرژی سیستم را نیز مشخص کند تا دارای درجه آزادی بیشتری باشد. در روش معرفی شده تنها مشخصات

نوشت و همچنین دینامیک زیرسیستم‌های ناپایدار به همراه کنترل کننده را نیز می‌توان به صورت معادله

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{jj}x(t) & \forall t \in T_{u\downarrow}(t_l, t_{l+1}) \\ A_{ji}x(t) & \forall t \in T_{u\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (33)$$

نوشت، که در آن‌ها

$$A_{ii} = A_i + B_i K_i, \quad A_{ij} = A_i + B_i K_j \quad (34)$$

$$A_{ji} = A_j + B_j K_i, \quad A_{jj} = A_j + B_j K_j \quad (35)$$

حال دو دسته توابع شبه لیاپانوف را بصورت مربعی و به شکل معادلات فرم

$$V_i = x^T P_i x, \quad V_j = x^T P_j x \quad (36)$$

در نظر گرفته می‌شود. حال عبارات

$$\dot{V}_i + \alpha V_i = x(t)^T [A_{ii} P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i] x(t) \quad (37)$$

$$\dot{V}_i - \beta_1 V_i = x(t)^T [A_{ij} P_i + P_i A_{ij} - \beta_1 P_i] x(t) \quad (38)$$

$$\dot{V}_j - \beta_2 V_j = x(t)^T [A_{ji} P_j + P_j A_{ji} - \beta_2 P_j] x(t) \quad (39)$$

$$\dot{V}_j - \beta_3 V_j = x(t)^T [A_{jj} P_j + P_j A_{jj} - \beta_3 P_j] x(t) \quad (40)$$

را تشکیل می‌دهیم. با توجه به فرضیات قضیه ۴-۱ که شرایط تضمین کننده پایداری را بیان می‌کند باید عبارات داخل کروشه منفی معین باشند، به بیان دیگر

$$A_{ii} P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i \leq 0 \quad (41)$$

$$A_{ij} P_i + P_i A_{ij} - \beta_1 P_i \leq 0$$

$$A_{ji} P_j + P_j A_{ji} - \beta_2 P_j \leq 0 \quad (42)$$

$$A_{jj} P_j + P_j A_{jj} - \beta_3 P_j \leq 0$$

حال با جایگذاری A_{ii} ، A_{ij} ، A_{ji} در معادلات (۴۱) و (۴۲) خواهیم داشت

$$A_i^T P_i + K_i^T B_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_i + \alpha P_i \leq 0 \quad (43)$$

$$A_i^T P_i + K_j^T B_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_j - \beta_1 P_i \leq 0 \quad (44)$$

$$A_j^T P_j + K_j^T B_j^T P_j + P_j A_j + P_j B_j K_j - \beta_2 P_j \leq 0 \quad (45)$$

$$A_j^T P_j + K_i^T B_j^T P_j + P_j A_j + P_j B_j K_i - \beta_3 P_j \leq 0 \quad (46)$$

چون در عبارت فوق دو مقدار P و K عبارات مجهولی هستند، نامساوی‌های ماتریسی به صورت غیرخطی ظاهر شده‌اند که برای خطی سازی آن‌ها دو طرف نامساوی (۴۳) و (۴۴) را در P_i^{-1} و دو طرف نامساوی (۴۵) و (۴۶) را در P_j^{-1} ضرب کرده و از تغییر متغیر-های $P_i^{-1} = S_i$ و $P_j^{-1} = S_j$ استفاده کرد به معادلات ۲۵ تا ۲۸ خواهیم رسید. همچنین با توجه به رابطه (۱۲) در قضیه ۱ که بیان کننده

زیرسیستم و ضرایب α ، β_1 ، β_2 و β_3 به الگوریتم داده می‌شود و در نهایت توابع لیاپانوف و مقادیر کنترل کننده‌ها را مشخص می‌کند. بدیهی است که این ضرایب با توجه به زیرسیستم‌ها همیشه دارای جواب نمی‌باشند و امکان دارد، نامعادلات حل ناشدنی شوند.

