مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۱، بهار ۱۳۹۵، صفحه ۶۴-۵۱

کنترل بهینه دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری با استفاده از سری مودال توسعه یافته و استراتژی برنامه‌ریزی خطی

احسان محمّد زاده[۱]، ناصر پریز[۲]، سیدکمال حسینی ثانی[۳]، امین جاجرمی[۴]

[۱] دانشجوی دکتری کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه فردوسی مشهد، em.zadeh@stu.um.ac.ir

[۲] استاد گروه کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

[۳] دانشیار گروه کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه فردوسی مشهد، k.hosseini@um.ac.ir

[۴] استادیار گروه کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، گروه برق، دانشگاه بجنورد، a.jajarmi@ub.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۱۰/۱۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۰۳/۰۹)

چکیده: این مقاله، روش محاسباتی کارآمدی را جهت حل مساله کنترل بهینه دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری بر پایه ترکیب روش سری مودال و استراتژی برنامه‌ریزی خطی ارایه می‌نماید. مشتق کسری بر اساس مفهوم ریمان- لیوویل و با مرتبه کسری بین صفر و یک در نظر گرفته شده است. معیار عملکردی که شامل هزینه نهایی می‌باشد انتگرال مربعی از حالت و کنترل با افق زمانی محدود در نظرگرفته شده است. در این مقاله هر دو مساله شامل وضعیت نهایی ثابت و آزاد بررسی شده است. در این روش، ابتدا روش سری مودال جهت تبدیل مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی اوّلیه، که از اصل ماکزیمم پونتریاگین به‌دست آمده است، به دنباله‌ای از مسایل مقدار مرزی مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان بسط داده می‌شود. سپس این دنباله از مسایل مقدار مرزی مرتبه کسری خطی با تعریف یک مساله تغییراتی در حساب تغییرات و با استفاده از تکنیک گسسته سازی بر اساس تقریب مرتبه اول مشتقات کسری گرونوالد- لتنیکف و معرفی یک انتقال جدید به دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. آنالیز همگرایی روش پیشنهادی ارایه و جهت حصول کنترل زیر- بهینه، الگوریتم تکراری و سریعی با تلاش محاسباتی اندک معرفی می‌گردد. در نهایت، دو مثال عددی که مبین کارایی روش پیشنهادی است ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: کنترل بهینه مرتبه‌کسری ، سری مودال توسعه‌یافته، مساله مقدار مرزی مرتبه‌کسری غیرخطی، تقریب گرونوالد- لتنیکف، برنامه‌ریزی خطی.

Optimal Control for a Class of Nonlinear Fractional-Order Systems Using an Extended Modal Series Method and Linear Programming Strategy

Ehsan Mohammadzadeh, Naser Pariz, Seyed Kamal Hosseini Sani, Amin Jajarmi

Abstract: This paper presents a novel hybrid technique based on the modal series method and linear programming strategy for solving the optimal control problem of nonlinear fractional-order systems. The fractional derivative is defined in the sense of Riemann-Liouville with order less than one. The performance index includes the terminal cost in addition to the integral quadratic cost functional. Both the fixed and free final states cases have been taken into account. In this approach, first we extend the modal series method in order to convert the original nonlinear fractional-order two point boundary value problem (FTPBVP) derived from the Pontryagin's maximum principle into a sequence of linear time-invariant FTPBVPs. This sequence is then transformed into a sequence of linear programming problems by defining a new variational problem in the calculus of

نویسنده عهده دار مکاتبات: سیدکمال حسینی ثانی

variations, using a discretization technique based on the first-order Grünwald-Letnikov approximation and introducing a new transformation. The convergence analysis of the proposed approach is also provided. To achieve an accurate suboptimal control, we apply a fast iterative algorithm with low computational effort. Finally, two numerical examples are included to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: Fractional-order optimal control, Extended modal series, Nonlinear fractional-order two point boundary value problem, Grünwald-Letnikov approximation, Linear programming.

۱- مقدمه

اگرچه کارهای صورت گرفته در زمینهٔ کنترل سیستم‌های مرتبه کسری در دههٔ اخیر رشد فزاینده‌ای داشته امّا در حوزه کنترل بهینه سیستم‌های مرتبه کسری کارهای محدودی انجام شده است. با این وجود با استفاده از حساب تغییرات کسری، لاگرانژین و معادله اولر-لاگرانژ برای یک سیستم مرتبه کسری توسط ریوو توسعه داده شد[۱]. کلایمک [۲] قوانین محافظه کارانه‌ای برای معادلات دیفرانسیل کسری خطی با ضرایب متغیر استخراج نمود. در مرجع [۳] جهت به‌دست آوردن تعمیم کسری از معادله جینزبرگ-لانداو[1] برای محیط‌های فرکتال از معادله اولر-لاگرانژ استفاده شده است. در مرجع [۴] یک هامیلتونین جهت سیستم دینامیکی کسری ساخته شد که با تبدیل هامیلتونین به معادله شرودینگر حل شده است. استفاده از معادله اولر-لاگرانژ کسری جهت مدل کردن لاگرانژین کسری با سرعت‌های خطی توسط بالیآنو و همکارانش [۵]، فرمول‌بندی هامیلتونین کسری سیستم‌های با سرعت خطی [۶]، معادلات هامیلتونین جهت مسایل تغییراتی کسری [۷و۸] و فرمول‌بندی هامیلتونین کسری برای مسایل تغییراتی کسری در [۹] صورت پذیرفته است. در مرجع [۱۰] با بسط حساب تغییرات جهت مشتق کسری، معادلات اولر-لاگرانژ برای مسایل تغییراتی کسری توسعه داده شده است. برای نخستین بار، اگراوال با استفاده از حساب تغییرات کسری و تکنیک ضرب کننده لاگرانژ، فرموله‌بندی مسایل کنترل بهینه کسری را بر حسب مفهوم ریمان-لیوویل[2] ارایه نمود که پیاده سازی شرایط لازم بهینگی در نهایت منجر به مسالهٔ مقدار مرزی مرتبه کسری[3] گشت[۱۱]. اما از آنجایی که مساله مقدار مرزی به‌دست آمده هم به مشتق راست متغیرحالت سیستم و هم به مشتق چپ متغیر کمک- حالت[4] سیستم وابسته می‌باشد به‌دست آوردن پاسخ تحلیلی مساله حتی برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی نیز بسیار مشکل می‌باشد. بنابراین روش‌های عددی جهت حصول نتیجه، توسعه یافته‌اند. در مرجع [۱۲]، جهت محاسبه پاسخ مساله کنترل بهینه کسری که بر اساس مشتق کسری برحسب مفهوم کاپوتو[5] فرموله شده بود، معادلات انتگرال والترا[6] جایگزین معادلات دیفرانسیل منتجه شد و برای محاسبهٔ پاسخ معادلات جبری حاصله، از حل کنندهٔ خطی استفاده شد. اگراوال و همکارانش [۱۳ و ۱۴] مساله کنترل بهینه کسری بر حسب مشتق کسری ریمان- لیوویل را تعریف نمودند و معادلات منتجه با استفاده از تقریب گرونوالد-لتنیکف[7] و روش عددی به‌صورت مستقیم حل شده است. استفاده از تعریف گرونوالد-لتنیکف اصلاح شده توسط بالیآنو و همکارانش [۱۵] منجر به روش عددی تفاضل مرکزی جهت محاسبه پاسخ مساله کنترل بهینه کسری با دقت بیشتر شده است. در [۱۶]، نویسندگان جهت محاسبه پاسخ تقریبی مسایل کنترل بهینه کسری با استفاده از RIOTS_95 از تقریب اوستالوپ[8] که تقریب کسری از اپراتورهای دیفرانسیل‌گیری کسری است بهره جستند. در مرجع [۱۷] جهت توسعه شرایط بهینگی و روش حل مساله کنترل بهینه کسری، فرمول انبساطی[9] برای مشتق کسری استفاده شده است. فرموله‌بندی مساله کنترل بهینه کسری به همراه روش حل آن بر پایه شبه فضای حالتی در مرجع [۱۸] نمایش داده شده است. نویسندگان مرجع [۱۹] مساله کنترل بهینه کسری را برای دسته‌ای از سیستم های زنجیره ای[10] برحسب مشتق کسری کاپوتو فرموله‌بندی نموده و سپس جهت حل مساله، روش تکراری عددی را توسعه دادند. فریدریکو و تورس [۲۰] قضیه نئودر[11] را به‌صورت عام در کنترل بهینه کسری بر حسب مفهوم کاپوتو فرموله کرده و قوانینی را در مسایل کنترل بهینه کسری مطالعه نمودند. لطفی و همکارانش [۲۱] برای حل دسته‌ای از مسایل کنترل بهینه کسری از طریق پایه‌های متعامد لژاندر، روش مستقیم عددی را نمایش دادند. در [۲۲] فرموله‌بندی و روش حلی برای مساله کنترل بهینه کسری با فرض آزاد بودن زمان نهایی نشان داده شده است. نویسندگان مقاله، شرایط لازم جهت بهینگی و شرط سنجش را با استفاده از تکنیک ضرب کننده لاگرانژ به‌دست آورده و از روشی مشابه روش پرتاب[12] جهت حل شرایط بهینگی استفاده نموده‌اند. اخیراً نویسندگان [۲۳] جهت حل دسته-ای از مسایل کنترل بهینه کسری به‌صورت غیرمستقیم، با استفاده از روش

[1] Ginzburg-Landau
[2] Riemann-Liouville
[3] Fractional two point boundary value problem
[4] Co-state
[5] Caputo
[6] Volterra-type
[7] Grünwald-Letnikov
[8] Oustaloup's approximation
[9] Expansion formula
[10] Continuum
[11] Neother-type
[12] Shooting method

کولوکیشن[1] سری بسل کوتاه شده را به‌کار برده‌اند. از جمله کارهای اخیر، آلمیدا و تورس[۲۴] روش پاسخی را نمایش دادند که مساله کنترل بهینه کسری اصلی با مساله کنترل بهینه‌ای که فقط شامل مشتقات مرتبه صحیح می‌باشد تقریب زده شده است. سپس با به‌کارگیری روش تفاضل محدود[2]، مساله گسسته شده و در نهایت به‌صورت عددی حل می‌شود.

همانطور که بیان شد به‌کارگیری شرایط لازم بهینگی جهت حل مسألهٔ کنترل بهینه کسری، منجر به یک مسألهٔ مقدار مرزی مرتبه کسری می‌گردد. این مساله در حالت کلی غیرخطی بوده و وابسته به مشتقات کسری راست و چپ می‌باشد. بنابراین حل این مساله در بسیاری از حالات بسیار مشکل و حتی گاهی غیرممکن است. لازم به ذکر است بیشتر کارهای انجام شده در مقالات موجود، فقط مسایل کنترل بهینه سیستم های مرتبه کسری عمدتاً خطی و با وضعیت نهایی آزاد را در نظرگرفته‌اند. امّا در مقاله جاری روش نوینی جهت محاسبهٔ پاسخ مسایل کنترل بهینه برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری شامل چندین متغیر حالت و کنترل ارائه می‌شود. همچنین معیار عملکردی علاوه بر انتگرال تابعی هزینه، شامل هزینه نهایی نیز می‌باشد. با فرض ثابت بودن زمان نهایی، هر دو حالت وضعیت نهایی ثابت و آزاد در نظر گرفته شده است.

هدف این مقاله، ارایه تکنیکی کارآمد و با قابلیت محاسباتی بالا بر اساس روش سری مودال جهت حل دسته‌ای از مسایل کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری می‌باشد. جزءکلیدی در روش سری مودال، بسط پاسخ یک سیستم غیرخطی به‌صورت سری بوده که در حوزه آنالیز سیستم‌های غیرخطی توسعه داده شده است [۲۵–۲۸]. سری مودال در واقع بسط مک‌لورن پاسخ معادله دیفرانسیل غیرخطی حول شرایط اولیه است و لذا نسبت به پاسخ مدل خطی که تنها از دو جمله اول بسط مک لورن استفاده می‌شود دقیق‌تر است. همچنین در این روش، پاسخ سیستم غیرخطی نامتغیر با زمان بر اساس مودهای سیستم خطی شده ومودهای تداخلی سیستم به‌دست می‌آید. از آنجایی‌که مودهای تداخلی سیستم بر اساس ترکیبی از مودهای اصلی و خطی شده سیستم بوده و این مودها مفهوم مقادیر ویژه را برای سیستم دارند لذا پاسخ سیستم به فرم سری مودال منجر به درک فیزیکی بهتری از رفتار سیستم غیرخطی می‌شود. روش سری مودال وابسته به وجود پارامترهای فیزیکی کوچک یا بزرگ در مدل سیستم نبوده و پاسخ به‌صورت یکنواخت به پاسخ دقیق مساله همگرا می‌شود. اخیراً نویسندگان روش سری مودال را برای کنترل بهینه و همچنین کنترل مدل پیش بین جهت سیستم‌های غیرخطی با مشتقات مرتبه صحیح توسعه داده‌اند [۲۹–۳۰]. در این مقاله روش سری مودال جهت حل مسایل کنترل بهینه سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری توسعه داده شده است که منجر به محاسبه پاسخ به فرم سری با همگرایی یکنواخت می‌شود. در توسعه صورت گرفته، مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی، که از اصل ماکزیمم پونتریاگین به‌دست آمده، به دنباله‌ای از مسایل مقدار مرزی مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان تبدیل می‌شود. سپس با تعریف یک مساله تغییراتی در حساب تغییرات و استفاده از روش گسسته‌سازی بر پایه تقریب مرتبه اوّل گرونوالد–لتنیکف و معرفی یک انتقال جدید، دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی را برای مساله کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری به‌دست می‌آوریم. این ویژگی مهمترین مزیت روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های ارایه شده در مراجع[۱۳–۱۵] می‌باشد. زیرا روش‌های ذکر شده برای حل مساله کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری نیاز به حل یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی دارند. در حالی که روش پیشنهادی برای حل مساله غیرخطی فوق، تنها نیاز به حل دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی دارد. در این مقاله، آنالیز همگرایی روش پیشنهادی نیز ارایه شده و در نهایت جهت نشان دادن کارایی روش، مثال‌هایی به‌صورت عددی حل و نتایج شبیه‌سازی با نتایج موجود در مقالات مشابه مقایسه شده است.

ادامهٔ مقاله حاضر به‌صورت زیر سازمان دهی شده است. بخش ۲، به‌صورت مختصر تعاریف پایه‌ای از مشتقات کسری را بیان می‌کند. بخش ۳، صورت مساله کنترل بهینه کسری را توصیف می‌کند. پیشنهاد استراتژی طراحی کنترل بهینه برای کلاسی از مسایل کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری از طریق ترکیب روش سری مودال توسعه یافته و استراتژی برنامه‌ریزی خطی، در بخش ۴ بیان شده است. همچنین در این بخش آنالیز همگرایی و الگوریتم تکراری سریع حل مساله ارایه شده است. کارایی روش پیشنهادی با حل دو مثال عددی در بخش ۵ نشان داده شده و در نهایت، نتایج پژوهش در بخش انتهایی ارایه می‌گردد.

۲– تعاریف

تعاریف گوناگونی از مشتقات کسری پیشنهاد شده است. این تعاریف شامل مشتقات کسری ریمان–لیوویل، کاپوتو، گرونوالد–لتنیکف، ویل[3]، مارچاود[4] و ریس[5] می‌باشد. در این بخش با توجه به کاربرد در این مقاله، تعاریف مشتقات کسری چپ و راست بر حسب ریمان–لیوویل، کاپوتو و گرونوالد–لتنیکف ارایه می‌گردد.

فرض کنید $x(t): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع وابسته به زمان باشد. مشتقات کسری چپ و راست $x(t)$ بر حسب مفاهیم ریمان–لیوویل، کاپوتو و گرونوالد–لتنیکف به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱–۳۲]:

مشتق کسری ریمان–لیوویل چپ[6]

$$ {}_aD_t^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{x(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (۱) $$

مشتق کسری ریمان–لیوویل راست[7]

[1] Collocation method
[2] Finite difference
[3] Weyl
[4] Marchaud
[5] Riesz
[6] The left Riemann-Liouville fractional derivative (LRLFD)
[7] The right Riemann-Liouville fractional derivative (RRLFD)

$$
{}_tD_b^{\alpha}\, x(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{۲}
$$

مشتق کسری کاپوتو چپ[1]

$$
{}_a^CD_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{d^n x(\tau)/d\tau^n}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau\,, \tag{۳}
$$

مشتق کسری کاپوتو راست[2]

$$
{}_t^CD_b^{\alpha} x(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{d^n x(\tau)/d\tau^n}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau\,, \tag{۴}
$$

مشتق کسری گرونوالد-لتنیکف چپ[3]

$$
{}_a^{GL}D_t^{\alpha} x(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} w_k^{\alpha} x(t-kh)\,, \tag{۵}
$$

مشتق کسری گرونوالد-لتنیکف راست[4]

$$
{}_t^{GL}D_b^{\alpha} x(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-t}{h}\right]} w_k^{\alpha} x(t+kh)\,, \tag{۶}
$$

که $n-1 < \alpha < n$ مرتبه مشتق‌گیری و n نیز عددی صحیح است. همچنین $\left[\frac{t-a}{h}\right]$ و $\left[\frac{b-t}{h}\right]$ اعداد صحیح مثبت، ضریب $w_k^{\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$ و Γ مبین تابع گاما می‌باشد. ضریب w_k^{α} را نیز می‌توان به‌صورت بازگشتی بر اساس رابطه زیر محاسبه نمود:

$$
w_0^{\alpha} = 1, \quad w_k^{\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) w_{k-1}^{\alpha}, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{۷}
$$

از جمله روابط مفید که بین مشتقات ریمان- لیوویل و کاپوتو وجود دارد می‌توان به روابط زیر اشاره نمود [۳۳]:

$$
{}_a^CD_t^{\alpha} x(t) = {}_aD_t^{\alpha} x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{(k)}(a)\,, \tag{۸}
$$

$$
{}_t^CD_b^{\alpha} x(t) = {}_tD_b^{\alpha} x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (b-t)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{(k)}(b)\,. \tag{۹}
$$

۳- مساله کنترل بهینه مرتبه کسری

در این بخش، کلاسی از مسایل کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری به‌صورت زیر فرموله‌بندی شده است. سیستم غیرخطی مرتبه کسری توصیف شده زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t) = F\big(x(t)\big) + G\big(x(t)\big)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \qquad\qquad t\epsilon\big[t_0, t_f\big]. \end{cases} \tag{۱۰}
$$

که $x(t)\epsilon\mathbb{R}^n$ و $u(t)\epsilon\mathbb{R}^m$ به‌ترتیب بردارهای حالت و کنترل هستند، پارامتر x_0 مبین شرط اولیه، t_0 زمان اولیه و t_f زمان نهایی معلوم می‌باشند، $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع برداری غیرخطی و تحلیلی به قسمی که $F(0) = 0$ و $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ نیز نگاشت غیرخطی تحلیلی فرض می‌شوند. هدف نهایی، یافتن قانون کنترل بهینهٔ $u^*(t)$ است بطوریکه تابعی هزینه مربعی و افق محدود زیر را برای سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۱۰) حداقل نماید:

$$
J = \frac{1}{2} x^T\big(t_f\big) S x\big(t_f\big) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right] dt, \tag{۱۱}
$$

که در آن $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌های نیمه معین مثبت و $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ماتریس معین مثبت می‌باشند. قابل ذکر اینکه زمانیکه $\alpha = 1$ باشد، مساله (۱۰) و (۱۱) به مساله کنترل بهینه کلاسیک تقلیل می‌یابد. بعلاوه برای سادگی $0 < \alpha < 1$ در نظر گرفته می‌شود. این فرض به‌عنوان محدودیت روش نبوده و مشتق کسری می‌تواند از هر مرتبه‌ای باشد.

بر اساس اصل حداقل‌یابی پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی جهت مسالهٔ کنترل بهینه مرتبه کسری (۱۰) و (۱۱) توسط رابطه (۱۲) بیان می‌شود [۳۴]:

$$
\begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t) = F\big(x(t)\big) - G\big(x(t)\big)R^{-1}G^T\big(x(t)\big)\lambda(t)\,, t\epsilon\big[t_0, t_f\big], \\ {}_t^CD_{t_f}^{\alpha} \lambda(t) = \left(\dfrac{\partial F\big(x(t)\big)}{\partial x(t)}\right)^T \lambda(t) + Qx(t) - H\big(x(t), \lambda(t)\big), t\epsilon\big[t_0, t_f\big], \end{cases} \tag{۱۲}
$$

که تابع $H\big(x(t), \lambda(t)\big)$ به‌صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$
H\big(x(t), \lambda(t)\big) \triangleq \begin{bmatrix} \lambda^T(t) \dfrac{\partial G\big(x(t)\big)}{\partial x_1(t)} R^{-1} G^T\big(x(t)\big)\lambda(t) \\ \vdots \\ \lambda^T(t) \dfrac{\partial G\big(x(t)\big)}{\partial x_n(t)} R^{-1} G^T\big(x(t)\big)\lambda(t) \end{bmatrix}, \tag{۱۳}
$$

$\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار کمک- حالت بوده و $x_i(t)$ نیز i-امین عنصر بردار حالت $x(t)$ می‌باشد. همچنین قانون کنترل بهینه توسط رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$
u^*(t) = -R^{-1}G^T\big(x(t)\big)\lambda(t), \qquad t\epsilon\big[t_0, t_f\big]. \tag{۱۴}
$$

مساله (۱۲) معادلات اولر-لاگرانژ جهت مساله کنترل بهینه مرتبه کسری را نشان می‌دهد که بسیار مشابه معادلات اولر-لاگرانژ در مساله کنترل بهینه کلاسیک بوده، با این تفاوت که معادلات به‌دست آمده در حالت مرتبه کسری در برگیرنده مشتقات کسری راست و چپ می‌باشند. بنابراین پاسخ مساله کنترل بهینه مرتبه کسری به اطلاعات مشتقات پیش‌رو و پس‌رو نیازمند است. مساله کنترل بهینه مرتبه کسری را در دو حالت وضعیت نهایی ثابت و آزاد در نظر بگیرید. در حالت وضعیت نهایی آزاد شرایط مرزی مساله به‌صورت زیر می‌باشند:

$$
x(t_0) = x_0, \qquad \lambda\big(t_f\big) = Sx\big(t_f\big). \tag{۱۵}
$$

برای مساله کنترل بهینه مرتبه کسری با وضعیت نهایی ثابت، ترم هزینه نهایی $\frac{1}{2}x^T\big(t_f\big)Sx\big(t_f\big)$ در معیار عملکردی (۱۱) در نظر