قضیه ۲: سیستم سوئیچ خطی $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t)$

و ثابت‌های $\alpha > 0$ ، $\beta_1 > 0$ ، $\beta_2 > 0$ ، $\beta_3 > 0$ و $\mu \geq 1$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین $P_i^{-1} = S_i$ و $P_j^{-1} = S_j$ که اندیس‌های i مربوط به زیرسیستم‌های پایدار و اندیس‌های j مربوط به زیرسیستم‌های پایدارناپذیر می‌باشند، وجود داشته باشند به نحوی که برای هر i و j نابرابر داشته باشیم

$$A_i S_i + B_i U_{ii} + S_i A_i^T + U_{ii}^T B_i^T + \alpha S_i \leq 0 \quad (25)$$

$$A_i S_i + B_i U_{ij} + S_i A_i^T + U_{ij}^T B_i^T - \beta_1 S_i \leq 0 \quad (26)$$

$$A_j S_j + B_j U_{ji} + S_j A_j^T + U_{ji}^T B_j^T - \beta_2 S_j \leq 0 \quad (27)$$

$$A_j S_j + B_j U_{jj} + S_j A_j^T + U_{jj}^T B_j^T - \beta_3 S_j \leq 0 \quad (28)$$

$$S_j \leq \mu S_i \quad (29)$$

که در آن

$$U_{ij} = K_j S_i, \quad U_{ii} = K_i S_i \quad (30)$$

$$U_{ji} = K_i S_j, \quad U_{jj} = K_j S_j$$

آنگاه یک دسته کنترل کننده پایدارساز وجود خواهد داشت که با هر سوئیچ دلخواه که شرط (۱۳) و (۱۴) را برآورده کند، سیستم پایدار مجانبی نمایی خواهد بود و مقدار بهره از رابطه (۳۱) محاسبه می‌شود.

$$K_i = U_{ii} S_i^{-1}, \quad K_j = U_{jj} S_j^{-1} \quad (31)$$

اثبات: بار دیگر انرژی زیرسیستم‌ها را همانند شکل (۳) در نظر

بگیرید و مشاهده می‌شود برای دو دسته زیرسیستم و دو دسته کنترل کننده، چهار حالت حلقه کنترلی می‌تواند بسته شود. برای زیرسیستم‌های ناپایدار در حالت غیرهمزمانی، کنترل کننده مخصوص زیرسیستم‌های پایدار در مدار قرار می‌گیرد و در حالت همزمانی هم کنترل کننده مخصوص خود زیرسیستم در حلقه بسته می‌شود و به همین منوال برای زیرسیستم‌های پایدار حلقه کنترلی همراه با دو گروه کنترل کننده بسته می‌شود.

به همین علت دینامیک زیرسیستم‌های پایدار به همراه کنترل کننده فیدبک حالت به فرم $u = Kx$ برای سیستم کلیدزنی خطی می‌توان معادلات

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{ii}x(t) & \forall t \in T_{s\downarrow}(t_l, t_{l+1}) \\ A_{ij}x(t) & \forall t \in T_{s\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (32)$$

شرایط تضمین پایداری سیستم است خواهیم داشت $P_i < \mu P_j$ و یا $S_i^{-1} < S_j^{-1}$ که همان عبارت (۲۹) می‌باشد.

۴- قضایای بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده در سیستم‌های گسسته زمان

باتوجه به انجام محاسبات رایانه‌ای و نیاز روز افزون از استفاده از مدل‌های گسسته در زمان در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی در این بخش قضایای مربوط به بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های کلیدزنی در حالت گسسته در زمان بیان شده است.

قضیه ۳: سیستم کلیدزنی $x(k+1) = A_\sigma x(k) + B_\sigma u(k)$ و ثابت‌های $1 > \alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ و $\mu \geq 1$ را در نظر بگیرید که در آن لحظات نمونه برداری به ترتیب $\sigma(t) = i \in P$ می‌باشد. آنگاه اگر برای هر $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ که زیرسیستم پایدار و هر $\sigma(t) = j \in P$ که زیرسیستم ناپایدار فعال می‌شود $V_i: R^n \rightarrow R$ و $V_j: R^n \rightarrow R$ و همچنین دو تابع κ_1 و κ_2 از کلاس \mathcal{K}_∞ وجود داشته باشند که

$$\kappa_1(|x_k|) \leq V_i(x_k) \leq \kappa_2(|x_k|) \quad (47)$$

$$\kappa_1(|x_k|) \leq V_j(x_k) \leq \kappa_2(|x_k|)$$

$$\Delta V_i(x_k) \leq -\alpha(V_i(x_k)), \quad \forall t \in T_{s\downarrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (48)$$