---
[1] The left Caputo fractional derivative (LCFD)
[2] The right Caputo fractional derivative (RCFD)
[3] The left Grünwald-Letnikov fractional derivative (LGLFD)
[4] The right Grünwald-Letnikov fractional derivative (RGLFD)

گرفته نمی‌شود. چون این ترم ثابت بوده و در حداقل سازی مساله تاثیری ندارد. بنابراین شرایط مرزی مساله (۱۲) به‌صورت (۱۶) می‌باشند:

$$x(t_0)=x_0,\qquad x(t_f)=x_f. \tag{16}$$

در این رابطه $x_f\epsilon\mathbb{R}^n$ بردار وضعیت نهایی معلومی است. برای جزئیات استخراج معادلات (۱۲) الی (۱۶) می توان به مرجع [۳۴] مراجعه نمود. قابل توجه اینکه مساله (۱۲) با شرایط مرزی (۱۵) یا (۱۶) یک مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی می‌باشد. این مساله برای $\alpha=1$ بطور وسیعی مطالعه شده است و روش‌های حل این مساله نیز در مقالات معتبر ارائه شده‌اند [۳۵]. امّا زمانیکه $0<\alpha<1$ باشد مشتقات کسری چپ و راست در شرایط بهینگی ظاهر می‌شوند و به همین علت این مساله نمی‌تواند به‌صورت تحلیلی و یا حتی به‌صورت عددی، مگر در حالات خاصی، حل گردد. برای غلبه بر این مشکل، روش سری مودال توسعه یافته در بخش بعد ارایه می گردد.

۴- روش سری مودال توسعه یافته

در این بخش، روش سری مودال را به منظور حل مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی (۱۲) با شرایط مرزی (۱۵)یا (۱۶) توسعه می‌دهیم. سپس همگرایی روش پیشنهادی را اثبات می‌کنیم. بدون از دست دادن عمومیت مساله، مساله کنترل بهینه کسری را با وضعیت نهایی ثابت در نظر می‌گیریم. نتایج حاصل از این بخش با جایگزینی شرط مرزی $x(t_f)=x_f$ با شرط $\lambda(t_f)=Sx(t_f)$ برای حالت وضعیت نهایی آزاد قابل استفاده می‌باشند. جهت سادگی در بحث، توابع $\Psi(x(t),\lambda(t))$ و $\bar{\Psi}(x(t),\lambda(t))$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}\Psi(.,.):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\\ \Psi(x(t),\lambda(t))\triangleq F(x(t))\\ \qquad -G(x(t))R^{-1}G^T(x(t))\lambda(t),\end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases}\bar{\Psi}(.,.):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\\ \bar{\Psi}(x(t),\lambda(t))\triangleq\left(\dfrac{\partial F(x(t))}{\partial x(t)}\right)^T\lambda(t)\\ \qquad +Qx(t)-H(x(t),\lambda(t)).\end{cases} \tag{18}$$

بنابراین مساله (۱۲) با شرایط مرزی (۱۶) به‌صورت فشرده توسط رابطهٔ (۱۹) قابل بازنویسی است:

$$\begin{cases}{}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)=\Psi(x(t),\lambda(t)),\ t\epsilon[t_0,t_f],\\ {}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha}\lambda(t)=\bar{\Psi}(x(t),\lambda(t)),\ t\epsilon[t_0,t_f],\\ x(t_0)=x_0,\quad x(t_f)=x_f.\end{cases} \tag{19}$$

مساله (۱۹) یک مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی است که در حالت کلی به راحتی قابل حل نمی‌باشد. برای حل این مشکل توابع $\Psi(x(t),\lambda(t))$ و $\bar{\Psi}(x(t),\lambda(t))$ را حول نقطه کاری $(x,\lambda)=(0,0)$ بسط سری تیلور می‌دهیم که منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\begin{cases}{}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)=A_{10}x(t)+A_{01}\lambda(t)\\ +\dfrac{1}{2!}x^T(t)H_{20}x(t)+x^T(t)H_{11}\lambda(t)\\ \qquad +\dfrac{1}{2!}\lambda^T(t)H_{02}\lambda(t)+\cdots,\\ {}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha}\lambda(t)=\bar{A}_{10}x(t)+\bar{A}_{01}\lambda(t)\\ +\dfrac{1}{2!}x^T(t)\bar{H}_{20}x(t)+x^T(t)\bar{H}_{11}\lambda(t)\\ \qquad +\dfrac{1}{2!}\lambda^T(t)\bar{H}_{02}\lambda(t)+\cdots.\end{cases} \tag{20}$$

ضرایب در رابطه (۲۰) به‌صورت زیر هستند:

A_{10} و A_{01} به‌ترتیب گرادیان $\Psi(x(t),\lambda(t))$ نسبت به x و λ در $(x,\lambda)=(0,0)$، $\bar{A}_{10}$ و $\bar{A}_{01}$ به‌ترتیب گرادیان $\bar{\Psi}(x(t),\lambda(t))$ نسبت به x و λ در $(0,0)$، H_{20}، H_{11} و H_{02} به‌ترتیب هسیان[1] $\Psi(x(t),\lambda(t))$ نسبت به (x,x)، (x,λ) و (λ,λ) در $(0,0)$ و $\bar{H}_{20}$، $\bar{H}_{11}$ و $\bar{H}_{02}$ به‌ترتیب هسیان $\bar{\Psi}(x(t),\lambda(t))$ نسبت به (x,x)، (x,λ) و (λ,λ) در $(0,0)$ می باشند. پاسخ مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی (۱۹) با شرایط مرزی $x_b=(x_0,x_f)$ و برای تمام زمان‌های $t\epsilon[t_0,t_f]$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases}x(t)=\Lambda(x_b,t),\\ \lambda(t)=\bar{\Lambda}(x_b,t),\end{cases} \tag{21}$$

که در آن $\Lambda(.,.):\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ و $\bar{\Lambda}(.,.):\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ توابع برداری غیرخطی و تحلیلی نسبت به شرایط مرزی x_b می‌باشند. زیرا توابع $\Psi(.,.)$ و $\bar{\Psi}(.,.)$ در معادلات (۱۷) و (۱۸) توابعی تحلیلی فرض شده اند [۳۶]. همچنین به‌سادگی می توان نشان داد که برای تمام زمان‌های $t\epsilon[t_0,t_f]$، $\Lambda(0,t)=\bar{\Lambda}(0,t)=0$. بنابراین بسط مک لورن Λ و $\bar{\Lambda}$ حول x_b به فرم زیر است:

$$\begin{aligned}x(t)&=\underbrace{\Lambda(x_b,t)\,\big|_{x_b=0}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial\Lambda(x_b,t)}{\partial x_b}\,\Big|_{x_b=0}\;x_b}_{g_1(t)}\\&+\underbrace{x_b^T\left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Lambda(x_b,t)}{\partial x_b^2}\,\Big|_{x_b=0}\right)x_b}_{g_2(t)}+\cdots,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\underbrace{\bar{\Lambda}(x_b,t)\,\big|_{x_b=0}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial\bar{\Lambda}(x_b,t)}{\partial x_b}\,\Big|_{x_b=0}\;x_b}_{\bar{g}_1(t)}\\&+\underbrace{x_b^T\left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\bar{\Lambda}(x_b,t)}{\partial x_b^2}\,\Big|_{x_b=0}\right)x_b}_{\bar{g}_2(t)}+\cdots,\end{aligned} \tag{23}$$

از آنجایی که بردارهای Λ و $\bar{\Lambda}$ نسبت به x_b تحلیلی می‌باشند بنابراین وجود و همگرایی یکنواخت سری‌های (۲۲) و (۲۳) تضمین شده است. حال شرایط مرزی را به‌صورت εx_b انتخاب می‌کنیم، یعنی $x(t_0)=\varepsilon x_0$ و $x(t_f)=\varepsilon x_f$، که ε پارامتر اسکالر دلخواهی بوده

[1] Hessian

و این پارامتر فقط محاسبات را ساده‌تر می‌کند. بنابراین، معادلات (۲۲) و (۲۳) را مجدداً می‌توان به‌صورت روابط (۲۴) و (۲۵) نوشت:

$$x(t) = \Lambda(\varepsilon x_b, t) = \varepsilon g_1(t) + \varepsilon^2 g_2(t) + \cdots, \qquad (۲۴)$$

$$\lambda(t) = \bar{\Lambda}(\varepsilon x_b, t) = \varepsilon \bar{g}_1(t) + \varepsilon^2 \bar{g}_2(t) + \cdots. \qquad (۲۵)$$

با جایگذاری $x(t)$ و $\lambda(t)$ از معادلات (۲۴) و (۲۵) در رابطه (۲۰) و سپس مرتب کردن جملات بر مبنای توان‌های ε داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon\, {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_1(t) + \varepsilon^2\, {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_2(t) + \cdots = \\ \varepsilon\left(A_{10} g_1(t) + A_{01}\bar{g}_1(t)\right) \\ +\varepsilon^2 \begin{pmatrix} A_{10} g_2(t) + A_{01}\bar{g}_2(t) \\ +\frac{1}{2!} g_1^T(t) H_{20} g_1(t) \\ +g_1^T(t) H_{11} \bar{g}_1(t) \\ +\frac{1}{2!} \bar{g}_1^T(t) H_{02} \bar{g}_1(t) \end{pmatrix} + \cdots, \\ \varepsilon\, {}_t^C D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_1(t) + \varepsilon^2\, {}_t^C D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_2(t) + \cdots = \\ \varepsilon\left(\bar{A}_{10} g_1(t) + \bar{A}_{01}\bar{g}_1(t)\right) \\ +\varepsilon^2 \begin{pmatrix} \bar{A}_{10} g_2(t) + \bar{A}_{01}\bar{g}_2(t) \\ +\frac{1}{2!} g_1^T(t) \bar{H}_{20} g_1(t) \\ +g_1^T(t) \bar{H}_{11} \bar{g}_1(t) \\ +\frac{1}{2!} \bar{g}_1^T(t) \bar{H}_{02} \bar{g}_1(t) \end{pmatrix} + \cdots. \end{cases} \qquad (۲۶)$$

با برابر قرار دادن جملات مشابه با توان‌های یکسان از ε در طرفین رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\varepsilon: \begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_1(t) = A_{10} g_1(t) + A_{01}\bar{g}_1(t), \\ {}_t^C D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_1(t) = \bar{A}_{10} g_1(t) + \bar{A}_{01}\bar{g}_1(t), \end{cases} \qquad (۲۷)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_2(t) = A_{10} g_2(t) \\ +A_{01}\bar{g}_2(t) + \frac{1}{2!} g_1^T(t) \mathrm{H}_{20} g_1(t) \\ \quad +g_1^T(t) \mathrm{H}_{11} \bar{g}_1(t) \\ \quad +\frac{1}{2!} \bar{g}_1^T(t) \mathrm{H}_{02} \bar{g}_1(t), \\ {}_t^C D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_2(t) = \bar{A}_{10} g_2(t) \\ +\bar{A}_{01}\bar{g}_2(t) + \frac{1}{2!} g_1^T(t) \bar{\mathrm{H}}_{20} g_1(t) \\ \quad +g_1^T(t) \bar{\mathrm{H}}_{11} \bar{g}_1(t) \\ \quad +\frac{1}{2!} \bar{g}_1^T(t) \bar{\mathrm{H}}_{02} \bar{g}_1(t), \end{cases} \qquad (۲۸)$$

و برای $i = 3,4, \ldots$ داریم:

$$\varepsilon^i: \begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t) = A_{10} g_i(t) + A_{01}\bar{g}_i(t) \\ \quad +Z_i \begin{pmatrix} g_1(t), \ldots, g_{i-1}(t), \\ \bar{g}_1(t), \ldots, \bar{g}_{i-1}(t) \end{pmatrix}, \\ {}_t^C D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t) = \bar{A}_{10} g_i(t) + \bar{A}_{01}\bar{g}_i(t) \\ \quad +\bar{Z}_i \begin{pmatrix} g_1(t), \ldots, g_{i-1}(t), \\ \bar{g}_1(t), \ldots, \bar{g}_{i-1}(t) \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad (۲۹)$$

که عبارات غیرهمگن Z_i و $\bar{Z}_i$ در i–امین گام، با برابر قرار دادن ضرایب ε^i در معادله (۲۶) به‌دست می‌آید. نکته قابل توجه اینکه معادله (۲۷) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان همگن می‌باشد. با حل معادله (۲۷)، $g_1(t)$ و $\bar{g}_1(t)$ قابل دستیابی هستند. فرض کنید در گام اول، $g_1(t)$ و $\bar{g}_1(t)$ با حل معادله (۲۷) به‌دست آمده‌اند. آنگاه $g_2(t)$ و $\bar{g}_2(t)$ در گام دوم با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان غیر همگن (۲۸) قابل دستیابی هستند که عبارات غیرهمگن آن با استفاده از پاسخ دستگاه (۲۷) محاسبه می‌شوند. با ادامهٔ این روند، در گام i–ام، $g_{\mathrm{i}}(t)$ و $\bar{g}_{\mathrm{i}}(t)$ به ازای $i \geq 3$ تنها با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان غیر همگن به‌دست می‌آیند. علاوه بر این، در هر گام جملات غیرهمگن با استفاده از اطلاعات به‌دست آمده درگامهای قبلی محاسبه می‌شوند. بنابراین، دنبالهٔ مذکور طی یک فرآیند بازگشتی قابل حل می‌باشد. لذا تکنیک پیشنهادی بر پیچیدگی محاسبات که به‌واسطه غیرخطی بودن مساله، ایجاد شده غلبه می‌کند. برای تعیین شرایط مرزی دنبالهٔ فوق الذکر، در معادلهٔ (۲۴)، $t = t_0$ و $t = t_f$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon x_0 = x(t_0) = \Lambda(\varepsilon x_b, t_0) \\ \qquad = \varepsilon g_1(t_0) + \varepsilon^2 g_2(t_0) + \cdots, \\ \varepsilon x_f = x(t_f) = \Lambda(\varepsilon x_b, t_f) \\ \qquad = \varepsilon g_1(t_f) + \varepsilon^2 g_2(t_f) + \cdots. \end{cases} \qquad (۳۰)$$

با برابر قرار دادن جملات مشابه با توان‌های یکسان از ε در طرفین رابطهٔ (۳۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} g_1(t_0) = x_0, \\ g_1(t_f) = x_f, \end{cases} \text{ و } \begin{cases} g_i(t_0) = 0, \\ g_i(t_f) = 0, \end{cases} \quad i \geq 2. \qquad (۳۱)$$

بر اساس مطالب بیان شده فوق، قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۱: پاسخ عددی مسالهٔ مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی (۱۹) به‌صورت $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)$ و $\lambda(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{g}_{\mathrm{i}}(t)$ بیان می‌شود که $g_i(t)$ و $\bar{g}_{\mathrm{i}}(t)$ به ازای تمام محدودهٔ زمانی $t\epsilon[t_0, t_f]$ توسط حل بازگشتی تنها دنباله‌ای از مسایل مقدار مرزی مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان (۲۷) الی (۲۹) با شرایط مرزی (۳۱) به‌دست می‌آیند.

با دنبال کردن فرآیند بازگشتی بیان شده توسط قضیهٔ ۱، کنترل بهینهٔ $u^*(t)$ و مسیر حالت مربوطه به‌صورت زیر فرموله می‌شوند:

$$u^*(t) = -R^{-1} G^T \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} \bar{g}_{\mathrm{i}}(t)\right), \quad t\epsilon[t_0, t_f], \qquad (۳۲)$$

$$x^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t), \qquad t\epsilon[t_0, t_f], \qquad (۳۳)$$

که $g_i(t)$ و $\bar{g}_{\mathrm{i}}(t)$ به ازای $i \geq 1$ به‌صورت بازگشتی مطابق قضیهٔ ۱ به‌دست می‌آیند.

قضیه زیر همگرایی یکنواخت سری‌های به‌دست آمده در (۳۲) و (۳۳) به پاسخ بهینه مسالهٔ کنترل بهینهٔ غیرخطی مرتبه کسری (۱۰) و (۱۱) را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲: (آنالیز همگرایی) فرض کنید دنباله های $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$، $\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\begin{cases} x_k(t) \triangleq \sum_{i=1}^{k} g_i(t), \\ \lambda_k(t) \triangleq \sum_{i=1}^{k} \bar{g}_i(t), \\ u_k(t) \triangleq -R^{-1}G^T(x_k(t))\lambda_k(t). \end{cases} \quad (۳۴)$$

آنگاه دنباله‌های $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ بطور یکنواخت به‌ترتیب به $x^*(t)$ و $u^*(t)$ همگرا می‌شوند که $x^*(t)$ و $u^*(t)$ پاسخ بهینهٔ مسالهٔ کنترل بهینهٔ غیرخطی مرتبه کسری (۱۰) و (۱۱) می‌باشند.

اثبات: این قضیه در مرجع [۲۹] اثبات شده است.

توجه ۱: برای مساله کنترل بهینه کسری با وضعیت نهایی آزاد، روش سری مودال مشابه وضعیت نهایی ثابت قابل استفاده می‌باشد، با این تفاوت که شرایط مرزی (۳۱) به شرایط (۳۵) تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} g_1(t_0) = x_0, \\ \bar{g}_1(t_f) = S g_1(t_f), \\ g_i(t_0) = 0, \\ \bar{g}_i(t_f) = S g_i(t_f), \end{cases} \quad i \geq 2. \quad (۳۵)$$

۴-۱ فرموله‌بندی برنامه‌ریزی خطی جهت حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ کسری خطی نامتغیر با زمان

همانطور که در مباحث بخش قبل مطرح شد پاسخ عددی مسالهٔ مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی (۱۹) بر اساس محاسبه پاسخ بازگشتی تنها دنباله‌ای از مسایل مقدار مرزی مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان به‌دست می‌آید. در این بخش، فرموله‌بندی برنامه‌ریزی خطی را جهت محاسبه پاسخ مساله مقدار مرزی مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان ارایه می‌دهیم. جهت انجام این امر، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t) = A_{10} g_i(t) + A_{01}\bar{g}_i(t) \\ \qquad + Z_i(t), \\ {}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t) = \bar{A}_{10} g_i(t) + \bar{A}_{01}\bar{g}_i(t) \\ \qquad + \bar{Z}_i(t), \end{cases} \quad (۳۶)$$

که A_{10}، A_{01}، $\bar{A}_{10}$ و $\bar{A}_{01}$ ضرایب معلوم از معادله (۲۰) بوده و جملات غیرهمگن $Z_i(t)$ و $\bar{Z}_i(t)$ نیز در معادلهٔ (۲۹) داده شده است. همچنین شرایط مرزی جهت مساله با وضعیت نهایی ثابت، مشابه رابطه (۳۱) در نظر گرفته شده است. توجه اینکه نتایج حاصله در این بخش می‌تواند جهت حل مساله با وضعیت نهایی آزاد همانگونه که در ادامه بیان خواهد شد استفاده شود. توابع G_i و $\bar{G}_i$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} G_i: \mathbb{R}^{3n+1} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ G_i\left({}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t), g_i(t), \bar{g}_i(t), t\right) \triangleq \\ \left\| \begin{matrix} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t) - A_{10} g_i(t) \\ - A_{01}\bar{g}_i(t) - Z_i(t) \end{matrix} \right\|_1, \end{cases} \quad (۳۷)$$

$$\begin{cases} \bar{G}_i: \mathbb{R}^{3n+1} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \bar{G}_i\left({}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t), g_i(t), \bar{g}_i(t), t\right) \triangleq \\ \left\| \begin{matrix} {}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t) - \bar{A}_{10} g_i(t) \\ - \bar{A}_{01}\bar{g}_i(t) - \bar{Z}_i(t) \end{matrix} \right\|_1, \end{cases} \quad (۳۸)$$

که $\|.\|_1$ نرم L_1 در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. حال مساله تغییراتی زیر را در حساب تغییرات در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min \tilde{J}_i = \int_{t_0}^{t_f} \left(G_i\begin{pmatrix} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t) \\ , g_i(t) \\ , \bar{g}_i(t), t \end{pmatrix} + \bar{G}_i\begin{pmatrix} {}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t) \\ , g_i(t) \\ , \bar{g}_i(t), t \end{pmatrix} \right) dt, \\ s.t. \\ g_1(t_0) = x_0, g_1(t_f) = x_f, \\ g_i(t_0) = 0, g_i(t_f) = 0, i \geq 2, \\ g_i(t) \in \mathbb{R}^n, \bar{g}_i(t) \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in [t_0, t_f]. \end{cases} \quad (۳۹)$$

با توجه به لم ۴-۱، که در ادامه بیان و اثبات می‌کنیم، این مساله معادل با مساله اصلی (۳۶) می‌باشد.

لم ۴-۱: مساله (۳۶) با شرایط مرزی (۳۱) دارای جواب است اگر و تنها اگر مساله تغییراتی (۳۹) دارای پاسخ بهینه با مقدار تابع هدف صفر باشد.

اثبات: بخش "تنها اگر" کاملاً واضح است. جهت بخش "اگر"، فرض کنید $(g_i^*(.), \bar{g}_i^*(.))$ پاسخ بهینه مساله (۳۹) با مقدار تابع هدف متناظر صفر باشد،یعنی

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(G_i\left({}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t), g_i(t), \bar{g}_i(t), t\right) + \bar{G}_i\left({}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t), g_i(t), \bar{g}_i(t), t\right) \right) dt = 0.$$

با توجه به اینکه G_i و $\bar{G}_i$ توابع پیوسته حقیقی مقدار نامنفی می‌باشند تقریبا در تمامی بازه زمانی $[t_0, t_f]$ می‌توان نوشت:

$$G_i\left({}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i(t), g_i(t), \bar{g}_i(t), t\right) = 0$$ و

$$\bar{G}_i\left({}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i(t), g_i(t), \bar{g}_i(t), t\right) = 0$$ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} g_i^*(t) = A_{10} g_i^*(t) + A_{01}\bar{g}_i^*(t) \\ \qquad + Z_i^*(t), \\ {}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} \bar{g}_i^*(t) = \bar{A}_{10} g_i^*(t) + \bar{A}_{01}\bar{g}_i^*(t) \\ \qquad + \bar{Z}_i^*(t), \end{cases} \quad (۴۰)$$

و

$$\begin{cases} g_1^*(t_0) = x_0, \\ g_1^*(t_f) = x_f, \end{cases} \text{و} \begin{cases} g_i^*(t_0) = 0, \\ g_i^*(t_f) = 0, \end{cases} \quad i \geq 2, \quad (۴۱)$$

یعنی $(g_i^*(.), \bar{g}_i^*(.))$ پاسخ مساله (۳۶) در بازه زمانی $[t_0, t_f]$ بوده و اثبات کامل است.