$$\Delta V_i(x_k) \leq \beta_1(V_i(x_k)), \quad \forall t \in T_{s\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (49)$$

$$\Delta V_j(x_k) \leq \beta_2(V_j(x_k)), \quad \forall t \in T_{u\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (50)$$

$$\Delta V_j(x_k) \leq \beta_3(V_j(x_k)), \quad \forall t \in T_u(k_l, k_{l+1}) \quad (51)$$

$$V_i(x_k) \leq \mu_1(V_j(x_k)), \quad \forall (i, j) \in P \times P, i \neq j \quad (52)$$

آنگاه اگر رابطه (۵۳) برقرار شود و میانگین فواصل بین دو لحظه کلیدزنی از رابطه (۵۴) پیروی کند، سیستم پایدار مجانبی نمایش خواهد شد.

$$\frac{1}{(1-n)\ln(1-\alpha)} (n \ln(\mu) + (n-1) \ln(\frac{1+\beta_1}{1-\alpha})) \tau_s \quad (53)$$

$$+ \ln(\frac{1+\beta_2}{1+\beta_3}) \tau_u + k_u \ln(1+\beta_3) < k_s$$

$$\frac{K(n \ln \mu + \tau_u \ln(\frac{1+\beta_2}{1+\beta_3}) + (n-1) \tau_s \ln(\frac{1+\beta_1}{1-\alpha}))}{n((1-K)\ln(1-\alpha) - \ln(1+\beta_3))} < \tau_a \quad (54)$$

که در آن k_s مینیمم بازه فعال بودن یک زیرسیستم پایدار و k_u ماکزیمم بازه فعال بودن یک زیرسیستم ناپایدار است. همچنین τ_s و τ_u ماکزیمم بازه غیرهمزمانی در زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار می‌باشند و همچنین به نسبت $1/K$ کل بازه‌های سوئیچ که با $k - k_0$ نمایش داده می‌شود، زیرسیستم‌های ناپایدار فعال باشند.

اثبات: روند اثبات همانند قضیه ۱ می‌باشد. به طوری که در ابتدا فرض می‌شود سیستم در یک زیر بازه پایدار یا ناپایدار باشد و سپس به بازه‌های سوئیچ عقب‌تر باز می‌گردیم تا به بازه اولیه برسیم. آنگاه اگر هنگامی که k به سمت بی‌نهایت برود، مقدار $V_{\sigma(k)}$ به سمت صفر میل کند، سیستم پایدار مجانبی سراسری خواهد بود و چون این روند کاهشی بصورت نمایی باشد سیستم پایدار نمایی سراسری خواهد شد.

قضیه ۴: سیستم کلیدزنی $x(k+1) = A_\sigma x(k) + B_\sigma u(k)$ و ثابت‌های $1 > \alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ و $\mu \geq 1$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین $S_i^{-1} = P_i^{-1}$ و $S_j^{-1} = P_j^{-1}$ که اندیس‌های i مربوط به زیرسیستم‌های پایدار و اندیس‌های j مربوط به زیرسیستم‌های پایدارناپذیر می‌باشند، وجود داشته باشند به نحوی که برای هر i و j نابرابر داشته باشیم $S_j < \mu S_i$

$$\begin{pmatrix} -S_i & A_i S_i + B_i U_{ii} \\ * & -(1-\alpha)S_i \end{pmatrix} \leq 0 \quad (55)$$

$$\begin{pmatrix} -S_i & A_i S_i + B_i U_{ij} \\ * & (1+\beta_1)S_i \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} -S_j & A_j S_j + B_j U_{jj} \\ * & (1+\beta_2)S_j \end{pmatrix} \leq 0 \quad (56)$$

$$\begin{pmatrix} -S_j & A_j S_j + B_j U_{ij} \\ * & (1+\beta_3)S_j \end{pmatrix} \leq 0$$

برقرار باشند. آنگاه یک دسته کنترل کننده پایدارساز وجود خواهد داشت که با هر سوئیچ دلخواه که شرط (۵۳) و (۵۴) را برآورده کند، سیستم پایدار مجانبی نمایشی یکنواخت سراسری خواهد بود.

اثبات: برای طراحی یک دسته کنترل کننده وابسته به زیرسیستم به صورت فیدبک حالت، همانند حالت پیوسته به چهار صورت، حلقه کنترلی بسته می‌شود و معادلات دینامیکی سیستم به همراه کنترل کننده برای زیرسیستم پایدار به صورت زیر می‌شود.

$$x(k+1) = \begin{cases} A_{ii}x(k) & \forall t \in T_{s\downarrow}(k_l, k_{l+1}) \\ A_{ij}x(k) & \forall t \in T_{s\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \end{cases} \quad (57)$$

و برای زیرسیستم ناپایدار نیز به همین صورت تحقق می‌یابد.

$$x(k+1) = \begin{cases} A_{jj}x(k) & \forall t \in T_u(k_l, k_{l+1}) \\ A_{ji}x(k) & \forall t \in T_{u\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \end{cases} \quad (58)$$

و اگر توابع لیپانوف را به صورت $V_i = x^T P_i x$, $V_j = x^T P_j x$ در نظر گرفته شود می‌توان نوشت:

$$\Delta V_i(x_k) + \alpha V_i(x_k) = x_k^T (A_{ii}^T P_i A_{ii} + \alpha P_i - P_i) x_k \quad (59)$$

$$\Delta V_i(x_k) - \beta_1 V_i(x_k) = x_k^T (A_{ij}^T P_i A_{ij} - \beta_1 P_i - P_i) x_k \quad (61)$$

همچنین با توجه به (۵۲) در قضیه ۳ که بیان کننده شرایط پایداری سیستم است خواهیم داشت $P_i < \mu P_j$ یا $S_i^{-1} < \mu S_j^{-1}$ که همان $S_j < \mu S_i$ می‌باشد.

۵- نتایج شبیه‌سازی

مثال ۵-۱) یک سیستم کلیدزنی دارای دو زیرسیستم پیوسته

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۷۲)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. زیرسیستم اول کنترل‌ناپذیر و دارای دو مقدار ویژه ناپایدار و مساوی ۱ می‌باشد ولی زیرسیستم دوم با وجود ناپایداری کنترل‌ناپذیر می‌باشد. هدف این مثال بدست آوردن کنترل‌کننده‌هایی است که مینیمم زمان لازم برای فعالیت یک زیرسیستم پایدار که به عنوان مثال ۴.۲ ثانیه باشد را برآورده کنند. این کار با استفاده از انتخاب مناسب ضرایب α ، β_1 ، β_2 و β_3 امکان‌پذیر می‌شود. مقادیر شبیه‌سازی $n = 2$ ، $\tau_s = 0.12s$ ، $\tau_u = 0.12s$ ، $T_u = 1.3s$ ، $k = 4.2$ ، $\mu = 1.2$ و همچنین ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم هم بصورت $\alpha = 1$ ، $\beta_1 = 2$ و $\beta_2 = 8$ انتخاب می‌شوند. برای اینکه زیرسیستم با مینیمم زمان ۴.۲ ثانیه پایدار شود، بنابر قضیه ۴-۱ مقدار β_3 باید برابر ۲.۱ انتخاب شود. با این ضرایب، توابع لیاپانوف با استفاده از قضیه ۵-۱ و نرم افزار یالمپ [۲۰] به صورت

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2.58 & 1.51 \\ 1.51 & 1.25 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.63 \\ -0.63 & 1.70 \end{bmatrix} \quad (۷۳)$$

و معادلات کنترل‌کننده بصورت

$$k_1 = [-0.774 \quad -2.247], k_2 = [-2.0884 \quad -2.045] \quad (۷۴)$$

بدست می‌آیند. در شکل ۴ و ۵ پاسخ حالت و انرژی زیرسیستم هنگامی که مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار ۴.۲ ثانیه باشد آورده شده است، که نشانگر کارآیی قضایای معرفی شده می‌باشد. همچنین بنابر قضیه ۱ مینیمم میانگین زمان بین دو سوئیچ باید از ۱.۹۹ ثانیه بیشتر باشد که در شبیه‌سازی ۲.۷ ثانیه است که از مقدار مینیمم بیشتر است. البته در شکل ۴ سیستم با توجه به نحوه انتخاب شرایط اولیه و همچنین ضرایب α ، β_1 ، β_2 و β_3 دارای بالادگی‌های مختلفی خواهد بود که قابل توجه نیز می‌باشد.