برای محاسبه پاسخ مساله تغییراتی (۳۹)، روشی بر پایه گسسته‌سازی را در بخش بعد ارائه می‌دهیم:

۴-۱-۱- گسسته سازی

جهت به‌دست آوردن پاسخ مسالهٔ بهینه‌سازی (۳۹)، بازهٔ زمانی مورد نظر را به N زیر بازهٔ مساوی تقسیم نموده و گره‌ها را به‌صورت $0,1,\dots,N$ نامگذاری می‌کنیم که N عدد مثبت دلخواهی می‌باشد. اندازهٔ هر زیر بازه به‌صورت $h_N = \frac{t_f - t_0}{N}$ محاسبه شده و زمان نیز در گرهٔ j-ام به‌صورت $t_j = t_0 + j h_N$ است. تعریف کنید:

$$\begin{cases} g_{i,j} \triangleq g_i(t_j), & j=0,1,\dots,N,\\ \bar g_{i,j} \triangleq \bar g_i(t_j), & j=0,1,\dots,N,\\ Z_{i,j} \triangleq Z_i(t_j), & j=0,1,\dots,N,\\ \bar Z_{i,j} \triangleq \bar Z_i(t_j), & j=0,1,\dots,N,\\ {}_{t_0}D_t^\alpha g_{i,j} \triangleq {}_{t_0}D_t^\alpha g_i(t)\big|_{t=t_j}, & \\ \quad ,j=0,1,\dots,N, & \\ {}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_{i,j} \triangleq {}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_i(t)\big|_{t=t_j}, & \\ \quad ,j=0,1,\dots,N. & \end{cases} \tag{۴۲}$$

بر اساس تقریب مرتبهٔ اوّل گرونوالد- لتنیکف مشتقات کسری راست و چپ ریمان-لیوویل [۳۱-۳۲] و همچنین رابطه (۹)، عبارات ${}_{t_0}D_t^\alpha g_{i,j}$ و ${}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_{i,j}$ به‌ترتیب با روابط (۴۳) و (۴۴) تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha g_{i,j} &\cong h_N^{-\alpha}\sum_{k=0}^{j} w_k^\alpha g_{i,j-k},\\ &\qquad j=1,\dots,N, \end{aligned} \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned} &{}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_{i,j}\\ &\cong h_N^{-\alpha}\sum_{k=0}^{N-j} w_k^\alpha \bar g_{i,j+k}\\ &-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\bar g_{i,N}}{\left(t_f-t_0-jh_N\right)^\alpha},\\ &\qquad j=0,1,\dots,N-1, \end{aligned} \tag{۴۴}$$

که $w_k^\alpha = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$. هدف، یافتن مقادیر $g_{i,1},\dots,g_{i,N-1}$ و $\bar g_{i,0},\bar g_{i,1}\dots,\bar g_{i,N}$ از توابع نامعلوم $g_i(t)$ و $\bar g_i(t)$ در نقاط $t_j: j=0,1,\dots,N$ می‌باشد. قابل توجه اینکه در مساله با وضعیت نهایی ثابت، مقادیر $g_{i,0}$ و $g_{i,N}$ معلوم می‌باشند. در این بخش تابعی $\tilde J_i$ در معادله (۳۹) را با استفاده از قاعده مستطیلی در نقاط گره $t_j: j=0,1,\dots,N$ گسسته می‌نمایم. بنابراین با به‌کارگیری قاعده مستطیلی داریم:

$$\begin{aligned} &\tilde J_i\\ &=\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} G_i\begin{pmatrix} {}_{t_0}D_t^\alpha g_i(t), g_i(t)\\ ,\bar g_i(t), t\end{pmatrix}dt\\ &+\sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \bar G_i\begin{pmatrix} {}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_i(t), g_i(t),\\ \bar g_i(t), t\end{pmatrix}dt\\ &\cong \sum_{j=1}^{N} h_N G_i\left({}_{t_0}D_t^\alpha g_{i,j}, g_{i,j}, \bar g_{i,j}, t_j\right)\\ &+\sum_{j=0}^{N-1} h_N \bar G_i\left({}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_{i,j}, g_{i,j}, \bar g_{i,j}, t_j\right). \end{aligned} \tag{۴۵}$$

در نهایت، با توجه به مباحث فوق، مساله تغییراتی (۳۹) به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\begin{cases} \min \tilde J_i \cong h_N\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} G_i\begin{pmatrix}{}_{t_0}D_t^\alpha g_{i,j}\\ ,g_{i,j}\\ ,\bar g_{i,j}, t_j\end{pmatrix}\\ \displaystyle+\sum_{j=0}^{N-1}\bar G_i\begin{pmatrix}{}^c_tD^\alpha_{t_f}\bar g_{i,j}\\ ,g_{i,j}\\ ,\bar g_{i,j}, t_j\end{pmatrix}\end{array}\right),\\ s.t.\\ g_{1,0}=x_0, g_{1,N}=x_f,\\ g_{i,0}=0, g_{i,N}=0, \qquad i\ge 2,\\ g_{i,j}\in\mathbb{R}^n, \bar g_{i,j}\in\mathbb{R}^n, \quad j=0,1,\dots,N. \end{cases} \tag{۴۶}$$

با جایگذاری G_i و $\bar G_i$ از معادلات (۳۷) و (۳۸) در معادله (۴۶) داریم:

$$\begin{cases} \min \tilde J_i \cong h_N\\ .\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left\|\begin{array}{c} h_N^{-\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{j} w_k^\alpha g_{i,j-k}\\ -A_{10}g_{i,j}-A_{01}\bar g_{i,j}\\ -Z_{i,j}\end{array}\right\|_1\\ \displaystyle+\sum_{j=0}^{N-1}\left\|\begin{array}{c} h_N^{-\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-j} w_k^\alpha \bar g_{i,j+k}\\ -\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\\ .\dfrac{\bar g_{i,N}}{\left(t_f-t_0-jh_N\right)^\alpha}\\ -\bar A_{10}g_{i,j}-\bar A_{01}\bar g_{i,j}\\ -\bar Z_{i,j}\end{array}\right\|_1\end{array}\right),\\ s.t.\\ g_{1,0}=x_0, g_{1,N}=x_f,\\ g_{i,0}=0, g_{i,N}=0, \qquad i\ge 2,\\ g_{i,j}\in\mathbb{R}^n, \bar g_{i,j}\in\mathbb{R}^n, \quad j=0,1,\dots,N. \end{cases} \tag{۴۷}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود مساله (۴۷) یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی[1] بوده که در اکثر حالات محاسبه پاسخ آن بسیار مشکل است. برای غلبه بر این مشکل، انتقال جدیدی در بخش بعد ارایه می‌گردد که مساله برنامه‌ریزی غیرخطی را به مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کند.

۴-۱-۲- فرموله بندی برنامه ریزی خطی مساله تغییراتی

در این بخش انتقال جدیدی را معرفی می‌کنیم که مساله برنامه‌ریزی غیرخطی (۴۷) را به مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کند. به‌این منظور، لم۴-۲ را بیان و اثبات می‌کنیم:

لم ۴-۲: فرض کنید $f\in\mathbb{R}$ عددی حقیقی باشد. آنگاه دو عدد حقیقی نامنفی $v\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ و $w\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ وجود دارند به‌طوریکه $f=v-w$، $|f|=v+w$ و $v.w=0$ است.

اثبات: v و w را به‌صورت $v\triangleq max\{f,0\}\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ و $w\triangleq -min\{f,0\}\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ تعریف می‌کنیم. دو حالت متفاوت $f\ge 0$ و $f<0$ را در نظر می‌گیریم. در حالت اول $f\ge 0$ داریم:

$$\begin{cases} v=max\{f,0\}=f,\\ w=-min\{f,0\}=0. \end{cases} \tag{۴۸}$$

[1] Nonlinear programming

از آنجایی که $f \geq 0$، با استفاده از معادله (۴۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v.w = f \times 0 = 0, \\ v - w = f - 0 = f, \\ v + w = f + 0 = f = |f|. \end{cases} \tag{۴۹}$$

برای حالت دوم، هنگامیکه $f < 0$ داریم:

$$\begin{cases} v = max\{f, 0\} = 0, \\ w = -min\{f, 0\} = -f. \end{cases} \tag{۵۰}$$

چون $f < 0$، با استفاده از معادله(۵۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v.w = 0 \times (-f) = 0, \\ v - w = 0 - (-f) = f, \\ v + w = 0 - f = -f = |f|. \end{cases} \tag{۵۱}$$

بنابراین اثبات کامل است.

به منظور تبدیل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی (۴۷) به یک مساله برنامه‌ریزی خطی با استفاده از لم ۴-۲، تعریف می‌کنیم:

$$v_{i,j,r} \triangleq max\{l_{i,j,r}, 0\}, \qquad j = 1,2, \dots, N, \tag{۵۲}$$

$$w_{i,j,r} \triangleq -min\{l_{i,j,r}, 0\}, \qquad j = 1,2, \dots, N, \tag{۵۳}$$

$$\bar{v}_{i,j,r} \triangleq max\{\bar{l}_{i,j,r}, 0\}, \qquad j = 1,2, \dots, N, \tag{۵۴}$$

$$\bar{w}_{i,j,r} \triangleq -min\{\bar{l}_{i,j,r}, 0\}, \qquad j = 1,2, \dots, N, \tag{۵۵}$$

که $l_{i,j,r}$ و $\bar{l}_{i,j,r}$ به‌ترتیب r-امین عنصر از بردارهای $l_{i,j}$ و $\bar{l}_{i,j}$ بوده و $l_{i,j}$ و $\bar{l}_{i,j}$ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$l_{i,j} \triangleq h_N^{-\alpha} \sum_{k=0}^{j} w_k^{\alpha} g_{i,j-k} - A_{10} g_{i,j} - A_{01} \bar{g}_{i,j} - Z_{i,j}, \tag{۵۶}$$

$$\bar{l}_{i,j} \triangleq h_N^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N-j} w_k^{\alpha} \bar{g}_{i,j-k} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\bar{g}_{i,N}}{\left(t_f - t_0 - jh_N\right)^{\alpha}} - \bar{A}_{10} g_{i,j} - \bar{A}_{01} \bar{g}_{i,j} - \bar{Z}_{i,j}. \tag{۵۷}$$