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_2 V_j(x_k) = x_k^T (A_{jj}^T P_j A_{jj} - \beta_2 P_j - P_j) x_k \quad (۶۲)$$

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_3 V_j(x_k) = x_k^T (A_{jj}^T P_j A_{jj} - \beta_3 P_j - P_j) x_k \quad (۶۳)$$

حال با جایگذاری A_{ii} ، A_{ij} ، A_{ji} و A_{jj} به روابط

$$\Delta V_i(x_k) + \alpha V_i(x_k) = x_k^T ((A_i + B_i K_i)^T P_i (A_i + B_i K_i) + (\alpha - 1) P_i) x_k \quad (۶۴)$$

$$\Delta V_i(x_k) - \beta_1 V_i(x_k) = x_k^T ((A_i + B_i K_i)^T P_i (A_i + B_i K_i) - (\beta_1 + 1) P_i) x_k \quad (۶۵)$$

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_2 V_j(x_k) = x_k^T ((A_j + B_j K_j)^T P_j (A_j + B_j K_j) - (\beta_2 + 1) P_j) x_k \quad (۶۶)$$

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_3 V_j(x_k) = x_k^T ((A_j + B_j K_j)^T P_j (A_j + B_j K_j) - (\beta_3 + 1) P_j) x_k \quad (۶۷)$$

خواهیم رسید که با استفاده از لم شر معادلات (۶۸) تا (۶۹) بدست می‌آیند.

$$\begin{pmatrix} -P_i & P_i A_i + P_i B_i K_i \\ * & -(1 - \alpha) P_i \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۶۸)$$

$$\begin{pmatrix} -P_i & P_i A_i + P_i B_i K_i \\ * & (1 + \beta_1) P_i \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} -P_j & P_j A_j + P_j B_j K_j \\ * & (1 + \beta_2) P_j \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۶۹)$$

$$\begin{pmatrix} -P_j & P_j A_j + P_j B_j K_j \\ * & (1 + \beta_3) P_j \end{pmatrix} \leq 0$$

و با انجام تغییر متغیرهای $P_i^{-1} = S_i$ و $P_j^{-1} = S_j$ به روابط (۷۰) تا (۷۱) می‌توان رسید.

$$\begin{pmatrix} -S_i^{-1} & S_i^{-1} A_i + S_i^{-1} U_{ii} \\ * & -(1 - \alpha) S_i^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۷۰)$$

$$\begin{pmatrix} -S_i^{-1} & S_i^{-1} A_i + S_i^{-1} U_{ij} \\ * & (1 + \beta_1) S_i^{-1} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} -S_j^{-1} & S_j^{-1} A_j + S_j^{-1} U_{jj} \\ * & (1 + \beta_2) S_j^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۷۱)$$

$$\begin{pmatrix} -S_j^{-1} & S_j^{-1} A_j + S_j^{-1} U_{ij} \\ * & (1 + \beta_3) S_j^{-1} \end{pmatrix} \leq 0$$

و با انجام عملیات مزدوج ترانواده و ضرب کردن (۷۰) در $\begin{pmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix}$

و (۷۱) در $\begin{pmatrix} S_j & 0 \\ 0 & S_j \end{pmatrix}$ روابط (۵۵) و (۵۶) حاصل خواهد شد.

نکته ۲: همان‌طور که در مثال ۵-۱ اشاره شد حداقل زمان میانگین بین دو سوئیچ برای تضمین پایداری بنابر قضیه ۱، ۱.۹۹ ثانیه می‌باشد که در این مثال مقدار ۲.۷۷ ثانیه لحاظ شده است. این در حالیست که حداکثر زمان فعالیت زیر سیستم ناپایدار ۱.۴۲ ثانیه می‌باشد که کمتر از حداقل زمان میانگین بین دو سوئیچ است. این نکته بیان‌گر برتری کارایی قضیه زمان توقف میانگین و قضایای مطرح شده بر اساس آن در این مقاله بر قضیه زمان توقف که در مقالات دیگر مطرح شده، می‌باشد. زیرا با استفاده از قضایای ۱ و ۲ توانسته شد حداقل زمان لازم فعالیت زیرسیستم‌های پایدار را به طوریکه میانگین زمان بین دو سوئیچ بیشتر از مقدار مشخصی که از قضایای پایداری حاصل شده است، را بدست آورد باشد.

مثال ۵-۲) یک سیستم کلیدزنی دارای دو زیرسیستم گسسته

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۷۵)$$

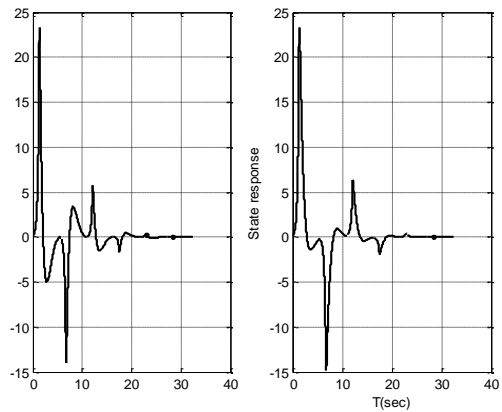
$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. زیرسیستم اول که کنترل‌ناپذیر است و دارای دو مقدار ویژه ناپایدار ۱ و ۲ می‌باشد ولی زیرسیستم دوم با وجود ناپایداری کنترل پذیر می‌باشد. زمان نمونه برداری را در این مثال ۰.۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. هدف این مثال بدست آوردن کنترل‌کننده‌هایی می‌باشد که مینیمم زمان لازم برای فعالیت یک زیرسیستم پایدار که به عنوان مثال ۰.۶ ثانیه می‌باشد را برآورده کنند. این کار با استفاده از انتخاب مناسب ضرایب α ، β_1 ، β_2 ، β_3 امکان‌پذیر می‌شود. مقادیر شبیه‌سازی $k = 4.2$ ، $n = 2$ ، $\tau_s = 0.1s$ ، $\tau_u = 0.12s$ ، $T_u = 1.2s$ و همچنین ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم هم بصورت $\beta_1 = 2$ ، $\beta_2 = 3.5$ و $\beta_3 = 3$ انتخاب می‌شود. برای اینکه زیرسیستم با مینیمم زمان ۰.۶ ثانیه پایدار شود، بنابر قضیه ۴-۲ مقدار α باید برابر ۰.۹۵ انتخاب شود. با این ضرایب، توابع لیاپانوف و کنترل‌کننده‌ها بصورت

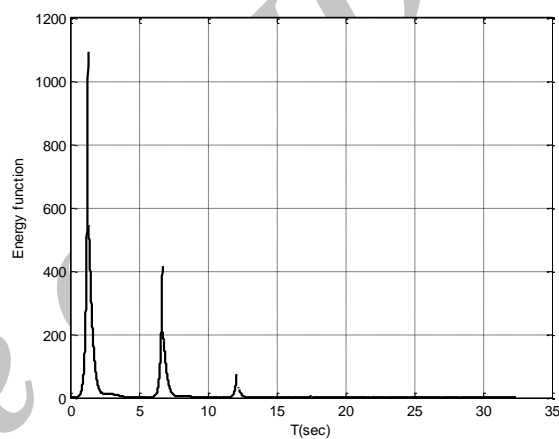
$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.035 \\ 0.035 & 0.226 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.45 \end{bmatrix} \quad (۷۶)$$

$$k_1 = [-3.18 \ 0.19] \quad k_2 = [-2.12 \ 0.12] \quad (۷۷)$$

بدست می‌آید. همان‌طور که مشخص است توسط کنترل‌کننده k_2 زیر سیستم ناپایدار دوم تبدیل به زیرسیستم پایدار می‌شود. شکل ۷ و ۸ پاسخ حالت و انرژی زیرسیستم هنگامی که مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار کمتر از ۴.۲ ثانیه آورده شده است و مشاهده می‌شود که انرژی سیستم رو به افزایش می‌رود و یا به عبارت دیگر سیستم ناپایدار شده است.