بنابراین مطابق با لم ۴-۲، مساله (۴۷) به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{cases} min\, \tilde{J}_i \cong \sum_{r=1}^{n} \left(\begin{array}{c} h_N \sum_{j=1}^{N} \begin{pmatrix} v_{i,j,r} \\ + \\ w_{i,j,r} \end{pmatrix} \\ +h_N \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \bar{v}_{i,j,r} \\ + \\ \bar{w}_{i,j,r} \end{pmatrix} \end{array} \right), \\ s.t. \\ v_{i,j,r} - w_{i,j,r} = l_{i,j,r}, j = 1,2, \dots, N, \\ \bar{v}_{i,j,r} - \bar{w}_{i,j,r} = \bar{l}_{i,j,r}, \quad j = 0,1, \dots, N-1, \\ l_{i,j} = h_N^{-\alpha} \sum_{k=0}^{j} w_k^{\alpha} g_{i,j-k} - A_{10} g_{i,j} - A_{01} \bar{g}_{i,j} - Z_{i,j}, j = 1,2, \dots, N, \\ \bar{l}_{i,j} = h_N^{-\alpha} \sum_{k=0}^{N-j} w_k^{\alpha} \bar{g}_{i,j+k} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\bar{g}_{i,N}}{\left(t_f - t_0 - jh_N\right)^{\alpha}} - \bar{A}_{10} g_{i,j} - \bar{A}_{01} \bar{g}_{i,j} - \bar{Z}_{i,j}, \quad j = 0,1, \dots, N-1, \\ g_{1,0} = x_0, g_{1,N} = x_f, \\ g_{i,0} = 0, g_{i,N} = 0, \quad i \geq 2, \\ v_{i,j,r}, w_{i,j,r} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, j = 1,2, \dots, N, \\ \bar{v}_{i,j,r}, \bar{w}_{i,j,r} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad j = 0,1, \dots, N-1, \\ g_{i,j} \in \mathbb{R}^n, \bar{g}_{i,j} \in \mathbb{R}^n, j = 0,1, \dots, N, \\ l_{i,j} \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1,2, \dots, N, \\ \bar{l}_{i,j} \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0,1, \dots, N-1. \end{cases} \tag{۵۸}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود مساله (۵۸) یک مساله برنامه‌ریزی خطی بوده که به آسانی و با روش‌های گوناگون حل مسایل برنامه‌ریزی خطی قابل حل خواهد بود. با محاسبه پاسخ مساله برنامه‌ریزی خطی (۵۸)، توابع $g_i(t)$ و $\bar{g}_i(t)$ در نقاط $t_j: j = 0,1, \dots, N$ مشخص می‌شوند. بنابراین می‌توان پاسخ‌های تقریبی $g_i(t)$ و $\bar{g}_i(t)$ را به‌صورت توابع افاین تکه‌ای[1] مطابق با روابط (۵۹) و (۶۰) ساخت:

$$g_i(t) = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j}}{t_{j+1} - t_j} \left(t - t_j\right) + g_{i,j}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad j = 0,1,2, \dots, N-1, \tag{۵۹}$$

$$\bar{g}_i(t) = \frac{\bar{g}_{i,j+1} - \bar{g}_{i,j}}{t_{j+1} - t_j} \left(t - t_j\right) + \bar{g}_{i,j}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad j = 0,1,2, \dots, N-1. \tag{۶۰}$$

در نهایت، مطابق با مباحث مطرح شده فوق، تئوری زیر بیان می‌شود که نتیجه اصلی این مقاله می‌باشد:

تئوری ۴-۳: پاسخ مساله کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری (۱۰) و (۱۱) توسط معادلات (۳۲) و (۳۳) بیان می‌شود که $g_i(t)$ و $\bar{g}_i(t)$

[1] Piecewise affine

برای تمام زمان‌های متعلق به بازه زمانی $[t_0, t_f]$ تنها توسط حل بازگشتی دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی (۵۸) و با استفاده از معادلات (۵۹) و (۶۰) قابل دستیابی است.

توجه ۴-۲: مساله (۵۸) فرموله‌بندی برنامه‌ریزی خطی جهت مساله (۳۶) با شرایط مرزی (۳۱) می‌باشد. جهت حل مساله در حالت وضعیت نهایی آزاد، که شرایط مرزی آن در رابطه (۳۵) داده شده است، فرموله-بندی برنامه‌ریزی خطی (۵۸) قابل به‌کارگیری است با این تفاوت که محدودیت های "$g_{1,N} = x_f$ " و " $g_{i,N} = 0, i \geq 2$" با "$\bar{g}_{i,N} = Sg_{i,N}, i \geq 1$" جایگزین می‌شوند.

۴-۲ استراتژی طراحی کنترل زیر- بهینه [۲۹]

قانون کنترل و مسیر بهینهٔ داده شده توسط معادلات (۳۲) و (۳۳) به فرم سری بوده و لذا به‌کارگیری آنها به فرم (۳۲) و (۳۳) غیر ممکن است. بنابراین، در کاربردهای عملی، قانون کنترل و مسیر حالت زیر- بهینه را با جایگزینی ∞ در (۳۲) و (۳۳) با یک عدد صحیح مثبت محدود M در نظر می‌گیریم. بنابراین برای زوج کنترل- مسیر زیر- بهینهٔ مرتبه M-ام که به‌صورت $\left(x^{(M)}(t), u^{(M)}(t)\right)$ نمایش داده می‌شود داریم:

$$u^{(M)}(t) = -R^{-1}G^T\left(\sum_{i=1}^{M} g_i(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{M} \bar{g}_i(t)\right), \quad (۶۱)$$

$$x^{(M)}(t) = \sum_{i=1}^{M} g_i(t). \quad (۶۲)$$

عدد صحیح M در عبارات (۶۱) و (۶۲) عموماً بر اساس دقت مورد نیاز در حل مساله کنترل بهینه به‌دست می‌آید. برای مثال، اگر به ازای ثابت-های مثبت از پیش تعیین شدهٔ به اندازه کافی کوچک $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ شرایط زیر تواماً برآورده شوند، کنترل و مسیر زیر- بهینهٔ مرتبه M-ام در عبارات (۶۱) و (۶۲) دقت مورد نظر را خواهند داشت:

$$\left|\frac{J^{(M)} - J^{(M-1)}}{J^{(M)}}\right| < \delta_1, \quad (۶۳)$$

$$\left\|x^{(M)}(t_f) - x_f\right\| < \delta_2, \quad (۶۴)$$

که $\|.\|$ مبین نرم مناسب در فضای $\mathbb{R}^n$ بوده و

$$J^{(M)} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\left(x^{(M)}(t)\right)^T Qx^{(M)}(t) + \left(u^{(M)}(t)\right)^T Ru^{(M)}(t)\right)dt, \quad (۶۵)$$

است.

در ادامه جهت پیاده‌سازی روش پیشنهادی و به‌دست آوردن یک قانون کنترل زیر- بهینهٔ به اندازه کافی دقیق، الگوریتم تکراری زیر را ارایه می دهیم:

الگوریتم: طراحی کنترل و مسیر زیر- بهینه:

گام اول: جملات $g_1(t)$ و $\bar{g}_1(t)$ را از مساله برنامه‌ریزی خطی (۵۸) و با استفاده از معادلات (۵۹) و (۶۰) به‌دست آورید. سپس $J^{(1)}$ را مطابق با عبارت (۶۵) محاسبه کنید.

گام دوم: اندیس تکرار i را برابر دو قرار دهید.

گام سوم: جملات مرتبهٔ i-ام $g_i(t)$ و $\bar{g}_i(t)$ را از مساله برنامه‌ریزی خطی (۵۸) و با استفاده از معادلات (۵۹) و (۶۰) تعیین کنید.

گام چهارم: مقدار M را برابر i قرار داده و $u^{(M)}(t)$ و $x^{(M)}(t)$ را با استفاده از عبارات (۶۱) و (۶۲) تعیین کنید. سپس $J^{(M)}$ را بر اساس رابطهٔ (۶۵) محاسبه کنید.

گام پنجم: اگر شرایط پایان پذیری (۶۳) و (۶۴) برای ثابت‌های مثبت از پیش تعیین شده δ_1 و δ_2 تواماً برقرار هستند، به گام ششم بروید. در غیر اینصورت، به اندیس تکرار i یک واحد افزوده و به گام سوم بروید.

گام ششم: الگوریتم را متوقف سازید. قانون کنترل زیر- بهینهٔ $u^{(M)}(t)$ و مسیر حالت $x^{(M)}(t)$ به اندازهٔ کافی دقیق هستند.

توجه۴-۳: در مساله کنترل بهینه کسری با وضعیت نهایی آزاد، تنها شرط پایان پذیری (۶۳) برای توقف الگوریتم استفاده خواهد شد.

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، با استفاده از مثال‌های عددی، به بررسی قابلیت‌های روش پیشنهادی از جمله سادگی و دقت بالای آن در حل مساله کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری با افق زمانی متناهی می‌پردازیم. برای مثال-های ارایه شده، نتایج عددی به‌دست آمده از تکنیک پیشنهادی با نتایج موجود در مقالات مقایسه شده است.

مثال ۱: سیستم غیرخطی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha}x(t) = 0.5x^2(t)\sin\left(x(t)\right) \\ \qquad +u(t), \qquad t\epsilon[0,1], \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = 0.5. \end{cases} \quad (۶۶)$$

هدف، یافتن کنترل بهینهٔ $u^*(t)$ است که معیار عملکردی زیر را با توجه به سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۶۶) حداقل نماید:

$$J = \int_0^1 u^2(t)dt, \quad (۶۷)$$

بر اساس اصل حداقل‌یابی پونتریاگین، مسالهٔ مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی که از شرایط بهینگی ارایه شده در رابطهٔ (۱۲) حاصل می‌شود از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha}x(t) = 0.5x^2(t)\sin\left(x(t)\right) \\ \qquad -0.5\lambda(t), \\ {}_t^CD_{t_f}^{\alpha}\lambda(t) = \lambda(t)x(t)\sin\left(x(t)\right) \\ \qquad +0.5\lambda(t)x^2(t)cos(x(t)), \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = 0.5, \end{cases} \quad (۶۸)$$

و قانون کنترل بهینه نیز به‌صورت رابطه (۶۹) می‌باشد:

$$u^*(t) = -0.5\lambda(t). \quad (۶۹)$$

بر اساس روش پیشنهاد شده در بخش ۴، مسالهٔ کنترل بهینهٔ غیرخطی مرتبه کسری به دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود. مطابق با الگوریتم پیشنهادی در بخش ۴-۲ جهت یافتن قانون کنترل و مسیر حالت زیر- بهینه ، ثابت‌های پایان‌پذیری $\delta_1 = 2 \times 10^{-3}$ و $\delta_2 = 1 \times 10^{-5}$ را در حالت $\alpha = 0.9$ به‌کار می‌گیریم. در این

حالت، همگرایی بعد از پنج تکرار از الگوریتم مربوطه حاصل می‌شود. یعنی داریم:

$$\left|\frac{J^{(5)}-J^{(4)}}{J^{(4)}}\right| = 1.9881 \times 10^{-3} < \delta_1, \qquad (۷۰)$$
$$\left|x^{(5)}(1)-0.5\right| = 2.283 \times 10^{-6} < \delta_2.$$

نتایج شبیه سازی الگوریتم پیشنهادی در تکرارهای مختلف در جدول ۱ قابل مشاهده هستند. همانگونه که جدول ۱ نشان می دهد، الگوریتم پیشنهادی سرعت همگرایی نسبتاً سریعی داشته و خطا نیز با افزایش تکرارهای الگوریتم کاهش می یابد.

جدول ۱: نتایج شبیه‌سازی روش سری مودال توسعه یافته در تکرارهای مختلف به ازای $\alpha = 0.9$ (مثال ۱).

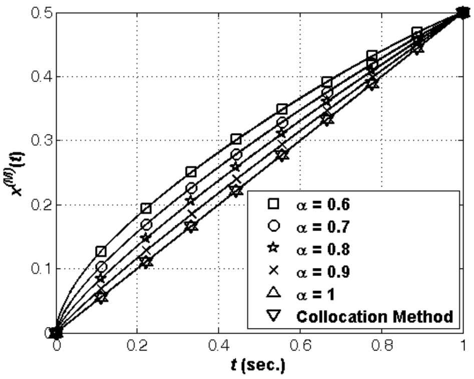
اندیس تکرار (i)	مقدار تابعی عملکرد $(J^{(i)})$	$\left\|\frac{J^{(i)}-J^{(i-1)}}{J^{(i)}}\right\|$	$\left\|x^{(M)}(t_f)-x_f\right\|$
1	0.2312513	-	4.8985×10^{-2}
2	0.2312513	0	4.8985×10^{-2}
3	0.2155428	7.2878×10^{-2}	2.7380×10^{-4}
4	0.2155428	0	2.7380×10^{-4}
5	0.2159744	1.9881×10^{-3}	2.2831×10^{-6}

در مراجع [۲۹] و[۳۸-۳۹]، مسالهٔ کنترل بهینه کلاسیک (۶۷-۶۶) به ازای $\alpha = 1$ حل شده است. جدول ۲ به مقایسهٔ نتایج شبیه سازی به‌دست آمده با روش سری مودال، روش تئوری اندازه و روش تکرار تغییرات[1] در حالت $\alpha = 1$ می پردازد. قابل توجه اینکه، این مثال به ازای $\alpha = 1$ در جعبه ابزار کنترل بهینه نرم افزار متلب [۳۷] نیز حل شده و مقدار تابعی عملکرد 0.23532708158021 گزارش شده است. بررسی این نتایج مبین کارایی و صحت روش سری مودال توسعه یافته جهت حل مسالهٔ کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری است.

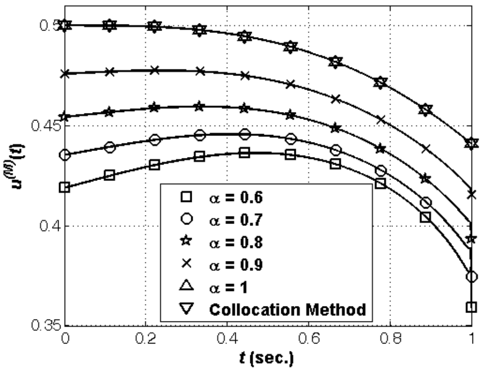
جدول ۲: مقایسه نتایج سری مودال توسعه یافته با روش سری مودال، روش تئوری اندازه و روش تکرار تغییرات (مثال ۱)

روش	مقدارتابعی عملکرد	خطای حالت نهایی
روش تئوری اندازه[۳۸]	0.24250	4.3×10^{-3}
روش تکرار تغییرات[۳۹]	0.235330	4.18×10^{-6}
روش سری مودال [۲۹] با $M = 5$	0.235327120	1.59×10^{-7}
روش پیشنهادی با $M = 5$	0.235327187	4.90×10^{-7}

شکل ۱، نمودارهای شبیه‌سازی $u^{(M)}(t)$ و شکل ۲، مسیر حالت متناظر $x^{(M)}(t)$ را به ازای $M = 5$ و مقادیر مختلف α نشان می‌دهد. همچنین در حالت $\alpha = 1$، منحنی‌های شبیه‌سازی شده با حل مستقیم مساله مقدار مرزی (۶۸) توسط روش کولوکیشن [۳۵] نیز محاسبه شده‌اند. همانطور که در شکل‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن α به مقدار یک، پاسخ‌های عددی روش پیشنهاد شده، به پاسخ به‌دست آمده توسط روش کولوکیشن میل می‌کند و به ازای $\alpha = 1$ نتایج شبیه‌سازی هر دو روش، انطباق بسیار خوبی با یکدیگر دارند.



شکل ۱: نمودارهای شبیه سازی $x^{(M)}(t)$ به ازای $M = 5$ و مقادیر مختلف α به همراه روش کولوکیشن.



شکل ۲: نمودارهای شبیه سازی $u^{(M)}(t)$ به ازای $M = 5$ و مقادیر مختلف α به همراه روش کولوکیشن.

مثال ۲- سیستم غیرخطی مرتبه کسری یک اسیلاتور واندرپول[2] [۳۷] با وضعیت نهایی آزاد را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha} x_1(t) = x_2(t), \\ {}_0D_t^{\alpha} x_2(t) = -x_1(t) \\ +x_2(t)\left(1-x_1^2(t)\right) + u(t), \\ x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = 0. \end{cases} \qquad (۷۱)$$

تابعی هزینه مربعی که می‌بایست حداقل گردد به‌صورت رابطه (۷۲) تعریف می‌شود:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\right)dt. \qquad (۷۲)$$

هدف، یافتن کنترل بهینه $u^*(t)$ جهت حداقل‌سازی رابطه (۷۲) در حضور سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۷۱) می‌باشد. پیاده‌سازی شرایط لازم بهینگی منجر به مساله مقدار مرزی مرتبه کسری غیرخطی زیر می‌گردد:

[1] Variational iteration method

[2] Van Der Pol oscillator

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha}x_1(t) = x_2(t), \qquad t \in [0,2], \\ {}_0D_t^{\alpha}x_2(t) = -x_1(t) \\ +x_2(t)\left(1 - x_1^2(t)\right) - \lambda_2(t), t \in [0,2], \\ {}_t^cD_2^{\alpha}\lambda_1(t) = x_1(t) - \lambda_2(t) \\ \qquad -2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t), t \in [0,2], \\ {}_t^cD_2^{\alpha}\lambda_2(t) = x_2(t) + \lambda_1(t) \\ \qquad +\lambda_2(t)\left(1 - x_1^2(t)\right), t \in [0,2], \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \\ \lambda_1(2) = 0, \lambda_2(2) = 0, \end{cases} \tag{۷۳}$$

و قانون کنترل بهینه نیز از رابطه (۷۴) تبعیت می‌کند:

$$u^*(t) = -\lambda_2(t). \tag{۷۴}$$

همانند مثال ۱، جهت یافتن یک قانون کنترل زیر-بهینه با دقت کافی، الگوریتم پیشنهادی در بخش ۴-۲ را با ثابت پایان پذیری $\delta_1 = 1 \times 10^{-3}$ به ازای αهای متفاوت به‌کار می‌گیریم. نتایج شبیه سازی الگوریتم پیشنهادی به ازای $\alpha = 0.75, 0.85. 0.95, 1$ و $N = 250$ در جداول ۳ الی ۶ قابل مشاهده هستند. این نتایج شامل مقدار عددی تابعی عملکرد، خطای نسبی و زمان صرف شده توسط پردازنده کامپیوتر در تکرارهای مختلف الگوریتم می‌باشد. همانگونه که در جداول ۳ الی ۶ نشان داده شده است همگرایی برای $\alpha = 0.75, 0.85. 0.95$ بعد از سه تکرار یعنی $\left|\frac{J^{(3)}-J^{(2)}}{J^{(3)}}\right| < \delta_1$ و در زمان تقریبی یک ثانیه حاصل شده است. برای $\alpha = 1$ نیز همگرایی بعد از پنج تکرار حاصل می‌شود. این نتایج مبین این مهم است که روش تکراری پیشنهادی، نرخ همگرایی نسبتاً سریعی داشته و همچنین با افزایش گام‌های تکرار، خطای نسبی نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۳: نتایج شبیه سازی روش سری مودال توسعه یافته در تکرارهای مختلف به ازای $\alpha = 0.75$ و $N = 250$ (مثال ۲).

اندیس تکرار (i)	مقدار تابعی عملکرد $(J^{(i)})$	$\left\lvert\frac{J^{(i)}-J^{(i-1)}}{J^{(i)}}\right\rvert$	زمان محاسبات (ثانیه)
1	0.09337590	-	0.6721
2	0.09192561	1.577×10^{-2}	0.8334
3	0.09192848	3.116×10^{-5}	0.9659
4	0.09192866	1.976×10^{-6}	1.2317
5	0.09192865	6.488×10^{-8}	1.4332

جدول ۴: نتایج شبیه سازی روش سری مودال توسعه یافته در تکرارهای مختلف به ازای $\alpha = 0.85$ و $N = 250$ (مثال ۲).

اندیس تکرار (i)	مقدار تابعی عملکرد $(J^{(i)})$	$\left\lvert\frac{J^{(i)}-J^{(i-1)}}{J^{(i)}}\right\rvert$	زمان محاسبات (ثانیه)
1	0.26360372	-	0.6551
2	0.25290889	4.228×10^{-2}	0.8146
3	0.25292883	7.883×10^{-5}	0.9342
4	0.25293182	1.185×10^{-5}	1.2137
5	0.25293168	5.652×10^{-7}	1.4199

جدول ۵: نتایج شبیه سازی روش سری مودال توسعه یافته در تکرارهای مختلف به ازای $\alpha = 0.95$ و $N = 250$ (مثال ۲).

اندیس تکرار (i)	مقدار تابعی عملکرد $(J^{(i)})$	$\left\lvert\frac{J^{(i)}-J^{(i-1)}}{J^{(i)}}\right\rvert$	زمان محاسبات (ثانیه)
1	0.75024728	-	0.7186
2	0.66919412	1.211×10^{-1}	0.8697
3	0.66929660	1.531×10^{-4}	0.9988
4	0.66949136	2.908×10^{-4}	1.2695
5	0.66944314	7.203×10^{-5}	1.4755

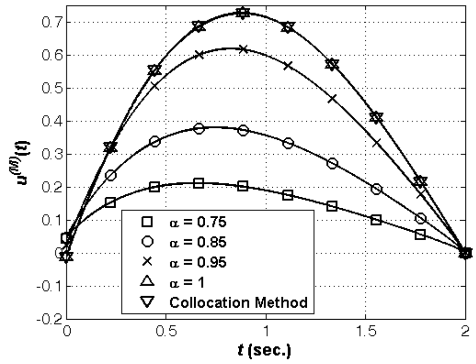
جدول ۶: نتایج شبیه سازی روش سری مودال توسعه یافته در تکرارهای مختلف به ازای $\alpha = 1$ و $N = 250$ (مثال ۲).