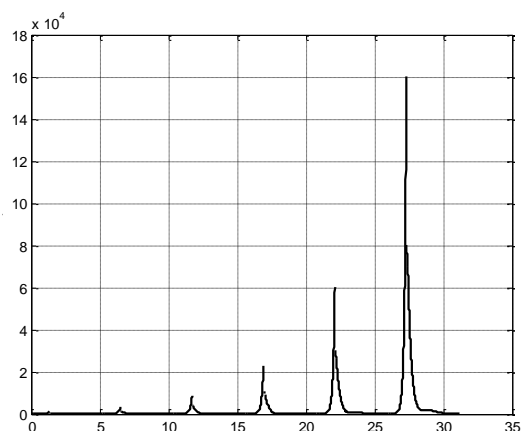


شکل ۴: پاسخ حالت مثال ۵-۱ با Ts برابر ۴.۲ ثانیه



شکل ۵: انرژی سیستم مثال ۵-۱ با Ts برابر ۴.۲ ثانیه

همچنین در شکل ۶ نمودار انرژی سیستم هنگامی که مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار کمتر از ۴.۲ ثانیه آورده شده است و مشاهده می‌شود که انرژی سیستم رو به افزایش می‌رود و یا به عبارت دیگر سیستم ناپایدار شده است.

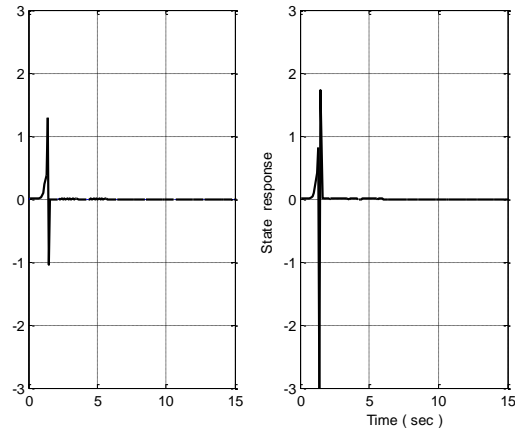


شکل ۶: انرژی سیستم مثال ۱ با Ts برابر ۳.۹ ثانیه

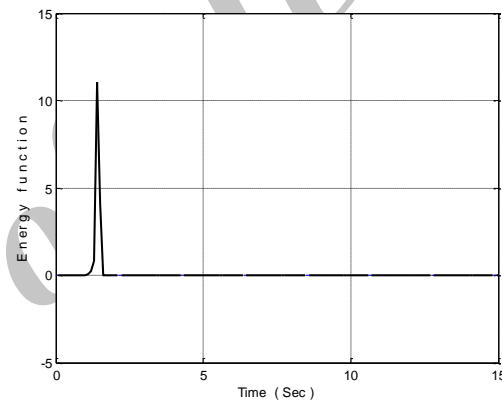
زیرسیستم‌های ناپایدار بیشتر باشد برای تضمین پایداری مینیمم زمان فعالیت زیرسیستم‌های پایدار نیز باید افزایش یابد. از طرف دیگر چون در این مقاله از قضیه زمان اقامت میانگین برای اثبات پایداری استفاده شده است، حداقل زمان اقامت میانگین نیز بر اساس پارامترهای سیستم محاسبه شد. همچنین از آنجایی که همواره تمام حالت‌ها سیستم در اختیار طراح نمی‌باشد، به عنوان پیشنهاد برای کارهای آتی طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی می‌توان مدت‌نظر قرار گرفت. همچنین همانطور که اشاره شد ضرایب طراحی در شبیه‌سازی‌ها کاملاً دلخواه در نظر گرفته شده است، می‌توان با در نظر گرفتن یک معیار بهینگی، این ضرایب را طوری انتخاب کرد که در نهایت پاسخ گذرای سیستم مطلوب تر شود که می‌توان برای تحقیقات بعدی مدنظر قرار داد.

مراجع

- [1] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Brikhauser, Boston, MA, 2003.
- [2] P. J. Antsaklis, "A brief introduction to the theory and application of hybrid systems," *In Proc IEEE. Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications*, 2000.
- [3] M. F. Testroi, A. M. Karlsson, S. P. Svensson, and I. Lundstrom, "A model for switched-like phenomena in biological systems," *Biophysical chemistry*, vol. 94, no. 1, pp. 1-9, 2001.
- [4] Z. Jia, C. Dong, H. Cheng, and Q. Wang, "A robust fault detection for control system of morphing aerial vehicle based on switched system approach," *In Control and Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese*, pp. 3147-3152, 2015.
- [5] J. D. Boskovic, R. K. Mehra, "Multi-mode switching in flight control," *In Proceedings of the 19th Digital Avionics Systems Conference*, Philadelphia, 2000.
- [6] J. D. Boskovic, and R. K. Mehra, "Multivariable adaptive controller design for a class of non-affine models arising in flight control," *In Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, Florida, 2001.
- [7] E. Palmer and G. Ledwich, "Switching control for power systems with line losses," *In IEEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, 1999, vol. 146, pp. 435-440.
- [8] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices," *Automatic Control, IEEE Transaction on*, vol. 39, no. 12, pp.2469-2471, 1994.
- [9] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung, "Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach," *Automatic Control, IEEE Transactions on* vol. 47, no. 11, pp.1883-1887, 2002
- [10] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 4, pp. 475-482, 1998.



شکل ۷: پاسخ متغیر اول حالت مثال ۵-۲ با T_s برابر با ۰.۷ ثانیه



شکل ۸: انرژی سیستم مثال ۵-۲ با T_s برابر ۰.۷ ثانیه

نکته ۳: انتخاب ضرایب α ، β_1 ، β_2 و β_3 در این مثال‌ها به صورت دلخواه صورت گرفته است. ولی نحوه انتخاب این ضرایب تاثیر مستقیمی بر پاسخ‌های گذرا خواهند گذاشت. به عنوان مثال اگر حداکثر شیب ممکن برای افزایش تابع انرژی در حالت زیرسیستم ناپایدار را کاهش داده و یا زمان فعالیت زیر سیستم ناپایدار را کاهش دهیم، بالادگی نیز کاسته خواهد شد. از طرفی دیگر در صورت انتخاب نامناسب این ضرایب نامساوی‌های ماتریسی خطی دیگر دارای جواب نخواهند بود.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله شرایط پایداری سیستم کلیدزنی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر در حضور غیرهمزمانی سوئیچ سیستم و کنترل کننده بیان شده است. این موضوع با استفاده از توابع شبه لیاپانوف و اجازه دادن به زیرسیستم به افزایش یافتن انرژی به صورت محدود بدست آمده است. این قضایا با توجه به ماکزیمم زمان فعالیت زیرسیستم ناپایدار و ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم‌ها و مینیمم زمان فعالیت زیرسیستم‌های پایدار بدست آمده است. به بیان دیگر هر مقدار که بازه زمانی فعالیت

- [11] L. Zhang, Lixian and P. Shi, "Stability,-gain and asynchronous control of discrete-time switched systems with average dwell time," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 9, pp. 2192-2199, 2009.
- [12] J. P. Hespanha, "Stability of switched systems with average dwell-time," In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, vol. 3, pp. 2655-2660, 1999.
- [13] P. Mhaskar, N. H., El-Farra and P. D. Christofides, "Robust predictive control of switched systems: satisfying uncertain schedules subject to state and control constraints," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 22, no. 2, pp. 161-179, 2008.
- [14] Z., Sun, *Switched linear system control and design*, Springer, London, 2005.
- [15] R. Wang, J. Xing, C. Zhou, P. Wang, and Q. Yang. "Finite-time asynchronously switched control of switched systems with sampled-data feedback," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol.33, no. 12, pp: 3713-3738, 2014.
- [16] C. Yuan, and F. Wu, "Asynchronous switching output feedback control of discrete-time switched linear systems," *International Journal of Control* ahead-of-print, pp: 1-9, 2015.
- [17] L. Zhang, and H. Gao, "Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time," *Automatica*, vol. 46, no. 5, pp, 953-958, 2010.
- [18] H. Lin, G. Zhai, L. Fang and P. J. Antsaklis, "Stability and H_∞ performance preserving scheduling policy for networked control systems," *In Proc. 16th IFAC World Congress on Automatic Control*, 2005.
- [19] H. Zhang, Y. Mao, and Y. Gao, "Exponential Stability and Asynchronous Stabilization of Switched Systems With Stable and Unstable Subsystems," *Asian Journal of Control*, vol.15, no. 5, pp. 1426-1433, 2013.
- [20] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, and E. E. Yaz. "Linear matrix inequalities in system and control theory," *Proceedings of the IEEE* vol.85, no. 4, pp. 698-699, 1997.
- [21] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pp. 284-289, 2004.