اندیس تکرار (i)	مقدار تابعی عملکرد $(J^{(i)})$	$\left\lvert\frac{J^{(i)}-J^{(i-1)}}{J^{(i)}}\right\rvert$	زمان محاسبات (ثانیه)
1	1.26224179	-	0.6547
2	1.04473207	2.082×10^{-1}	0.8029
3	1.04350446	1.176×10^{-3}	0.9298
4	1.04591523	2.304×10^{-3}	1.2053
5	1.04505814	8.201×10^{-4}	1.4343

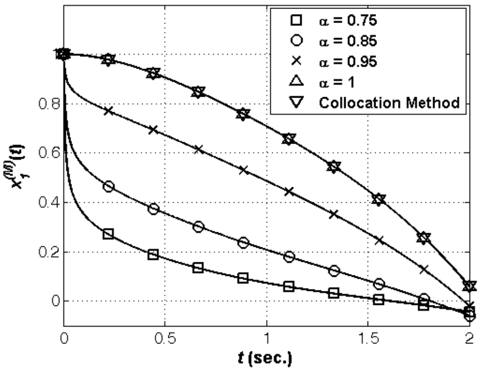
در جدول ۷، نتایج حاصل از روش پیشنهادی بعد از پنج تکرار با پاسخ به‌دست آمده از روش ارائه شده در مراجع [۱۳-۱۴] مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود مقدار عددی تابعی عملکرد نزدیکی بسیار خوبی با پاسخ مراجع [۱۳-۱۴] دارد. اما محاسبه پاسخ با الگوریتم عددی در [۱۳-۱۴] نیازمند حل دستگاه معادلات جبری و غیرخطی می‌باشد، در حالیکه جهت استخراج پاسخ با تکنیک پیشنهادی، تنها می‌بایست دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی را حل نمود. این حقیقت باعث کاهش زمان محاسبات می‌گردد. همانگونه که در جدول ۷ نشان داده شده است زمان محاسبات روش پیشنهادی بسیار کمتر از روش مراجع [۱۳-۱۴] بوده، بدون اینکه دقت قابل ملاحظه‌ای از دست رفته باشد. برای $\alpha = 1$ ، مقدار عددی تابعی عملکرد بعد از پنج تکرار از روش سری مودال 1.04780 محاسبه می‌گردد که در مقایسه با پاسخ به‌دست آمده از روش کولوکیشن [۳۵]، یعنی $J = 1.04782$، دقت لازم را داراست. بنابراین، روش سری مودال، در مقایسه با نگرش مراجع [۱۳-۱۴]، از دقت کافی برخوردار بوده و در عین حال از لحاظ محاسباتی بسیار ساده‌تر است.

جدول ۷: مقادیر تابعی عملکرد و زمان صرف شده جهت انجام محاسبات به ازای مقادیر مختلف α و $N = 250$ در روش پیشنهادی و روش اگراوال وهمکاران [۱۳-۱۴] (مثال ۲).

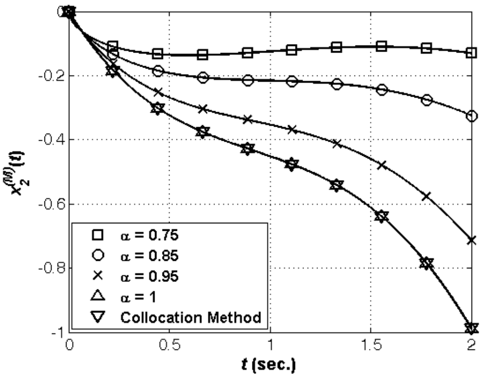
مرتبه کسری مشتق (α)	روش اگراوال و همکاران [۱۳-۱۴]		روش پیشنهادی	
	مقدار تابعی عملکرد (J)	زمان محاسبات (ثانیه)	مقدار تابعی عملکرد (J)	زمان محاسبات (ثانیه)
0.75	0.09192866	24.8486	0.09192865	1.4332
0.85	0.25293170	25.0937	0.25293168	1.4199
0.95	0.66944897	57.0427	0.66944314	1.4755
1	1.04507200	78.4039	1.04506814	1.4343



شکل ۳: نمودارهای کنترل زیر- بهینه مرتبه پنج $u^{(5)}(t)$ محاسبه شده توسط روش سری مودال به ازای مقادیر مختلف α به همراه روش کولوکیشن (مثال ۲).



شکل ۴: نمودارهای حالت زیر- بهینه مرتبه پنج $x_1^{(5)}(t)$ محاسبه شده توسط روش سری مودال به ازای مقادیر مختلف α به همراه روش کولوکیشن (مثال ۲).



شکل ۵: نمودارهای حالت زیر- بهینه مرتبه پنج $x_2^{(5)}(t)$ محاسبه شده توسط روش سری مودال به ازای مقادیر مختلف α به همراه روش کولوکیشن (مثال ۲).

۶- نتایج

در این پژوهش، فرموله‌بندی و روش جدیدی برای حل مسالهٔ کنترل بهینهٔ کلاسی از سیستم های غیرخطی مرتبه کسری با فرض مشخص بودن زمان نهایی ارایه شد. این نگرش حل بر اساس روش سری مودال و استراتژی برنامه‌ریزی خطی است. مهم‌ترین نوآوری مقاله حاضر، کاهش مساله کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری به دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. بدین منظور، ابتدا روش سری مودال جهت تبدیل مساله کنترل بهینه غیرخطی مرتبه کسری به دنباله‌ای از مسایل مقدار مرزی خطی نامتغیر بازمان توسعه داده شد. سپس دنباله به‌دست آمده با تعریف یک مساله تغییراتی در حساب تغییرات، استفاده از تکنیک گسسته‌سازی بر پایه تقریب گرونوالد- لتنیکف و معرفی یک انتقال جدید، به دنباله‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شد. با حل این دنباله از مسایل به‌دست آمده در یک ساختار بازگشتی، متغیرهای حالت و کنترل به‌صورت توابع افاین تکه‌ای به‌دست آمد. نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی، کارایی، سادگی و دقت بالای تکنیک پیاده شده را تشریح می‌کند.

مراجع

[1] F. Riewe, “Mechanics with fractional derivatives”, Physical Review E, vol. 55,no. 3, pp. 3581-3592, 1997.
[2] M. Klimek, “Stationary conservation laws for fractional differential equations with variable coefficients”, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 35, no. 31, pp. 6675-6693, 2001.
[3] V. E. Tarasov and G. M. Zaslavsky, “Fractional Ginzburg-Landau equation for fractal media”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 354, pp. 249-261, 2005.
[4] E. M. Rabei, A-W. Ajlouni, and H. B. Ghassib, “Quantization of brownian motion”, International Journal of Theoretical Physics, vol. 45, no. 9, pp. 1613-1623, 2006.
[5] D. Baleanu and T. Avkar, “Lagrangians with linear velocities within Riemann-Liouville fractional derivatives”, Nuovo Cimento B, vol. 119, no. 1, pp. 73-79, 2004.
[6] S. I. Muslih and D. Baleanu, “Hamiltonian formulation of systems with linear velocities within Riemann- Liouville fractional derivatives”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 304, no. 2, pp. 599-606, 2005.
[7] S. I. Muslih and D. Baleanu, “Formulation of Hamiltonian equations for fractional variational problems”, Czechoslovak Journal of Physics, vol. 55, no. 6, pp. 633-642, 2005.
[8] D. Baleanu, “Fractional variational principles in action”, Physica Scripta, vol. 136, pp. 014006-5, 2009.
[9] M. A. E. Herzallah and D. Baleanu, “Fractional-order Euler-Lagrange equations and formulation of Hamiltonian equations”, Nonlinear Dynamics, vol. 58, no. 1-2, pp. 385-391, 2009.
[10] O. P. Agrawal, “Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 272, no.1, pp. 368-379, 2002.
[11] O. P. Agrawal, “A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems”, Nonlinear Dynamics, vol. 38, no. 1, pp. 323-337, 2004.

[12] O. P. Agrawal, "A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 130, no. 1, 011010(pp. 1-6), 2008.

[13] O. P. Agrawal and D. Baleanu, "A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems", Journal of Vibration and Control, vol. 13, no. 9-10, pp. 1269-1281, 2007.

[14] O. P. Agrawal, O. Defterli, and D. Baleanu, "Fractional optimal control problems with several state and control variables", Journal of Vibration and Control, vol. 16, no. 13, pp. 1967-1976, 2010.

[15] D. Baleanu, O. Defteli, and O. P. Agrawal, "A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems", Journal of Vibration and Control, vol. 15, no. 4, pp. 583-597, 2009.

[16] C. Tricaud and Y. Chen, "An approximate method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form", Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, no. 5, pp. 1644-1655, 2010.

[17] J. D. Jelicic and N. Petrovacki, "Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems", Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 38, no. 6, pp. 571-581, 2009.

[18] R. K. Biswas and S. Sen, "Fractional optimal control problems: a pseudo-state-space approach", Journal of Vibration and Control, vol. 17, no. 7, pp. 1034-1041, 2011.

[19] X. W. Tangpong and O. P. Agrawal, "Fractional optimal control of continuum systems", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 131, no. 2, 021012(1-6), 2009.

[20] G. S. F. Frederico and D. F. M. Torres, "Fractional conservation laws in optimal control theory. Nonlinear Dynamics, vol. 53, no. 3, pp.215-222, 2008.

[21] A. Lotfi, S. A. Yousefi, and M. Dehghan, "Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre orthonormal basis combined with the operational matrix and the Gauss quadrature rule", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 250, pp. 143-160, 2013.

[22] R. K. Biswas and S. Sen, "Free final time fractional optimal control problems", Journal of the Franklin Institute, vol. 351, no. 2, pp. 941-951, 2014.

[23] E. Tohidi and H. Saberi Nik, "A Bessel collocation method for solving fractional optimal control problems", Applied Mathematical Modelling, vol. 39, no. 2, pp. 455-465, 2015.

[24] R. Almeida and D. F. M. Torres, "A discrete method to solve fractional optimal control problems", Nonlinear Dynamics, vol. 80, no. 4, pp. 1811-1816, 2015.

[25] N. Pariz, H. M. Shanechi, and E. Vaahedi, "Explaining and validating stressed power systems behavior using modal series", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, no. 2, pp. 778–785, 2003.

[26] H. M. Shanechi, N. Pariz, and E. Vaahedi, "General nonlinear modal representation of large scale power systems", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, no. 3, pp. 1103-1109, 2003.

[27] F. X. Wu, H. Wu, Z. X. Han, and D. Q. Gan, "Validation of power system non-linear modal analysis methods", Electric Power Systems Research, vol. 77, no. 10, pp. 1418–1424, 2007.

[28] W. Wang and X. Ma, "Transient analysis of low-voltage ride-through in three-phase grid-connected converter with LCL filter using the nonlinear modal series method", Electric Power Systems Research, vol. 105, pp. 39-50, 2013.

[29] A. Jajarmi, N. Pariz, A. V. Kamyad, and S. Effati, "A novel modal series representation approach to solve a class of nonlinear optimal control problems", International Journal of Innovative Computing Information and Control, vol. 7, no. 3, pp. 1413–1425, 2011.

[30] S. S. Sajjadi, N. Pariz, A. Karimpour, and A. Jajarmi, "An off-line NMPC strategy for continuous- time nonlinear systems using an extended modal series method", Nonlinear Dynamics, vol. 78, no. 4, pp. 2651-2674, 2014.

[31] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[32] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010

[33] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[34] R. K. Biswas, and S. Sen, "Fractional optimal control problems with specified final time", Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 6, 021009(1-6), 2011.

[35] U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, and R. D. Russel, Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, SIAM, Philadelphia, 1995.

[36] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Springer, 2010.

[37] P. E. Rutquist and M. E. Marcus, "PROPT-Matlab Optimal Control Software", Tomlab Optimization, pp. 168-170, 2010.

[38] J. E. Rubio, Control and Optimization, the Linear Treatment of Nonlinear Problems, Manchester University Press, Manchester, 1986.

[39] M. Shirazian, and S. Effati "Solving a class of nonlinear optimal control problems via He's variational iteration method", International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 10, no. 2, pp. 249-256, 2012.